Sokaságok és a Riemann-geometria elemei

Szilasi József

Debreceni Egyetem, 2010

Tartalomjegyzék

1. Sima sokaságok

Definíció. Legyen S egy topologikus tér.

(1) Egy S-en adott n-dimenziós térképen ($n \in \mathbb{N}^*$) olyan $(\mathcal{U}, u)$ párt értünk, ahol $\mathcal{U} \subset S$ nyílt halmaz, u pedig homeomorfizmusa $\mathcal{U}$-nak az $\mathbb{R}^n$ tér egy nyílt halmazára. Azt mondjuk ekkor, hogy $\mathcal{U}$ a térkép tartománya vagy egy koordináta-környezet S-en, az u homeomorfizmust pedig koordinátaleképezésként vagy koordinátarásként említjük. Az

$$u^i := e^i \circ u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

függvényeket, ahol $(e^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere, az $(\mathcal{U}, u)$ térképhez tartozó koordinátafüggvényeknek, ezek $(u^i)_{i=1}^n$ családját egy S-en adott lokális koordinátarendszernek hívjuk.

(2) Az S topologikus tér egy $(\mathcal{U}, x)$ és $(\mathcal{V}, y)$ n-dimenziós térképét C^∞-kompatibilisnak nevezzük, ha az

$$y \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

és az

$$x \circ y^{-1} : y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezések, az ún. átmenetleképezések vagy koordinátatranszformációk simák, illetve ha $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

(3) Az S topologikus tér egy n-dimenziós sima atlaszán S n-dimenziós térképeinek egy olyan $\mathcal{A}$ családját értjük, amely eleget tesz a következő két feltételnek:

$(AT)_1$ Az $\mathcal{A}$-hoz tartozó térképek tartományai lefedik S-et.

$(AT)_2$ $\mathcal{A}$ bármely két térképe C^∞-kompatibilis.

(4) Az S topologikus tér egy $\mathcal{A}$ n-dimenziós, sima atlaszát teljes vagy maximális atlasznak nevezzük, ha tartalmaz minden olyan térképet, amely $\mathcal{A}$ valamennyi tagjával C^∞-kompatibilis.
(5) Egy topologikus téren adott n-dimenziós sima struktúrán a topologikus tér egy teljes n-dimenziós sima atlaszát értjük.

1.1. Lemma. Egy topologikus tér minden n-dimenziós sima atlasza benne van egy egyértelműen meghatározott teljes atlaszban. Δ
Megjegyzés. A lemma alapján egy sima struktúra megadásához elegendő egy topologikus téren egy minimális tagszámú sima atlaszt kijelölni.

Definíció. n-dimenziós sima sokaságon olyan $(M, \mathcal{A})$ párt értünk, ahol M megszámlálható bázisú Hausdorff-tér, $\mathcal{A}$ pedig n-dimenziós sima struktúra M-en.
Megjegyzések. (1) A topológiában, speciálisan a differenciáltopológiában számos, s egymástól eltérő jelentésárnyalattal használják a sokaság fogalmát. Mi a következőkben sokaságon a definíció szerinti értelemben vett sima sokaságot értünk.
(2) $(M, \mathcal{A})$ sokaság helyett - a szokásos pontatlansággal - rendszerint M sokaságról fogunk szólni. A M sokaság térképén az M topologikus tér

olyan térképét értjük, amely az M-en kijelölt sima struktúrához tartozik.

(3) Ha $(\mathcal{U}, u)$ egy térképe az M sokaságnak, és egy $p \in M$ pont benne van $\mathcal{U}$-ban, akkor azt is mondjuk, hogy az $(\mathcal{U}, u)$ térkép <u>p-beli</u> vagy <u>p körüli</u>, és hogy $\mathcal{U}$ a p pont egy koordinátakörnyezete. Egy p-beli $(\mathcal{U}, u)$ térkép <u>p középpontú</u>, ha $u(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(4) Ha $(\mathcal{U}, u)$ térképe, $\mathcal{V}$ nyílt halmaza az M sokaságnak és $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, akkor $(\mathcal{V}, u \restriction \mathcal{V})$ szintén térképe M-nek, a sokaságok definíciójában szereplő teljességi követelményből adódóan.

<u>1.2. Elemi konstrukciók</u> (1) Legyen $(M, \mathcal{A})$ n-dimenziós sokaság. Tekintsük M-nek egy nemüres $\mathcal{U}$ nyílt részhalmazát, és legyen $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ mindazon $\mathcal{A}$-beli térképek halmaza, melyeknek tartománya benne van $\mathcal{U}$-ban. Az előző (4) megjegyzés alapján e térképek tartományai lefedik $\mathcal{U}$-t, s így $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ atlasz $\mathcal{U}$ számára. Ez az atlasz az <u>1.1.</u> lemma értelmében $\mathcal{U}$-t n-dimenziós sima sokasággá teszi. Ezt a sokaságot az M sokaság egy <u>nyílt részsokaságának</u> nevezzük. Megállapodunk abban, hogy egy sokaság nyílt részhalmazait mindig nyílt részsokaságoknak tekintjük.

(2) Legyen $(M, \mathcal{A})$ m-dimenziós, $(N, \mathcal{B})$ n-dimenziós sima sokaság. Egy $(\mathcal{U}, x) \in \mathcal{A}$ és $(\mathcal{V}, y) \in \mathcal{B}$ térképből képzett <u>szorzattérkép</u> az az $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, x \times y)$ pár, ahol

$$x \times y : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n},$$
$$(p, q) \longmapsto x \times y(p, q) := (x(p), y(q)).$$

Ellátva az $M \times N$ Descartes-szorzatot a szorzat-topológiával, az összes szorzattérképek $(m+n)$-dimenziós sima atlaszt alkotnak $M \times N$-en, amely ily módon sima sokasággá válik. Az így kapott sokaságot M és N <u>szorzatsokaságának</u> nevezzük.

A konstrukció kiterjesztése kettőnél több, de véges sok sokaságra kézenfekvő.

<u>1.3. Állítás.</u> Legyen M egy halmaz, s tegyük fel, hogy meg van adva M részhalmazainak egy $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ családja, valamint minden $i \in I$ index esetén egy $u_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektív leképezés, eleget téve a következő feltételeknek:

(1) $u_i(\mathcal{U}_i)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, minden $i \in I$ esetén.

(2) $u_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ és $u_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, bármely $(i, j) \in I \times I$ indexpár esetén.

(3) Ha $(i, j) \in I \times I$ és $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, akkor az
$$u_j \circ u_i^{-1} : u_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow u_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$
leképezés sima.

(4) Az $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ halmazcsalád egy megszámlálható részcsaládja lefedi M-et.

(5) Ha p és q különböző pontjai M-nek, akkor $\{p, q\} \subset \mathcal{U}_i$ valamely $i \in I$ indexre, vagy létezik olyan $(i, j) \in I \times I$ indexpár, hogy $p \in \mathcal{U}_i$, $q \in \mathcal{U}_j$ és $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$.

Ekkor egyértelműen létezik M-en olyan topológia és $\mathcal{A}$ sima struktúra, hogy $(M, \mathcal{A})$ n-dimenziós sima sokaság, és $(U_i, u_i) \in \mathcal{A}$, minden $i \in I$ esetén. Δ

<u>Megjegyzés.</u> A megfogalmazott állítást <u>sokaság-konstrukciós</u> állításként fogjuk idézni. Ebből kiderül, hogy a koordinátázás és az atlasz fogalmának bevezetéséhez nem szükséges topologikus térből kiindulni, és hogy ha egy halmazon kijelöltünk egy atlaszt, akkor ez „alkalmas" topológiát származtat a halmazon. Ennek bázisául - az állítás jelöléseivel - az

$$\{(u_i)^{-1}(\mathcal{V}) \subset M \mid \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n \text{ nyílt},\ i \in I\}$$

halmaz szolgál.

<u>1.4. Alapvető példák</u> (1) <u>Vektorterek mint sokaságok</u> Legyen V n-dimenziós, nemtriviális valós vektortér. Tetszőleges V-n megadott norma topológiát származtat, és ez a topológia független a norma választásától; V-t ellátjuk ezzel a természetes topológiával. Ekkor V homeomorf az $\mathbb{R}^n$ valós vektortérrel (amelyen szintén a természetes topológiát tekintjük); homeomorfizmust ad meg V és $\mathbb{R}^n$ között minden lineáris izomorfizmus. Ha tehát $x : V \to \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus, akkor akkor (V, x) egytagú atlasza V-nek, amely <u>1.1.</u> értelmében egyértelműen teljes atlasszá bővíthető. Így módon V n-dimenziós sima sokasággá válik. Ennek a sokaságnak minden olyan (V, y) pár térképe, ahol $y : V \to \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus, ugyanis az $y \circ x^{-1}$ és az $x \circ y^{-1}$ átmenetleképezések lineáris izomorfizmusai $\mathbb{R}^n$-nek, és így

simák. Speciálisan az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér is n-dimenziós sima sokaság az $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n}) = (\mathbb{R}^n, (e^i)_{i=1}^n)$ egytagú atlasz által meghatározott sima struktúrával, amelyet $\mathbb{R}^n$ <u>természetes sima struktúrájának</u> mondunk.

(2) <u>Az általános lineáris csoport</u> Tekintsük az $n\times n$-es valós mátrixok $M_n(\mathbb{R})$ valós vektorterét, és legyen

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}.$$

$GL_n(\mathbb{R})$ a mátrixszorzási művelettel csoport, ezt nevezzük (valós) <u>általános lineáris csoportnak</u>. Az $M^n(\mathbb{R})$ vektortér az

$$A = (\alpha^i_j) \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto (\alpha^1_1, \dots, \alpha^1_n, \alpha^2_1, \dots, \alpha^2_n, \dots, \alpha^n_1, \dots, \alpha^n_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

leképezés révén természetes módon azonosítható az $\mathbb{R}^{n^2}$ vektortérrel. Így $GL_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{n^2}$ egy részhalmazának tekinthető; belátjuk, hogy <u>$GL_n(\mathbb{R})$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{n^2}$-nek.</u> Tekintsük a

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \det A$$

determinánsfüggvényt. Ez folytonos, hiszen polinomfüggvény, s ezért a

$$\mathcal{K} := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0 \} = \det^{-1}\{0\}$$

halmaz, mint a $\{0\} \subset \mathbb{R}$ egyelemű, és ezért zárt halmaz őskepe, zárt részhalmaza $\mathbb{R}^{n^2}$-nek. Így $GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{K} = \mathbb{R}^{n^2} \setminus \mathcal{K}$ valóban nyílt halmaz. $\mathbb{R}^{n^2}$ az (1)-ben leírt természetes sima struktúrával n^2-dimenziós sima sokaság; $GL_n(\mathbb{R})$ az <u>1.2.(1)</u>-ben mondottak szerint ennek nyílt részsokasága, s mint ilyen, maga is n^2-dimenziós sima sokaság.

(3) <u>Gömbök</u> Legyen n pozitív egész. Az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér <u>egységgömbfelülete</u> (<u>egységgömbje</u>, <u>gömbje</u>)

$$\mathbb{S}^n := \{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = 1 \},$$

ahol a $\| \ \|$ az euklideszi norma. $\mathbb{S}^n$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér természetes topológiája által indukált topológiával megszámlálható bázisú Hausdorff-tér. (Ez a Hausdorff-tér ráadásul kompakt.)

Megadunk S^n számára egy kéttagú atlaszt. Meggondolásaink során $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{R}^{n+1}$ alterének tekintjük az

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad a \longmapsto (a, 0)$$

beágyazás révén, $\mathbb{R}^{n+1}$-et pedig az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ szorzattérként interpretáljuk. Legyen $\underline{0} := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, és nevezzük az $E := (\underline{0}, 1) \in \mathbb{S}^n$ pontot $\mathbb{S}^n$ <u>északi pólusának</u>, a $D = (\underline{0}, -1)$ pontot pedig a <u>déli pólusának</u>. Jelölje $\mathcal{U}_+$ az $S^n \setminus \{E\}$, $\mathcal{U}_-$ az $S^n \setminus \{D\} = S^n \setminus \{-E\}$ nyílt halmazt. Az északi, ill. a déli pólusból $\mathbb{R}^n$-re való <u>sztereografikus projekción</u> az

$$u_+ : P \in \mathcal{U}_+ \longmapsto \overleftrightarrow{EP} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \in \mathbb{R}^n ,$$

ill. az

$$u_- : P \in \mathcal{U}_- \longmapsto \overleftrightarrow{DP} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \in \mathbb{R}^n$$

leképezést értjük. Ekkor

$$\boxed{u_+ (P) = \frac{1}{1 - p^{n+1}} p \;, \quad u_- (P) = \frac{1}{1 + p^{n+1}} p \;, \text{ ha } P = (p, p^{n+1})}\,.$$

Valóban, legyen $u_+(P) = (q, 0)$, $q \in \mathbb{R}^n$. Mivel $u_+(P) \in \overleftrightarrow{EP}$, van (egy és csak egy) olyan $\tau \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned}(q, 0) &= E + \tau (E - P) = (\underline{0}, 1) + \tau ((\underline{0}, 1) - (p, p^{n+1})) \\ &= (\underline{0}, 1) + \tau (-p, 1 - p^{n+1}) = (-\tau p, 1 + \tau (1 - p^{n+1}));\end{aligned}$$

innen $\tau = \dfrac{-1}{1-p^{n+1}}$, $q = -\tau p = \dfrac{1}{1-p^{n+1}} p$.

Ezzel igazoltuk az $u_+(P)$-re vonatkozó formulát. Az $u_-(P)$-re vonatkozó hasonló számolással adódik, vagy pedig abból az észrevételből, hogy $u_-(P) = -u_+(-P)$. Kiolvasható a kapott eredményekből, hogy mind u_+, mind pedig u_- folytonos. Az is világos az értelmezésükből, hogy u_+ és u_- invertálható. Az u_+^{-1} inverz hozzárendelési szabályának meghatározásához tekintünk egy $Q = (q,0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ pontot, és kiszámítjuk az $\overleftrightarrow{EQ}$ egyenes S^n-nel való metszéspontját.

$\overleftrightarrow{EQ}$-nak egy τ paraméterű

$$P = E + \tau(E - Q) = (0,1) + \tau\big((0,1)-(q,0)\big) = (-\tau q, 1+\tau)$$

pontja akkor és csak akkor illeszkedik S^n-re, ha $\|(-\tau q, 1+\tau)\| = \sqrt{\tau^2\|q\|^2 + (1+\tau)^2} = 1$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\tau = -\frac{2}{\|q\|^2+1}, \quad P = \left(\frac{2}{\|q\|^2+1} q, \frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1}\right),$$

tehát

$$\boxed{(u_+)^{-1}(Q) = \left(\frac{2}{\|q\|^2+1} q, \frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1}\right), \text{ ha } Q=(q,0)}.$$

Hasonló módon,

$$\boxed{(u_-)^{-1}(Q) = \left(\frac{2}{\|q\|^2+1} q, \frac{1-\|q\|^2}{\|q\|^2+1}\right), \text{ ha } Q=(q,0)}.$$

Kiolvasható innen, hogy mind u_+^{-1}, mind u_-^{-1} folytonos leképezés, $(\mathcal{U}_+, u_+)$ és $(\mathcal{U}_-, u_-)$ tehát térképei S^n-nek, és e térképek tartományai lefedik S^n-et. Meghatározzuk az átmenet-leképezéseket:

$$u_- \circ (u_+)^{-1} : \quad q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \longmapsto u_-\left((u_+)^{-1}(q)\right) =$$

$$= u_-\left(\frac{2}{\|q\|^2+1} q, \frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1}\right) = \frac{1}{1+\frac{\|q\|^2-1}{\|q\|^2+1}} \frac{2}{\|q\|^2+1} q$$

$$= \frac{1}{\|q\|^2} q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\},$$

s ugyanígy

$$u_+ \circ (u_-)^{-1} : \quad q \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \longmapsto \frac{1}{\|q\|^2} q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Megállapíthatjuk, hogy mindkét átmenetleképezés sima (és hogy geometriailag az S^n gömbfelület-re vonatkozó inverziót jelentenek). Így módon $(U_i, u_i)_{i \in \{+,-\}}$ n-dimenziós sima atlasz S^n számára, és így sima struktúrát határoz meg S^n-en. Ezt a sima struktúrát – amely nem függ az északi pólus megválasztásától! – S^n <u>természetes sima struktúrájának</u> nevezzük.

(4) <u>Tóruszok</u> Az előző példa szerint az $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ körvonal 1-dimenziós sokaság. Ha n tetszőleges pozitív egész, az 1.2.(2)-ben mondottak szerint képezhető a

$$T^n := S^1 \times \ldots \times S^1 \qquad (n \text{ tényező})$$

szorzatsokaság, amelyet <u>n-dimenziós tórusznak</u> nevezünk.

(5) <u>Projektív terek</u> Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, és értelmezzünk az $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ halmazon egy $\sim$ relációt a

$$p \sim q \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : q = \lambda p$$

előírással. (Itt a λ skalár szükségképpen nem-zérus.) Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalencia-osztályokat <u>projektív pontoknak</u> nevezzük, és egy $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ reprezentáns vektorral rendelkező projektív pontra az $[a]$ jelölést használjuk; tehát

$$[a] := \{ \lambda a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \}.$$

Az összes projektív pontok halmazát, vagyis az $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / _\sim$ faktorhalmazt <u>n-dimenziós valós projektív térnek</u> nevezzük és $\mathbb{R}P^n$-nel jelöljük. A

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n, \quad a \longmapsto \pi(a) := [a]$$

leképezést az $\mathbb{R}P^n$-re való <u>természetes projekciónak</u> hívjuk.

Legyen

$$\underline{\mathcal{U} \subset \mathbb{R}P^n \text{ nyílt} \iff \pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ nyílt}.}$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ez az előírás topológiát ad meg az $\mathbb{R}P^n$ valós projektív téren; az így definiált topológiát a π által indukált <u>kvóciens-topológiának</u> hívjuk. Az értelmezésből adódóan π folytonos a kvóciens-topológiára nézve. Megmutatjuk, hogy jelen esetben több is igaz: π <u>nyílt leképezés</u>, azaz tetszőleges $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ nyílt halmaz esetén a $\pi(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}P^n$ képhalmaz is nyílt. Ehhez a kvóciens-topológia definíciója értelmében azt kell ellenőriznünk, hogy a $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V})) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ őskép nyílt halmaz. Vegyük észre, hogy a $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{V}))$ halmazt azok a pontok alkotják, amelyek ekvivalensek valamely $\mathcal{V}$-beli ponttal a $\sim$ relációnál. Így

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^*} T_\lambda(V) = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}^*} \{\lambda v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in V\}.$$

Mivel tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}^*$ esetén a

$$T_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ v \longmapsto T_\lambda(v) := \lambda v$$

leképezés homeomorfizmus, a $T_\lambda(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ halmazok nyíltak, és ezért az uniójuk is nyílt halmaz.

Felhasználva a tett észrevételt, megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}P^n$ kvóciens-topológiája megszámlálható bázisú. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ topológiája – amelyet az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér természetes topológiája indukál – rendelkezik $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ megszámlálható bázissal. Mivel a π természetes projekció nyílt leképezés, $(\pi(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ nyílt halmazcsalád $\mathbb{R}P^n$-ben. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}P^n$ nyílt halmazt és egy $[a] \in \mathcal{U}$ pontot. Mivel $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nyílt halmaz, van olyan $i \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$a \in B_i \subset \pi^{-1}(\mathcal{U}).$$

Ekkor

$$[a] = \pi(a) \in \pi(B_i) \subset \mathcal{U},$$

amivel beláttuk, hogy $(\pi(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ bázisa $\mathbb{R}P^n$ topológiájának.

További munkával az is megmutatható, hogy $\mathbb{R}P^n$ topológiája Hausdorff-topológia, $\mathbb{R}P^n$ tehát megszámlálható bázisú Hausdorff-tér.

Megadunk egy n-dimenziós sima atlaszt $\mathbb{R}P^n$ számára. Tekintsük $\mathbb{R}^{n+1}$ $(e^i)_{i=1}^{n+1}$ kanonikus koordinátarendszerét, és legyen

$$\tilde{\mathcal{U}}_i := \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid e^i(a) \neq 0\};\quad i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Ekkor az $\tilde{\mathcal{U}}_i$ halmazok nyíltak, és így az

$$\mathcal{U}_i := \pi\left(\tilde{\mathcal{U}}_i\right) = \left\{ [a] \in \mathbb{R}P^n \mid e^i(a) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}P^n$$

($i \in \{1,\dots,n+1\}$) halmazok is nyíltak. Értelmezzük minden $i \in \{1,\dots,n+1\}$ indexre az

$$u_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ [a] \longmapsto u_i([a])$$

leképezést az

$$u_i([a]) := \left(\frac{\alpha^1}{\alpha^i}, \dots, \widehat{\frac{\alpha^i}{\alpha^i}}, \dots, \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^i}\right), \text{ ha } a = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n+1})$$

előírással, ahol a ^ azt jelenti, hogy az illető tag törlendő.

<u>Az u_i leképezések folytonosak.</u> Ennek indoklásaként gondoljuk meg a következőket. Az

$$u_i \circ \pi : \tilde{\mathcal{U}}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$a = (\alpha^1, \dots, \alpha^{n+1}) \longmapsto [a] \longmapsto \left(\frac{\alpha^1}{\alpha^i}, \dots, \widehat{\frac{\alpha^i}{\alpha^i}}, \dots, \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^i}\right)$$

leképezések a hozzárendelési szabályból kiolvashatóan folytonosak. Így tetszőleges $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz esetén $(u_i \circ \pi)^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ nyílt halmaz. Azonban $(u_i \circ \pi)^{-1}(\mathcal{V}) = \pi^{-1}\left(u_i^{-1}(\mathcal{V})\right)$, amiből a kvóciens-topológia definíciója alapján következik, hogy az $u_i^{-1}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}P^n$ halmaz nyílt.

Az u_i leképezések invertálhatók, inverzük – közvetlenül látható módon – az

$$u_i^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{U}_i, \ (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \longmapsto [(\alpha^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \alpha^n)]$$

leképezés. u_i^{-1} szintén folytonos, megadható ugyanis folytonos leképezések kompozíciójaként a következő módon:

$$\begin{tikzcd}
(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, dashed, "u_i^{-1}"'] & (\alpha^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \alpha^n) \in \tilde{\mathcal{U}}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, mapsto] \\
 & [(\alpha^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \alpha^n)] \in \mathcal{U}_i .
\end{tikzcd}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy az $u_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($i \in \{1,\dots,n+1\}$) leképezések <u>homeomorfizmusok</u>.

Meghatározzuk végül az átmenetleképezéseket. Ha $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$, és például $i < j$, akkor

$$u_j \circ u_i^{-1} : u_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow u_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j),$$

$$(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \longmapsto u_j\left(\left[(\alpha^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \alpha^n)\right]\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha^1}{\alpha^j}, \dots, \frac{1}{\alpha^j}, \frac{\alpha^i}{\alpha^j}, \dots, \frac{\widehat{\alpha^j}}{\alpha^j}, \dots, \frac{\alpha^n}{\alpha^j}\right),$$

amiből $u_j \circ u_i^{-1}$ simasága világos.

Mindezek alapján $(\mathcal{U}_i, u_i)_{i \in \{1, \dots, n+1\}}$ n-dimenziós sima atlaszt $\mathbb{R}P^n$ számára, így sima struktúrát származtat, amely az n-dimenziós valós projektív teret n-dimenziós sima sokasággá teszi.

2. Sima leképezések

Definíció. Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság.

(1) Azt mondjuk, hogy egy $f: M \to N$ folytonos leképezés sima leképezése M-nek N-be, ha ~~bármely $p \in M$ pont és minden p körüli $(\mathcal{U}, x)$,~~ valamint $f(p)$ körüli $(\mathcal{V}, y)$ térkép esetén az

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow y(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezés sima.

(2) Egy $f: M \to N$ leképezést diffeomorfizmusnak vagy sima izomorfizmusnak nevezünk, ha homeomorfizmus, sima, és az inverze is sima.

Jelölés. $C^\infty(M, N)$ az M sokaság N sokaságba való sima leképezéseinek halmaza; $\mathrm{Diff}(M)$ az M sokaság önmagába való diffeomorfizmusai-nak halmaza ; $C^\infty(M) := C^\infty(M,\mathbb{R})$ az M sokaságon értelmezett sima függvények halmaza (itt $\mathbb{R}$-et az 1.4.(1)-ben mondottak szerint sima sokaságnak tekintjük).

Megjegyzések. (1) Kézenfekvő és észszerű, hogy a sokaságok közötti leképezések differenciálhatóságának kérdését térképek segítségével a koordinátatérbe visszük vissza. Ahhoz azonban, hogy a megfogalmazott definíció értelmes legyen, az $y \circ f \circ x^{-1}$ leképezés értelmezési tartományának nyílt halmaznak kell lennie. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel teljesül.

Az $y \circ f \circ x^{-1}$ leképezés akkor és csak akkor van definiálva egy $a \in x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m$ pontban, ha $f(x^{-1}(a))$ beletartozik a $(\mathcal{V}, y)$ térkép tartományába. Azonban

$$f(x^{-1}(a)) \in \mathcal{V} \iff x^{-1}(a) \in f^{-1}(\mathcal{V})$$
$$\iff a \in x(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})) \quad \text{(mert az } x: \mathcal{U} \to x(\mathcal{U}) \text{ leképezés bijektív).}$$

Ily módon $y \circ f \circ x^{-1}$ értelmezési tartománya az $x(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})) \subset \mathbb{R}^m$ halmaz. Itt $\mathcal{U} \subset M$ és $\mathcal{V} \subset N$ nyílt halmaz, s mivel feltettük f folytonosságát, az $f^{-1}(\mathcal{V}) \subset M$ halmaz is nyílt. Így $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V})$ és $x(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{V}))$ szintén nyílt (az utóbbi azért, mert x homeomorfizmus).

Szólhatunk tehát az $y \circ f \circ x^{-1}$ leképezés differenciálhatóságáról.

(2) Előző meggondolásunk magyarázatot ad arra, hogy egy $f: M \to N$ leképezés simaságának értelmezésekor miért kívántuk meg

f folytonosságát. Másként is eljárhatunk azonban.
Alternatív definíció. Egy M és egy N sokaság közötti $f: M \longrightarrow N$ leképezést akkor nevezzük simának, ha minden $p \in M$ pont esetén megadható olyan p körüli $(\mathcal{U}, x)$ és $f(p)$ körüli $(\mathcal{V}, y)$ térkép, hogy $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, és az $y \circ f \circ x^{-1}$ leképezés sima leképezése $x(\mathcal{U})$-nak $\mathbb{R}^n$-be.

Egyszerűen igazolható, hogy ebben az esetben az f leképezés folytonos.

(3) A simaságra adott definícióban egy $p \in M$ pont és az $f(p) \in N$ pont körüli minden térkép szerepel, s ez az alkalmazások szempontjából nyilvánvalóan kényelmetlen. A következő eredmény megmutatja, hogy ezen lehet segíteni.

2.1. Állítás. Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság, és tegyük fel, hogy $f: M \longrightarrow N$ folytonos leképezés. A következő feltételek ekvivalensek:

(1) f sima leképezés.

(2) Minden $p \in M$ pont, valamint minden olyan p körüli $(\mathcal{U}, x)$ és $f(p)$ körüli $(\mathcal{V}, y)$ térkép esetén, amelyekre $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ teljesül, az
$$y \circ f \circ x^{-1} : x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
leképezés sima.

(3) Minden $p \in M$ ponthoz létezik olyan $(\mathcal{U}, x)$ térkép p körül, valamint $(\mathcal{V}, y)$ térkép $f(p)$ körül, hogy $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, és $y \circ f \circ x^{-1}$ sima leképezése $x(\mathcal{U})$-nak $\mathbb{R}^n$-be. Δ

<u>Megjegyzések.</u> (1) Legyen M m-dimenziós sokaság, és tekintsük az $\mathbb{R}^n$ koordinátateret, mint sima sokaságot. Mivel $\mathbb{R}^n$-ben rendelkezésünkre áll az $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ térkép, egy $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés simaságának feltétele egyszerűen úgy fogalmazható meg, hogy tetszőleges M-en adott $(\mathcal{U}, u)$ térkép esetén az

$$f \circ u^{-1}: u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

leképezés sima. Ha speciálisan $M = \mathbb{R}^m$, akkor $\mathbb{R}^m$-en is tekinthetjük az $(\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m})$ térképet, és visszakapjuk az $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ típusú leképezések simaságának az elemi analízisből ismert fogalmát. Ugyanannak következik a mondottakból, hogy $f \in C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges M-en kijelölt $(\mathcal{U}, u)$ térkép esetén az

$$f \circ u^{-1}: u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény sima.

(2) Tegyük fel, hogy M n-dimenziós sokaság, és legyen $(\mathcal{U}, u)$ térképe M-nek. Ekkor az $u: \mathcal{U} \longrightarrow u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ leképezés, ahol $\mathcal{U}$-t, mint M nyílt részsokaságát, sokaságnak tekintjük, <u>diffeomorfizmus</u>. Valóban, $\mathcal{U}$ számára egytagú atlaszt szolgáltat $(\mathcal{U}, u)$, $u(\mathcal{U})$-n pedig tekinthető az identikus koordinátázás, így u simaságának követelménye az $u \circ u^{-1} = 1_{u(\mathcal{U})}$ leképezés simaságát írja elő, ami nyilvánvaló. Hasonlóképpen, az $u^{-1}: u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{U}$ leképezés simasága is ekvivalens az $u \circ u^{-1} = 1_{u(\mathcal{U})}$ leképezés simaságával.

2.2. Állítás. (1) Ha $f: M \longrightarrow N$ sima leképezés és $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, akkor f $\mathcal{U}$-ra való leszűkítése is sima leképezés.

(2) Ha M és N sokaság és $f: M \longrightarrow N$ olyan leképezés, amelynek leszűkítése az M sokaság egy nyílt lefedésének minden tagjára sima, akkor f sima leképezése M-nek N-re. Δ

2.3. Példák sima leképezésekre

(1) Szorzatsokaságok projekciói. Legyen M és N sokaság. Tekintsük az $M \times N$ szorzatsokaságot, és jelölje π_M, ill. π_N az első, ill. a második tényezőre való természetes projekciót, azaz az

$$M \times N \rightarrow M,\ (p,q) \longmapsto p, \text{ ill. } M \times N \longrightarrow N,\ (p,q) \longmapsto q$$

leképezéseit. π_M és π_N sima leképezés. Ezt most π_M-re igazoljuk; a másik esetben az érvelés teljesen hasonló. Kiválasztva egy $(p,q) \in M \times N$ pontot, 2.1.(3) alapján elegendő azt megmutatni, hogy (p,q) körül létezik olyan $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, x \times y)$ térkép, a $\pi_M(p,q) = p$ pont körül pedig egy olyan $(\mathcal{W}, z)$ térkép, hogy $\pi_M(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$, és a

$$z \circ \pi_M \circ (x \times y)^{-1} : x \times y(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

leképezés – ahol m M dimenziója – sima. Jelöljünk ki ebből a célból p körül egy $(\mathcal{U}, x)$, q körül egy $(\mathcal{V}, y)$ térképet, tekintsük (p,q) körül az $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, x \times y)$ szorzattérképet, és legyen $(\mathcal{W}, z) := (\mathcal{U}, x)$. Ekkor $\pi_M(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \mathcal{U}$, és az $x \circ \pi_M \circ (x \times y)^{-1}$ leképezés differenciálhatósága kiolvasható a következő diagramból:

$$\begin{tikzcd}
(s,t) \in x\times y\,(\mathcal{U}\times\mathcal{V}) \arrow[r, mapsto, "(x\times y)^{-1}"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & (x^{-1}(s),\, y^{-1}(t)) \in M\times N \arrow[d, mapsto, "pr_M"] \\
s \in x(\mathcal{U}) & x^{-1}(s) \in M \arrow[l, mapsto, "x"']
\end{tikzcd}$$

(2) Sima leképezések kompozíciója. Legyenek L, M, N sokaságok, $f \in C^\infty(L,M)$, $g \in C^\infty(M,N)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $g\circ f \in C^\infty(L,N)$.

Jelöljünk ki tetszőlegesen egy $a \in L$ pontot, és legyen $b := f(a)$, $c := g(b) = g\circ f(a)$. g simasága folytán 2.1. (3) alapján a „b" pont körül létezik olyan $(\mathcal{V},y)$, a $g(b)=c$ pont körül pedig olyan $(\mathcal{W},z)$ térkép, hogy $g(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$, és a

$$z\circ g\circ y^{-1} : y(\mathcal{V}) \longrightarrow z(\mathcal{W})$$

leképezés sima. A feltétel és a simaság definíciója alapján az L sokaság minden „a" körüli $(\mathcal{U},x)$ térképe esetén az

$$y\circ f\circ x^{-1} : x(\mathcal{U}\cap f^{-1}(\mathcal{V})) \longrightarrow y(\mathcal{V})$$

leképezés sima. Ekkor azonban a simaság 2.1.(3) feltétele teljesül a $g\circ f$ leképezésre az $(\mathcal{U}\cap f^{-1}(\mathcal{V}), x)$ „a" körüli és $(\mathcal{W},z)$ $c=g\circ f(a)$ körüli térképpel, ugyanis

$$g\circ f(\mathcal{U}\cap f^{-1}(\mathcal{V})) \subset g(f(\mathcal{U})\cap\mathcal{V}) \subset g(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W},$$

és a

$$z\circ(g\circ f)\circ x^{-1} = (z\circ g\circ y^{-1})\circ(y\circ f\circ x^{-1})$$

leképezés, amely a koordinátaterek alkalmas nyílt halmazain értelmezett sima leképezések kompozíciója, sima.

Következmény. DIFF(M) csoport a leképezés-kompozíció műveletére nézve. □

(3) Egy sokaság sima függvényeinek algebrája

Legyen M egy sokaság, és tekintsük az M-en értelmezett valós értékű, sima függvények $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ halmazát. Ha tetszőleges $f, g \in C^\infty(M)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$(\lambda f + \mu g)(p) := \lambda f(p) + \mu g(p), \quad (fg)(p) = f(p)g(p) \quad (p \in M),$$

akkor $\lambda f + \mu g \in C^\infty(M)$, $fg \in C^\infty(M)$, és így $C^\infty(M)$ $\mathbb{R}$ fölötti kommutatív, egységelemes algebrává válik; az egységelem az

$$\mathbf{1} : M \longrightarrow \mathbb{R}, \ p \longmapsto \mathbf{1}(p) := 1$$

konstans függvény.

Valóban, $f, g \in C^\infty(M)$ esetén tetszőleges p pont körül megadható olyan $(\mathcal{U}, u)$ térkép, hogy az $f \circ u^{-1} : u(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ és a $g \circ u^{-1} : u(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény sima, és így

$$(\lambda f + \mu g) \circ u^{-1} = \lambda (f \circ u^{-1}) + \mu (g \circ u^{-1})$$

sima, ami a korábban mondottak alapján (ld. a 2.1.-t követő (1) megjegyzést) azt jelenti, hogy $\lambda f + \mu g \in C^\infty(M)$. $fg \in C^\infty(M)$ teljesülése hasonlóan ellenőrizhető.

(4) Sima függvények konstrukciója Legyen M egy sokaság. Egy $f \in C^\infty(M)$ függvény tartója azon pontok halmazának lezártja, amelyekben a függvény nem tűnik el. Ezt a halmazt $\mathrm{supp}(f)$-fel jelöljük; az értelmezés szerint tehát

$$\mathrm{supp}(f) := \mathrm{cl}\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}.$$

Kijelölve M-nek egy p pontját és a p pont egy $\mathcal{U}$ környezetét, létezik olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) Tetszőleges $q \in M$ esetén $0 \leq f(q) \leq 1$.

(ii) f 1-et vesz föl a p pont egy környezetében.

(iii) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

Azt mondjuk ekkor, hogy f p-beli dudorfüggvény. Megadunk egy eljárást ilyen függvény konstruálására.

1. lépés. Induljunk ki a nevezetes

$$\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \lambda(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}}, & \text{ha } t > 0; \\ 0, & \text{ha } t \leq 0 \end{cases}$$

függvényből. Ismeretes, hogy ez sima függvény (ld. pl. [BD], 40-41. old.).

2. lépés. Megadva egy $\varepsilon > 0$ valós számot, képezzük a

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi_\varepsilon(t) := \frac{\lambda(2\varepsilon - t)}{\lambda(2\varepsilon - t) + \lambda(t - \varepsilon)}$$

függvényt! Mivel $\lambda(2\varepsilon - t) + \lambda(t - \varepsilon) > 0$ minden t-re, φ_ε jól definiált és nyilvánvalóan sima függvény, amelyre teljesülnek a következők:

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(t) = 1, & \text{ha } t < \varepsilon; \\ 0 < \varphi_\varepsilon(t) < 1, & \text{ha } \varepsilon < t < 2\varepsilon; \\ \varphi_\varepsilon(t) = 0, & \text{ha } t \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

3. lépés. Tegyük fel, hogy a sokaság n-dimenziós. Jelöljünk ki M-en olyan p középpontú $(\mathcal{V}, x)$ térképet, amelyre $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ teljesül. Válasszunk meg

az ε pozitív valós számot úgy, hogy $x(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$ tartalmazza a $B_{3\varepsilon}(0)$ origó középpontú nyílt gömböt. Képezzük az $x^i = e^i \circ x : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ koordinátafüggvények segítségével az

$$N := \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényt, s legyen végül

$$f(q) := \begin{cases} \varphi_\varepsilon \circ N(q), & \text{ha } q \in \mathcal{V}; \\ 0, & \text{ha } q \in M \setminus \mathcal{V}. \end{cases}$$

Ekkor $f \in C^\infty(M)$, és f eleget tesz az (i)-(iii) feltételeknek.

<u>Definíció</u>. Egy M sokaságon adott <u>sima egységbontáson</u> M-en értelmezett sima függvények olyan $(f_i)_{i \in I}$ családját értjük, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$(PU)_1$ Tetszőleges $p \in M$ pont és minden $i \in I$ index esetén $f_i(p) \geq 0$.

$(PU)_2$ (<u>Lokális végesség</u>) Az M sokaság minden pontjának van olyan környezete, amely a $(\mathrm{supp}(f_i))_{i \in I}$ halmazcsaládnak csak véges sok tagját metszi.

$(PU)_3$ Minden $p \in M$ pont esetén $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$.

Azt mondjuk, hogy egy $(f_i)_{i \in I}$ egységbontás az M sokaság egy $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ <u>nyílt lefedéshez tartozik</u>, ha $\mathrm{supp}(f_i) \subset \mathcal{U}_i$ minden $i \in I$ index esetén teljesül.

<u>Megjegyzés</u>. Ha $(f_i)_{i \in I}$ egységbontás az M sokaságon, akkor $(PU)_2$ értelmében minden $p \in M$ pontnak van

pontnak van olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy az

$$\{i \in I \mid f_i \restriction \mathcal{U} \neq 0\}$$

indexhalmaz véges. Így a

$$\sum_{i \in I} f_i(p) = \sum_{f_i(p) \neq 0} f_i(p)$$

összeg véges, és így jól definiált, még akkor is, ha I végtelen halmaz.

<u>2.4. Tétel</u> (<u>az egységbontás tétele</u>). <u>Egy sokaság minden nyílt lefedéséhez létezik az illető lefedéshez csatolt sima egységbontás.</u> Δ

<u>Megjegyzés.</u> Az egységbontás tétele nélkülözhetetlen eszköz egy sokaságon lokálisan definiált objektumok egyetlen, globális objektummá való összeragasztásánál, ill. – megfordítva – egy globális objektum lokális objektumok összegére való felbontásánál.

<u>2.5. Következmény.</u> Legyen K zárt részhalmaza, $\mathcal{U}$ pedig K-t tartalmazó nyílt részhalmaza az M sokaságnak. Ekkor van olyan $f: M \to \mathbb{R}$ sima függvény, hogy

(1) $0 \leq f(p) \leq 1$, minden $p \in M$ pont esetén;

(2) $f(q) = 1$, ha $q \in K$;

(3) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

<u>Bizonyítás.</u> <u>2.4.</u> értelmében létezik az M sokaság $(\mathcal{U}, M \setminus K)$ nyílt lefedéséhez csatolt (f, g) sima egységbontás. Ekkor $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$, $\operatorname{supp}(g) \subset M \setminus K$, f és g sehol sem vesz fel negatív értéket és $f + g = 1$. f tehát az (1) és (3) feltételeknek automatikusan eleget tesz, de $g \restriction K = 0$ és $f + g = 1$ miatt (2) is teljesül rá; f tehát a kívánt függvény. $\square$

3. Érintővektorok, derivált, görbék

Motiváció. (1) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret ($n \geq 1$). Az $\mathbb{R}^n$ tér egy p pontjához tartozó geometriai érintőtéren a

$$T_p \mathbb{R}^n := \{p\} \times \mathbb{R}^n = \{(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

halmazt értjük, ennek elemeit $\mathbb{R}^n$ p-beli geometriai érintővektorainak vagy egyszerűen érintővektorainak mondjuk. Egy $(p,v) \in T_p \mathbb{R}^n$ érintővektorra többnyire a v_p jelölést használjuk, és ezt a p „kezdőpontból" vagy „támadáspontból" a $p+v$ „végpontba mutató nyíl"-ként képzeljük el; v a v_p érintővektor vektori része. $T_p \mathbb{R}^n$ a

$$v_p + w_p := (v+w)_p \quad , \quad \lambda v_p := (\lambda v)_p \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

előírással definiált összeadással és skalárral való szorzással maga is n-dimenziós valós vektortér. Ez a vektortér a

$$v_p \in T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow v \in \mathbb{R}^n$$

lineáris izomorfizmus révén természetes módon izomorf $\mathbb{R}^n$-nel.

(2) A geometriai érintőtér fogalmának átültetése a sokaságok kontextusába reménytelen vállalkozásnak tűnik, hiszen sokaságok esetén az egyedül rendelkezésünkre álló eszközök a sima térképek, a sima függvények és leképezések. Egy lehetséges általánosítás alapötletét az az észrevétel adja, hogy minden $v_p \in T_p \mathbb{R}^n$ geometriai érintővektor iránymenti deriválás formájában differenciáloperátorként hat a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényalgebrán az

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \longmapsto v_p(f) := D_v f(p) \in \mathbb{R}$$

előírás szerint. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ekkor tetszőleges $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvény és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalár esetén

(i) $v_p(\lambda f + \mu g) = \lambda v_p(f) + \mu v_p(g)$ – <u>$\mathbb{R}$-linearitás</u>;

(ii) $v_p(fg) = v_p(f) g(p) + f(p) v_p(g)$ – <u>Leibniz-szabály</u>.

(3) Egy

$$\theta : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \theta(f)$$

függvényt <u>$p \in \mathbb{R}^n$-beli derivációnak</u> nevezzük, ha rendelkezik az iménti (i), (ii) tulajdonságokkal, azaz $\mathbb{R}$-lineáris és Leibniz-szabályt teljesít. Az összes p-beli derivációk halmaza a függvények összeadásának és skalárral való szorzásának szokásos értelmezése esetén valós vektortér. Ezt a vektorteret $T_p^{alg}\mathbb{R}^n$-nel jelöljük, és $\mathbb{R}^n$ p-beli <u>algebrai érintőterének</u> nevezzük. Megmutatható, hogy <u>a $T_p\mathbb{R}^n$ geometriai érintőtér</u> a

$$\left\| \begin{array}{l} v_p \in T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow D_{v_p} \in T_p^{alg}\mathbb{R}^n \, ; \\ D_{v_p} f := D_v f(p) \quad , \; f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

<u>leképezés révén természetes módon izomorf a $T_p^{alg}\mathbb{R}^n$ algebrai érintőtérrel.</u>

Azok a tulajdonságok, amelyekre az algebrai érintőtér fogalmát alapoztuk, tetszőleges sokaság esetén értelemmel bírnak, így egy sokaság érintővektorainak értelmezésére kézenfekvő a következő egyszerű és elegáns

<u>Definíció.</u> Egy M sokaság egy <u>p pontbeli</u>

érintővektorán olyan

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto v(f)$$

függvényt értünk, amely

(1) $\mathbb{R}$-lineáris : $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$

(2) Leibniz-szabályt teljesít :

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

$(f, g \in C^\infty(M);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Egy M sokaság egy p pontjában vett összes érintővektorok halmazát T_pM-mel jelöljük és M p-beli érintőterének nevezzük. T_pM valós vektortér a lineáris függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával. Explicite: ha $v, w \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$(v+w)(f) := v(f) + w(f), \quad (\lambda v)(f) := \lambda v(f).$$

3.1. Lemma és definíció. Legyen M n-dimenziós sokaság. Tekintsünk egy $p \in M$ pontot, és jelöljünk ki p körül egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor a

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p : f \in C^\infty(M) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) := D_i(f \circ u^{-1})(u(p))$$

$$(i \in \{1, \dots, n\})$$

függvények p-beli érintővektorai M-nek. A

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} := D_i(f \circ u^{-1}) \circ u$$

függvényt az f függvény $(\mathcal{U}, u)$ térképre vonatkozó i-edik parciális deriváltjának nevezzük. Δ

3.2. Lemma. Legyen M egy sokaság, $v \in T_pM$.

(1) Ha az $f, g \in C^\infty(M)$ függvények egyenlők a p pont egy környezetében, akkor $v(f) = v(g)$.

(2) Ha egy $h \in C^\infty(M)$ függvény konstans a p pont egy környezetében, akkor $v(h) = 0$.

Bizonyítás. (1) Mivel az $f-g$ függvény eltűnik a p pont egy környezetében, v linearitása miatt elegendő azt megmutatni, hogy ha egy $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ függvény azonosan 0 a pont egy $\mathcal{U}$ környezetében, akkor $v(\tilde{f}) = 0$. Válasszunk ebből a célból egy olyan $d \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik. Ekkor $\tilde{f}d = 0 \in C^\infty(M)$. Mivel $v(0) = v(0+0) = v(0) + v(0)$ miatt $v(0) = 0$, a Leibniz-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$0 = v(\tilde{f}d) = v(\tilde{f})d(p) + \tilde{f}(p)v(d) = v(\tilde{f}),$$

hiszen $d(p) = 1$ és $\tilde{f}(p) = 0$.

(2) (1) alapján föltehetjük, hogy az adott h függvény az egész M sokaságon konstans; mondjuk $h(q) = \lambda$, minden $q \in M$ esetén. Ekkor $h = \lambda \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1} \in C^\infty(M)$ az egységelem. Mivel – ismét a Leibniz-szabály alapján –

$$v(\mathbf{1}) = v(\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}) = v(\mathbf{1})\cdot 1 + 1\cdot v(\mathbf{1}) = 2v(\mathbf{1}),$$

$v(\mathbf{1}) = 0$, és így

$$v(h) = v(\lambda\mathbf{1}) = \lambda v(\mathbf{1}) = 0. \qquad \square$$

3.3. Következmény. Egy sokaság egy nyílt részsokaságának tetszőleges pontbeli érintőtere természetes módon izomorf a sokaság illető pontbeli érintőterével.

Bizonyítás. Tekintsük egy M sokaság egy $\mathcal{U}$ nyílt részsokaságát. Legyen $p \in \mathcal{U}$, $v \in T_p\mathcal{U}$ tetszőleges. Ha

$$\tilde{v} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \tilde{v}(f) := v(f \restriction \mathcal{U}),$$

akkor $\tilde{v} \in T_pM$, és a

$$(*) \qquad v \in T_p\mathcal{U} \longrightarrow \tilde{v} \in T_pM$$

leképezés injektív lineáris leképezés; megmutatjuk, hogy egyben szürjektív is.

Legyen $\tilde{w} \in T_pM$ tetszőleges. Értelmezzük a $w: C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$w(h) := \tilde{w}(\tilde{h}), \text{ ha } \tilde{h} \in C^\infty(M) \text{ és } \tilde{h} \restriction \mathcal{U} = h$$

előírással. Ekkor <u>3.2. (1)</u> miatt w jól definiált: független annak a $\tilde{h} \in C^\infty(M)$ függvénynek a megválasztásától, amelyre $\tilde{h} \restriction \mathcal{U} = h$ teljesül. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $w \in T_p\mathcal{U}$, és világos a konstrukció alapján, hogy a $(*)$ leképezésnél w-nek $\tilde{w}$ felel meg. □

<u>Megjegyzés.</u> A kapott eredmény népszerű kifejezési módja az, hogy „a egy sokaság érintővektorai lokális objektumok". Tekintettel az igazolt természetes izomorfizmusra, a továbbiakban <u>egy sokaság nyílt részsokaságának érintőtereit azonosítjuk a sokaság illető pontbeli érintőtereivel.</u>

<u>3.4. Tétel</u> (<u>a bázistétel</u>). Legyen M n-dimenziós sokaság, p tetszőleges pontja M-nek, és jelöljünk ki p körül egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor a <u>$\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$ vektorsorozat bázisa a T_pM érintőtérnek</u>, amelyből tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor a

$$v = \sum_{i=1}^n v(u^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

formula szerint kombinálható lineárisan.

Bizonyítás. (1) 3.3. alapján okoskodhatunk az $\mathcal{U}$ koordinátakörnyezet fölött, és így szorítkozhatunk az $\mathcal{U}$-n értelmezett sima függvényekre. Föltehetjük, hogy az $(\mathcal{U}, u)$ térkép p középpontú, azaz $u(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, ez a térképválasztás ugyanis csupán bizonyos konstansok eltűnését vonja maga után, konstanshoz pedig minden érintővektor eleve zérust rendel. Végül az $\mathcal{U}$ koordinátakörnyezet alkalmas „összehúzásával" az is elérhető, hogy
$$u(\mathcal{U}) = B_\varsigma(0) \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad \varsigma \in \mathbb{R}_+^*$$
teljesüljön.

(2) Jegyezzük meg, hogy tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén
$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta^i_j.$$

Valóban, bármely $q \in \mathcal{U}$ pontban
$$\frac{\partial u^i}{\partial u^j}(q) := D_j(u^i \circ u^{-1})(u(q)) = D_j(e^i \circ u \circ u^{-1})(u(q))$$
$$= D_j e^i(u(q)) = e^{i\prime}(u(q))(e_j) = e^i(e_j) = \delta^i_j$$
(hiszen $\mathbb{R}^n$ természetes koordinátafüggvényei lineárisak, s így a deriváltjuk minden pontban önmaguk).

(3) $A\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$ vektorrendszer lineárisan független.

Tegyük fel ennek ellenőrzésére, hogy
$$\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = 0 \in T_p M.$$

Ekkor tetszőleges $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén
$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)(u^k) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial u^k}{\partial u^i}(p) \overset{(2)}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta^k_i = \lambda^i ,$$

tehát a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^{n}$ vektorsorozatból a zérusvektor csak csupa nulla együtthatóval kombinálható lineárisan.

(4) Megmutatjuk, hogy bármely $g \in C^\infty(u(\mathcal{U})) = C^\infty(B_\delta(\underline{0}))$ függvény előállítható a

$$g = g(\underline{0})\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} e^i g_i$$

alakban, alkalmas $g_i \in C^\infty(B_\delta(\underline{0}))$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ függvények segítségével (az $\mathbf{1}$ most is az $\{1\}$ értékkészletű konstans függvényt jelöli). Válasszunk ki és rögzítsünk ettől a céltól egy $a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in B_\delta(\underline{0})$ pontot, és tekintsük a

$$\gamma_a : [0,1] \longrightarrow B_\delta(0), \quad t \longmapsto \gamma_a(t) := ta$$

leképezést. Írjuk fel a

$$(*) \qquad g(a) = g(\underline{0}) + \int_0^1 (g \circ \gamma_a)'$$

azonosságot. Itt tetszőleges $t \in [0,1]$ esetén

$$(g \circ \gamma_a)'(t) = g'(\gamma_a(t))\,\gamma_a'(t) = g'(ta)(a) = g'(ta)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha^i g'(ta)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i D_i g(ta) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i (D_i g \circ \gamma_a)\right)(t),$$

tehát

$$(g \circ \gamma_a)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i (D_i g \circ \gamma_a).$$

Legyen

$$g_i(a) := \int_0^1 (D_i g) \circ \gamma_a \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ekkor $(*)$ a

$$g(a) = g(\underline{0}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i g_i(a) = g(0) + \left(\sum_{i=1}^{n} e^i g_i\right)(a)$$

alakot, amiből az $a \in B_\delta(\underline{0})$ pont tetszőlegessége folytán a g függvény kívánt

$$g = g(\underline{0})\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} e^i g_i$$

előállításához jutunk.

(5) Legyen ezek után $f \in C^\infty(M)$ tetszőleges, és tekintsük ennek a

$$g := f \circ u^{-1} : \; u(\mathcal{U}) = B_S(\underline{0}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

koordinátakifejezését! A (4)-ben nyert eredmény alapján ez előállítható az

$$f \circ u^{-1} = f \circ u^{-1}(\underline{0})\,\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} e^i (f \circ u^{-1})_i = f(p)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} e^i (f\circ u^{-1})_i$$

alakban. Mindkét oldalt jobbról komponálva u-val, innen

$$(**) \quad f = f(p)(\mathbf{1}\circ u) + \sum_{i=1}^{n} (e^i \circ u)(f \circ u^{-1})_i \circ u = f(p)(\mathbf{1}\circ u) + \sum_{i=1}^{n} u^i f_i$$

adódik, ahol $f_i := (f \circ u^{-1})_i \circ u \in C^\infty(M)$.

(6) Legyen $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges, és alkalmazzuk a $\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p \in T_p M$ érintővektort $(**)$ bal és jobb oldalára. Mivel a jobb oldalon az 1. tag konstans függvény, $u(p) = 0$ és (2) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial u^k}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p \left(\sum_{i=1}^{n} u^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u^i}{\partial u^k}(p) f_i(p) + u^i(p)\frac{\partial f_i}{\partial u^k}(p)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta^i_k f_i(p) = f_k(p),$$

tehát

$$f_k = \frac{\partial f}{\partial u^k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

(7) Ha $v \in T_p M$ tetszőleges, akkor

$$v(f) \overset{(**)}{=} v\left(\sum_{i=1}^{n} u^i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(v(u^i) f_i(p) + u^i(p) v(f_i)\right)$$

$$\overset{u(p)=\underline{0}}{=} \sum_{i=1}^{n} v(u^i) f_i(p) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{n} v(u^i) \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} v(u^i) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \right)(f),$$

amiből f tetszőlegessége folytán

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(u^i) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

következik. Ezzel beláttuk, hogy $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^{n}$ generátorrendszere T_pM-nek, és egyben igazoltuk a T_pM-beli vektorok előállítására vonatkozó formulát. $\square$

__3.6. Lemma és definíció.__ Legyen M és N sokaság, φ sima leképezése M-nek N-be. Kiválasztva egy $p \in M$ pontot, értelmezzük a

$$(\varphi_*)_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N, \quad v \longmapsto (\varphi_*)_p(v)$$

leképezést azzal az előírással, hogy tetszőleges $h \in C^\infty(N)$ függvény esetén

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi).$$

Ekkor $(\varphi_*)_p(v)$ valóban $\varphi(p)$-beli érintővektora az N sokaságnak, a $(\varphi_*)_p$ leképezés pedig lineáris leképezése T_pM-nek $T_{\varphi(p)}N$-be. Ezt a lineáris leképezést a φ leképezés __p-beli deriváltjának__ vagy __p-beli érintőleképezésének__ nevezzük.

Ha $(\mathcal{U}, (x^j)_{j=1}^{m})$ térkép a p pont körül, $(\mathcal{V}, (y^i)_{i=1}^{n})$ pedig térkép a $\varphi(p)$ pont körül, akkor

$$(\varphi_*)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(p)}$$

$$(j \in \{1, \dots, m\}),$$

következésképpen $(\varphi_*)_p$ mátrixa a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)_{j=1}^{m}$, $\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(p)}\right)_{i=1}^{n}$ bázispárra vonatkozóan a

$$\left(\frac{\partial (y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p) \right) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

mátrix. Ez a mátrixot a φ leképezés p-beli, az alapul vett <u>térképekre</u> vonatkozó <u>Jacobi-mátrixá</u>nak nevezzük.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $(\varphi_*)_p(v) \in T_{\varphi(p)}M$ teljesülése közvetlen számolással ellenőrizhető; megmutatjuk például, hogy érvényes a Leibniz-szabály.

Tetszőleges $h_1, h_2 \in C^\infty(N)$ függvényeket tekintve,

$$(\varphi_*)_p(v)(h_1h_2) := v((h_1h_2)\circ\varphi) = v((h_1\circ\varphi)(h_2\circ\varphi))$$
$$= v(h_1\circ\varphi)\,h_2(\varphi(p)) + h_1(\varphi(p))\,v(h_2\circ\varphi) =$$
$$= (\varphi_*)_p(v)(h_1)\,h_2(\varphi(p)) + h_1(\varphi(p))\,(\varphi_*)_p(v)(h_2)$$

- és ennek kell teljesülnie.

(2) Ha $v_1, v_2 \in T_pM$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ és $h \in C^\infty(N)$ tetszőleges, akkor

$$(\varphi_*)_p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(h) := (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(h\circ\varphi) = \lambda_1 v_1(h\circ\varphi) +$$
$$+ \lambda_2 v_2(h\circ\varphi) =: \lambda_1(\varphi_*)_p(v_1)(h) + \lambda_2(\varphi_*)_p(v_2)(h) =$$
$$= (\lambda_1(\varphi_*)_p(v_1) + \lambda_2(\varphi_*)_p(v_2))(h).$$

Innen h tetszőlegessége folytán

$$(\varphi_*)_p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(\varphi_*)_p(v_1) + \lambda_2(\varphi_*)_p(v_2)$$

adódik, ami a $(\varphi_*)_p$ leképezés linearitását jelenti.

(3) Legyen

$$w_j := (\varphi_*)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \quad , \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

A fámitétel értelmében a $w_j \in T_{\varphi(p)}M$ érintővektorok előállíthatók a

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} w_j(y^i)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(p)}$$

alakban. Mivel itt

$$w_j(y^i) = (\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (y^i) := \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (y^i \circ \varphi) = \frac{\partial (y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p),$$

következik a φ p-beli Jacobi-mátrixára vonatkozó észrevétel helyessége. □

<u>Definíció.</u> Tekintsük az $\mathbb{R}$ valós számegyenest, legyen $r := 1_{\mathbb{R}}$, és lássuk el $\mathbb{R}$-et az $(\mathbb{R}, r)$ egytagú atlasz által származtatott sima struktúrával. Jelöljünk ki egy (nemüres) $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumot, és tekintsük ezt $\mathbb{R}$ nyílt részsokaságának. Az egyszerűség kedvéért jelöljük az $r \restriction I$ függvényt is r-rel. Legyen végül M egy sokaság.

(1) Egy $\gamma : I \longrightarrow M$ sima leképezést <u>M-beli görbének</u> nevezünk. Ha $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nem egypontú zárt intervallum, akkor egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ leképezést abban az esetben mondunk görbének – vagy <u>görbe szakasznak</u> –, ha kiterjeszthető egy, az $[a,b]$-t tartalmazó nyílt intervallum sima leképezésévé. Ha $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ folytonos leképezés és $[a,b]$-nek van olyan felosztása, amelynek részintervallumain γ görbeszakasz, akkor γ-t <u>szakaszonként sima görbének</u> hívjuk.

(2) Egy $\gamma : I \longrightarrow M$ <u>görbe</u> $t \in I$-beli <u>érintő-vektorán</u> vagy <u>sebességvektorán</u> a

$$\dot\gamma(t) := (\gamma_*)_t \left(\frac{d}{dr}\right)_t \in T_{\gamma(t)} M$$

érintővektort értjük. Ha $\dot\gamma(t)$ egyetlen $t \in I$-re sem zérusvektor, azt mondjuk, hogy a görbe reguláris.

3.7. Állítás (a görbeérintők elemi tulajdonságai).
Legyen M n-dimenziós sokaság, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum (mint $\mathbb{R}$-nek nyílt résszokasága), és tekintsünk egy $\gamma : I \to M$ görbét.
(1) A görbeérintők iránymenti deriváltak. Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor tetszőleges $t \in I$-re

$$\dot{\gamma}(t)(f) = (f \circ \gamma)'(t).$$

Ha speciálisan $v = \dot{\gamma}(0)$, akkor

$$v(f) = (f \circ \gamma)'(0).$$

(2) Koordinátakifejezés. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ $\gamma(t)$ körüli térkép M-en, akkor

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} .$$

(3) Átparaméterezés. Ha $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $h : J \to I$ sima függvény, akkor a γ görbe $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h : J \to M$ átparaméterezettje is görbe, amelynek érintővektorai

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = h'(t)\, \dot{\gamma}(h(t)) \quad , \quad t \in J.$$

(4) Leképezés hatása. Ha N további sokaság, $\varphi : M \to N$ sima leképezés, akkor $\varphi \circ \gamma : I \to N$ N-beli görbe, amelynek tetszőleges $t \in I$-beli érintővektora

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}(t) = (\varphi_*)_{\gamma(t)} (\dot{\gamma}(t)) ,$$

azaz a képgörbe érintővektorai görbe érintővektorainak képei az érintőleképezésnél, más szóval: egy sima leképezés deriváltja megőrzi a sebességet.

3. 8. Lemma. Egy sokaság minden érintővektora fellép egy sokaságbeli görbe érintővektoraként.

Bizonyítás. Legyen M n-dimenziós sokaság. Jelöljünk ki egy $p \in M$ pontot és egy $v \in T_pM$ érintővektort. Válasszunk egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ p középpontú térképet. Ekkor v előállítható a

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

alakban. Legyen tetszőleges $t \in]-1, 1[$ esetén

$$\gamma(t) := u^{-1}(tv^1, \dots, tv^n).$$

Ekkor $\gamma :]-1, 1[\longrightarrow M$ M-beli görbe, amelyre $\gamma(0) = p$ teljesül. Az $u^i \circ \gamma$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ komponensfüggvényekre azt kapjuk, hogy

$$u^i \circ \gamma(t) = e^i \circ u \circ u^{-1}(tv^1, \dots, tv^n) = tv^i;$$

így $(u^i \circ \gamma)'(t) = v^i$, és 3.7. (2) alapján

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(0)} = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = v,$$

v tehát fellép a γ görbe 0-beli érintővektoraként. □

3.9. Állítás. Legyen V véges dimenziós valós vektortér, ellátva a természetes sima struktúrával. V kanonikusan izomorf tetszőleges p-pontbeli érintőterével, ilyen izomorfizmust ad meg V és T_pV között az az

$$\iota_p : v \in V \longmapsto \iota_p(v) := \dot{\gamma}(0) \in T_pV$$

leképezés, ahol

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow V, \; t \longmapsto \gamma(t) := p + tv.$$

Ha

$$x = (x^1, \dots, x^n) : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (x^i = e^i \circ x; \; i \in \{1, \dots, n\})$$

lineáris izomorfizmus (és így (V, x) globális

globális térképe V-nek), akkor

$$L_p(v) = \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p .$$

Bizonyítás. Elegendő levezetni az utóbbi formulát, ebből ugyanis kiolvasható, hogy L_p lineáris és – $\operatorname{Ker}(L_p) = \{0\}$ folytán – injektív, s ennélfogva lineáris izomorfizmus.

Az x^i függvények linearitása miatt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^i \circ \gamma(t) = x^i(p + tv) = x^i(p) + t\,x^i(v) \quad ,$$

így

$$(x^i \circ \gamma)'(t) = x^i(v) \qquad (i \in \{1, \dots, n\}),$$

következésképpen

$$L_p(v) := \dot{\gamma}(0) \overset{3.7.(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} (x^i \circ \gamma)'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(0)} = \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p . \quad \square$$

3.10. Állítás. Legyen M összefüggő sokaság, N pedig egy sokaság. Ha egy $\varphi: M \longrightarrow N$ leképezésnek minden pontban zérus a deriváltja, akkor a φ leképezés konstans.

Bizonyítás. Legyen $q \in \operatorname{Im}(\varphi) \subset N$ tetszőleges. $\{q\} \subset N$ zárt halmaz, mert Hausdorff-térben az egyelemű részhalmazok zártak. Mivel φ – speciálisan – folytonos, így $\varphi^{-1}(\{q\}) \subset M$ szintén zárt halmaz. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\varphi^{-1}(\{q\})$ egyben nyílt részhalmaza is M-nek, ebből ugyanis M összefüggősége miatt $\varphi^{-1}(\{q\}) = M$ következik, ami azt jelenti, hogy φ $\{q\}$ értékkészletű konstans leképezés.

Legyen $p \in \varphi^{-1}(\{q\})$ tetszőleges, és jelöljünk ki a p pont körül egy $(\mathcal{U}, (x^j)_{j=1}^{m})$, a q pont körül pedig egy $(V, (y^i)_{i=1}^n)$ térképet úgy, hogy $\varphi(U) \subset V$ teljesüljön. Ha $a \in U$ tetszőleges, akkor a feltétel értelmében

$$0 = (\varphi_*)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a \overset{3.6.}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(a) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(a)} ; \; j \in \{1, \dots, n\}.$$

Innen az következik, hogy U fölött

$$\frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j} = 0 ; \quad i \in \{1, \dots, n\}, \; j \in \{1, \dots, m\},$$

és így a φ leképezés $y^i \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ komponens-függvényei konstans függvények, s ezért maga φ is konstans U fölött. Így módon $U \subset \varphi^{-1}(\{q\})$. Beláttuk tehát, hogy $\varphi^{-1}(\{q\})$ minden pontját annak egy környezetével együtt tartalmazza, ami ekvivalens azzal, hogy $\varphi^{-1}(\{q\})$ nyílt halmaz. $\square$

<u>3.11.</u> <u>A klasszikus inverz-leképezés tétel.</u> Legyen S olyan részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, amelynek van belső pontja, és tegyük fel, hogy $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ olyan leképezés, amely C^1-osztályú egy $p_0 \in S$ belső pontban, s amelynek $f'(p_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deriváltja injektív (és így lineáris izomorfizmus). Ekkor létezik a p_0 pontnak olyan $U \subset S$ környezete, hogy teljesülnek a következők:

(1) f differenciálható és $f'(p)$ injektív minden $p \in U$ pontban;

(2) az $F := f \restriction U$ leképezés injektív;

(3) az $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ halmaz nyílt;

(4) az F leképezés $F^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ inverze differenciálható minden $q \in f(U)$ pontban, és $(F^{-1})'(q) = (f'(p))^{-1}$, ahol $p = F^{-1}(q)$;

(5) F^{-1} C^1-osztályú a $q_0 := f(p_0)$ pontban.
Ha, ráadásul, f k-szor differenciálható vagy C^k-osztályú ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) minden $p \in \mathcal{U}$ pontban, akkor F^{-1} is k-szor differenciálható, ill. C^k-osztályú a $q = f(p)$ pontban. Δ

<u>3.12. Tétel</u> (<u>az inverz-leképezési tétel sokaságokra</u>).
Legyen M és N sokaság, $\varphi : M \to N$ sima leképezés. Ha egy $p \in M$ pontban a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ derivált bijektív (és így lineáris izomorfizmus), akkor megadható a p pontnak olyan $\mathcal{U}$, a $\varphi(p)$ pontnak pedig olyan $\mathcal{V}$ környezete, hogy φ diffeomorfan képezi le $\mathcal{U}$-t $\mathcal{V}$-re.

<u>Bizonyítás.</u> Mivel $(\varphi_*)_p$ izomorfizmus T_pM és $T_{\varphi(p)}N$ között, az M és az N sokaság dimenziója megegyezik; legyen a közös dimenziójuk n. Válasszunk a p pont körül egy $(\mathcal{U}_1, x)$, a $\varphi(p)$ pont körül egy $(\mathcal{V}_1, y)$ térképet úgy, hogy $\varphi(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{V}_1$ teljesüljön. Legyen

$$a := x(p) \in \mathbb{R}^n, \quad b := y(\varphi(p)) \in \mathbb{R}^n,$$

és tekintsük a

$$\psi := y \circ \varphi \circ x^{-1} \restriction x(\mathcal{U}_1) : x(\mathcal{U}_1) \longrightarrow y(\mathcal{V}_1)$$

leképezést. A feltétel alapján a

$$\psi'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derivált lineáris izomorfizmus, ezért <u>3.11.</u> értelmében az $a \in x(\mathcal{U}_1)$ pontnak létezik olyan $\widetilde{\mathcal{U}}_1$, a $b \in y(\mathcal{V}_1)$ pontnak pedig olyan $\widetilde{\mathcal{V}}_1$ környezete, hogy $\psi \restriction \widetilde{\mathcal{U}}_1 : \widetilde{\mathcal{U}}_1 \to \widetilde{\mathcal{V}}_1$ diffeomorfizmus. Ha $\mathcal{U} := x^{-1}(\widetilde{\mathcal{U}}_1)$, $\mathcal{V} := y^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}}_1)$, akkor $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a kívánt tulajdonságú környezete p-nek, ill. $\varphi(p)$-nek. $\square$

Definíció. Legyen M és N sokaság, $\varphi : M \longrightarrow N$ sima leképezés. Azt mondjuk, hogy φ lokális diffeomorfizmus egy $p \in M$ pontban, ha a $(\varphi_*)_p : T_p M \longrightarrow T_{\varphi(p)} N$ derivált lineáris izomorfizmus. Amennyiben ez a tulajdonság M minden pontjában teljesül, a φ leképezést az M sokaság N-be való lokális diffeomorfizmusának nevezzük.

Megjegyzés. A bevezetett terminológiát nyilvánvalóan az inverz-leképezés tétel indokolja. Ha egy $\varphi : M \to N$ bijektív leképezés lokális diffeomorfizmus, akkor diffeomorfizmus.

4. Részsokaságok

Definíció. Legyen M és N sokaság, $\varphi : M \longrightarrow N$ sima leképezés. Azt mondjuk, hogy φ immerzió egy $p \in M$ pontban, ha a $(\varphi_*)_p$ derivált injektív, szubmerzió p-ben, ha a $(\varphi_*)_p$ derivált szürjektív lineáris leképezése $T_p M$-nek $T_{\varphi(p)} N$-be. Amennyiben φ M minden pontjában immerzió, ill. szubmerzió, úgy M N-be való immerziójának, ill. szubmerziójának nevezzük. A φ leképezést az M sokaság N sokaságba való beágyazásának mondjuk, ha

(1) injektív immerziója M-nek N-be ;

(2) a $\varphi_1 : M \longrightarrow \varphi(M) \subset N$, $p \longmapsto \varphi_1(p) := \varphi(p)$ leképezés homeomorfizmus, ha $\varphi(M)$-et az M sokaság topológiájából származó altér-topológiával látjuk el.

4.1. Példák. Bemutatunk két olyan <u>injektív immerziót</u>, amely <u>nem beágyazás</u>.

(1) Tekintsük a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\, \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumot mint $\mathbb{R}$ nyílt részsokaságát. A

$$\gamma : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \gamma(t) := (\sin 2t, \cos t)$$

parametrizált görbe injektív immerzió: az injektívség közvetlenül kiolvasható a definícióból, és az is világos, hogy a $\gamma'(t) = (2\cos 2t, -\sin t)$ derivált sehol sem tűnik el. γ képhalmazát az

$$x^2 = 4y^2(1-y^2)$$

egyenletnek eleget tevő $\mathbb{R}^2$-beli pontok alkotják; ez egy nyolcas alakzatként szemléltethető. $\operatorname{Im}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$ az altér-topológiára nézve kompakt halmaz, γ értelmezési tartománya viszont nem kompakt, a

$$\gamma_1 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\longrightarrow \operatorname{Im}(\gamma), \quad t \longmapsto \gamma_1(t) := \gamma(t)$$

leképezés így nem homeomorfizmus; γ tehát nem beágyazás.

(2) Tekintsük a $T^2 := S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ tóruszt és a

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow T^2, \quad t \longmapsto \gamma(t) := \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \lambda t}\right)$$

leképezést, ahol λ tetszőlegesen rögzített irracionális szám. Ekkor γ injektív, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ esetén ugyanis $t_1 - t_2$ és $\lambda(t_1 - t_2)$ egyaránt egész szám, ami csak úgy lehetséges, ha $t_1 - t_2 = 0$. Mivel $\gamma'(t)$ nyilvánvalóan egyetlen valós t-re sem zérusvektor, megállapíthatjuk, hogy γ injektív immerzió. γ azonban <u>nem beágyazás</u>, ellenkező esetben ugyanis a

$$\gamma(\mathbb{Z}) := \{\gamma(n) \in T^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

halmaznak nem lenne torlódási pontja $\gamma(\mathbb{R})$-ben, megmutatható azonban, hogy a $\gamma(0) = ((1,0),(1,0))$ pont torlódási pontja $\gamma(\mathbb{Z})$-nek.

4.2. Állítás. Ha N kompakt sokaság és $\varphi: N \to M$ injektív immerzió, akkor φ beágyazás. Δ

4.3. Állítás (az immerziók jellemzése). Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság, $\varphi: M \to N$ pedig sima leképezés. A következő kijelentések ekvivalensek:

(1) φ immerzió egy $p \in M$ pontban.

(2) φ p-beli Jacobi-mátrixa valamely - és ezért bármely - p és $\varphi(p)$ körüli térképpárra vonatkozóan m rangú.

(3) Ha $(y^1,\dots,y^n)$ lokális koordinátarendszer a $\varphi(p)$ pont körül, akkor kiválaszthatók olyan $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}$ indexek, hogy $1 \le i_1 \le \dots \le i_m \le n$ és $(y^{i_1}\circ\varphi,\dots,y^{i_m}\circ\varphi)$ lokális koordinátarendszer p körül. Δ

4.4. Állítás (a szubmerziók jellemzése). Ha M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság és $\varphi: M \to N$ sima leképezés, akkor a következő kijelentések ekvivalensek:

(1) φ szubmerzió egy $p \in M$ pontban.

(2) φ p-beli Jacobi-mátrixa valamely - és ezért bármely - p és $\varphi(p)$ körüli térképre vonatkozóan n rangú.

(3) Ha $(y^1,\dots,y^n)$ lokális koordinátarendszer $\varphi(p)$ körül, akkor az $y^1\circ\varphi,\dots,y^n\circ\varphi$ függvények ($n < m$ esetén) p körüli lokális koordinátarendszerré bővíthetők. Δ

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy M sokaság <u>részsokasága</u> egy N sokaságnak, ha

(1) M topologikus altere N-nek;

(2) a $j : M \longrightarrow N$, $p \longmapsto j(p)$ kanonikus inklúzió (természetes befoglalás) immerziója M-nek N-be.

<u>4.4. Megjegyzések.</u> (1) A definíció megfogalmazható a következőképpen is: <u>egy M sokaság részsokasága egy N sokaságnak, ha $M \subset N$ és a $j : M \longrightarrow N$ kanonikus inklúzió beágyazás.</u>

(2) <u>A nyílt részsokaságok részsokaságok.</u> Tekintsünk ennek igazolása céljából egy M sokaságot, és legyen $\mathcal{U}$ nyílt részsokasága M-nek. Annyit kell csupán ellenőriznünk, hogy tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ pont esetén a

$$(j_*)_p : T_p\mathcal{U} \longrightarrow T_pM$$

derivált injektív lineáris leképezés.

Válasszunk olyan $h \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik, és értelmezzük a

$$k : T_pM \longrightarrow T_p\mathcal{U}, \; v \longmapsto k(v)$$

leképezést a

$$k(v)(f) := v(hf) \quad , \quad f \in C^\infty(\mathcal{U})$$

előírással. Ekkor <u>3.2.</u> (1) értelmében k jól definiált. Tetszőleges $w \in T_p\mathcal{U}$ és $F \in C^\infty(M)$ esetén

$$k \circ (j_*)_p(w)(F) := (j_*)_p(w)(hF) := w(hF \circ j) = w(hF)$$
$$= w(F) \; ,$$

az utolsó két lépésben $T_p\mathcal{U}$ és T_pM azonosíthatóságát, ill. ismét <u>3.2.</u> (1)-et alkalmazva. Így

$$k \circ (j_*)_p = 1_{T_p\mathcal{U}}$$

következik, k tehát balinverze $(j_*)_p$-nek, amely ily módon injektív.

(3) <u>Ha M és N sokaság, a $\varphi : M \longrightarrow N$ leképezés pedig beágyazás, akkor $\varphi(M)$ részsokasága N-nek.</u>

Ennek belátására gondoljuk meg a következőket. Ha $M_1 := \varphi(M)$, akkor $M_1 \subset N$, és a

$$\varphi_1 : M \longrightarrow M_1, \quad p \longmapsto \varphi_1(p) := \varphi(p)$$

leképezés a feltétel értelmében homeomorfizmus. φ_1 által M sima struktúrája átvihető M_1-re, amely így szintén sokasággá, φ_1 pedig diffeomorfizmussá válik. Az $M_1 = \varphi_1(M) = \varphi(M)$ sokaság (szintén a feltétel miatt) topologikus altere N-nek. A $j : M_1 \longrightarrow N$ inklúzió egyenlő a $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ leképezéssel, ez utóbbi pedig (a láncszabály figyelembevételével) inklúzió. $\varphi(M)$ tehát valóban eleget tesz a részsokaságok definíciójában szereplő feltételeknek.

(4) Ha M részsokasága az N sokaságnak, akkor M tetszőleges p pontbeli érintőtere természetes módon azonosítható a $(j_*)_p : T_pM \longrightarrow T_pN$ injektív lineáris leképezés általi képével. Figyelmen kívül hagyva ezért a $(j_*)_p$ leképezést, T_pM-et gyakran közvetlenül T_pN alterének tekintjük.

<u>**4.5. Lemma és definíció.**</u> Legyen N n-dimenziós sokaság, $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ egy térképe N-nek.

(1) Rögzítünk egy $m \in \{1, \dots, n-1\}$ pozitív egészt és egy $a \in u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ pontot. Ha

$$S := \{ p \in \mathcal{U} \mid u^i(p) = e^i(a), \; i \in \{m+1, \dots, n\} \},$$

akkor S m-dimenziós részsokasága N-nek, $(u^i \upharpoonright S)_{i=1}^m$ pedig (globális) koordinátarendszer S számára. Ezt a részsokaságot az $(\mathcal{U}, u)$ térkép egy <u>szeletének</u> nevezzük, ill. azt is mondjuk, hogy S egy <u>n-koordinátaszelete $\mathcal{U}$-nak.</u>

(2) Tekintsük az N sokaság egy M <u>részhalmazát.</u> Az $(\mathcal{U}, u)$ térképet <u>M-hez adaptáltnak</u> nevezzük, ha $\mathcal{U} \cap M$ n-koordinátaszelete $\mathcal{U}$-nak. Ha itt – speciálisan – M <u>részsokasága</u> N-nek, és $\mathcal{U} \cap M$ fölött az $(u^i)_{i=1}^n$ függvénycsalád utolsó $n-m$ tagja konstans (ami az általánosság sérelme nélkül föltehető), akkor az $(u^1, \ldots, u^m)$ függvénycsalád $\mathcal{U} \cap M$-re való leszűkítése lokális koordinátarendszer M-en. Δ

<u>4.6. Tétel.</u> <u>Ha egy M sokaság részsokasága egy N sokaságnak, akkor M minden pontja körül megadható N-nek olyan térképe, amely M-hez adaptált.</u>

A bizonyítást illetően ld. FTT, <u>10.4.</u> Δ

<u>4.7. Következmények.</u> (1) Ha M részsokasága egy N sokaságnak, L egy sokaság, $\varphi : L \longrightarrow N$ pedig olyan sima leképezés, amelyre $\varphi(L) \subset M$ teljesül, akkor a

$$\bar{\varphi} : L \longrightarrow M, \quad p \longmapsto \bar{\varphi}(p) := \varphi(p)$$

leképezés („φ, mint L M-be való leképezése") sima.

(2) Egy sokaság egy <u>részhalmaza</u> legfeljebb egyféleképpen tehető a sokaság <u>részsokaságává.</u>

(3) Egy N sokaság egy M részhalmaza akkor és csak akkor m-dimenziós részsokasága N-nek, ha valamennyi M-beli pont körül megadható az N sokaságnak olyan M-hez adap-

tált térképe, amelynek M-mel képzett koordinátaszelete m-dimenziós.

(4) Egy n-dimenziós N sokaság egy M részhalmaza akkor és csak akkor m-dimenziós részsokasága N-nek, ha minden $p \in M$ ponthoz megadható N-nek olyan $(\mathcal{U}, x)$ p-körüli térképe, hogy

$$x(\mathcal{U} \cap M) = x(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

ahol $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$.

(1) - (3) bizonyítása megtalálható FTT 10.4. és 10.5. szakaszában; (4) pedig (3) egy közvetlen átfogalmazása. Δ

Megjegyzések. (1) A látszólag nyilvánvaló 4.7. (1) megállapítás helyessége alapvetően azon múlik, hogy a részsokaságok topológiája az altér-topológia.

(2) Igen gyakran a 4.7. (4) -ben megfogalmazott tulajdonsággal definiálják a részsokaságokat.

Definíció. Legyen N és Q sokaság, $\varphi : N \longrightarrow Q$ sima leképezés. Azt mondjuk, hogy egy $q \in Q$ pont reguláris értéke φ-nek, ha φ a $\varphi^{-1}(q)$ őskép minden pontjában szubmerzió; ellenkező esetben q-t szinguláris értékként említjük.

4.8. állítás (a reguláris érték tétele). Tegyük fel, hogy N n-dimenziós, Q k-dimenziós sokaság; $\varphi : N \longrightarrow Q$ sima leképezés, és $q \in \operatorname{Im}(\varphi)$ reguláris értéke φ-nek. Ekkor $M := \varphi^{-1}(q)$ $(n-k)$-dimenziós részsokasága N-nek.

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{V}, (y^1, \ldots, y^k))$ q-középpontú térképe Q-nak. Mivel φ szubmerzió a $\varphi^{-1}(q)$

őskép pontjaiban, 4.4.(2) alapján tetszőleges $p \in \varphi^{-1}(q) = M$ pont esetén az

$$u^{n-k+1} := y^1 \circ \varphi \,, \ \ldots\,, \ u^n := y^k \circ \varphi$$

függvények az N sokaság egy p körüli

$$u := (u^1, \ldots, u^{n-k}, u^{n-k+1}, \ldots, u^n)$$

lokális koordinátarendszerré egészíthetők ki; legyen ennek a tartománya $\mathcal{U}$. Ekkor

$$\mathcal{U} \cap M = \mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(q) = \{ a \in \mathcal{U} \mid u^{n-k+1}(a) = \ldots = u^n(a) = 0 \},$$

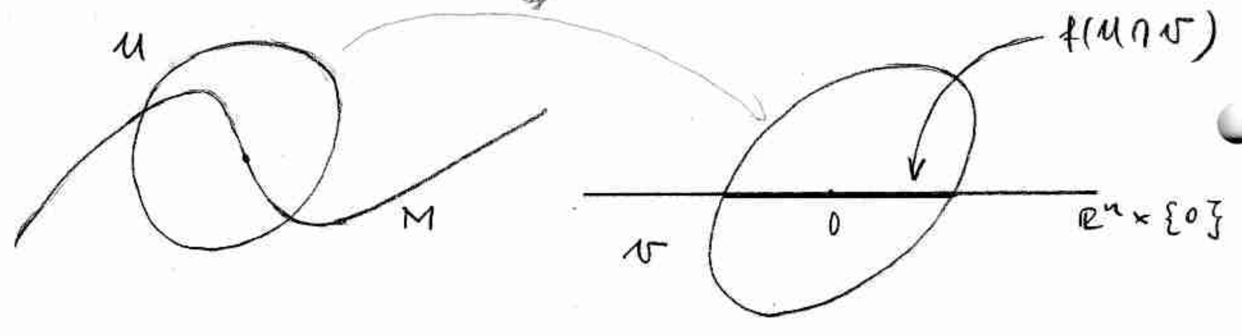
$\mathcal{U} \cap M$ tehát u-koordinátaszelete $\mathcal{U}$-nak, $(\mathcal{U}, u)$ pedig olyan térképe N-nek, amely M-hez adaptált.

Beláthatjuk így, hogy minden $p \in M$ ponthoz megadható az N sokaságnak p körüli, N-hez adaptált térképe, M tehát 4.7.(3) értelmében részsokasága N-nek. Mivel a szeletek $(n-k)$-dimenziósak, ez a részsokaság $(n-k)$-dimenziós. $\square$

<u>4.9. Következmény</u> (az $\mathbb{R}^{n+k}$-beli részsokaságok jellemzése). Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+k}$ valós vektorteret, ahol n és k pozitív egész. Egy $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ részhalmazra a következők ekvivalensek:

(1) Minden $p \in M$ ponthoz létezik a p pontnak olyan $\mathcal{U}$, a $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ origónak olyan $\mathcal{V}$ $\mathbb{R}^{n+k}$-beli környezete, valamint olyan $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ diffeomorfizmus, hogy

$$f(\mathcal{U} \cap M) = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \,; \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}.$$



(2) Minden $p \in M$ pont esetén megadható p-nek egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ környezete és egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ szubmerzió úgy, hogy $\mathcal{U} \cap M = f^{-1}(0)$.

(3) Ellátva M-et az altér-topológiával, minden $p \in M$ pont esetén megadható p-nek egy $\mathcal{V} \subset M$ környezete, egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és egy $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ leképezés úgy, hogy

(i) h differenciálható homeomorfizmusa $\mathcal{U}$-nak $\mathcal{V}$-re;

(ii) h immerzió $\mathcal{U}$ fölött, vagyis tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ pont esetén
$$h'(q) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$
derivált injektív lineáris leképezés.

(1) – (3) bármelyikének teljesülése esetén M részsokasága $\mathbb{R}^{n+k}$-nak. $\triangle$

5. Sokaság érintőnyalábja. Vektormezők és elsőfokú differenciálformák

5. 1. Lemma. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ és $(\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaság egy p pontja körül, akkor érvényes a
$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \qquad (j \in \{1, \dots, n\})$$
transzformációs szabály.

__Bizonyítás.__ Az érintővektorok tanult tételbeli előállítását a $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_p$ érintővektorra alkalmazva, a felírt összefüggéshez jutunk. $\square$

<u>5.2. Konstrukció, állítás, definíció.</u> Legyen M n-dimenziós sokaság.

(1) Tetszőleges $p \in M$ pont esetén jelölje 0_p a T_pM érintőtér zérusvektorát. Ekkor M minden érintővektora egyetlenegy érintőtérbe tartozik, és M összes érintővektorainak halmaza megkapható a

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

unióként. A

$$\tau : TM \longrightarrow M, \quad v \longmapsto \tau(v) := p, \text{ ha } v \in T_pM$$

leképezést TM M-re való <u>természetes projekciójának</u>, röviden <u>projekciójának</u> nevezzük. Ekkor tetszőleges $p \in M$ pont esetén $\tau^{-1}(p) = T_pM$.

(2) Tekintve M-en egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, képezzük az

$$x^i := u^i \circ \tau = e^i \circ u \circ \tau : \tau^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \longrightarrow \mathbb{R},$$

valamint az

$$y^i : v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \longmapsto y^i(v) := v(u^i) \in \mathbb{R}$$

függvényeket ($i \in \{1, \dots, n\}$), és ezekből állítsuk össze az

$$(x, y) := (x^i, y^i)_{i=1}^n = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) : \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

leképezést. <u>Egyértelműen létezik olyan topológia és sima struktúra TM-en, hogy az M sokaság minden $(\mathcal{U}, u)$ térképe esetén $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x, y))$ térképpé válik TM-en.</u> Az így nyert sima struktúrával ellátott TM halmazt az M sokaság <u>érintősokaságának</u> nevezzük. A τ projekció sima leképezése TM-nek M-re. Azt is mondjuk, hogy $\tau : TM \longrightarrow M$ az M sokaság <u>érintőnyalábja</u>.

Bizonyítás. Kijelölve M-nek egy $\mathcal{A}$ megszámlálható atlaszát, azt mutatjuk meg, hogy az

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{ (\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x,y)) \mid (\mathcal{U},u) \in \mathcal{A} \}$$

valóban eleget tesz az 1.3. állítás feltételeinek.

(1) Az értelmezés szerint tetszőleges $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ esetén

$$(x,y)(v) = (u^1(p), \dots, u^n(p), y^1(v), \dots, y^n(v)) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

ha $\tau(v) = p$. A leképezés képhalmaza $u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$, amely nyílt halmaza $\mathbb{R}^{2n}$-nek. Az

$$u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U}),\ (a, (\nu^1, \dots, \nu^n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{u^{-1}(a)}$$

leképezés nyilvánvalóan inverze (x,y)-nak, amely ily módon bijekció $x(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$-re (és injekció $\mathbb{R}^{2n}$-be).

(2)-(3) Legyen $(\mathcal{U},u), (\tilde{\mathcal{U}},\tilde{u}) \in \mathcal{A}$, és tegyük fel, hogy $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Ekkor egyben $\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \neq \emptyset$. Az $(\mathcal{U},u)$ térkép az

$$(x,y) : \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n,$$

az $(\tilde{\mathcal{U}},\tilde{u})$ térkép az

$$(\tilde{x},\tilde{y}) : \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \longrightarrow \tilde{u}(\tilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{R}^n$$

bijekciót származtatja. Az $(x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1}$ átmenet-leképezés az

$$(\tilde{x},\tilde{y})(\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})) = \tilde{u}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{R}^n$$

nyílt halmazt képezi le az

$$(x,y)(\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})) = u(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \times \mathbb{R}^n$$

nyílt halmazra. Megmutatjuk, hogy $(x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1}$ komponensfüggvényei sima függvények.

Legyen – a szokásos módon – $(e^i)_{i=1}^{n}$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere, és jelölje $(\tilde{e}_i)_{i=1}^{2n}$ $\mathbb{R}^{2n}$ kanonikus koordinátarendszerét. Tekintsük egy $(a,b) = (a,(\beta^1,\dots,\beta^n)) \in \tilde{u}(\tilde{U}) \times \mathbb{R}^n$ pontot, és válasszunk ki egy $i \in \{1,\dots,n\}$ indexet.

(a) $\tilde{e}^i \circ (x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1}(a,b) = \tilde{e}^i \circ (x,y)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{\tilde{u}^{-1}(a)}\right)$

$$= \tilde{e}^i\left(u^1(\tilde{u}^{-1}(a)),\dots,u^n(\tilde{u}^{-1}(a)),\ \beta^1,\dots,\beta^n\right)$$

$$= u^i \circ \tilde{u}^{-1}(a) = e^i \circ u \circ \tilde{u}^{-1} \circ pr_1\,(a,b),$$

ahol pr_1 az $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ szorzattér első tényezőjére való természetes projekció. Tehát

$$\underline{\tilde{e}^i \circ (x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1} = e^i \circ u \circ \tilde{u}^{-1} \circ pr_1} \quad (i \in \{1,\dots,n\}).$$

Ezek a függvények simák, hiszen (U,u) és $(\tilde{U},\tilde{u})$ C^∞-kompatibilitása miatt az $u \circ \tilde{u}^{-1}$ átmenetleképezések simák.

(b) $\tilde{e}^{n+i} \circ (x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1}(a,b) = \tilde{e}^{n+i} \circ (x,y)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{\tilde{u}^{-1}(a)}\right)$

$$= y^i\left(\sum_{j=1}^{n} \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{\tilde{u}^{-1}(a)}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\right)_{\tilde{u}^{-1}(a)}\right)(u^i)$$

$$\overset{5.1.}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta^j \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}^{-1}(a))\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_{\tilde{u}^{-1}(a)}\right)\right)(u^i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \beta^j \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j}(\tilde{u}^{-1}(a)),$$

következésképpen

$$\underline{\tilde{e}^{n+i} \circ (x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1} = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{e}^{n+j} \circ pr_2)\left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \circ \tilde{u}^{-1} \circ pr_1\right) \quad (i \in \{1,\dots,n\})},$$

ahonnan kiolvasható, hogy $(x,y) \circ (\tilde{x},\tilde{y})^{-1}$ második n számú koordinátafüggvénye is sima.

<u>(4)</u> Mivel M-nek egy megszámlálható ~~b~~ atlaszából indultunk ki, $\bar{\mathcal{A}}$ szintén megszámlálható.

<u>(5)</u> Legyenek v és w TM különböző elemei.

(a) Ha v és w ugyanabba a T_pM érintőtérbe tartozik, és $(\mathcal{U}, u) \in \mathcal{A}$ p körüli térképe M-nek, akkor $\{v, w\} \subset \tau^{-1}(\mathcal{U})$.

(b) Amennyiben $v \in T_pM$, $w \in T_qM$ és $p \neq q$, akkor megadható a p pont körül olyan $(\mathcal{U}, u)$, a q pont körül pedig olyan $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{u})$ térkép, hogy $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} = \emptyset$, hiszen M Hausdorff-tér. Ebben az esetben

$v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$, $w \in \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}})$ és $\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) = \emptyset$.

Ezzel ellenőriztük az <u>1.3.</u> állítás (1) – (5) feltételeinek teljesülését, amelyek garantálják TM-en a kívánt sima struktúra egyértelmű létezését. Megmutatjuk még, hogy a $\tau : TM \longrightarrow M$ projekció sima leképezés. Jelöljünk ki ebből a célból M-en egy tetszőleges $(\mathcal{U}, u)$ térképet, és tekintsük TM-en az általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x, y))$ térképet. Ekkor $\tau(\tau^{-1}(\mathcal{U})) \subset \mathcal{U}$ (hiszen ténylegesen $\tau(\tau^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$).

Az

$$u \circ \tau \circ (x, y)^{-1} : u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezés simaságát kell vizsgálnunk. Ez azonban teljesül, ugyanis tetszőleges $(a, (\beta^1, \dots, \beta^n)) \in u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$ esetén

$$u \circ \tau \circ (x, y)^{-1}(a, (\beta^1, \dots, \beta^n)) = u \circ \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \beta^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{u^{-1}(a)}\right)$$
$$= u(u^{-1}(a)) = a = pr_1(a, b),$$

és így

$$u \circ \tau \circ (x, y)^{-1} = pr_1 \restriction u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n .$$

A mondottakból 2.1. (3) alapján következik τ simasága. □

<u>5.3. Lemma és definíció.</u> Legyen M és N sokaság, $\varphi : M \longrightarrow N$ sima leképezés. Ha

$$\varphi_* : TM \longrightarrow TN, \quad \varphi_* \restriction T_pM := (\varphi_*)_p \qquad (p \in M),$$

akkor φ_* sima leképezése TM-nek TN-be.

A φ_* leképezést φ <u>derivált leképezésének</u> vagy <u>érintőleképezésének</u> nevezzük. Δ

<u>5.4. Definíció és lemma.</u> Legyen M n-dimenziós sima sokaság.

(1) Egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazon <u>durva vektormezőn</u> olyan $X : \mathcal{U} \longrightarrow TM$ leképezést értünk, amely eleget tesz a $\tau \circ X = 1_{\mathcal{U}}$ feltételnek, vagyis amelyre teljesül, hogy minden $p \in \mathcal{U}$ esetén

$$X_p := X(p) \in T_p\mathcal{U} = T_pM.$$

Egy $X : \mathcal{U} \longrightarrow TM$ durva vektormezőt <u>folytonosnak</u>, ill. <u>simának</u> mondunk aszerint, amint folytonos, ill. sima leképezése $\mathcal{U}$-nak TM-be.

(2) Jelöljünk ki az M sokaságon egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és tekintsük TM-en az általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor a

$$\frac{\partial}{\partial u^i} : \mathcal{U} \longrightarrow TM, \quad p \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

leképezések sima vektormezők, amelyeket az $(\mathcal{U}, u)$ térképhez tartozó <u>koordinátavektormezőknek</u> hívunk.

Amennyiben $X : M \longrightarrow TM$ durva vektormező, úgy az

$$X^i := y^i \circ (X \restriction \mathcal{U}) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

függvényeket X <u>komponensfüggvényeinek</u> nevezzük az $(\mathcal{U}, u)$ térképre vonatkozóan. Komponensfüggvényei segítségével X $\mathcal{U}$ fölött az

$$X \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

alakban állítható elő, amely helyett azt is írjuk, hogy

$$X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i} .$$

Δ

5.5. Állítás. Egy $X : M \longrightarrow TM$ durva vektormezőre a következő állítások ekvivalensek:

(1) Az X leképezés sima.

(2) X komponensfüggvényei M bármely térképére vonatkozóan simák.

(3) Tetszőleges $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz és $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ függvény esetén az

$$Xf : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto (Xf)(p) := X_p(f)$$

függvény sima.

Bizonyítás. (1) ⟹ (2) Válasszunk egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet M-en, és tekintsük a $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ indukált térképet TM-en. X simaságából 2.2. (1) alapján következik, hogy az $X \restriction \mathcal{U}$ leképezés is sima, és ezért a vektormező $y^i \circ (X \restriction \mathcal{U}) = X^i$ komponensfüggvényei szintén simák.

(2) ⟹ (3) Föltehető, hogy az adott nyílt halmaz egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép tartománya. Ekkor tetszőleges $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ esetén $Xf = \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) f = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$, és itt a jobb oldalon a feltétel értelmében sima függvény áll.

(3) ⟹ (1) Kiválasztva M-en egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és tekintve TM-en az általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x, y)) = (\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképet, elegendő azt ellenőrizni, hogy az

$$(x, y) \circ X \circ u^{-1} : u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$$

leképezés sima. Ennek koordinátafüggvényei az

$$x^i \circ X \circ u^{-1} = u^i \circ \tau \circ X \circ u^{-1} = e^i \circ u \circ u^{-1} = e^i$$

és az

$$y^i \circ X \circ u^{-1} = X^i \circ u^{-1}$$

függvények ($i \in \{1, \dots, n\}$). Itt az első n függvény simasága nyilvánvaló. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy

$X^i := y^i \circ X = Xu^i$, így a feltétel alapján a második n koordinátafüggvény simasága is következik. $\square$

<u>Megállapodás.</u> A továbbiakban a <u>sima vektormezőket</u> egyszerűen <u>vektormezőkként</u> említjük. Ha M sokaság és $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, akkor az $\mathcal{U}$-n értelmezett vektormezők halmazára az $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ jelölést használjuk.

<u>5.6. Lemma.</u> Egy M sokaság $\mathcal{U}$ nyílt részhalmazán értelmezett vektormezők $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ halmaza modulus a $C^\infty(\mathcal{U})$ gyűrű fölött, ha két vektormező összegét és egy vektormező függvénnyel szorzatát pontonként értelmezzük, vagyis ha tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ és $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ esetén

$$(X+Y)_p := X_p + Y_p \ ; \ (fX)_p := f(p)X_p \ ; \ p \in M. \qquad \Delta$$

<u>5.7. Állítás.</u> Megadva egy M sokaság egy p pontját és egy $v \in T_pM$ érintővektorát, van olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $X(p) = v$.

<u>Bizonyítás.</u> Ld. FTT, <u>7.3.</u> Δ

<u>5.8. Definíció és lemma.</u> Legyen adva egy M sokaság és egy $\gamma : I \to M$ görbe.

(1) Egy $X : I \to TM$ sima leképezést <u>γ-menti vektormezőnek</u> nevezzük, ha eleget tesz a $\tau \circ X = \gamma$ feltételnek, azaz ha minden $t \in I$ esetén $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Egy $X : I \to TM$ γ-menti vektormezőt <u>kiterjeszthetőnek</u> mondunk, ha van olyan $\tilde{X}$ vektormező, amely egy, az $\operatorname{Im}(\gamma) \subset M$ képhalmazt tartalmazó nyílt halmazon van értelmezve, és amelyre teljesül, hogy $\tilde{X} \circ \gamma = X$.

(2) Az összes γ-menti vektormezők a pontonkénti

összeadásával és a $C^\infty(I)$-beli függvényekkel való szorzásával modulust alkotnak a $C^\infty(I)$ gyűrű fölött; ezt a modulust $\mathfrak{X}(\gamma)$-val jelöljük. Δ

<u>5.9. Példák.</u> (1) Ha $\gamma: I \longrightarrow M$ görbe az M sokaságon és $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor $X \circ \gamma$ nyilvánvalóan γ-menti vektormező.

(2) Egy M sokaságbeli $\gamma: I \longrightarrow M$ görbe <u>sebesség-vektormezőjén</u> a

$$\dot{\gamma} : I \longrightarrow TM \ , \ t \longmapsto \dot{\gamma}(t) := (\gamma_*)_t \left(\frac{d}{dr}\right)_t \in T_{\gamma(t)} M$$

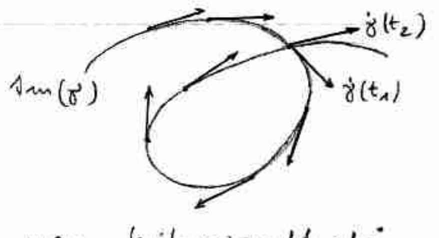
leképezést értjük. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ egy térkép egy $\gamma(t)$ pont körül, akkor

$$\dot{\gamma} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma)' \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) ;$$

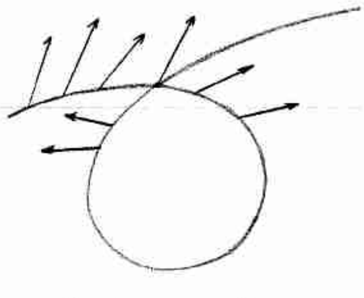
következésképpen $\dot{\gamma}$ sima leképezés, és így $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

(3) <u>Nem minden γ-menti vektormező kiterjeszthető</u>: ha például egy $\gamma: I \longrightarrow M$ görbére valamely $t_1 \neq t_2$ paramétereknél $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ és $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$ teljesül, akkor $\dot{\gamma}$ nem kiterjeszthető.

<u>Illusztráció</u>



nem kiterjeszthető vektormező



kiterjeszthető vektormező

<u>Definíció.</u> (1) Egy A valós vektorteret <u>valós algebrának</u> (a továbbiakban röviden <u>algebrának</u>) nevezünk, ha el van látva egy <u>szorzásnak</u> mondott

$$A \times A \longrightarrow A \ , \ (a, b) \longmapsto ab \quad \text{R-bilineáris}$$

leképezéssel. Egy A és egy B algebra közötti <u>homomorfizmuson</u> olyan $\varphi: A \longrightarrow B$ $\mathbb{R}$-lineáris leképeit értünk, amely műveletartó a szorzásra nézve, vagyis amelyre $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$ teljesül minden $a_1, a_2 \in A$ esetén. A bijektív algebra-homomorfizmusokat izomorfizmusoknak hívjuk.

(2) Egy A algebra egy derivációja olyan $\theta : A \longrightarrow A$ $\mathbb{R}$-lineáris transzformáció, amelyre teljesül a

$$\theta(ab) = \theta(a)b + a\,\theta(b) \quad ; \quad a, b \in A$$

Leibniz-szabály.

(3) Legyen A (valós) algebra, és jelölje az A-beli szorzást a $[\ ,\ ]$ szimbólum. Azt mondjuk, hogy A Lie-algebra, ha tetszőleges $a, b, c \in A$ esetén

(L1) $[a, a] = 0$;

(L2) $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [c,[a,b]] = 0$

(Jacobi - azonosság).

A $[\ ,\ ]$ műveleti jelet ekkor Lie-zárójelként is említjük.

5.10. Megjegyzések. (1) Ha az A valós vektortér a $[\ ,\ ]$ Lie-zárójellel ellátva Lie-algebra, akkor a szorzás antikommutatív (vagy ferdeszimmetrikus): tetszőleges $a, b \in A$ esetén $[a,b] = -[b,a]$.

Valóban,

$$0 \overset{(L1)}{=} [a+b,\ a+b] = [a,a] + [b,a] + [a,b] + [b,b]$$
$$= [b,a] + [a,b],$$

amiből $[a,b] = -[b,a]$ adódik.

(2) Egy A algebra összes derivációi, mint lineáris transzformációk valós vektorteret alkotnak, közvetlenül látható ugyanis, hogy két deriváció összege és egy deriváció skalárszorosa is deriváció.

Jelölje ezt a vektorteret $\mathrm{Der}\,A$. $\mathrm{Der}\,A$ Lie-algebrává válik, ha tetszőleges $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Der}\,A$ Lie-zárójelét a

$$[\theta_1, \theta_2] := \theta_1 \circ \theta_2 - \theta_2 \circ \theta_1$$

kommutátorszorzatként értelmezzük.

5.11. Állítás. Egy M sokaság összes vektormezőinek valós vektortere kanonikusan izomorf a $C^\infty(M)$ valós algebra összes derivációinak valós vektorterével; ilyen izomorfizmust ad meg az

$$\left\| \begin{array}{l} X \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow L_X \in \mathrm{Der}\,C^\infty(M), \\ L_X f := Xf, \quad \text{ha } f \in C^\infty(M) \end{array} \right.$$

leképezés.

Bizonyítás. (1) $L_X \in \mathrm{Der}\,C^\infty(M)$ valóban fennáll, példaként ellenőrizzük a Leibniz-szabály teljesülését. Ha $f, g \in C^\infty(M)$ és $p \in M$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}(L_X(fg))(p) &:= (X(fg))(p) := X_p(fg) = X_p(f)g(p) + \\ &+ f(p)X_p(g) = (Xf)(p)g(p) + f(p)(Xg)(p) \\ &= ((Xf)g + f(Xg))(p) = ((L_Xf)g + fL_Xg)(p);\end{aligned}$$

innen p tetszőlegessége folytán a kívánt

$$L_X(fg) = (L_Xf)g + fL_Xg$$

reláció következik. Szintén közvetlenül látható, hogy az

$$X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto L_X \in \mathrm{Der}\,C^\infty(M)$$

leképezés $\mathbb{R}$-lineáris.

(2) Megmutatjuk, hogy a vizsgált leképezés injektív. Ehhez elég azt ellenőrizni, hogy a nulltere a zérus vektormező alkotja; tegyük fel tehát, hogy valamely $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre $L_X = 0 \in \mathrm{Der}\,C^\infty(M)$ teljesül. Ekkor bármely $f \in C^\infty(M)$

esetén $L_X f = Xf = 0$. Kiválasztva egy tetszőleges $p \in M$ pontot, és rögzítve p körül egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, a bázistétel alapján így
$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(u^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_{i=1}^n (Xu^i)(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = 0$$
adódik, amiből p tetszőlegessége folytán $X = 0$ következik.

(3) Belátjuk végül, hogy az $X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto L_X \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$ leképezés <u>szürjektív</u>. Megadva egy $\theta \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$ derivációt, értelmezzük egy
$$X : M \longrightarrow TM, \quad p \longmapsto X(p) =: X_p$$
leképezést azzal az előírással, hogy

<u>tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén $X_p(f) := (\theta f)(p)$.</u>

Felhasználva, hogy $\theta \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$, közvetlenül adódik, hogy ekkor $X_p \in T_pM$, és így X durva vektormező. Az is kiolvasható azonban a definícióból, hogy $Xf = \theta f$, minden $f \in C^\infty(M)$ esetén, így <u>5.5.</u> alapján $X \in \mathfrak{X}(M)$. Világos végül, hogy $L_X = \theta$, amivel igazoltuk a szürjektivitást. □

<u>5.12. Következmény és definíció.</u> Legyen adva egy M sokaság. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkhöz létezik egy és csak egy olyan $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy
$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y];$$
ezt a vektormezőt az X és Y <u>vektormező Lie-zárójelének</u> nevezzük. Az $[X,Y]$ vektormező tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvényen az
$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$
összefüggés szerint hat, és így bármely $p \in M$

pont esetén

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Az M sokaság vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$ valós vektortere a Lie-zárójel-képzéssel ellátva Lie-algebra.

Bizonyítás. Megadva egy X és egy Y vektormezőt az M sokaságon, tekintsük az L_X és az L_Y derivációt, és képezzük ezek $[L_X, L_Y]$ kommutátorát. Mivel $[L_X, L_Y] \in \mathrm{Der}\, C^\infty(M)$, az előző állítás értelmében létezik egy és csak egy olyan vektormező M-en – jelölje ezt $[X,Y]$ –, hogy

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y].$$

Ekkor tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$[X,Y]f =: L_{[X,Y]}f = [L_X, L_Y]f = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) =: X(Yf) - Y(Xf),$$

és így bármely $p \in M$ pontban

$$[X,Y]_p(f) = ([X,Y]f)(p) = (X(Yf) - Y(Xf))(p) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Mivel $\mathrm{Der}\, C^\infty(M)$ Lie-algebra a kommutátor-szorzattal, közvetlenül adódik az értelmezés alapján, hogy $\mathfrak{X}(M)$ Lie-algebrává válik a vektormezők Lie-zárójelével. □

5.13. Állítás. Ha X és Y vektormező, f pedig sima függvény az M sokaságon, akkor

$$[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X, \quad [X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y.$$

Bizonyítás. Alkalmazni fogjuk azt az egyszerű észrevételt, hogy tetszőleges $h \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$(*) \qquad (fX)h = f(Xh).$$

Valóban, bármely $p \in M$ pontban

$$((fX)h)(p) = (fX)_p(h) = (f(p)X_p)(h) = f(p)X_p(h) =$$

$= f(p)\,(Xh)(p) \;= (f(Xh))\,(p).$

Rátérve az állítás bizonyítására, azt mutatjuk meg, hogy a felírt relációk bal és jobb oldala tetszőleges $h \in C^\infty(M)$ függvényen ugyanúgy hat.

$$[fX,Y]h \overset{5.12.}{=} (fX)(Yh) - Y((fX)h) \overset{(*)}{=} f(X(Yh)) - Y(f(Xh)) = f(X(Yh)) - (Yf)(Xh) - f(Y(Xh))$$
$$\overset{(*)}{=} f(X(Yh) - Y(Xh)) - ((Yf)X)h = f([X,Y]h) - ((Yf)X)h \overset{(*)}{=} (f[X,Y] - (Yf)X)h\,;$$

ezzel igazolt az első formulát. A második formula ebből már adódik a Lie-zárójel antikommutativitása alapján:

$$[X,fY] = -[fY,X] = -(f[Y,X] - (Xf)Y) = f[X,Y] + (Xf)Y. \qquad \square$$

__Definíció.__ Legyen φ sima leképezés egy M sokaságnak egy N sokaságba. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ és
$$\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi,$$
akkor azt mondjuk, hogy X és Y __φ-megfelelő__, és az $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ jelölést használjuk.

__5.14. Lemma.__ Legyen M és N sokaság, $\varphi: M \to N$ pedig sima leképezés. Az $X \in \mathfrak{X}(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező akkor és csak akkor φ-megfelelő, ha tetszőleges $h \in C^\infty(N)$ függvény esetén
$$X(h\circ\varphi) = Yh \circ \varphi.$$

__Bizonyítás.__ A következő megállapítások ekvivalensek:

(1) $\forall\, h \in C^\infty(N):\quad X(h\circ\varphi) = Yh\circ\varphi.$

(2) $\forall\, h \in C^\infty(N),\ \forall\, p \in M:\quad (X(h\circ\varphi))_p = (Yh\circ\varphi)(p).$

(3) $\forall\, h \in C^\infty(N),\ \forall\, p \in M:\quad X_p(h\circ\varphi) = (Yh)(\varphi(p)).$

(4) $\forall\, h \in C^\infty(N),\ \forall\, p \in M:\quad ((\varphi_*)_p(X_p))(h) = Y_{\varphi(p)}(h).$

(5) $\forall\, p \in M:\quad (\varphi_*)_p(X_p) = Y_{\varphi(p)}.$

(6) $\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi.$

(7) $X \underset{\varphi}{\sim} Y.$ $\square$

<u>5.15. Állítás.</u> Legyen M és N sokaság, $\varphi: M \longrightarrow N$ sima leképezés. Ha $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$; $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ és $X_1 \underset{\varphi}{\sim} Y_1$, $X_2 \underset{\varphi}{\sim} Y_2$, akkor teljesülnek a következők:

(1) Tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda X_1 + \mu X_2 \underset{\varphi}{\sim} \lambda Y_1 + \mu Y_2$ – a φ-megfelelés során az $\mathbb{R}$-lineáris kombinációk megőrződnek.

(2) Tetszőleges $h \in C^\infty(N)$ esetén $(h \circ \varphi) X_1 \underset{\varphi}{\sim} h Y_1$.

(3) $[X_1, X_2] \underset{\varphi}{\sim} [Y_1, Y_2]$ – φ-megfelelésnél a vektormezők Lie-zárójele megőrződik.

<u>Bizonyítás.</u> Mindhárom észrevétel egyszerűen igazolható az előző lemma ismételt alkalmazásával. Δ

<u>5.16. Lemma és definíció.</u> Legyen M és N sokaság, s tegyük fel, hogy létezik közöttük $\varphi: M \longrightarrow N$ diffeomorfizmus.

(1) Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor a

$$\varphi_\# X := \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} : N \longrightarrow TN$$

leképezés vektormező az N sokaságon, amelyet az X vektormező <u>φ általi előretoltjának</u> („push-forward") nevezünk. Erre teljesül, hogy

$$X \underset{\varphi}{\sim} \varphi_\# X,$$

és további $\mathfrak{X}(N)$-beli vektormező nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A

$$\varphi_\# : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N), \quad X \longmapsto \varphi_\# X$$

leképezés izomorfizmus az $\mathfrak{X}(M)$ és az $\mathfrak{X}(N)$ Lie-algebra között, így tetszőleges $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\varphi_\# [X_1, X_2] = [\varphi_\# X_1, \varphi_\# X_2].$$

(2) Egy $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező <u>φ általi vissza-</u>

<u>húzottján</u> („pull-back") a

$$\varphi^{\#}Y := (\varphi_*)^{-1}\circ Y\circ\varphi = (\varphi^{-1})_*\circ Y\circ\varphi = (\varphi^{-1})_{\#}Y$$

$\mathfrak{X}(M)$-beli vektormezőt értjük.

(3) Ha $\psi: N \longrightarrow Q$ további diffeomorfizmus, akkor

$$(\psi\circ\varphi)_{\#} = \psi_{\#}\circ\varphi_{\#}\,. \qquad \Delta$$

<u>Megállapodások és megjegyzések.</u> Legyen adva egy M sokaság.

(1) Az M sokaság egy p-pontbeli T_pM érintőterének $(T_pM)^*$ duálisára a T_p^*M jelölést és a p-beli <u>koérintő-tér</u> (vagy <u>kotangens-tér</u>) elnevezést használjuk. T_p^*M elemeit p-beli <u>koérintő vektorok</u>nak vagy röviden <u>kovektorok</u>nak hívjuk. Az összes koérintő-tér $T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ (diszjunkt) uniója az 5.2.-ban látott mintára szintén sima struktúrával ruházható fel; így jutunk az M sokaság <u>koérintő/kotangens sokaságá</u>hoz.

(2) Az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-modulus duális modulusára az $\mathfrak{X}^*(M)$ jelölést használjuk; $\mathfrak{X}^*(M)$ elemei tehát az

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ X \longmapsto \alpha(X)$$

$C^\infty(M)$-lineáris leképezések.

<u>5.17. Definíció és lemma.</u> Egy M sokaságon adott <u>elsőfokú differenciálformán</u>, röviden <u>1-formán</u> olyan

$$\omega : p\in M \longmapsto \omega(p) =: \omega_p \in T_p^*M$$

leképezést értünk, amely eleget tesz a következő <u>simasági feltételnek</u>:

> tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén az
> $\omega(X): M \longrightarrow \mathbb{R},\ p \longmapsto \omega(X)(p) := \omega_p(X_p)$
> függvény sima.

Egy M sokaságon értelmezett összes elsőfokú differenciálformák modulust alkotnak a $C^\infty(M)$ gyűrű fölött, ha két 1-forma összegét, ill. egy 1-forma függvénnyszeresét a „pontonkénti elv" alapján, vagyis az

$$(\omega_1+\omega_2)_p := (\omega_1)_p + (\omega_2)_p \;, \quad \text{ill.} \quad (f\omega)_p := f(p)\,\omega_p$$

előírással értelmezzük. Δ

Jelölés $\mathcal{A}_1(M)$ – az M sokaság 1-formáinak $C^\infty(M)$-modulusa.

Megjegyzés. Ha $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, értelemszerűen szólhatunk az $\mathcal{U}$ fölötti 1-formák $C^\infty(\mathcal{U})$-modulusáról.

5.18. Definíció és lemma. Egy $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvény $p \in M$ pontbeli differenciálján a

$$(df)_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R},\quad v \longmapsto (df)_p(v) := v(f)$$

függvényt értjük. Ekkor $(df)_p \in T_p^*M$, és a

$$df : M \longrightarrow T^*M,\quad p \longmapsto (df)_p$$

leképezés elsőfokú differenciálforma M-en. Ezt az 1-formát az f függvény differenciáljának nevezzük.

Bizonyítás. $(df)_p \in T_p^*M$ teljesülése közvetlenül kiolvasható a definícióból. Mivel tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$(df)(X)(p) := (df)_p(X_p) := X_p(f) = (Xf)(p)\,,$$

tehát

$$df(X) = Xf \in C^\infty(M)\,,$$

df a simasági feltételnek is eleget tesz. $\square$

5.19. Lemma. Jelöljünk ki egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet az M sokaság egy p pontja körül. Ekkor:

(1) $\left((du^i)_p\right)_{i=1}^{n}$ a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^{n}$ bázishoz duális bázisa a T_p^*M koérintő térnek.

(2) Tetszőleges $v^* \in T_p^*M$ kovektor a
$$v^* = \sum_{i=1}^{n} v^*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p (du^i)_p$$
alakban állítható elő a p-beli koordináta-differenciálok lineáris kombinációjaként. Speciálisan, ha $f \in C^\infty(M)$, akkor
$$(df)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}(p)\,(du^i)_p$$
írható.

(3) Ha $\omega \in \mathcal{A}_1(M)$, $f \in C^\infty(M)$, akkor
$$\omega \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) du^i, \quad df \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}\, du^i .$$

(4) Amennyiben $\left(\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^{n}\right)$ további térkép p körül, úgy érvényes a
$$(d\tilde{u}^i)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j}(p)\,(du^j)_p \qquad (i \in \{1, \dots, n\})$$
transzformációs szabály. Δ

5.20. Lemma. A
$$d : C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{A}_1(M), \quad f \longmapsto df$$
leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) $\mathbb{R}$-lineáris;

(2) eleget tesz a $d(fg) = g\,df + f\,dg$ szorzat-szabálynak;

(3) tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ esetén
$$d(h \circ f) = (h' \circ f)\,df .$$
Δ

5.21. Állítás. Egy M sokaság 1-formáinak $C^\infty(M)$-modulusa kanonikusan izomorf a sokaság vektormezői modulusának duálisával, ilyen izomorfizmust ad meg az
$$\omega \in \mathcal{A}_1(M) \longmapsto \tilde{\omega} \in \mathfrak{X}^*(M);\ \tilde{\omega}(X) := \omega(X), \text{ ha } X \in \mathfrak{X}(M)$$
leképezés. Δ

6. Tenzorok és differenciálformák

6.1. Tenzorok moduluson Ebben a pontban K-val végig kommutatív, egységelemes gyűrűt jelölünk és a K gyűrű fölötti modulusokat, röviden K-modulusokat tekintünk. Emlékeztetünk rá, hogy egy (additív módon írt) V kommutatív csoportot *K-modulusnak* nevezünk, ha adva van egy *skalárral való szorzásnak* mondott

$$K \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

leképezés, amelyre formálisan ugyanazokat az axiómákat írjuk elő, mint a vektorterek esetén a megfelelő leképezésre. Így ha speciálisan K test, akkor visszakapjuk a vektortér fogalmát. A vektorterek elméletének alapvető fogalmai változtatás nélkül átvihetők modulusok általánosságába (vektor-altér helyett részmodulusról szólunk), a velük kapcsolatos állítások jelentős része azonban érvényét veszti.

Modulusokkal az eddigiekben már találkoztunk; gondoljunk egy M sokaság vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$, 1-formáinak $\mathcal{A}_1(M)$ $C^\infty(M)$-modulusára.

(1) Ha $V_1, \dots, V_s$ K-modulus, akkor ezek $V_1 \times \dots \times V_s$ Descartes-szorzata az értelemszerű komponensenkénti összeadással, ill. skalárral való szorzással szintén K-modulus, amelyet az adott modulusok *direkt szorzatának* és *(külső) direkt összegének* egyaránt nevezünk, s az utóbbi esetben $\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ -vel jelölünk. Amennyiben $V_1 = \dots = V_s =: V$, úgy az s-tényezős Descartes-szorzatra a V^s jelölést

használjuk.

(2) Legyenek $V_1, \dots, V_s$, W $(s \in \mathbb{N}^*)$ K-modulusok. Egy

$$A : V_1 \times \dots \times V_s \longrightarrow W$$

leképezést <u>K-multilineárisnak</u> mondunk, ha „valamennyi változójában K-lineáris", azaz minden $i \in \{1, \dots, s\}$ index és tetszőlegesen rögzített $v_j \in V_j$, $j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}$ elemek esetén a

$$v \in V_i \longmapsto A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s) \in W$$

leképezés K-lineáris.

(3) Ha V K-modulus, akkor V-nek a K skalártartományba való összes K-lineáris leképezései K-modulust alkotnak az összeadás és a skalárral való szorzás szokásos, „elementenkénti" értelmezése esetén. Ezt a K-modulust V^*-gal jelöljük és V <u>duális modulusának</u> nevezzük.

(4) Legyenek r és s nemnegatív egészek, föltéve, hogy nem mindkettőjük zérus. Egy <u>V K-modulus fölötti, (r,s)-típusú, mégpedig r-edrendben kontravariáns, s-edrendben kovariáns tenzoron</u>

$$A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$$

<u>K-multilineáris</u> függvényt értünk, megállapodva abban, hogy $r = 0$ esetén A V^s-nek, $s = 0$ esetén pedig A $(V^*)^r$-nek K-ba való leképezése. A $(0,s)$-típusú tenzorokat <u>s-edrendben kovariáns</u>, az $(r,0)$-típusúakat <u>r-edrendben kontravariáns</u> tenzoroknak hívjuk. A V fölötti, (r,s)-típusú tenzorok halmazára a $T^r_s(V)$ jelölést használjuk; $T_s(V) := T^0_s(V)$, $T^r(V) := T^r_0(V)$; megállapodunk

végül abban is, hogy $T^0_0(V) := K$. Világos a definícióból, hogy $T^0_1(V) = V^*$.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $T^r_s(V)$ a függvények összeadásának és skalárral való szorzásának szokásos értelmezése esetén K-modulus.

~o~

A bevezetett általános tenzorfogalom lefedi azt a számunkra legfontosabb két esetet, amikor is az alapul vett modulus az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-modulus, ill. egy M sokaság tetszőleges p-pontbeli T_pM érintőtere.

Definíció. Egy M sokaságon adott tenzoron az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-moduluson adott tenzort értünk.

Megjegyzések. (1) Egy M-sokaság (r,s)-típusú tenzorainak $C^\infty(M)$-modulusára a

$$\mathcal{T}^r_s(M) := T^r_s(\mathfrak{X}(M))$$

jelölést használjuk. Speciálisan – a 6.1. (4)-ben mondottaknak megfelelően –

$$\mathcal{T}_s(M) := \mathcal{T}^0_s(M), \quad \mathcal{T}^r(M) := \mathcal{T}^r_0(M), \quad \mathcal{T}^0_0(M) := C^\infty(M).$$

(2) Az értelmezés szerint $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ azt jelenti, hogy A valamennyi változójában $C^\infty(M)$-lineáris leképezés $(\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s$-nek $C^\infty(M)$-be. Annak eldöntésénél, hogy egy

$$A : (\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

leképezés tenzoriális-e, az additivitás ellenőrzése gyakran igen egyszerű; a kritikus kérdés a a függvények kiemelhetősége.

6.2. Példák. Legyen adva egy M sokaság.

(1) A $K : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, $(\theta, X) \longmapsto K(\theta, X) := \theta(X)$

nyilvánvalóan $C^\infty(M)$ - lineáris mindkét változójában, így (1,1) - tenzor M-en. Ezt a tenzort az M-en adott <u>Kronecker-tenzornak</u> nevezzük.

(2) Rögzítsünk egy $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M) \cong \mathcal{A}_1(M)$ nemzérus elsőfokú differenciálformát, és tekintsük az

$$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$
$$(X,Y) \longmapsto F(X,Y) := X(\omega(Y))$$

leképezést. F az első változójában $C^\infty(M)$ - lineáris, a második változójában azonban csak additív, ugyanis tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$F(X, fY) = X(\omega(fY)) = X(f\omega(Y)) = (Xf)\,\omega(Y) + f\,X(\omega(Y))$$
$$= (Xf)\,\omega(Y) + f\,F(X,Y) \neq f\,F(X,Y).$$

F ily módon <u>nem tenzor.</u>

(3) <u>Tenzori szorzat.</u> Összeadni csak azonos típusú tenzorokat, bármely két M-en adott tenzorból képezhető azonban egy alkalmas szorzási eljárással további M-en adott tenzor. Legyen a jobb áttekinthetőség céljából $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$, $B \in \mathcal{T}^1_2(M)$. Ha tetszőleges $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formák és $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$A \otimes B(\theta_1, \theta_2, X_1, X_2, X_3) := A(\theta_1, X_1)\,B(\theta_2, X_2, X_3),$$

akkor közvetlenül látható, hogy $A \otimes B \in \mathcal{T}^2_3(M)$. Ezt a tenzort az A és a B tenzor <u>tenzori szorzatának</u> nevezzük. Tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ és $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$ $A \otimes B \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}(M)$ tenzori szorzatának értelmezése ezek után kézenfekvő. Megállapodunk abban, hogy ha $f \in C^\infty(M) = \mathcal{T}^0_0(M)$ és $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, akkor $f \otimes A = A \otimes f := fA$.

A tenzori szorzat $C^\infty(M)$ - bilineáris abban az értelemben, hogy ha A_1 és A_2 azonos típusú, B tetszőleges tenzor M-en; $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, akkor

$$(f_1A_1 + f_2A_2) \otimes B = f_1(A_1 \otimes B) + f_2(A_2 \otimes B),$$

s analóg reláció érvényes a második tényezőre is.

A definícióból kiolvasható, hogy a tenzori szorzat asszociatív: tetszőleges M-en adott A, B, C tenzorok esetén $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$. Így többtényezős tenzori szorzatnál a zárójelek mellőzhetők. A kommutativitás viszont nem teljesül a tenzori szorzatra. Legyenek ennek illusztrálására ω és η lineárisan független elemei az $\mathfrak{X}^*(M)$ $C^\infty(M)$-modulusnak. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\omega \otimes \eta\,(X, Y) = \omega(X)\eta(Y)\,; \quad \eta \otimes \omega(X, Y) = \eta(X)\omega(Y),$$

s itt a jobb oldalak egyenlősége nyilván nem remélhető. A függvények viszont minden tenzorral kommutálnak:

$$f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes fB.$$

Ha A „tisztán kovariáns", B „tisztán kontravariáns" tenzor, akkor $A \otimes B = B \otimes A$ szintén teljesül.

6.3. Állítás (interpretációk). (1) Egy M sokaság elsőrendű kontravariáns tenzorainak $\mathcal{T}^1_0(M) = (\mathfrak{X}^*(M))^*$ $C^\infty(M)$-modulusa kanonikusan izomorf a sokaság vektormezőinek modulusával, ilyen izomorfizmust ad meg $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathcal{T}^1_0(M)$ között az

$$(*)\quad \left\| \begin{array}{l} X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \gamma_X \in \mathcal{T}^1_0(M), \\ \gamma_X(\theta) := \theta(X) = \mathcal{K}(\theta, X), \text{ ha } \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \end{array} \right.$$

leképezés.

(2) Egy M sokaság $(1,s) \neq (1,0)$ típusú tenzorainak $\mathcal{T}^1_s(M)$ $C^\infty(M)$-modulusa kanonikusan izomorf az

$$(\mathfrak{X}(M))^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$C^\infty(M)$-multilineáris leképezések $L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ modulusával, ilyen izomorfizmust ad meg az

$$(**)\quad \left\| \begin{array}{l} A \in L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) \longmapsto \bar{A} \in \mathcal{T}^1_s(M), \\ \bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) := \theta\,(A(X_1, \dots, X_s)) \end{array} \right.$$

$(\theta \in \mathfrak{X}^*(M);\ X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M))$ leképezés. Δ

<u>Megjegyzések.</u> (1) Ha $s = 1$, akkor $L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) =: \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ az $\mathfrak{X}(M)$ modulus $C^\infty(M)$-lineáris transzformációinak, vagyis az endomorfizmusainak a modulusa. A $(**)$ izomorfizmusnál az $1_{\mathfrak{X}(M)}$ identikus transzformációnak az az $\bar{1}_{\mathfrak{X}(M)}$ $(1,1)$-tenzor felel meg, amelynél tetszőleges $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\bar{1}_{\mathfrak{X}(M)}(\theta, X) := \theta\,(1_{\mathfrak{X}(M)}(X)) = \theta(X) = K(\theta, X),$$

tehát $\bar{1}_{\mathfrak{X}(M)}$ éppen a K Kronecker-tenzor – és ez indokolja az utóbbi elnevezését.

(2) A továbbiakban $L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ elemeit külön kommentár nélkül $(1,s)$-típusú tenzoroknak tekintjük, és a $(**)$-beli formulát csak szükség esetén alkalmazzuk. $L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ elemeit <u>vektorértékű tenzoroknak</u> is említjük.

<u>6.4. Lemma.</u> Ha a $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formák vagy az $X_1, \dots, X_s$ vektormezők valamelyike zérust vesz fel egy $p \in M$ pontban, akkor tetszőleges

$A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor esetén
$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$
<u>Bizonyítás.</u> Tegyük fel, hogy például $X_s(p) = 0$. Jelöljünk ki a p pont körül egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor
$$X_s \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$
írható, ahol
$$X^i = X_s u^i \in C^\infty(\mathcal{U}) \; ; \; i \in \{1, \dots, n\}.$$
Válasszunk olyan $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik. Képezzük f segítségével minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre az
$$\tilde{X}^i := \begin{cases} fX^i & - \; \mathcal{U} \text{ fölött} \\ 0 & - \; M \setminus \mathcal{U} \text{ fölött} \end{cases}$$
függvényeket és a
$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}} := \begin{cases} f\frac{\partial}{\partial u^i} & - \; \mathcal{U} \text{ fölött} \\ 0 & - \; M \setminus \mathcal{U} \text{ fölött} \end{cases}$$
vektormezőket. Ekkor
$$\tilde{X} := \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i \widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}} \in \mathfrak{X}(M), \quad \tilde{X} \restriction \mathcal{U} = f^2(X_s \restriction \mathcal{U}),$$
$$X_s = \tilde{X} + (1 - f^2)X_s.$$
Így
$$\begin{aligned} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \tilde{X} + (1 - f^2)X_s) \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i \widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}}) + \\ &+ (1 - f^2) A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_{s-1}, \widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}}) + \\ &+ (1 - f^2) A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Mivel $X_s(p) = 0$, minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre
$$\tilde{X}_i(p) = (fX^i)(p) = f(p)X^i(p) = X^i(p) = 0 ,$$
a kapott reláció jobb oldalán az első tag eltűnik a p pontban. $(1-f^2)(p) = 1(p) - (f(p))^2 = 1-1 = 0$ miatt ugyanez igaz a második tagra is, következésképpen
$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0 .$$
□

<u>6.5. Állítás.</u> Legyen adva egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor, és tekintsünk egy $p \in M$ pontot. Ha $\theta^1, \dots, \theta^r$ és $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r$ olyan 1-formák; $X_1, \dots, X_s$ és $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s$ pedig olyan vektormezők az M sokaságon, amelyekre
$$\bar{\theta}^i(p) = \theta^i(p) \quad , \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad , \quad \text{ill.}$$
$$\bar{X}_j(p) = X_j(p) \quad , \quad j \in \{1, \dots, s\}$$
teljesül, akkor
$$A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) .$$

<u>Bizonyítás.</u> A jobb áttekinthetőség kedvéért az $r=1$, $s=2$ esettel foglalkozunk; a gondolatmenet átültetése az általános esetre kézenfekvő.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy érvényes az
$$A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\bar{\theta} - \theta, \bar{X}, \bar{Y}) + A(\theta, \bar{X} - X, \bar{Y}) + A(\theta, X, \bar{Y} - Y)$$
„teleszkopikus azonosság", ahol $\theta, \bar{\theta}$ tetszőleges 1-formák, $X, Y, \bar{X}, \bar{Y}$ pedig vektormezők M-en. Ha
$$\bar{\theta}(p) = \theta(p) \ ; \ \bar{X}(p) = X(p) \ \text{ és } \ \bar{Y}(p) = Y(p) ,$$
akkor a $\bar{\theta} - \theta$ 1-forma, továbbá az $\bar{X} - X$ és az $\bar{Y} - Y$ vektormező zérust vesz fel a p pontban, amiből az előrebocsátott lemma alapján a felírt azonosság jobb oldalának p-beli eltűnése, ebből pedig $A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p)$ következik. □

<u>6.6. Következmény és definíció.</u> Tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort. Egy $p \in M$ pont kijelölése után legyenek $\omega^1, \dots, \omega^r$, ill. $v_1, \dots, v_s$ tetszőleges koérintő-vektorok, ill. érintővektorok p-ben. Legyen

$$A_p(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) := A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

ha tetszőleges $i \in \{1, \dots, r\}$, ill. $j \in \{1, \dots, s\}$ index esetén

$$\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M),\ \theta^i(p) = \omega^i;\ \text{ill. } X_j \in \mathfrak{X}(M),\ X_j(p) = v_j.$$

Ekkor $A_p \in T^r_s(T_pM)$ jól definiált – a θ^i 1-formák, ill. az X_j vektormezők választásától független – (r,s)-típusú tenzor a T_pM érintőtéren. Ezt az A_p tenzort az $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ <u>tenzor p-beli értékének</u> nevezzük.

<u>6.7. Interpretáció: a tenzorok mint „mezők".</u>

(1) A nyert eredmény lehetővé teszi, hogy egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort „mezőként" interpretálhassunk: olyan leképezésként, amely minden $p \in M$ ponthoz egy $A_p \in T^r_s(T_pM)$ tenzort rendel.

(2) Megfordítva, legyen $T^r_sM := \bigcup_{p \in M} T^r_s(T_pM)$. T^r_sM – a TM érintőnyaláb konstrukciójának mintájára – egyértelműen sima struktúrával ruházható fel úgy, hogy a

$$\tau^r_s : T^r_sM \longrightarrow M;\quad \alpha \longmapsto p,\ \text{ha } \alpha \in T^r_s(T_pM)$$

kanonikus projekció sima leképezés váljon. Ekkor minden olyan $\alpha : M \longrightarrow T^r_sM$ <u>sima</u> leképezéshez, amely eleget tesz a $\tau^r_s \circ \alpha = 1_M$ feltételnek, létezik egy és csak olyan $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor, amelynek tetszőleges p pontbeli értéke $\alpha(p)$.

(3) Az (1)-ben és (2)-ben mondottak alapján megállapíthatjuk, hogy <u>egy M sokaságon adott (r,s)-típusú</u>

tenzort a $\tau^r_s : T^r_s M \longrightarrow M$ „tenzornyaláb szeleteként" interpretáljuk: olyan $A : M \longrightarrow T^r_s M$ sima leképezésként, amely eleget tesz a $\tau^r_s \circ A = 1_M$ feltételnek.

Ez az interpretáció lehetővé teszi, hogy értelmesen szólhassunk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzornak egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazra való $A \upharpoonright \mathcal{U}$ leszűkítéséről az

$$(A \upharpoonright \mathcal{U})_p := A_p \quad , \quad \text{ha } p \in \mathcal{U}$$

előírással.

6.8. Állítás és definíció. Legyen adva egy M sokaság, és jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort, föltéve, hogy $(r,s) \neq (0,0)$.

(1) $\mathcal{U}$ fölött az A tenzor egyértelműen előállítható

$$A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{(i)(j)} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_s}$$

alakban, ahol

$$\left| \begin{array}{l} A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := (A \upharpoonright \mathcal{U}) \left(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}} \right) \in C^\infty(\mathcal{U}), \\ \text{valamennyi index 1-től } n\text{-ig fut.} \end{array} \right.$$

Ezeket a függvényeket az A tenzor $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó komponensfüggvényeinek (vagy komponenseinek) nevezzük.

(2) Tekintsünk egy további, $(\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^n)$ térképet M-en, s tegyük föl, hogy $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Ha A' komponensei e térképre vonatkozóan az $\tilde{A}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ függvények, akkor $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ fölött érvényes

az

$$\tilde{A}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \sum_{(k)(\ell)} \frac{\partial \tilde{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}} \frac{\partial u^{\ell_1}}{\partial \tilde{u}^{j_1}} \dots \frac{\partial u^{\ell_s}}{\partial \tilde{u}^{j_s}} A^{k_1 \dots k_r}_{\ell_1 \dots \ell_s}$$

transzformációs szabály.

Bizonyítás. (1) A jobb áttekinthetőség érdekében tegyük fel, hogy $r=1$, $s=2$. Azt kell ekkor igazolnunk, hogy

$$A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i,j,k} A^i_{jk} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j \otimes du^k \,, \quad \text{ahol} \quad A^i_{jk} = (A \restriction \mathcal{U})\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right).$$

Tekintettel a $C^\infty(M)$-multilinearitásra, ehhez elegendő azt ellenőriznünk, hogy a felírt reláció mindkét oldala ugyanazt az értéket veszi fel tetszőleges

$$\left(du^l, \frac{\partial}{\partial u^r}, \frac{\partial}{\partial u^s}\right) \;;\quad l, r, s \in \{1, \dots, n\}$$

hármason. Ez azonban közvetlenül adódik, mivel egyrészt

$$A\left(du^l, \frac{\partial}{\partial u^r}, \frac{\partial}{\partial u^s}\right) =: A^l_{rs} \,,$$

másrészt

$$\left(\sum_{i,j,k} A^i_{jk} \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j \otimes du^k\right)\left(du^l, \frac{\partial}{\partial u^r}, \frac{\partial}{\partial u^s}\right) =$$

$$= \sum_{i,j,k} A^i_{jk}\, du^l\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^r}\right) du^k\left(\frac{\partial}{\partial u^s}\right) = \sum_{i,j,k} A^i_{jk}\, \delta^l_i \delta^j_r \delta^k_s =$$

$$= A^l_{rs} \,.$$

(2) A felírt transzformációs szabály közvetlenül adódik a koordináta-vektormező, ill. koordináta-1-formák

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} = \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \,, \quad \text{ill.} \quad d\tilde{u}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} du^j$$

transzformációs szabálya (5.1., ill. 5.19. (4)) alapján. □

6.9. Megjegyzések. (1) (1,0)-típusú tenzor esetén a most definiált komponensek megegyeznek a tenzorral kanonikusan azonosítható vektormező 5.4. (2)-ben értelmezett komponensfüggvényeivel.

(2) Ha egy $\bar{A} \in \mathcal{T}^1_s(M)$ tenzort a 6.3. (2)-beli

interpretáció alapján $A \in L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ leképezésként adunk meg, akkor komponensei közvetlenül értelmezhetők az

$$A\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}}\right) = \sum_{i=1}^{n} A^i_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

relációkkal. Az így adódó $A^i_{j_1 \dots j_s}$ függvények megegyeznek az $\bar{A}$ tenzor definíció szerinti komponensfüggvényeivel, ugyanis

$$\bar{A}^i_{j_1 \dots j_s} := \bar{A}\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}}\right) \overset{6.3.(**)}{=}$$

$$= du^i\left(A\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}}\right)\right) =$$

$$= du^i\left(\sum_{k=1}^{n} A^k_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} A^k_{j_1 \dots j_s} \delta^i_k =$$

$$= A^i_{j_1 \dots j_s}.$$

<u>Tanulság:</u> az egymással kanonikus izomorfizmus révén azonosítható tenzoriális objektumok komponenseikben megkülönböztethetetlenek.

<u>6.10. Állítás és definíció.</u> Létezik egy és csak egy olyan $C^\infty(M)$-lineáris

$$tr: \mathcal{T}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M), \; A \longmapsto tr\,A$$

leképezés, amelyre tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-forma esetén

$$tr(X \otimes \theta) = \theta(X)$$

teljesül. Ezt a leképezést <u>trace-operátornak</u> vagy <u>(1,1)-kontrakciónak</u> nevezzük és c^1_1-gyel is jelöljük. A $tr\,A = c^1_1(A)$ függvényt az A <u>(1,1)-tenzor nyomának</u> mondjuk.

<u>Bizonyítás.</u> (1) <u>Ha létezik</u> a kívánt $tr: \mathcal{T}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ leképezés, akkor a $C^\infty(M)$-

linearitás - a tenzorok merőlegesként való interpretálásának mintájára - lehetővé teszi, hogy értelmezzük ennek tetszőleges $p \in M$ pontbeli értékét mint

$$tr_p : T^1_1(T_pM) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A_p \longmapsto (tr)_p(A_p) := (tr A)(p)$$

lineáris formát. A kevert operátor pontonkénti operátorként való interpretálhatósága módot nyújt arra, hogy a problémát térképek segítségével lokálisan tárgyaljuk.

(2) Jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, s tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}^1_1(\mathcal{U})$ tenzort. Ez előállítható

$$A = \sum_{i,j} A^i_j \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j$$

alakban, ahol $A^i_j \in C^\infty(\mathcal{U})$; $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Mivel a tr operátorra előírt feltétel szerint

$$tr\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j\right) = du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \delta^j_i,$$

$\mathcal{U}$ fölött egyetlen lehetőségünk van tr definiálására: legyen

$$trA := \sum_{i=1}^n A^i_i = \sum_{i=1}^n A\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ekkor a $tr: \mathcal{T}^1_1(\mathcal{U}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ leképezés megfelel a kívánalmaknak.

(3) Értelmezzük ezek után a

$$tr : \mathcal{T}^1_1(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad A \longmapsto tr A$$

leképezést a következőképpen: ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, és $A \restriction \mathcal{U} = \sum_{i,j} A^i_j \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j$, akkor

$$(\mathrm{tr}A)\restriction\mathcal{U} := \mathrm{tr}(A\restriction\mathcal{U}) \overset{(2)}{:=} \sum_{i=1}^{n} A^i_i .$$

Annak igazolásához, hogy ez a definíció a kívánt <u>globális</u> leképezést eredményezi, elegendő azt megmutatnunk, hogy ha $(\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^n)$ további térkép M-en és $A\restriction\tilde{\mathcal{U}} = \sum_{i,j} \tilde{A}^i_j \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} \otimes d\tilde{u}^j$, akkor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}^i_i\right)\restriction \mathcal{U}\cap\tilde{\mathcal{U}} = \left(\sum_{i=1}^{n} A^i_i\right)\restriction\mathcal{U}\cap\tilde{\mathcal{U}} .$$

Felhasználva a koordináta-vektormezők és koordináta-1-formák transzformációs formuláját, $\mathcal{U}\cap\tilde{\mathcal{U}}$ fölött

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}^i_i = \sum_{l=1}^{n} A\left(d\tilde{u}^l, \frac{\partial}{\partial\tilde{u}^l}\right) = \sum_{i,k,l} A\left(\frac{\partial\tilde{u}^l}{\partial u^i}du^i, \frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^l}\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$= \sum_{i,k,l} \frac{\partial\tilde{u}^l}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^l} A^i_k = \sum_{i,k} \delta^k_i A^i_k = \sum_{i=1}^{n} A^i_i ,$$

felhasználva, hogy

$$\delta^k_i = du^k\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \left(\sum_l \frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^l}d\tilde{u}^l\right)\left(\sum_m \frac{\partial\tilde{u}^m}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^m}\right) =$$

$$= \sum_{l,m} \frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^l}\frac{\partial\tilde{u}^m}{\partial u^i}\delta^l_m = \sum_l \frac{\partial\tilde{u}^l}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial\tilde{u}^l} . \qquad \square$$

<u>6.10. Következmény és definíció.</u> Legyen $(r,s)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Létezik egy és csak egy olyan

$$c^i_j : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M),\ A \longmapsto c^i_j A$$

$C^\infty(M)$-lineáris leképezés, hogy tetszőleges $X_1,\dots,X_r\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők és $\theta^1,\dots,\theta^s\in\mathfrak{X}^*(M)$ 1-formák esetén

$$c^i_j(X_1\otimes\dots\otimes X_r\otimes\theta^1\otimes\dots\otimes\theta^s) =$$

$$= \theta^j(X_i)\, X_1\otimes\dots\otimes\widehat{X_i}\otimes\dots X_r\otimes\theta^1\otimes\dots\otimes\widehat{\theta^j}\otimes\dots\otimes\theta^s ,$$

ahol a $\wedge$ szimbólum azt jelenti, hogy az alatta levő tényező törölve van a tenzori szorzatból.

Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, és az A tenzor komponensei erre vonatkozóan az $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ függvények, akkor a $c^i_j A$ tenzor komponensei a kijelölt térképre vonatkozóan

$$(c^i_j A)^{i_1 \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots j_{s-1}} = \sum_{k=1}^n A^{i_1 \dots \overset{i\text{-edik hely}}{k} \dots i_{r-1}}_{j_1 \dots \underset{j\text{-edik hely}}{k} \dots j_{s-1}}$$

A c^i_j leképezését az <u>i-edik kontravariáns és a j-edik kovariáns index szerinti kontrakciónak</u> nevezzük. Δ

<u>Példa.</u> Legyen $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaságon, $A \in \mathcal{T}^2_3(\mathcal{U})$. A definíció alapján meghatározzuk a $c^2_1 A \in \mathcal{T}^1_2(\mathcal{U})$ tenzor komponenseit a kijelölt térképre vonatkozóan. Tetszőleges $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ indexekre

$$(c^2_1 A)^i_{jk} := (c^2_1 A)\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$= \left(c^2_1 \left(\sum A^{lm}_{qrs} \frac{\partial}{\partial u^l} \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} \otimes du^q \otimes du^r \otimes du^s\right)\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\right.$$

$$= \left(\sum A^{lm}_{qrs}\, du^q\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) \frac{\partial}{\partial u^l} \otimes du^r \otimes du^s\right)\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$= \sum A^{lm}_{qrs} \delta^q_m \delta^i_l \delta^r_j \delta^s_k = \sum_{m=1}^n A^{im}_{mjk} .$$

<u>6.11. Lemma és definíció.</u> Legyen adva egy M és egy N sokaság, valamint egy $\varphi: M \longrightarrow N$ sima leképezés. Ha $A \in \mathcal{T}^0_s(N)$ $(s \in \mathbb{N}^*)$, és tetszőleges $p \in M$ pont, valamint $v_1, \dots, v_s \in T_pM$ érintővektorok esetén

$$(\varphi^* A)_p (v_1, \dots, v_s) := A_{\varphi(p)}(\varphi_*(v_1), \dots, \varphi_*(v_s)),$$

akkor $\varphi^* A \in \mathcal{T}^0_s(M)$. Az így konstruált $\varphi^* A$

tenzort az A tenzor φ általi visszahúzottjának ("pull-back") nevezzük. Megállapodunk abban, hogy ha $f \in \mathcal{T}^0_0(N) = C^\infty(N)$, akkor $\varphi^* f := f \circ \varphi \in C^\infty(M)$.

A tenzor-visszahúzásra érvényesek a következők:

(1) A $\varphi^*: \mathcal{T}^0_s(N) \longrightarrow \mathcal{T}^0_s(M)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris.

(2) $(1_M)^*$ $\mathcal{T}^0_s(M)$ identikus transzformációja.

(3) Ha $\varphi: M \to N$ diffeomorfizmus, akkor $\varphi^*: \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M)$ $\mathbb{R}$-lineáris izomorfizmus.

(4) A visszahúzás megőrzi a tenzori szorzatot: ha $A \in \mathcal{T}^0_{s_1}(N)$, $B \in \mathcal{T}^0_{s_2}(N)$, akkor
$\varphi^*(A \otimes B) = \varphi^* A \otimes \varphi^* B$.

(5) Amennyiben Q további sokaság és $\psi: N \to Q$ sima leképezés, úgy
$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : \mathcal{T}^0_s(Q) \longrightarrow \mathcal{T}^0_s(M) \quad (s \in \mathbb{N}^*)$. Δ

7. Tenzorderivációk

7.1. Definíció. Legyen M egy sokaság, s tegyük fel, hogy minden $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ indexpárhoz adva van egy közös szimbólummal jelölt

$$\mathcal{D}: \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^r_s(M)$$

leképezés, eleget téve a következő feltételeknek:

(1) bármely $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{D}$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezése $\mathcal{T}^r_s(M)$-nek $\mathcal{T}^r_s(M)$-be;

(2) tetszőleges M-en adott A és B tenzor esetén $\mathcal{D}(A \otimes B) = (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$ (Leibniz-szabály);

(3) ha A egy tenzor M-en, c^i_j pedig olyan kontrakció operátor, amelynek szóba hatunk az

A-n való hatásáról, akkor

$$\mathcal{D}(c^i_j A) = c^i_j(\mathcal{D}A)$$

(felcserélhetőség a kontrakciókkal).

Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{D}$ tenzorderiváció az M sokaságon.

7.2. Lemma. A tenzorderivációk lokális operátorok a következő értelemben: ha $\mathcal{D}$ tenzorderiváció egy M sokaságon, $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz és A olyan tenzor M-en, amelyre $A \restriction \mathcal{U} = 0$ teljesül, akkor $(\mathcal{D}A) \restriction \mathcal{U} = 0$.

Bizonyítás. Válasszunk ki tetszőlegesen egy $p \in \mathcal{U}$ pontot. p-beli dudorfüggvény létezése folytán megadható olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény, amelyre

$$f(p) = 0 \quad \text{és} \quad f(q) = 1, \text{ ha } q \in M \setminus \mathcal{U}$$

teljesül. f segítségével

$$A = fA = f \otimes A$$

írható, és így a Leibniz-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}(f \otimes A) = (\mathcal{D}f) \otimes A + f \otimes \mathcal{D}A = (\mathcal{D}f)A + f(\mathcal{D}A).$$

Kiértékelve mindkét oldalt a p pontban,

$$(\mathcal{D}A)(p) = (\mathcal{D}f)(p)\,A(p) + f(p)\,(\mathcal{D}A)(p) = (\mathcal{D}f)(p)\cdot 0 + 0\cdot(\mathcal{D}A)(p) = 0$$

adódik. Ez a $p \in \mathcal{U}$ pont tetszőlegessége folytán azt jelenti, hogy $(\mathcal{D}A) \restriction \mathcal{U} = 0$. $\square$

7.3. Állítás. A tenzorderivációk a leszűkítésre nézve természetes operátorok: ha $\mathcal{D}$ tenzorderiváció egy M sokaságon és $\mathcal{U} \subset M$ (nemüres) nyílt halmaz, akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ tenzorderiváció az $\mathcal{U}$ nyílt részsokaságon, hogy tetszőleges M-en adott A tenzor esetén

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}(A \restriction \mathcal{U}) = (\mathcal{D}A) \restriction \mathcal{U}.$$

<u>A bizonyítás fő lépései</u>

(1) <u>$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ értelmezése.</u> Legyen B egy $\mathcal{U}$ fölötti tenzor. Jelöljünk ki tetszőlegesen egy $p \in \mathcal{U}$ pontot, és válasszunk olyan $f \in C^\infty(M)$ dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik. Ekkor f a pont egy környezetében 1-et vesz föl. Terjesszük ki B-t egy M-en adott A tenzorrá a következőképpen:

$$A := \begin{cases} fB, & \mathcal{U} \text{ fölött}; \\ 0, & M \setminus \mathcal{U} \text{ fölött}. \end{cases}$$

Legyen

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}} B)(p) := (\mathcal{D} A)(p).$$

(2) <u>$\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ jól definiált</u>: független a B tenzor kiterjesztéséhez használt dudorfüggvény választásától. Tekintsünk ennek igazolása céljából egy további p-beli, $\mathcal{U}$ által tartalmazott tartójú $h \in C^\infty(M)$ dudorfüggvényt, és legyen

$$\tilde{A} := \begin{cases} hB, & \mathcal{U} \text{ fölött}; \\ 0, & M \setminus \mathcal{U} \text{ fölött}. \end{cases}$$

Mivel a h függvény is 1-et vesz föl a p pont egy környezetében, megadható p-nek olyan $\mathcal{V}$ környezete, hogy $A \restriction \mathcal{V} = \tilde{A} \restriction \mathcal{V}$. Ekkor $(A - \tilde{A}) \restriction \mathcal{V} = 0$, amiből az előző lemma alapján $\mathcal{D}(A - \tilde{A}) \restriction \mathcal{U} = 0$. $\mathcal{D}$ $\mathbb{R}$-linearitása folytán innen $(\mathcal{D}A)(p) = (\mathcal{D}\tilde{A})(p)$ adódik.

(3) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ tenzorderiváció az $\mathcal{U}$ nyílt részsokaságon.

(4) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ rendelkezik a kívánt leszűkítési tulajdonsággal.

(5) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ az előírt feltétel által egyértelműen meg van határozva. Δ

<u>7.4. Állítás</u> (<u>a szorzatszabály</u>). Ha $\mathcal{D}$ tenzorderiváció az M sokaságon és $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, ahol $r+s \geq 2$, akkor a $\mathcal{D}A$ tenzor a

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s)\end{aligned}$$

$$(\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M),\ i \in \{1, \dots, r\};\ X_j \in \mathfrak{X}(M),\ j \in \{1, \dots, s\})$$

előírás szerint hat.

<u>Bizonyítás</u>. A jobb áttekinthetőség érdekében az $r = s = 1$ esetet tárgyaljuk.

(1) Megmutatjuk először, hogy tetszőleges $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$A(\theta, X) = C(A \otimes \theta \otimes X),$$

ahol C két alkalmas kontrakció kompozíciója.

Jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor $\theta \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \theta_i du^i$, $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ írható

$(\theta_i, X^i \in C^\infty(\mathcal{U}))$, és így

$$A(\theta, X) \underset{(\mathcal{U})}{=} A\left(\sum_i \theta_i du^i, \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i,j} \theta_i X^j A\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \sum_{i,j} A^i_j \theta_i X^j$$

írható, ahol az $A^i_j \in C^\infty(\mathcal{U})$ függvények A komponensei a kijelölt térképre vonatkozóan. Az $A \otimes \theta \otimes X \in \mathcal{T}^2_2(M)$ tenzor komponensei ugyanezen térképre vonatkozóan

$$A \otimes \theta \otimes X\left(du^i, du^j, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^\ell}\right) = A\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\theta\left(\frac{\partial}{\partial u^\ell}\right) du^j(X) = A^i_k \theta_\ell X^j \quad (i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}),$$

ha tehát $\mathcal{C} := c^1_2 \circ c^2_1$, akkor $A(\theta, X) = \mathcal{C}(A \otimes \theta \otimes X)$.

(2) A tett észrevétel felhasználásával

$$\mathcal{D}(A(\theta, X)) = \mathcal{D}(\mathcal{C}(A \otimes \theta \otimes X)) \overset{7.1.(3)}{=} \mathcal{C}(\mathcal{D}(A \otimes \theta \otimes X))$$
$$\overset{7.1.(2)}{=} \mathcal{C}(\mathcal{D}A \otimes \theta \otimes X + A \otimes \mathcal{D}\theta \otimes X + A \otimes \theta \otimes \mathcal{D}X)$$
$$\overset{(1),\ 7.1.(1)}{=} (\mathcal{D}A)(\theta, X) + A(\mathcal{D}\theta, X) + A(\theta, \mathcal{D}X)$$

adódik, ami ekvivalens (a vizsgált esetben) az igazolandó összefüggéssel. ◻

<u>7.5. Megjegyzés.</u> Ha $A \in \mathcal{T}^1_s(M)$ $(s \geq 1)$ és az A tenzort $(\mathfrak{X}(M))^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-multilineáris leképezésként interpretáljuk, akkor a levezetett szorzatszabály formailag változatlan alakban érvényes:

$$(\mathcal{D}A)(X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}(A(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s).$$

<u>7.6. Lemma.</u> Egy tenzorderivációt egyértelműen meghatároz a sokaság sima függvényeinek gyűrűjén és vektormezőinek modulusán való hatása.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $\mathcal{D}$ tenzorderiváció az M sokaságon. A szorzatszabályból kiolvasható, hogy $\mathcal{D}$-nek egy tetszőleges tenzoron való hatását egyértelműen meghatározza a sima függvényeken, a vektormezőkön és az 1-formákon való hatása. Elegendő így azt megmutatnunk, hogy $\mathcal{D}$-nek az 1-formákon való hatása kifejezhető a függvényeken és a vektormezőkön való hatás révén.

Legyen $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ekkor $\theta(X) \in C^\infty(M)$, és

$$\mathcal{D}(\theta(X)) \overset{6.10.}{=} \mathcal{D}(c^1_1(\theta \otimes X)) \overset{7.1.(3)}{=} c^1_1(\mathcal{D}(\theta \otimes X))$$
$$\overset{7.1.(2)}{=} c^1_1((\mathcal{D}\theta) \otimes X + \theta \otimes \mathcal{D}X) =$$
$$= (\mathcal{D}\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}X),$$

tehát

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}\big(\theta(X)\big) - \theta(\mathfrak{D}X),$$

ami igazolja a tett észrevételt. □

7.7. Tétel (Willmore, 1960.). Megadva egy $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt és egy olyan $\varsigma : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezést, amely eleget tesz a

$$\varsigma(fX) = (Zf)X + f\varsigma(X) \quad ; \quad f \in C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M)$$

Leibniz-szabálynak, létezik egy és csak egy olyan $\mathfrak{D}$ tenzorderiváció M-en, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény, ill. $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\mathfrak{D}f = Zf, \quad \mathfrak{D}X = \varsigma(X).$$

A bizonyítás vázlata. A keresett tenzorderiváció egyértelműségét biztosítja az előretolt lemma. A létezést a $\mathfrak{D}$ operátor explicit megadásával igazoljuk.

(1) Ha $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, akkor a $\mathfrak{D}\theta$ 1-forma értelmezésére a 7.6. bizonyításában látottak szerint egyetlen lehetőségünk van: tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén legyen

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) := Z(\theta(X)) - \theta(\varsigma(X)).$$

Ellenőriznünk kell, hogy ekkor $\mathfrak{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ valóban teljesül, és hogy $\mathfrak{D}$ hatása $\mathfrak{X}^*(M)$-en $\mathbb{R}$-lineáris. Ez semmilyen nehézséggel nem jár; például $\mathfrak{D}\theta$ $C^\infty(M)$-homogenitása a következőképpen adódik: Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}(\mathfrak{D}\theta)(fX) &:= Z\big(\theta(fX)\big) - \theta\big(\varsigma(fX)\big) = Z(f\theta(X)) - \\ &- \theta\big((Zf)X + f\varsigma(X)\big) = Z(f)\,\theta(X) + f\,Z(\theta(X)) \\ &- (Zf)\,\theta(X) - f\,\theta(\varsigma(X)) = f\,\big(Z(\theta(X)) - \theta\varsigma(X)\big) \\ &=: f(\mathfrak{D}\theta)(X).\end{aligned}$$

(2) A feltétel, valamint az (1)-ben mondottak megadják a keresett $\mathcal{D}$ tenzorderiváció hatását $C^\infty(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathfrak{X}^*(M)$ fölött. A szorzatszabály ezek után kikényszeríti, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $r+s \geq 2$ tenzor esetén $\mathcal{D}A$ hatását csakis a

$$\begin{aligned}\mathcal{D}A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s) &= \mathcal{Z}\left(A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)\right) - \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\dots,\mathcal{D}\theta^i,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,\mathcal{S}(X_j),\dots,X_s)\end{aligned}$$

$(\theta^1,\dots,\theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)\ ;\ X_1,\dots,X_s \in \mathfrak{X}(M))$

formula adhatja meg. Ellenőrizni kell, hogy ekkor

(i) $\mathcal{D}A \in \mathcal{T}^r_s(M)$;

(ii) a $\mathcal{D}: \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^r_s(M)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris ;

(iii) érvényes a $\mathcal{D}(A\otimes B) = (\mathcal{D}A)\otimes B + A\otimes \mathcal{D}B$ Leibniz-szabály ;

(iv) $\mathcal{D}$ felcserélhető a kontrakciókkal.

Közvetlen számolásnál többet csak (iv) igazolása igényel. Ha $A = X\otimes\theta$, ahol $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\theta\in C^\infty(M)$, akkor

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(c^1_1(X\otimes\theta)) &= \mathcal{D}(\theta(X)) = (\mathcal{D}\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}(X)) = \\ &= c^1_1(X\otimes\mathcal{D}\theta + (\mathcal{D}X)\otimes\theta) = c^1_1(\mathcal{D}(X\otimes\theta)).\end{aligned}$$

Tetszőleges $A\in\mathcal{T}^1_1(M)$ tenzor, majd tetszőleges $A\in\mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor és c^i_j kontrakció esetén $\mathcal{D}$ és c^1_1, ill. $\mathcal{D}$ és c^i_j felcserélhetősége legegyszerűbben a koordinátaelőállítások segítségével ellenőrizhető. Δ

<u>7.8. Következmény és definíció.</u> Megadva egy $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{L}_X$ tenzorderiváció M-en, hogy

$$\mathcal{L}_X f := Xf,\ \text{ha } f\in C^\infty(M);\quad \mathcal{L}_X Y := [X,Y],\ \text{ha } Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Ezt a tenzorderivációt az <u>X vektormező szerinti Lie-deriválásnak</u> nevezzük. $\square$

8. Kovariáns deriválás

<u>Definíció.</u> Egy M sokaságon adott <u>kovariáns deriváláson</u> (vagy <u>lineáris konnexión</u>) olyan

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(∇_1) <u>$C^\infty(M)$-lineáris az 1. változóban</u>:

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y \quad ; \; f_1, f_2 \in C^\infty(M);$$

(∇_2) <u>additív a 2. változóban</u>: $\nabla_X (Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;

(∇_3) <u>szorzatszabályt teljesít a 2. változóban</u>:

$$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad , \quad f \in C^\infty(M).$$

A $\nabla_X Y$ vektormezőt az Y vektormező X szerinti <u>kovariáns deriváltjának</u> hívjuk; egy kovariáns deriválással ellátott sokaságot <u>affinösszefüggő sokaságként</u> is említünk.

<u>8.1. Megjegyzések.</u> (1) Ha ∇ kovariáns deriválás az M sokaságon, akkor a <u>2. változójában</u> ténylegesen <u>$\mathbb{R}$-lineáris</u>, ugyanis tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\nabla_X \lambda Y \overset{(\nabla_3)}{=} \lambda \nabla_X Y$, hiszen a valós skalárok konstans függvényeknek tekinthetők.

(2) A (∇_1) feltétel értelmében rögzített $Y \in \mathfrak{X}(M)$ mellett az

$$X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, így a <u>6.3.</u> (2)-beli interpretáció alapján (1,1)-tenzor M-en. Erre a tenzorra célszerű a ∇Y jelölést bevezetni; tehát:

$$\nabla Y : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad X \longmapsto \nabla Y(X) := \nabla_X Y.$$

A 6.6.-ban mondottaknak megfelelően szólhatunk a ∇Y tenzor tetszőleges p pontban fölvett

$$(\nabla Y)_p \in T^1_1(T_pM) \cong \mathrm{End}(T_pM)$$

értékéről a

$$(\nabla Y)_p(v) := \nabla Y(X)(p) = (\nabla_X Y)(p), \text{ ha } X(p) = v$$

definíció szerint. A $(\nabla Y)_p(v) = (\nabla_X Y)(p) \in T_pM$ érintővektorra a $\nabla_v Y$ jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy $\nabla_v Y$ az Y vektormező v érintővektor szerinti kovariáns deriváltja (az adott ∇ kovariáns deriválásra vonatkozóan).

8.2. Lemma. Legyen ∇ kovariáns deriválás az M sokaságon. Ha az $Y \in \mathfrak{X}(M)$ és a $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező egyenlő egy $p \in M$ pont egy környezetében, akkor bármely $v \in T_pM$ érintővektor esetén $\nabla_v Y = \nabla_v Z$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a p pont egy $\mathcal{U}$ környezetében teljesül az $Y \restriction \mathcal{U} = Z \restriction \mathcal{U}$ egyenlőség. Válasszunk olyan $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik. Ekkor $fY, fZ \in \mathfrak{X}(M)$ és $fY = fZ$. A v szerinti kovariáns derivált értelmezése és (∇_3) alapján

$$\nabla_v fY = v(f)\,Y(p) + f(p)\,\nabla_v Y.$$

Itt $f(p) = 1$, s mivel f konstans a p pont egy környezetében, 3.2.(2) miatt $v(f) = 0$; következésképpen $\nabla_v fY = \nabla_v Y$. Ugyanígy kapjuk, hogy $\nabla_v fZ = \nabla_v Z$; tehát $\nabla_v Y = \nabla_v fY = \nabla_v fZ = \nabla_v Z$. $\square$

<u>8.3. Christoffel-szimbólumok</u> Legyen ∇ kovariáns deriválás az M sokaságon.

(1) A <u>8.1.</u>(2)-ben mondottak, valamint a <u>8.2.</u> lemma lehetővé teszik, hogy egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazon értelmezett X, Y vektormezők esetén is szólhassunk a $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ kovariáns deriváltról a

$$(\nabla_X Y)(p) := \nabla_{X(p)} \tilde{Y} \ ; \ p \in M, \ \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M), \ \tilde{Y} \restriction \mathcal{U} = Y$$

definíció szerint. Ha tehát, speciálisan, $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ egy térkép M-en, akkor tekinthetjük a

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \ ; \ j, k \in \{1, \dots, n\}$$

kovariáns deriváltakat. Ezek egyértelműen előállíthatók a koordinátavektormezők által alkotott $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{i=1}^n$ lokális bázis $C^\infty(\mathcal{U})$-lineáris kombinációjaként

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial u^i} \ ; \ i \in \{1, \dots, n\}$$

alakban; az itt fellépő

$$\Gamma^i_{jk} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

sima függvényeket a ∇ kovariáns deriválás $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ <u>térképre vonatkozó</u> <u>Christoffel-szimbólumainak</u> nevezzük.

(2) Általánosabban, tegyük fel, hogy $(E_i)_{i=1}^n$ egy $\mathcal{V} \subset M$ nyílt halmazon értelmezett vektormezők olyan sorozata, amelyre teljesül, hogy minden $p \in \mathcal{U}$ pont esetén $(E_i(p))_{i=1}^n$ bázisa a T_pM érintőtérnek. Azt mondjuk ilyenkor, hogy $(E_i)_{i=1}^n$ egy <u>n-él-mező</u> $\mathcal{V}$ fölött. A

$$\nabla_{E_j} E_k = \sum_{i=1}^{k} \Gamma^i_{jk} E_i \; ; \quad j,k \in \{1,\dots,n\}$$

összefüggések által definiált n^3 számú

$$\Gamma^i_{jk} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sima függvényt a ∇ kovariáns deriválás $(E_i)_{i=1}^n$ <u>n-élmezőre vonatkozó</u> <u>Christoffel-szimbólumainak</u> hívjuk.

<u>8.4. Lemma.</u> Egy kovariáns deriválást egy n-élmező tartományán egyértelműen meghatároznak az n-élmezőre vonatkozó Christoffel-szimbólumai. Nevezetesen: ha ∇ kovariáns deriválás az M sokaságon, $\mathcal{V} \subset M$ nyílt halmaz, $(E_i)_{i=1}^n$ n-élmező $\mathcal{V}$ fölött, $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i$, akkor

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \Big(X Y^i + \sum_{j,k} X^j Y^k \Gamma^i_{jk} \Big) E_i .$$

<u>Bizonyítás.</u> Alkalmazva a $(\nabla_1)-(\nabla_3)$ axiómákat és a <u>8.1. (1)</u> megjegyzést,

$$\nabla_X Y = \nabla_X \Big(\sum_{i=1}^n Y^i E_i \Big) = \sum_{i=1}^n \nabla_X (Y^i E_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big((X Y^i) E_i + Y^i \nabla_X E_i \Big) = \sum_{i=1}^n (X Y^i) E_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^n Y^k \nabla_X E_k = \sum_{i=1}^n (X Y^i) E_i + \sum_{k=1}^n Y^k \nabla_{\sum_{j=1}^n X^j E_j} E_k$$

$$= \sum_{i=1}^n (X Y^i) E_i + \sum_{j,k} X^j Y^k \nabla_{E_j} E_k = \sum_{i=1}^n (X Y^i) E_i +$$

$$+ \sum_{j,k} X^j Y^k \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} E_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Big(X Y^i + \sum_{j,k} X^j Y^k \Gamma^i_{jk} \Big) E_i . \qquad \square$$

8.5. Lemma. Tegyük fel, hogy egy M sokaságnak létezik $(M, (u^i)_{i=1}^n)$ egytagú atlasza. Ekkor bijektív kapcsolat áll fenn az M-en adott kovariáns deriválások halmaza és az M-en értelmezett, sima függvények által alkotott n^3 tagszámú (Γ^i_{jk}) függvénycsaládok halmaza között a

$$(*)\qquad \nabla_X Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^i}{\partial u^j} + \sum_{j,k=1}^n X^j Y^k \Gamma^i_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

reláció révén, ahol $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(M)$.

Bizonyítás. (1) Ha ∇ kovariáns deriválás M-en, akkor egy $(u^i)_{i=1}^n$ koordinátarendszer és a hozzá tartozó $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{i=1}^n$ n-él-mező kijelölése után az előző lemma értelmében egyértelműen léteznek olyan $\Gamma^i_{jk} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i,j,k \in \{1,\dots,n\})$ sima függvények, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén $\nabla_X Y =$ $(*)$ jobb oldala.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy adva van M-en egy sima függvényekből álló (Γ^i_{jk}), $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ függvénycsalád. Kijelölve M-en egy $(u^i)_{i=1}^n$ koordinátarendszert, tetszőleges $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ esetén legyen

$$\nabla_X Y := (*) \text{ jobb oldala.}$$

Közvetlenül látható, hogy ekkor $\nabla_X Y$ X-ben $C^\infty(M)$-lineáris, Y-ban additív, és könnyű számolásokkal ellenőrizhető, hogy az Y változóban a szorzatszabály is teljesül. □

8.6. Tétel. Minden sokaságon létezik kovariáns deriválás.

Bizonyítás. Tekintsünk egy M sokaságot, és legyen $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ koordinátakörnyezetekkel való nyílt lefedése M-nek. Az előző lemma alapján az $\mathcal{U}_\alpha$ nyílt halmazok mindegyikén létezik ∇^α kovariáns deriválás. Legyen $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ az adott nyílt lefedéshez csatolt egységbontás, és értelmezzük a

$$\nabla : (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

leképezést a

$$\nabla_X Y := \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \nabla^\alpha_X Y$$

előírással, ahol a $\nabla^\alpha_X Y$ kifejezésekben az egyszerűség kedvéért X és Y szerepel $X \restriction \mathcal{U}_\alpha$, ill. $Y \restriction \mathcal{U}_\alpha$ helyett. Ekkor $\nabla_X Y$ valóban sima vektormező M-en, s közvetlenül látható, hogy $\nabla_X Y$ X-ben $C^\infty(M)$-lineáris, Y-ban additív. Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$\nabla_X fY := \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \nabla^\alpha_X fY = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \left((Xf)Y + f\nabla^\alpha_X Y\right)$$

$$= \Big(\sum_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)(Xf)Y + f \sum_{\alpha\in A} f_\alpha \nabla^\alpha_X Y\Big)$$

$$\overset{(*)}{=} (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad ,$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben ∇ definíciója mellett azt használva fel, hogy $(PU)_3$ miatt bármely $p\in M$ pontban $\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p) = 1$. Beláttuk így, hogy ∇ a (∇_3) feltételnek is eleget tesz. □

8.7. Állítás. Legyen (M,∇) affin összefüggő sokaság.

(1) Kijelölve egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, létezik egy és csak egy olyan ∇_X tenzorderiváció M-en,

hogy

(i) tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén $\nabla_X f = Xf$;

(ii) tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $\nabla_X Y$ az Y vektormező X szerinti kovariáns deriváltja.

(2) Ha $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ és tetszőleges $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X, X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\nabla A(\theta^1, \dots, \theta^r, X, X_1, \dots, X_s) := (\nabla_X A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s),$$

akkor $\nabla A \in \mathcal{T}^r_{s+1}(M)$. Ezt a tenzort az A tenzor <u>kovariáns differenciáljának</u> vagy <u>teljes kovariáns deriváltjának</u> nevezzük. Egy sokaságon adott tenzort <u>párhuzamosnak</u> - olykor <u>abszolút párhuzamosnak</u> - mondunk, ha a kovariáns differenciálja zérus.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Mivel az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező rögzítése után a $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, $Y \longmapsto \nabla_X Y$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris és eleget tesz a Leibniz-szabálynak, a Willmore-tétel biztosítja a kívánt tenzorderiváció egyértelmű létezését.

(2) Mivel $\nabla_X A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, ∇A az első r és az utolsó „s" változójában $C^\infty(M)$-lineáris. Azt kell még meggondolni, hogy az $X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \nabla_X A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ leképezés is $C^\infty(M)$-lineáris, vagyis tetszőleges $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ esetén a $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2}$ és az $f_1\nabla_{X_1} + f_2 \nabla_{X_2}$ tenzorderiváció egyenlő. Ez mostan 7.6. alapján következik abból, hogy a két tenzorderiváció $C^\infty(M)$ fölött a definíciójuktól adódóan, $\mathfrak{X}(M)$ fölött pedig (∇_1) miatt ugyanúgy hat. $\square$

<u>8.8. Állítás és definíció.</u> Legyen adva egy (M,∇) affinösszefüggő sokaság.

(1) A

$$T : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M),\quad (X,Y)\longmapsto T(X,Y):=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

leképezés $(1,2)$-típusú tenzor M-en, amely rendelkezik a $T(X,Y)=-T(Y,X)$ antiszimmetria-tulajdonsággal. Ezt a tenzort a ∇ kovariáns deriválás (vagy az (M,∇) affinösszefüggő sokaság) <u>torziótenzorának</u>, röviden <u>torziójának</u> nevezzük. T eltűnése esetén a kovariáns deriválást <u>torziómentesnek</u> mondjuk.

(2) Ha $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, és ∇ erre vonatkozó Christoffel-szimbólumai a Γ^i_{jk} függvények $(i,j,k\in\{1,\dots,n\})$, akkor a torziótenzor komponensei az adott térképre vonatkozóan

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}\;;\quad i,j,k\in\{1,\dots,n\},$$

következésképpen a kovariáns deriválás akkor és csak akkor torziómentes, ha Christoffel-szimbólumai rendelkeznek a

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$$

szimmetria tulajdonsággal.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $T(Y,X):=\nabla_Y X-\nabla_X Y-[Y,X]=$
$=-(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y])=-T(X,Y)$; erre tekintettel T $C^\infty(M)$-linearitását elegendő például az első változóban ellenőrizni.

Legyen $f\in C^\infty(M)$ tetszőleges. Ekkor

$$T(fX,Y):=\nabla_{fX}Y-\nabla_Y fX-[fX,Y]\overset{(D_1),(D_3),\ \underline{5.13.}}{=}$$
$$=f\nabla_X Y-(Yf)X-f\nabla_Y X-f[X,Y]+(Yf)X$$
$$=f(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y])=fT(X,Y).$$

(2) T komponensei a kijelölt térképre vonatkozóan a

$$T\left(\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right)=\sum_{i=1}^{n}T^i_{jk}\frac{\partial}{\partial u^i}\quad;\quad j,k\in\{1,\dots,n\}$$

relációk által meghatározott T^i_{jk} függvények.

Mivel

$$T\left(\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right):=\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\frac{\partial}{\partial u^j}-\left[\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial u^i},$$

következik, hogy $T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}$. □

8.9. Példák. Legyen adva egy (M,∇) affinösszefüggő sokaság.

(1) Ha $f\in C^\infty(M)$, akkor

$$\nabla f=df\in\mathcal{T}^0_1(M)\cong\mathfrak{X}^*(M).$$

Valóban, kiértékelve ∇f-et egy tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőn, azt kapjuk, hogy

$$\nabla f(X):=\nabla_X f:=Xf=df(X).$$

A

$$H^\nabla f:=\nabla(\nabla f)$$

~~második kovariáns differenciált~~ az f függvény **Hesse-tenzorának** (pontosabban ∇-ra vonatkozó Hesse-tenzorának, röviden ∇-Hesse tenzorának) nevezzük.

Kiértékelve tetszőleges $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőkön,

$$H^\nabla f(X,Y)=\nabla(\nabla f)(X,Y)=(\nabla_X\nabla f)(Y)\overset{\text{szorzatszabály}}{=}$$
$$=X(\nabla f(Y))-\nabla f(\nabla_X Y)=$$
$$=X(Yf)-(\nabla_X Y)f.$$

Fölcserélve X-et és Y, a kivonva:

$$H^\nabla f(X,Y)-H^\nabla f(Y,X)=X(Yf)-(\nabla_X Y)f-Y(Xf)+(\nabla_Y X)f$$
$$=(\nabla_Y X-\nabla_X Y-[Y,X])f=T(Y,X)f\;;$$

következésképpen <u>∇ torziómentessége</u> esetén minden <u>$f \in C^\infty(M)$ függvény ∇-Hesse tenzora szimmetrikus.</u>

(2) Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor a $\nabla X \in \mathcal{T}^1_1(M)$ $(1,1)$-tenzor nyomát az X vektormező (∇-ra vonatkozó) <u>divergenciájának</u> nevezzük. Ennek koordinátás leírásához rögzítünk M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, legyenek ∇ erre vonatkozó Christoffel-szimbólumai – a szokásos módon – a Γ^i_{jk} függvények, és legyen $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Ekkor tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ index esetén

$$(\nabla X)\frac{\partial}{\partial u^j} := \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(\sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial u^k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial u^j}\frac{\partial}{\partial u^k} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n X^k \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial u^i} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \sum_{k=1}^n X^k \Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial u^i},$$

következésképpen

$$(\operatorname{div} X) \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^i} + \sum_{k=1}^n X^k \Gamma^i_{ik}\right).$$

(3) Tekintsünk egy $g \in \mathcal{T}^0_2(M)$ másodrendű kovariáns tenzort. Ennek kovariáns differenciálja az a $\nabla g \in \mathcal{T}^0_3(M)$ tenzor, amely tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkön a

$$\nabla g(X, Y, Z) := (\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

szabály szerint hat. Így g akkor és csak akkor párhuzamos, ha bármely $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

teljesül.

<u>8.10. Állítás és definíció.</u> Legyen (M,∇) affin-összefüggő sokaság.

(1) Az
$$\left\| \begin{array}{l} R : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X,Y,Z) \longmapsto R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{array}\right.$$
leképezés $(1,3)$-típusú tenzor M-en, amely rendelkezik az
$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$
antiszimmetria-tulajdonsággal. Ezt a tenzort a ∇ kovariáns deriválás (vagy az (M,∇) affinösszefüggő sokaság) <u>görbületi tenzorának</u> nevezzük; az eltűnése esetén azt mondjuk, hogy az affinösszefüggő sokaság <u>lapos</u> (<u>flat</u>).

(2) Ha $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, akkor a görbületi tenzor erre vonatkozó, az
$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} = \sum_{i=1}^n R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial u^i}$$
$(j,k,l\in\{1,\dots,n\})$ relációkkal értelmezett komponensfüggvényei a kovariáns deriválás Γ^i_{jk} Christoffel-szimbólumai segítségével az
$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^i_{jl} + \sum_{r=1}^n\left(\Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl}\right)$$
$(i,j,k,l\in\{1,\dots,n\})$ alakban állíthatók elő.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ teljesülése $[X,Y]=-[Y,X]$ miatt közvetlenül kiolvasható a definícióból, így R $C^\infty(M)$-linearitását elegendő például az első, valamint a harmadik változóban ellenőrizni.

Legyen ettől a céltól $f\in C^\infty(M)$ tetszőleges. Ekkor
$$R(fX,Y)Z := \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \overset{(D_1),\ \underline{5.13.}}{=}$$
$$= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z$$

$$\overset{(\nabla_3)}{=} f\nabla_X\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z$$
$$+ (Yf)\nabla_X Z = f\, R(X,Y)Z\ ;$$

így – mivel az additivitás nyilvánvaló – R az 1. változójában $C^\infty(M)$-lineáris. A 3. változóban való $C^\infty(M)$-linearitás hasonlóan egyszerű számolással adódik.

(2) $$R\left(\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} := \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\frac{\partial}{\partial u^l} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\frac{\partial}{\partial u^l} =$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\left(\sum_i \Gamma^i_{kl}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\left(\sum_i \Gamma^i_{jl}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) =$$

$$= \sum_i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^i_{jl}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_i \Gamma^i_{kl}\sum_r \Gamma^r_{ji}\frac{\partial}{\partial u^r} -$$

$$- \sum_i \Gamma^i_{jl}\sum_r \Gamma^r_{ki}\frac{\partial}{\partial u^r}\ .$$

A jobb oldalon a második és a harmadik kifejezésben $i \leftrightarrow r$ indexcserét hajtva végre, azt kapjuk, hogy

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\frac{\partial}{\partial u^l} = \sum_{i=1}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^i_{jl} + \sum_{r=1}^n\left(\Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\ ,$$

ahonnan kiolvashatók R kívánt komponensfüggvényei. □

<u>8.11. Megjegyzések.</u> Vegyünk alapul egy (M,∇) affin-összefüggő sokaságot.

(1) Kijelölve egy X és egy Y vektormezőt M-en, a <u>8.7.</u> (1)-ben mondottak szerint tekinthetjük a ∇_X és a ∇_Y tenzorderiválást, amelyeknek képezhető a

$$[\nabla_X,\nabla_Y] := \nabla_X\circ\nabla_Y - \nabla_Y\circ\nabla_X$$

<u>kommutátora</u>. Ez – értelemszerűen – tetszőleges $A\in\mathcal{T}^r_s(M)$ tenzoron a

$$[\nabla_X,\nabla_Y]A = \nabla_X(\nabla_Y A) - \nabla_Y(\nabla_X A)$$

szabály szerint hat. Felhasználva ezt az írás-

módot, ∇ görbületi tenzora megadható az
$$R(X,Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})Z$$
$(X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M))$ formulával. Rögzített X és Y vektormező mellett
$$R(X,Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$
(1,1)-tenzor, míg pedig az $\mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ $C^\infty(M)$-modulusba tartozik. Az így képzett – a kijelölt vektormezőktől függő – (1,1)-tenzort <u>görbületi operátornak</u> hívjuk. Maga a görbületi tenzor ezek után az
$$(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longmapsto R(X,Y) \in \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$$
<u>endomorfizmus-értékű $C^\infty(M)$-bilineáris leképezésként</u> is interpretálható.

(2) Rögzített $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett képezhető a $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ derivació és az $R(Y,Z) \in \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ (1,1)-tenzor
$$[\nabla_X, R(Y,Z)] := \nabla_X \circ R(Y,Z) - R(Y,Z) \circ \nabla_X$$
kommutátora, amely tehát tetszőleges $W \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőn a
$$[\nabla_X, R(Y,Z)]W = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(Y,Z)\nabla_X W$$
szabály szerint hat.

(3) Miként az R görbületi tenzor, ennek tetszőleges $\nabla_X R$ kovariáns deriváltja is (1,3)-típusú tenzor. Így a görbületi operátor mintájára, rögzített X, Y, Z vektormezők mellett, képezhetjük a
$$(\nabla_X R)(Y,Z) : W \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto (\nabla_X R)(Y,Z)W := (\nabla_X R)(Y,Z,W)$$
(1,1)-tenzort. A szorzatszabály és a (2)-ben tett észrevétel alapján

$$(\nabla_X R)(Y,Z,W) = \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y,\nabla_X Z)W$$
$$- R(Y,Z)\nabla_X W = (\nabla_X \circ R(Y,Z) - R(Y,Z)\circ\nabla_X)(W)$$
$$- R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y,\nabla_X Z)W,$$

következésképpen

$$(\nabla_X R)(Y,Z) = [\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y,\nabla_X Z).$$

(4) Ha $A \in \mathcal{T}^0_3(M)$ vagy $A \in \mathcal{T}^1_3(M) \cong L^3(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$, akkor a

$$\sum_{\text{cikl}} A(X,Y,Z) := A(X,Y,Z) + A(Y,Z,X) + A(Z,X,Y)$$

formulával definiált $\sum_{\text{cikl}} A$ tenzort az A tenzor <u>ciklizáltjának</u> nevezzük, s azt is mondjuk, hogy a felírt képlet jobb oldalán az $A(X,Y,Z)$-ből képzett ciklikus összeg áll. ($\sum_{\text{cikl}} A$ helyett a $\mathfrak{S}A$ jelölés is használatos.) Vegyük észre, hogy ha

$$B(X,Y,Z) := A(X,Y,Z) - A(Y,Z,X),$$

akkor $\sum_{\text{cikl}} B = 0$. Valóban,

$$\sum_{\text{cikl}} B(X,Y,Z) := B(X,Y,Z) + B(Y,Z,X) + B(Z,X,Y) =$$
$$= A(X,Y,Z) - A(Y,Z,X) + A(Y,Z,X) - A(Z,X,Y) +$$
$$+ A(Z,X,Y) - A(X,Y,Z) = 0.$$

<u>8.12. Tétel.</u> Legyen ∇ <u>torziómentes</u> kovariáns deriválás az M sokaságon; $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Érvényesek a következő relációk:

(1) $\sum_{\text{cikl}} R(X,Y)Z = 0 \in \mathfrak{X}(M)$ – <u>az algebrai Bianchi-azonosság</u>;

(2) $\sum_{\text{cikl}} (\nabla_X R)(Y,Z) = 0 \in \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$ – <u>differenciális Bianchi-azonosság</u>.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

$$= \nabla_X \left(\nabla_Z Y + [Y,Z] \right) - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z [X,Y] - [[X,Y],Z],$$

felhasználva ∇ torziómentességét. Tehát

$$R(X,Y)Z = \underline{\nabla_X \nabla_Z Y} - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_X [Y,Z] - \nabla_Z [X,Y] - [[X,Y],Z].$$

Ciklikusan permutálva az X, Y, Z vektormezőket:

$$R(Y,Z)X = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Y [Z,X] - \nabla_X [Y,Z] - [[Y,Z],X],$$

$$R(Z,X)Y = \nabla_Z \nabla_Y X - \underline{\nabla_X \nabla_Z Y} + \nabla_Z [X,Y] - \nabla_Y [Z,X] - [[Z,X],Y].$$

Összeadva a három utóbbi reláció megfelelő oldalait, a kovariáns deriváltat tartalmazó tagok páronként kiejtik egymást, a megmaradó három Lie-zárójel összege pedig a Jacobi azonosság alapján zérus.

Ezzel az algebrai Bianchi-azonosságot igazoltuk.

(2) A <u>8.11.</u> (3) -ban tett észrevétel és ∇ torziómentessége alapján

$$(\nabla_X R)(Y,Z) = [\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_X Y, Z) - R(Y, \nabla_X Z)$$
$$= [\nabla_X, R(Y,Z)] - R(\nabla_Y X, Z) - R([X,Y],Z) - R(Y, \nabla_X Z)$$
$$= \left([\nabla_X, R(Y,Z)] - R([X,Y],Z) \right) + \left(R(Z, \nabla_Y X) - R(Y, \nabla_X Z) \right).$$

Itt a második zárójeles kifejezés

$$A(Z,Y,X) - A(Y,X,Z)$$

alakú, ahol $A : (\mathfrak{X}(M))^3 \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M))$. Mivel az (Y,X,Z) hármast a (Z,Y,X) hármasból ciklikus permutációval kaptuk, a <u>8.11.</u> (4) -ben látottak szerint adódik, hogy a kifejezés ciklikus összege zérus. Az első zárójeles kifejezés (miután a <u>8.11.</u> -ben mondottak figyelembevételével) a következőképpen alakítható át:

$$[\nabla_X, R(Y,Z)] - R([X,Y],Z) = [\nabla_X, [\nabla_Y,\nabla_Z] - \nabla_{[Y,Z]}] -$$

$$- [\nabla_{[X,Y]}, \nabla_Z] - \nabla_{[[X,Y],Z]} =$$

$$= [\nabla_X, [\nabla_Y,\nabla_Z]] + [\nabla_{[Y,Z]}, \nabla_X] - [\nabla_{[X,Y]}, \nabla_Z] - \nabla_{[[X,Y],Z]}.$$

Itt a jobb oldali első és negyedik tag ciklikus összege a Jacobi-azonosság alapján zérus. A két középső tag viszont olyan

$$A(Y,Z,X) - A(X,Y,Z)$$

alakú kifejezés, ahol (Y,Z,X) (X,Y,Z)-ből ciklikus permutációval kapható, ezért ennek a kifejezésnek is zérus a ciklikus összege. □

8.13. Példa: a természetes kovariáns deriválás $\mathbb{R}^n$-en

(1) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret, ellátva az $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ egytagú atlasz által meghatározott sima struktúrával. $\mathbb{R}^n$ érintővektorait interpretálhatjuk a 3.0.-ban mondottak szerinti geometriai érintővektorokként. Ekkor

$$T_p\mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n = \{v_p = (p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid v \in \mathbb{R}^n\},$$

és $\mathbb{R}^n$ vektormezői olyan

$$\underline{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n, \; p \longmapsto \underline{X}(p) := (p, X(p))$$

alakú leképezésekként adhatók meg, ahol $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, a vektormező ún. fő része sima leképezés. Ha – a szokásos módon – $(e_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa és

$$\underline{E}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n, \; p \longmapsto \underline{E}_i(p) := (p, e_i)$$
$$(i \in \{1,\dots,n\}),$$

akkor az $(\underline{E}_i)_{i=1}^n$ n-élmező $\mathbb{R}^n$-en (a 8.3.(2) szerinti értelemben); ezt $\mathbb{R}^n$ természetes n-élmezőjének hívjuk. $(\underline{E}_i)_{i=1}^m$ bázisa az $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ $C^\infty(M)$-modulusnak: minden $\underline{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormező egyértelműen előállítható

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^m X^i \underline{E}_i \,; \quad X^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ i \in \{1, \dots, n\}$$

alakban. Az itt föllépő X^i komponensfüggvények éppen a vektormező X fő részének euklideszi koordinátafüggvényei:

$$X^i = e^i \circ X \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\};$$

ugyanis tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén egyrészt $\underline{X}(p) = (p, X(p))$, másrészt

$$\underline{X}(p) = \Big(\sum_{i=1}^n X^i \underline{E}_i\Big)(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\, \underline{E}_i(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)(p, e_i)$$
$$= \Big(p, \sum_{i=1}^n X^i(p) e_i\Big),$$

így $X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) e_i = (X^1(p), \dots, X^n(p))$, amiből p tetszőlegessége folytán valóban $X^i = e^i \circ X$ adódik.

(2) Emlékeztetünk rá, hogy egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ geometriai érintővektor valós értékű derivációként hat a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényalgebrán a

$$v_p(f) := D_v f(p) \quad , \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

szabály szerint, egy $\underline{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormező pedig derivációként hat $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-en, ha tetszőleges $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ és $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(\underline{X} f)(p) := \underline{X}(p)(f) = (X(p))_p(f) = (D_{X(p)} f)(p),$$

ahol X a vektormező fő része. Speciálisan

$$(\underline{E}_i f)(p) = (D_{e_i} f)(p) = (D_i f)(p) \,, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

így $\mathbb{R}^n$ természetes n-élmezője a D_i parciális deriváltak $(D_i)_{i=1}^n$ sorozatával azonosítható.

(3) Legyen adva egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektor és egy $\underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormező, amelynek fő része Y. $\underline{Y}$ v_p szerinti természetes kovariáns deriváltján (röviden kovariáns deriváltján) a

$$D_{v_p}\underline{Y} := (p, D_v Y(p)) \in T_p\mathbb{R}^n$$

érintővektort értjük. Ha $\underline{Y} = \sum_{i=1}^n Y^i \underline{E}_i$, akkor

$$\begin{aligned}
D_{v_p}\underline{Y} &:= (p, D_v Y(p)) = (p, Y'(p)(v)) = (p, (Y^1, \dots, Y^n)'(p)(v)) \\
&= (p, (Y^{1\prime}(p)(v), \dots, (Y^n)'(p)(v))) \\
&= (p, (D_v Y^1(p), \dots, D_v Y^n(p))) = (p, (v_p(Y^1), \dots, v_p(Y^n))) \\
&= \Big(p, \sum_{i=1}^n v_p(Y^i) e_i\Big) = \sum_{i=1}^n v_p(Y^i)(p, e_i) = \sum_{i=1}^n v_p(Y^i)\underline{E}_i(p),
\end{aligned}$$

tehát

$$(*) \qquad D_{v_p}\underline{Y} = \sum_{i=1}^n v_p(Y^i)\,\underline{E}_i(p).$$

Közvetlenül leolvasható innen, hogy a

$$(v_p, \underline{Y}) \in T_p\mathbb{R}^n \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longmapsto D_{v_p}\underline{Y} \in T_p\mathbb{R}^n$$

leképezés az első változóban $\mathbb{R}$-lineáris és a második ban additív. Teljesül az értelemszerű

$$D_{v_p} f\underline{Y} = v_p(f)\underline{Y}(p) + f(p)D_{v_p}\underline{Y}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Leibniz-szabály is, hiszen

$$\begin{aligned}
D_{v_p} f\underline{Y} &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n v_p(fY^i)\,\underline{E}_i(p) = \sum_{i=1}^n \big(v_p(f)Y^i(p) + f(p)v_p(Y^i)\big)\underline{E}_i(p) \\
&= v_p(f)\sum_{i=1}^n Y^i(p)\underline{E}_i(p) + f(p)\sum_{i=1}^n v_p(Y^i)\underline{E}_i(p) \\
&\overset{(*)}{=} v_p(f)\,\underline{Y}(p) + f(p)\,D_{v_p}\underline{Y}.
\end{aligned}$$

(4) Az $\mathbb{R}^n$-en adott <u>természetes kovariáns deriválás</u> (vagy <u>természetes lineáris konnekció</u>) a

$$\left\| \begin{array}{l} D: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n),\ (\underline{X}, \underline{Y}) \longmapsto D_{\underline{X}} \underline{Y} ; \\ (D_{\underline{X}} \underline{Y})(p) := D_{\underline{X}(p)} \underline{Y} \end{array} \right.$$

leképezés. Az érintővektorok szerinti természetes kovariáns derivált előző pontban említett tulajdonságai alapján közvetlenül adódik, hogy D valóban <u>kovariáns deriválás az $\mathbb{R}^n$ sokaságon</u>: eleget tesz a $(\nabla_1)-(\nabla_3)$ axiómáknak. Ha $\underline{Y} = \sum_{i=1}^n Y^i \underline{E}_i$, akkor

$$(**) \qquad D_{\underline{X}} \underline{Y} = \sum_{i=1}^n (\underline{X} Y^i) \underline{E}_i ,$$

ugyanis tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ pontot tekintve,

$$(D_{\underline{X}} \underline{Y})(p) := D_{\underline{X}(p)} \underline{Y} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n (\underline{X}(p) Y^i) \underline{E}_i(p)$$
$$= \sum_{i=1}^n (\underline{X} Y^i)(p) \underline{E}_i(p) = \Big(\sum_{i=1}^n (\underline{X} Y^i) \underline{E}_i \Big)(p) .$$

$(**)$ alkalmazásával $(\nabla_1)-(\nabla_3)$ teljesülése szintén közvetlenül látható.

(5) Az $\mathbb{R}^n$-en adott természetes kovariáns deriválás <u>torziómentes</u>. Legyenek ennek ellenőrzése céljából $\underline{X} = \sum_{i=1}^n X^i \underline{E}_i$ és $\underline{Y} = \sum_{i=1}^n Y^i \underline{E}_i$ tetszőleges vektormezők $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor $(**)$ alapján

$$D_{\underline{X}} \underline{Y} - D_{\underline{Y}} \underline{X} = \sum_{i=1}^n (\underline{X} Y^i - \underline{Y} X^i) \underline{E}_i = \sum_{i=1}^n (\underline{X} Y^i - \underline{Y} X^i) D_i .$$

Másrészt tetszőleges $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvény esetén

$$[\underline{X}, \underline{Y}] f = \underline{X}(\underline{Y} f) - \underline{Y}(\underline{X} f) = \sum_{i=1}^n \big(\underline{X}(Y^i \underline{E}_i f) - \underline{Y}(X^i \underline{E}_i f) \big)$$
$$= \sum_{i=1}^n ((\underline{X} Y^i - \underline{Y} X^i) D_i f + \sum_{i=1}^n \big(Y^i \underline{X}(D_i f) - X^i (\underline{Y} D_i f) \big) .$$

Itt a második összeg zérus, felhasználva ugyanis a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlőségét,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y^i \underline{X}(D_i f) - X^i \underline{Y}(D_i f) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(Y^i X^j D_j D_i f - X^i Y^j D_j D_i f \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^j Y^i D_j D_i f - X^i Y^j D_i D_j f \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i Y^j D_i D_j f - X^i Y^j D_i D_j f \right)$$

$$= 0 .$$

f tetszőlegessége folytán így

$$D_{\underline{X}} \underline{Y} - D_{\underline{Y}} \underline{X} = [\underline{X}, \underline{Y}]$$

következik, ami D torziómentességét jelenti.

(6) <u>Az $\mathbb{R}^n$-en adott természetes kovariáns derivált görbületi tenzora eltűnik.</u> Legyenek a bizonyítás céljából $\underline{X}, \underline{Y}$ és $\underline{Z}$ tetszőleges vektormezők $\mathbb{R}^n$-en, $\underline{Z} = \sum_{i=1}^{n} Z^i \underline{E}_i$. Ekkor

$$R(\underline{X}, \underline{Y})\underline{Z} := D_{\underline{X}} D_{\underline{Y}} \underline{Z} - D_{\underline{Y}} D_{\underline{X}} \underline{Z} - D_{[\underline{X}, \underline{Y}]} \underline{Z} =$$

$$\overset{(*)}{=} D_{\underline{X}} \left(\sum_{i=1}^{n} (\underline{Y} Z^i) \underline{E}_i \right) - D_{\underline{Y}} \left(\sum_{i=1}^{n} (\underline{X} Z^i) \underline{E}_i \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left([\underline{X}, \underline{Y}] Z^i \right) \underline{E}_i =$$

$$\overset{(D_3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{X}(\underline{Y} Z^i) - \underline{Y}(\underline{X} Z^i) - [\underline{X}, \underline{Y}] Z^i \right) \underline{E}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left([\underline{X}, Y] - [\underline{X}, Y] \right) Z^i \Big) \underline{E}_i = 0 ,$$

figyelembe véve, hogy az $\underline{E}_i$ vektormezők kovariáns deriváltja eltűnik, mivel a fő részük konstans leképezés. (Ugyanilyen okból D-nek az $(\underline{E}_i)_{i=1}^{n}$ természetes n-dimenzióra vonatkozó Christoffel-szimbólumai is eltűnnek.)

9. Párhuzamos eltolás

9.0. A következőkben műveleteink lesz a közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos néhány alapvető eredményre; ezeket tekintjük át először.

(1) Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pedig egy folytonos leképezés. Egy

(*) $$x' = f(x)$$

alakú képletet, ahol x és x' is egy szimbólum, $\mathcal{U}$ fölötti közönséges, elsőrendű, autonom differenciálegyenletnek, a továbbiakban röviden differenciálegyenletnek nevezzük. (Szokásos angol rövidítése: ODE – ordinary differential equation.) Azt mondjuk, hogy egy $\gamma: I \longrightarrow \mathcal{U}$ C^k-osztályú ($k \geqq 1$) görbe, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, megoldása a (*) differenciálegyenletnek, ha

$$\gamma'(t) = f(\gamma(t)), \quad \text{minden } t \in I\text{-re};$$

röviden: ha $\gamma' = f \circ \gamma$ teljesül I fölött. Ekkor a γ görbét a differenciálegyenlet egy integrálgörbéjének is hívjuk. Egy $\gamma: I \longrightarrow \mathcal{U}$ megoldásra vonatkozó kezdeti feltételen $\gamma(t_0) = p_0$ alakú előírást értünk, ahol $t_0 \in I$ adott paraméter, $p_0 \in \mathcal{U}$ pedig adott pont.

(2) A (*) differenciálegyenlet egy $\gamma: I \longrightarrow \mathcal{U}$ megoldásánál az I intervallum nyílt, zárt, félig nyílt, speciálisan $\mathbb{R}$-nek nyílt vagy zárt félegyenese, ill. a teljes valós egyenes is lehet.
A γ integrálgörbe minden

$$\tilde{\gamma} : I+\lambda := \{ t+\lambda \in \mathbb{R} \mid t \in I \} \longrightarrow \mathcal{U},$$
$$\tau \longmapsto \tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\tau - \lambda)$$

alakú átparaméterezettje, ahol λ rögzített valós szám, is integrálgörbe. Erre tekintettel az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, s külön említés nélkül fel is fogjuk tenni, hogy az integrálgörbék értelmezési tartománya tartalmazza a 0-t. Ezzel összhangban a kezdeti feltételt $\gamma(0) = p$ alakban adjuk meg, s egy ennek eleget tevő megoldást a *p pontból induló integrálgörbeként* említünk.

(3) Megmutatható, hogy f folytonossága elegendő ahhoz, hogy a $(*)$ differenciálegyenletnek minden kezdeti feltétel mellett *létezzen* megoldása; előfordulhat ugyanakkor, hogy több olyan megoldás is van, amely kielégít egy előírt kezdeti feltételt. Tekintsük ennek illusztrálására az

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t) := 3t^{2/3}$$

folytonos függvény segítségével képzett $x' = f(x)$ differenciálegyenletet a $\gamma(0) = 0$ kezdeti feltétellel. Ekkor a problémát a

$$\gamma_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto \gamma_0(t) := 0 \quad \text{és a} \quad \gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto t^3$$

függvény egyaránt megoldja.

Annak biztosításához ezért, hogy a $(*)$ differenciálegyenlet adott pontból induló integrálgörbéje *egyértelmű* legyen, az $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezéssel kapcsolatban további megszorítással kell élni. Ismeretes, hogy a kívánt cél eléréséhez *elegendő* f *C^1-osztályúságát* előírni. Mivel vizsgálatainkban az előforduló leképezések mind simák lesznek, a (*) differenciál-egyenletre vonatkozó alapvető eredmények megfogalmazásánál az egyszerűség kedvéért föltesszük az f leképezés simaságát.

(4) Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, s legyen adva egy $f: U \to \mathbb{R}^n$ sima leképezés. Tekintsük az f segítségével képzett $x' = f(x)$ differenciálegyenletet.

① <u>EGZISZTENCIA – TÉTEL.</u> Az $x' = f(x)$ differenciál-egyenletnek tetszőlegesen kijelölt $p \in U$ ponthoz <u>létezik</u> p-ből induló sima integrálgörbéje.

② <u>UNICITÁS – TÉTEL.</u> Az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet $p \in U$ pontból induló bármely két sima integrálgörbéje egybeesik az értelmezési tartományaik metszetén.

③ <u>SIMA FÜGGÉS A KEZDETI FELTÉTELEKTŐL.</u> Tetszőleges $p \in U$ pont esetén jelölje γ_p az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet p-ből induló integrálgörbéjét. Létezik a p pontnak $V \subset U$ környezete, valamint egy ε pozitív valós szám úgy, hogy a

$$\varphi: V \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n, \quad (q,t) \mapsto \varphi(q,t) := \gamma_q(t)$$

leképezés sima.

(5) Pontosabb eredmények fogalmazhatók meg az ún. <u>lineáris differenciálegyenletekkel</u> kapcsolatban. Tegyük föl, hogy $I \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum, s legyen adva egy

$$A: I \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n) \cong M_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto A(t)$$

folytonos leképezés. Ekkor az

$$(**) \qquad x' = Ax$$

képletet (közönséges, elsőrendű) lineáris differenciálegyenletnek hívjuk. Tetszőlegesen kijelölve egy $p \in \mathbb{R}^n$ pontot, létezik egy és csak egy olyan C^1-osztályú $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ görbe, amely p-ből induló integrálgörbéje $(**)$-nak, vagyis amelyre

$$\gamma'(t) = A(t)\gamma(t) \quad (t \in I) \quad \text{és} \quad \gamma(0) = p$$

teljesül. (Most tehát az integrálgörbe az adott A leképezés teljes értelmezési tartományán definiált-van!)

(6) Legyen adva egy $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sima leképezés, s legyenek x, x' és x'' szimbólumok. Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^2-osztályú görbe megoldása az

$$x'' = F(x, x')$$

(autonom) másodrendű differenciálegyenletnek, ha minden $t \in I$-re teljesül a

$$\gamma''(t) = F(\gamma(t), \gamma'(t))$$

egyenlőség. Tetszőlegesen kijelölve egy $(p_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pontot, ennek megadható $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ környezete, létezik továbbá $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy bármely $(p, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ esetén az $x'' = F(x, x')$ differenciálegyenletnek létezik egy és csak egy olyan

$$\gamma_v :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$$

megoldása, amely eleget tesz a

$$\gamma_v(0) = p, \quad \gamma_v'(0) = v$$

kezdeti feltételnek. Érvényes a kezdeti feltételektől való sima függés: a

$$\varphi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p, v, t) \longmapsto \gamma_v(t)$$

leképezés sima.

<u>9.1. Állítás és definíció.</u> Legyen ∇ kovariáns deriválás az M sokaságon. Minden $\gamma: I \longrightarrow M$ görbe esetén ∇ egyértelműen meghatároz egy olyan $\nabla_\gamma: \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ leképezést, amelyre teljesülnek a következők:

(i) <u>$\mathbb{R}$-lineáris:</u> tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ vektormezők és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárok esetén

$$\nabla_\gamma (\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_\gamma X + \mu \nabla_\gamma Y .$$

(ii) <u>Eleget tesz a szorzatszabálynak:</u> ha $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és $h \in C^\infty(I)$, akkor

$$\nabla_\gamma hX = h' X + h \nabla_\gamma X .$$

(iii) <u>Kiterjeszthető</u> $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ vektormező bármely $\tilde{X}$ kiterjesztése esetén

$$(\nabla_\gamma X)(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{X} , \quad t \in I .$$

A ∇_γ leképezést a ∇ <u>kovariáns deriváláshoz tartozó</u> <u>γ-menti kovariáns deriválásnak</u> nevezzük.

<u>Bizonyítás.</u> (1) <u>Egyértelműség.</u> Tegyük fel, hogy ∇_γ az (i)-(iii) feltételeknek eleget tevő leképezése $\mathfrak{X}(\gamma)$-nak $\mathfrak{X}(\gamma)$-ba. Jelöljünk ki tetszőlegesen egy $t_0 \in I$ paramétert. A <u>8.2.</u> lemma bizonyításában alkalmazott érveléssel adódik, hogy $(\nabla_\gamma X)(t_0)$ csak az $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ vektormező egy $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ intervallumon felvett értékeitől függ, ahol ε tetszőlegesen kicsiny pozitív valós szám. Válasszunk ki egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet a $\gamma(t_0)$ pont körül. Ha t a t_0 paraméter alkalmas környezetébe esik, akkor

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)}$$

írható, ahol az $X^i : t \in I \mapsto X^i(t) := X(t)u^i \in \mathbb{R}$ függvények X koordinátafüggvényei a kijelölt térképre vonatkozóan. Így t_0 említett környezetében
$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right).$$

Az itt szereplő $\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma$ vektormezők nyilvánvalóan kiterjeszthetők; ezt is figyelembe véve
$$(\nabla_\gamma X)(t_0) = \left(\nabla_\gamma \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) \right) \right)(t_0) =$$
$$\overset{(i)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \nabla_\gamma \left(X^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) \right) \right)(t_0)$$
$$\overset{(ii)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} X^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) + X^i \nabla_\gamma \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) \right)(t_0)$$
$$\overset{(iii)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(X^{i\prime}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_{\gamma(t_0)} + X^i(t_0) \nabla_{\dot\gamma(t_0)} \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

adódik, ami azt mutatja hogy a ∇_γ operátort a ∇ kovariáns deriválás egyértelműen meghatározza.

(2) <u>Létezés.</u> Ha $\operatorname{Im}(\gamma)$ benne van egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép tartományában, akkor értelmezzük a ∇_γ operátort (az (1)-ben mondottak szerint egyedül lehetséges)
$$\nabla_\gamma X := \sum_{i=1}^{n} \left(X^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma \right) + X^i \left(\nabla \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \circ \dot\gamma \right), \quad X \in \mathfrak{X}(\gamma)$$

előírással. Egyszerű, közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy ekkor az (i) - (iii) feltételek teljesülnek. Az általános esetben fedjük le $\operatorname{Im}(\gamma)$-t koordinátakörnyezetekkel, s ezek mindegyike fölött definiáljuk ∇_γ-t a felírt formulával. Az unicitás biztosítja, hogy ez a definíció jó: átfedő koordinátakörnyezetek metszetén az egyik, ill. a másik térkép segítségével definiált operátor egybeesik. □

9.2. definíció. Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, s tekintsünk egy $\gamma : I \longrightarrow M$ görbét, ahol $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (de nem egypontú) intervallum. Azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ γ-menti vektormező párhuzamos γ mentén, ha $\nabla_\gamma X = 0$.

9.3. Állítás. Legyen adva egy (M, ∇) affinösszefüggő sokaságon egy $\gamma : I \longrightarrow M$ görbe (ahol $I \subset \mathbb{R}$ nem egypontú intervallum). Kijelölve egy $t_0 \in I$ paramétert és egy $v_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$ érintővektort, létezik egy és csak egy olyan $X : I \longrightarrow TM$ γ mentén párhuzamos vektormező, amelyre $X(t_0) = v_0$ teljesül.

Bizonyítás. (1) Tegyük föl először, hogy $\operatorname{Im}(\gamma)$ benne van egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép tartományában. Ekkor a 9.1. bizonyításában mondottak alapján egy

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma\right) : I \longrightarrow TM$$

γ-menti vektormező akkor és csak akkor párhuzamos, ha bármely $t \in I$-re

$$0 = \sum_{i=1}^n \left(X^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} + X^i(t) \nabla_{\dot\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n X^k(t) \gamma^{j\prime}(t) \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\gamma(t)}} \frac{\partial}{\partial u^k} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(X^{i\prime}(t) + \sum_{j,k=1}^n X^k(t) \gamma^{j\prime}(t)\, \Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)},$$

azaz ha

$$(*) \qquad \boxed{X^{i\prime} = -\sum_{j,k=1}^n X^k \gamma^{j\prime} \left(\Gamma^i_{jk} \circ \gamma\right) \; ; \quad i \in \{1, \dots, n\}}.$$

(*) elsőrendű, közönséges, lineáris differenciálegyenletet ad az

$$\underline{X} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto \underline{X}(t) := \sum_{i=1}^{n} X^i(t)\, e_i$$

leképezésre, amelynek a 9.0. (5) -ben mondottak szerint tetszőlegesen előírt kezdeti feltétel mellett egyértelműen létezik az egész I intervallumon értelmezett megoldása.

(2) Foglalkozzunk ezután azzal az esettel, amikor $\mathrm{Im}(\gamma)$ nem fedhető le egyetlen koordinátakörnyezettel. Jelölje β azon $\tau > t_0$ paraméterek szuprémumát, amelyekhez egyértelműen létezik $[t_0, \tau]$ fölött a kívánt párhuzamos vektormező. Világos, hogy $\beta > t_0$, hiszen ha τ elég közel van t_0-hoz, akkor $\gamma([t_0,\tau])$ benne egy koordinátakörnyezetben, és az (1)-beli érvelés alkalmazható.

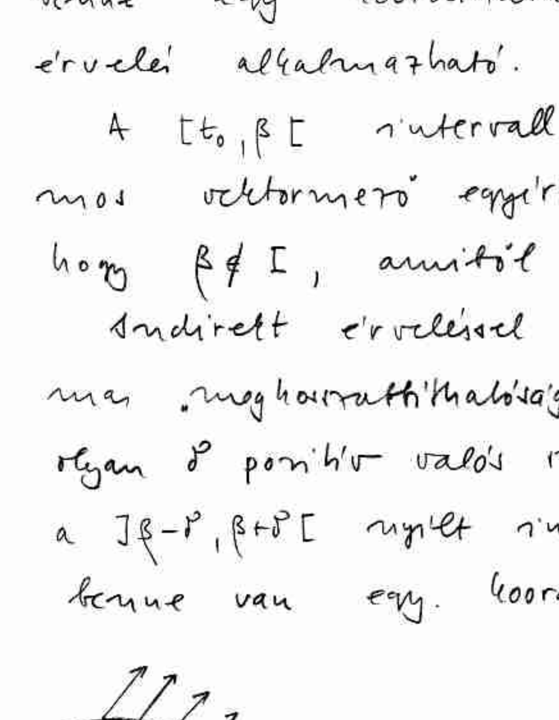
A $[t_0, \beta[$ intervallumon a kívánt X párhuzamos vektormező egyértelműen létezik. Megmutatjuk, hogy $\beta \notin I$, amiből következik az állítás.

Indirekt érveléssel tegyük fel, hogy $\beta \in I$. γ alkalmas „meghosszabbíthatósága" folytán, így létezik olyan δ pozitív valós szám, hogy γ értelmezve van a $]\beta-\delta, \beta+\delta[$ nyílt intervallumon, és $\gamma(]\beta-\delta, \beta+\delta[)$ benne van egy koordinátakörnyezetben. Ekkor egyértelműen létezik olyan

$$\tilde{X} :]\beta-\delta, \beta+\delta[\longrightarrow TM$$

párhuzamos vektormező, amely eleget tesz az

$$\tilde{X}\left(\beta-\tfrac{\delta}{2}\right) = X\left(\beta-\tfrac{\delta}{2}\right)$$



kezdeti feltételnek. Az egyértelműség miatt értelmezési tartományaik metszetén $\tilde{X}$ és X egybeesik. Ez azonban azt jelenti, hogy X értelmezési tartománya β-n túlra is kiterjeszthető, ami ellentmond β jelentésének. □

9. 4. Lemma. Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, s legyen adva egy $\gamma: I \to M$ görbe. Ha $\theta: \tilde{I} \to I$ sima leképezés és $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \theta$, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ esetén $X \circ \theta \in \mathfrak{X}(\tilde{\gamma})$, és

$$\nabla_{\tilde{\gamma}}(X \circ \theta) = \theta'((\nabla_\gamma X) \circ \theta).$$

Bizonyítás. Ha $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$, akkor $X \circ \theta : \tilde{I} \to TM$ sima leképezés (mert ilyenek kompozíciója), teljesül továbbá, hogy

$$\tau \circ (X \circ \theta) = (\tau \circ X) \circ \theta = \gamma \circ \theta =: \tilde{\gamma},$$

tehát $X \circ \theta \in \mathfrak{X}(\tilde{\gamma})$.

A $\nabla_{\tilde{\gamma}}(X \circ \theta)$-ra vonatkozó formulát koordinátás meggondolásokkal igazoljuk. Jelöljünk ki egy $t_0 \in \tilde{I}$ paramétert, a $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(\theta(t_0))$ pont körül pedig egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. $\theta(t_0)$ egy alkalmas környezetében a 9.1. bizonyításában látottak szerint X előállítható az $X = \sum_{i=1}^n X^i (\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma)$ alakban, ahol $X^i(t) = X(t)(u^i)$. Innen

$$X \circ \theta = \sum_{i=1}^n (X^i \circ \theta)(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \tilde{\gamma}),$$

így alkalmazva a 9.1. bizonyításának (1) pontjában nyert formulát, az említett környezet tetszőleges t pontjában

$$(\nabla_{\tilde{\gamma}}(X \circ \theta))(t) = \sum_{i=1}^n \left((X^i \circ \theta)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tilde{\gamma}(t)} + (X^i \circ \theta)(t) \nabla_{\dot{\overline{\gamma \circ \theta}}(t)} \frac{\partial}{\partial u^i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\theta'(t) X^{i\prime}(\theta(t)) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tilde{\gamma}(t)} + \theta'(t) X^i(\theta(t)) \nabla_{\dot{\gamma}(\theta(t))} \frac{\partial}{\partial u^i} \right)$$

$$= \theta'(t)(\nabla_\gamma X)(\theta(t)) = (\theta'(\nabla_\gamma X) \circ \theta)(t),$$

ami igazolja a lemmát. □

9.5. Következmény. Egy görbementi vektormező párhuzamossága a görbe átparaméterezéseivel szemben invariáns tulajdonság. □

9.6. Állítás és definíció. Legyen (M,∇) affin-összefüggő sokaság, $\gamma : I \longrightarrow M$ egy görbe ; $t_0, t_1 \in I$. A

$$(P_\gamma)_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M \ ; \ v \longmapsto (P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v) := X(t_1),$$

ha X az a γ-menti párhuzamos vektormező, amelyre $X(t_0) = v_1$

leképezés jól definiált lineáris izomorfizmus a $T_{\gamma(t_0)}M$ és a $T_{\gamma(t_1)}M$ érintőtér között; ezt a $\gamma(t_0)$ pontból a $\gamma(t_1)$ pontba való, γ-menti párhuzamos eltolásnak nevezzük.

Bizonyítás. $(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}$ létezését és jól-definiáltságát biztosítja 9.3.

Legyen $v, w \in T_{\gamma(t_0)}M$. Tekintsük azokat az $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ γ-menti párhuzamos vektormezőket, amelyekre $X(t_0) = v$, ill. $Y(t_0) = w$ teljesül. Mivel $(X+Y)(t_0) = v + w$, és 9.1./(i) miatt $X+Y$ is párhuzamos γ mentén, következik, hogy

$$(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v+w) = (X+Y)(t_1) = X(t_1) + Y(t_1) =$$
$$= (P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v) + (P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(w) \ .$$

Ugyanilyen meggondolással kapjuk, hogy tetszőleges $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(\lambda v) = \lambda (P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v) \ ,$$

a $(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}$ leképezés tehát lineáris.

Ha valamely $v \in T_{\gamma(0)}M$ vektorra $(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v) = 0$

teljesül, akkor 9.3.-beli unicitás-állítás miatt X a zérus vektormező γ mentén, így $v = X(0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $(P_\gamma)_{t_0}^{t}$ injektív, ami $\dim T_{\gamma(t_0)} M = \dim T_{\gamma(t_1)} M$ folytán automatikusan maga után vonja a bijektivitást. Beláttuk ezzel, hogy $(P_\gamma)_{t_0}^{t_1}$ valóban lineáris izomorfizmus a tekintett érintőterek között. □

<u>Megállapodás.</u> Ha $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (nem egypontú) zárt intervallum, akkor egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ görbe mentén való, $\gamma(a)$-ból $\gamma(b)$-be történő párhuzamos eltolásra egyszerűen a P_γ jelölést használjuk.

<u>Megjegyzések</u> (1) <u>A görbementi párhuzamos eltolás általában „útfüggő"</u>: ha $\gamma_1 : [a,b] \to M$ és $\gamma_2 : [a,b] \to M$ egy affinösszefüggő sokaság különböző görbéi, akkor általában $P_{\gamma_1} \neq P_{\gamma_2}$.

(2) Értelemszerűen szólhatunk szakaszonként sima görbe mentén való párhuzamos eltolásról is, a leírt eljárást töréspontból töréspontig haladva hajtva végre.

<u>9.7. Megjegyzések egy sokaság fundamentális csoportjáról.</u>

Legyen M egy <u>topologikus tér</u>; egy nem egypontú zárt intervallum M-be való folytonos leképezését nevezzük <u>pályának</u>. A következőkben a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett pályákat tekintünk. Azt mondjuk, hogy egy $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ pálya <u>összeköt</u> egy $p \in M$ pontot egy $q \in M$ ponttal, ha $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Egy M topologikus tér p pontját egy q ponttal összekötő pályák halmazára a $\mathcal{P}(M; p, q)$ jelölést használjuk. Megállapodunk abban, hogy – speciálisan – $\mathcal{P}(M,p) := \mathcal{P}(M; p, p)$; $\mathcal{P}(M,p)$ elemeire a p <u>alappontú</u> <u>hurok</u> (vagy <u>loop</u>) elnevezést használjuk. A p alappontú <u>konstans hurok</u>

az az $e_p \in \mathcal{P}(M, p)$ hurok, amelyre $e_p(t) = p$ teljesül, minden $t \in [0,1]$-re.

Az M topologikus tér ívszerűen összefüggő, ha tetszőleges $p, q \in M$ esetén $\mathcal{P}(M; p, q) \neq \emptyset$. Jól ismert, hogy minden ívszerűen összefüggő topologikus tér összefüggő, és hogy ennek megfordítása nem igaz. Sokaságok esetén viszont az összefüggőség maga után vonja az ívszerű összefüggőséget, sőt egy sokaság bármely két pontja összeköthető sima pályával: ha M sokaság, p és q pontja M-nek, akkor létezik olyan $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ sima pálya, hogy

$$\gamma(t) = p, \text{ ha } t \leq 0; \quad \gamma(t) = q, \text{ ha } t \geq 1.$$

(1) Legyen M topologikus tér; $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(M; p, q)$. α-ból β-ba való, rögzített végpontú homotópián olyan

$$H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M, \quad (s,t) \longmapsto H(s,t)$$

folytonos leképezést értünk, amelynél tetszőleges $(s,t) \in [0,1]^2$ esetén teljesülnek a következők:

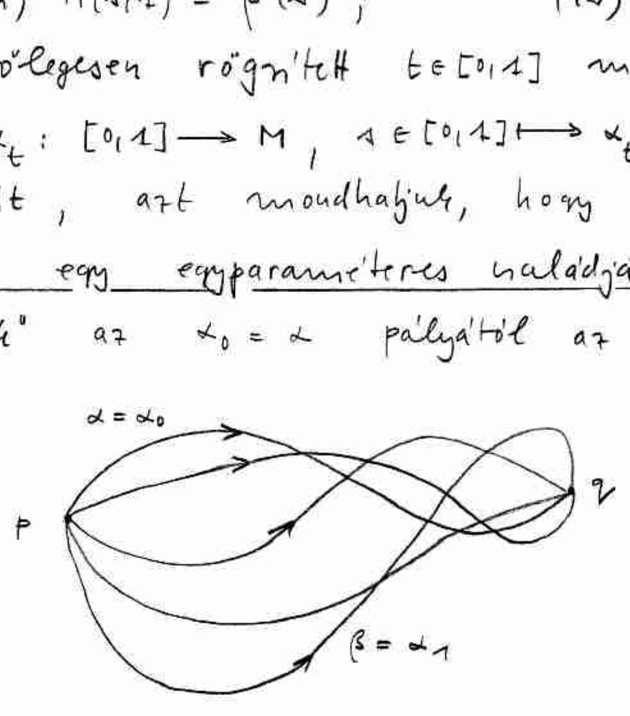
(i) $H(s,0) = \alpha(s)$; (iii) $H(0,t) = p$,

(ii) $H(s,1) = \beta(s)$; (iv) $H(1,t) = q$.

Tetszőlegesen rögzített $t \in [0,1]$ mellett bevezetve az

$$\alpha_t: [0,1] \longrightarrow M, \quad s \in [0,1] \longmapsto \alpha_t(s) := H(s,t) \in M$$

leképezést, azt mondhatjuk, hogy H $\alpha_t \in \mathcal{P}(M; p, q)$ pályák egy egyparaméteres családja, amely „folytonosan változik" az $\alpha_0 = \alpha$ pályától az $\alpha_1 = \beta$ pályáig.



(2) Legyen M továbbra is topologikus tér; $p, q \in M$; $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(M; p, q)$. Azt mondjuk, hogy α homotóp β-val, ha létezik α-ból β-ba vezető homotópia, és ilyenkor az $\alpha \simeq \beta$ jelölést használjuk. Megmutatjuk, hogy az így bevezetett reláció ekvivalencia-reláció $\mathcal{P}(M; p, q)$-ban.

(i) Reflexivitás. Legyen $\alpha \in \mathcal{P}(M; p, q)$ tetszőleges. Ekkor a

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M, \quad (s,t) \longmapsto H(s,t) := \alpha(s)$$

leképezés közvetlenül látható módon homotópia α-ból α-ba.

(ii) Szimmetria. Tegyük fel, hogy $\alpha \simeq \beta$, és legyen H homotópia α-ból β-ba. Ha

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M, \quad (s,t) \longmapsto G(s,t) := H(s, 1-t),$$

akkor G homotópia β-ból α-ba, ugyanis tetszőleges $(s,t) \in [0,1]^2$ esetén

$$G(s,0) := H(s,1) = \beta(s); \qquad G(0,t) := H(0, 1-t) = p;$$
$$G(s,1) := H(s,0) = \alpha(s); \qquad G(1,t) := H(1, 1-t) = q.$$

(iii) Tranzitivitás. Tegyük fel, hogy $\alpha \simeq \beta$ és $\beta \simeq \gamma$. Legyen F homotópia α-ból β-ba, G homotópia β-ból γ-ba. Értelmezzük a $H : [0,1]^2 \longrightarrow M$ leképezést a következőképpen:

$$H(s,t) := \begin{cases} F(s, 2t), & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(s, 2t-1), & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ekkor

$$H(s,0) = F(s,0) = \alpha(s); \qquad H(0,t) = p;$$
$$H(s,1) = G(s,1) = \gamma(s); \qquad H(1,t) = q,$$

H tehát homotópia α-ból γ-ba.

Egy $\alpha \in \mathcal{P}(M; p, q)$ pálya ekvivalencia osztályára az

$[\alpha]$ jelölést használjuk, és azt mondjuk, hogy ez az α pálya <u>homotópia-osztálya</u>. Speciálisan egy $\alpha \in \mathcal{P}(M, p)$ hurkot <u>nullhomotópnak</u> nevezzük, ha $\alpha \simeq e_p$, vagyis ha α homotóp a p alappontú konstans hurokkal. Szemléletesen szólva: α p alappontú hurkok folytonos családján keresztül „összehúzható" a p pontra.

<u>Példák</u> (a) Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ nemüres konvex halmaz, ellátva az altér-topológiával. Legyen $p, q \in M$. Ekkor bármely két $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(M; p, q)$ pálya homotóp: homotópiát ad meg közöttük a

$$H : [0,1]^2 \longrightarrow M, \quad (s,t) \longmapsto H(s,t) := (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$$

leképezés.

(b) Legyen M tetszőleges topologikus tér, $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ pedig egy pálya. Tekintsünk egy szigorúan monoton növekvő $\theta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ függvényt mint paramétertranszformációt, és legyen $\beta := \alpha \circ \theta$. Ekkor β is pálya, amely az $\alpha(0)$ pontot az $\alpha(1)$ ponttal köti össze. <u>α homotóp β-val</u>, homotópiát ad meg közöttük

$$H : (s,t) \in [0,1]^2 \longmapsto H(s,t) := \alpha\big((1-t)s + t\,\theta(s)\big)$$

leképezés.

(c) Egy M topologikus teret <u>egyszeresen összefüggőnek</u> nevezünk, ha ívszerűen összefüggő, és minden olyan $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ és $\beta : [0,1] \longrightarrow M$ pálya homotóp, amelyekre $\alpha(0) = \beta(0)$ és $\alpha(1) = \beta(1)$ teljesül. Megmutatható, hogy <u>egy ívszerűen összefüggő M topologikus térre a következők ekvivalensek:</u>

(ii) M egyszeresen összefüggő.

(iii) Tetszőleges $p \in M$ pontot tekintve, minden p alappontú hurok nullhomotóp.

(iiii) Van olyan $p \in M$ pont, hogy minden p alappontú hurok nullhomotóp.

(4) Legyen M egy topologikus tér, és tegyük fel, hogy M előállítható $M = H_1 \cup \dots \cup H_k$ $(k \in \mathbb{N},\ k \geq 2)$ alakban, ahol a H_i halmazok mindegyike zárt részhalmaza M-nek. Ha minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén adva van egy $\varphi_i : H_i \longrightarrow N$ folytonos leképezés egy N topologikus térbe úgy, hogy $\varphi_i \restriction H_i \cap H_j = \varphi_j \restriction H_i \cap H_j$, akkor létezik egy és csak egy olyan $\varphi : M \longrightarrow N$ folytonos leképezés, hogy $\varphi \restriction H_i = \varphi_i$; $i \in \{1, \dots, k\}$. – Ezt az igen hasznos észrevételt <u>ragasztási lemma</u>ként szokás idézni.

(5) Legyen M topologikus tér; $p, q, r \in M$, $\alpha \in \mathcal{P}(M; p, q)$, $\beta \in \mathcal{P}(M; q, r)$. Legyen

$$\alpha * \beta := \begin{cases} \alpha(2t), & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2t-1), & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A ragasztási lemma biztosítja, hogy $\alpha * \beta$ folytonos, és így pálya, mégpedig $\alpha * \beta \in \mathcal{P}(M; p, r)$. Ezt a pályát az α és a β pálya <u>szorzatának</u> hívjuk. Az α pálya <u>fordított irányú pályá</u>ja (vagy <u>fordítottjá</u>a)

$$\alpha^- : [0,1] \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \alpha^-(t) := \alpha(1-t);$$

$\alpha^- \in \mathcal{P}(M; q, p)$. Nyilvánvaló, hogy $\alpha^{--} = \alpha$.

A pályák szorzása és a fordított pálya képzése homotópiával szemben invariáns:

$\alpha \simeq \tilde{\alpha}$, $\beta \simeq \tilde{\beta}$ és $\alpha(1) = \beta(0)$ esetén $\alpha * \beta \simeq \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$,

$\alpha \simeq \tilde{\alpha} \implies \alpha^- \simeq \tilde{\alpha}^-$.

Valóban, egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha F

homotópia α-ból $\tilde{\alpha}$-ba, G homotópia β-ból $\tilde{\beta}$-ba, és

$$H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t), & \text{ha } (s,t) \in [0,\tfrac{1}{2}] \times [0,1]; \\ G(2s-1,t), & \text{ha } (s,t) \in [\tfrac{1}{2},1] \times [0,1], \end{cases}$$

akkor H homotópia $\alpha * \beta$-ból $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$-ba, a

$$K(s,t) := F(1-s,t), \quad (s,t) \in [0,1]^2$$

leképezés pedig homotópia α^--ból $\tilde{\alpha}^-$-ba.

Ez az észrevétel lehetővé teszi a következő alapvető, H. Poincaré-től 1895-ből származó konstrukciót.

Jelöljük ki az M topologikus tér egy p pontját, s legyen $\pi_1(M,p)$ a p alappontú hurkok homotópia-osztályainak halmaza. Az

$$([\alpha],[\beta]) \in \pi_1(M,p) \times \pi_1(M,p) \longmapsto [\alpha * \beta] \in \pi_1(M,p)$$

előírás jóldefiniált, szorzásnak mondott, művelet értelmez, és $\pi_1(M,p)$ ezzel a szorzással ellátva <u>csoport</u>, amelyet az M topologikus tér p-beli <u>fundamentális csoportjának</u> nevezünk. A csoport egységeleme $[e_p]$, ahol $e_p \in \Omega(M,p)$ a p-beli konstans hurok, $[\alpha] \in \pi_1(M,p)$ inverze $[\alpha^-]$. Amennyiben M ívszerűen összefüggő, s p és q tetszőleges pontjai M-nek, úgy <u>a $\pi_1(M,p)$ és a $\pi_1(M,q)$ csoport izomorf</u>: izomorfizmust ad meg közöttük az az

$$[\alpha] \in \pi_1(M,p) \longmapsto [\gamma^- * \alpha * \gamma] \in \pi_1(M,q)$$

leképezés, ahol γ tetszőleges, p-t q-val összekötő pálya. Tekintettel erre az izomorfizmusra, ívszerűen összefüggő M topologikus tér esetén szokás <u>a tér fundamentális csoportjáról</u> szólni, és ezt alappont kijölése nélkül egyszerűen $\pi_1(M)$-mel jelölni. Ha tehát például azt mondjuk, hogy „$\pi_1(M)$ triviális", akkor ez azt jelenti, hogy bármely $p \in M$ pont esetén $\pi_1(M,p) = \{[e_p]\}$, a $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ állítás jelentése pedig az, hogy a $\pi_1(M,p)$ csoport és az egészek additív csoportja között valamely, és ezért bármely, $p \in M$ pont esetén létezik izomorfizmus.

(5) Sokaságon dolgozva és differenciálgeometriai kontextusban általában olyan pályákkal kell foglalkoznunk, amelyek szakaszonként sima görbék. Megmutatható, hogy ha M egy sokaság és $\alpha: [0,1] \to M$ egy p pontot egy q ponttal összekötő pálya, akkor mindig van olyan p-t q-val összekötő szakaszonként sima $\beta: [0,1] \to M$ pálya, amely homotóp α-val. Így ha $\pi_1(M,p)$ bevezetésére szakaszonként sima hurkokat és szakaszonként sima homotópiákat alkalmazunk, akkor ugyanahhoz a csoporthoz jutunk, mint pusztán folytonos hurkok és homotópiák alkalmazása esetén. Erre az észrevételre a továbbiakban külön utalás nélkül támaszkodunk.

9.8. Affinösszefüggő sokaság holonómiacsoportja

Tegyük fel ebben az alpontban, hogy M összefüggő – és ennélfogva ívszerűen összefüggő – sokaság, amely el van látva egy ∇ kovariáns deriválással.

(1) Jelöljünk ki egy $p \in M$ pontot, és jelentse $\mathcal{P}(M,p)$ a p alappontú, szakaszonként sima hurkok halmazát. Ha

$$\mathrm{Hol}_p(M,\nabla) := \{P_\gamma \in GL(T_pM) \mid \gamma \in \mathcal{P}(M,p)\}$$

és tetszőleges $P_\alpha, P_\beta \in Hol_p(M,\nabla)$ párhuzamos eltolások szorzatát az egymást követő végrehajtásukként, azaz a

$$P_\beta \circ P_\alpha := P_{\alpha * \beta}$$

előírással értelmezzük, akkor $Hol_p(M,\nabla)$ csoporttá válik, amelyet az affinösszefüggő sokaság p pontbeli <u>holonómiacsoportjának</u> nevezzük.

(2) Legyenek p és q az M sokaság különböző pontjai, s tekintsünk egy p-t q-val összekötő, szakaszonként sima $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ görbét. Ekkor $P_\gamma: T_pM \longrightarrow T_qM$ lineáris izomorfizmus. Ha $\alpha \in \mathcal{P}(M,p)$, akkor $\gamma^- * \alpha * \gamma \in \mathcal{P}(M,q)$, és

$$P_{\gamma^- * \alpha * \gamma} = P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_{\gamma^-} = P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_\gamma^{-1},$$

így $P_\alpha \in Hol_p(M,\nabla)$ esetén $P_\gamma \circ P_\alpha \circ P_\gamma^{-1} \in Hol_q(M,\nabla)$, következésképpen

$$(*) \qquad P_\gamma Hol_p(M,\nabla) P_\gamma^{-1} = Hol_q(M,\nabla).$$

Ez azt mutatja, hogy a $Hol_p(M,\nabla)$ holonómia-csoport „bizonyos értelemben független a p alappponttól". Kifejtjük, mit jelent ez a megállapítás.

Válasszunk a p pont körül egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor a T_pM érintőtér a

$$v \in T_pM \longmapsto (u^1(v), \dots, u^n(v)) \in \mathbb{R}^n$$

(nem természetes) lineáris izomorfizmus révén azonosítható az $\mathbb{R}^n$ valós vektortérrel. Ez az azonosítás $GL(T_pM) \cong GL_n(\mathbb{R})$ csoport-izomorfizmust indukál, és így a $Hol_p(M,\nabla)$ holonómiacsoportot $GL_n(\mathbb{R})$ egy H részcsoportjával azonosíthatjuk.

Amennyiben egy másik térképet jelölünk ki a p pont körül, úgy az előzőtől különböző $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ azonosításához, és H helyett $GL_n(\mathbb{R})$-nek egy aHa^{-1} részcsoportjához jutunk, ahol $a \in GL_n(\mathbb{R})$. Így a p-beli holonómiacsoport $GL_n(\mathbb{R})$-nek egy konjugáltság erejéig egyértelmű részcsoportja. A $(*)$ reláció ezek után azt mutatja, hogy ha $p, q \in M$, akkor $Hol_p(M,\nabla)$ és $Hol_q(M,\nabla)$ $GL_n(\mathbb{R})$-nek ugyanahhoz a részcsoportjához vezet, ha konjugáltság-tól eltekintünk.

Megállapíthatjuk tehát:

Tetszőleges $p \in M$ pont esetén a $Hol_p(M,\nabla)$ holonómiacsoport $GL_n(\mathbb{R})$ egy részcsoportjá-nak tekinthető, és mint ilyen, konjugáltság-tól eltekintve egyértelmű. Ebben az értelem-ben $Hol_p(M,\nabla)$ független a p alappontától.

Tekintettel erre, a jelölésben p feltüntetésétől eltekinthetünk és alkalmazhatjuk a

$$Hol(M,\nabla) \subset GL_n(\mathbb{R})$$

írásmódot, hallgatólagosan föltéve, hogy $GL_n(\mathbb{R})$ két részcsoportja ekvivalens, hogy konjugált $GL_n(\mathbb{R})$-ben. Szólhatunk ily módon magának egy affinösszefüggő sokaságnak a holonómiacsoportjáról, mint ennek egy <u>globális invariánsáról</u>.

(3) Legyen

$$Hol_p^0(M,\nabla) := \{ P_\gamma \in GL(T_pM) \mid \gamma \in \mathcal{P}(M,p) \text{ nullhomotóp} \}.$$

Ekkor $H_p^0(M,\nabla)$ részcsoportja $GL(T_pM)$-nek, amelyet az előbb mondottak szerint úgy tekinthetünk, mint $GL_n(\mathbb{R})$ egy konjugáltság erejéig egyértelműen meghatározott részcsoportját. $Hol^0_p(M,\nabla)$ szintén független a p ponttól abban az értelemben, ahogyan azt az imént kifejtettük. A $Hol^0_p(M,\nabla)$ csoportot az affinösszefüggő sokaság <u>leszűkített holonómiacsoport</u>-jának nevezzük, és erre is alkalmazzuk a

$$Hol^0(M,\nabla) \subset GL_n(\mathbb{R})$$

írásmódot. Megmutatható, hogy

> $Hol^0_p(M,\nabla)$ normális részcsoportja $Hol_p(M,\nabla)$-nak, és hogy a
>
> $$\begin{cases} \Phi_p : \pi_1(M,p) \longrightarrow Hol_p(M,\nabla) / Hol^0_p(M,\nabla) , \\ [\alpha] \longmapsto P_\alpha \, Hol^0_p(M,\nabla) \end{cases}$$
>
> lekképezés (természetes) szürjektív csoporthomomorfizmus a $\pi_1(M,p)$ fundamentális csoport és a $Hol_p(M,\nabla)/Hol^0_p(M,\nabla)$ faktorcsoport között.
>
> Ha – speciálisan – M egyszeresen összefüggő, akkor $Hol^0(M,\nabla) = Hol(M,\nabla)$.

Föltéve, hogy a ∇ kovariáns deriválás torziómentes, a következők ekvivalensek:

> (i) Az (M,∇) affinösszefüggő sokaság lapos, azaz ∇ görbületi tenzora eltűnik.
>
> (ii) Bármely $p \in M$ pont esetén az
>
> $$[\alpha] \in \pi_1(M,p) \longmapsto P_\alpha \in Hol_p(M,\nabla)$$
>
> lekképezés homomorfizmus.

(4) A holonómiacsoportokkal kapcsolatban a legalapvetőbb – és igen nehéz – probléma a következő:

> $GL_n(\mathbb{R})$ mely részcsoportjai realizálhatók egy <u>torziómentes</u> kovariáns deriválás holonómiacsoportjaiként?

10. Geodetikusok

<u>Definíció.</u> Legyen (M, D) affinösszefüggő sokaság. Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : I \longrightarrow M$ görbe <u>geodetikusa</u> az affinösszefüggő sokaságnak (vagy a ∇ kovariáns deriválásnak), ha a sebességvektormezője párhuzamos γ mentén, azaz ha $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = 0$ teljesül. (M, ∇) egy görbéjét <u>pre-geodetikus</u>nak nevezzük, ha átparaméterezhető geodetikussá.

<u>Megjegyzés.</u> A „geodetikus" elnevezés mellett az „autoparalel görbe" elnevezés is használatos.

<u>10.1. Lemma.</u> Legyen $\gamma : I \longrightarrow M$ <u>reguláris</u> geodetikusa az (M, ∇) affinösszefüggő sokaságnak. γ-nak egy

$$\tilde{\gamma} := \gamma \circ \theta : \tilde{I} \longrightarrow M$$

átparaméterezettje akkor és csak akkor geodetikus, ha a θ paramétertranszformáció affin függvény, azaz

$$t \in \tilde{I} \longmapsto \theta(t) := \alpha t + \beta \in I$$

alakú, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

<u>Bizonyítás.</u> $\nabla_{\tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}} = \nabla_{\tilde{\gamma}} \theta'(\dot{\gamma} \circ \theta) = \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta) + \theta' \nabla_{\tilde{\gamma}} (\dot{\gamma} \circ \theta)$

$\overset{9.4.}{=} \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta) + (\theta')^2 ((\nabla_\gamma \dot{\gamma}) \circ \theta) = \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta)$, hiszen $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = 0$, mert γ geodetikus. γ regularitása folytán $\dot{\gamma} \circ \theta$ sehol sem tűnik el, így

$$\tilde{\gamma} \text{ geodetikus} \overset{\text{def.}}{\iff} \nabla_{\tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}} = 0 \iff \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta) = 0$$

$$\iff \theta'' = 0 \iff \theta \text{ affin függvény.}$$

$\square$

<u>10.2. Állítás.</u> Egy (M, ∇) affinösszefüggő sokaság egy $\gamma: I \to M$ reguláris görbéje akkor és csak akkor pregeodetikus, ha van olyan $h: I \to \mathbb{R}$ sima függvény, hogy $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = h\dot{\gamma}$.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Tegyük föl először, hogy γ pregeodetikus, és legyen $\theta: \tilde{I} \to I$ olyan paramétertranszformáció, amelyre teljesül, hogy a $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \theta$ átparaméterezett görbe geodetikus. Ekkor a $\nabla_{\tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}} = 0$ reláció az előző bizonyításban elvégzett számolás szerint arra vezet, hogy

$$(*) \qquad \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta) + (\theta')^2((\nabla_\gamma \dot{\gamma}) \circ \theta) = 0 .$$

Innen $(\nabla_\gamma \dot{\gamma}) \circ \theta = -\frac{\theta''}{(\theta')^2}(\dot{\gamma} \circ \theta)$, $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = \left(-\frac{\theta''}{(\theta')^2} \circ \theta^{-1}\right)\dot{\gamma}$, $h := -\frac{\theta''}{(\theta')^2} \circ \theta^{-1}$ választással tehát azt kapjuk, hogy érvényes a kívánt $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = h\dot{\gamma}$ összefüggés.

(2) Legyen, megfordítva, $\gamma: I \to M$ a $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = h\dot{\gamma}$ feltételnek eleget tevő görbe, ahol $h: I \to \mathbb{R}$ sima függvény. Olyan $\theta: \tilde{I} \to I$ paramétertranszformációt keresünk, amelyre teljesül, hogy a $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \theta$ átparaméterezett görbe geodetikus, azaz $\nabla_{\tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}} = 0$. Ez utóbbi $(*)$ és a $\nabla_\gamma \dot{\gamma} = h\dot{\gamma}$ feltétel alapján a

$$0 = \theta''(\dot{\gamma} \circ \theta) + (\theta')^2(h \circ \theta)(\dot{\gamma} \circ \theta) = (\theta'' + (\theta')^2(h \circ \theta))\dot{\gamma} \circ \theta$$

relációt adja, amiből $\dot{\gamma}$ regularitása folytán

$$(**) \qquad \theta'' + (\theta')^2(h \circ \theta) = 0$$

következik. Vezessük be a

$$H: t \in I \mapsto H(t) := -\int_0^t h \in \mathbb{R}$$

függvényt. Ez sima, és az értelmezési tarto-

$H' = -h$ teljesül. H felhasználásával a $(**)$ reláció a

$$\theta' = (\exp \circ H) \circ \theta$$

alakot ölti (innen ugyanis $\theta'' = ((\exp \circ H)' \circ \theta)\, \theta' = (((\exp \circ H) H') \circ \theta)\, \theta' = -(\exp \circ H \circ \theta)(h \circ \theta)\, \theta' = -(\theta')^2 (h \circ \theta)$), ahonnan a keresett θ függvény egyszerűen meghatározható. □

<u>10.3. Lemma.</u> Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság. Jelöljünk ki egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet M-en, és legyenek ∇ Christoffel-szimbólumai e térképre vonatkozóan a Γ^i_{jk} $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$ függvények.

Egy $\gamma : I \to \mathcal{U}$ görbe akkor és csak akkor geodetikusa az affinösszefüggő sokaságnak, ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ komponensfüggvényeire

$$\gamma^{i''} + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma)\, \gamma^{j'} \gamma^{k'} = 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

teljesül, azaz ha eleget tesznek a

$$(G) \qquad \underline{\underline{x^{i''} + \sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \overset{x}{\gamma})\, x^{j'} x^{k'} = 0}}$$

ún. <u>geodetikus egyenletnek</u>.

<u>Bizonyítás.</u> A vizsgált γ-menti vektormező most $\dot\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i'} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma\right)$, így a <u>9.3.</u> bizonyításában szereplő $(*)$ formulából közvetlenül adódik a tett észrevétel. □

<u>10.4. Következmény és definíció.</u> Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság. Megadva egy $v \in T_p M$ érintővektort, létezik egy és csak egy olyan $\gamma : I \to M$ geodetikus, amelyre $\dot\gamma(0) = v$ teljesül. Ezt a

geodetikust a p pontból induló, v kezdősebességű geodetikusnak hívjuk.

Bizonyítás. Térkép rögzítése után a geodetikusokat leíró (6) egyenlet $x'' = F(x, x')$ alakú közönséges másodrendű differenciálegyenlet, így az állítás következik a 9.0. (6)-ban mondottakból. $\square$

10.5. Lemma. Ha $\gamma_1 : I \longrightarrow M$ és $\gamma_2 : I \longrightarrow M$ geodetikusa az (M, ∇) affinösszefüggő sokaságnak, és valamely $t_0 \in I$ pontban $\dot\gamma_1(t_0) = \dot\gamma_2(t_0)$ teljesül, akkor $\gamma_1 = \gamma_2$.

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Ekkor van olyan $\tau \in I$, hogy $\gamma_1(\tau) \neq \gamma_2(\tau)$; legyen mondjuk $\tau > t_0$. Tekintsük a

$$H := \{ t \in I \mid t > t_0 \text{ és } \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t) \}$$

halmazt. Indirekt föltevésünk folytán $H \neq \emptyset$, nyilvánvaló továbbá, hogy H alulról korlátos. Létezik így módon H-nak pontos alsó korlátja; legyen ez $t_1 := \inf H$. Állítjuk, hogy $\dot\gamma_1(t_1) = \dot\gamma_2(t_1)$. Ez automatikusan teljesül, ha $t_1 = t_0$; föltehetjük ezért, hogy $t_1 > t_0$. A sebességvektormezők koordinátaelőállításából kiolvasható, hogy $\dot\gamma_1$ és $\dot\gamma_2$ sima, és ennélfogva folytonos leképezése a $]t_0, t_1[$ intervallumnak TM-be. Mivel $\gamma_1 \restriction]t_0, t_1[= \gamma_2 \restriction]t_0, t_1[$, következik így módon, hogy

$$\dot\gamma_1(t_1) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t \in]t_0, t_1[}} \dot\gamma_1(t) = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t \in]t_0, t_1[}} \dot\gamma_2(t) = \dot\gamma_2(t_1).$$

Tekintsük az I intervallum egy alkalmas részhalmazán értelmezett $t \longmapsto \gamma_1(t + t_1)$ és $t \longmapsto \gamma_2(t + t_1)$ görbéket. Ezek szintén geodetikusok (10.1.), és a mondottak szerint a $t = 0$ helyen megegyeznek a sebességük, úgy 10.4. értelmében egybe kell esniük egy, a t_1-et tartalmazó nyílt intervallumon. Ez azonban ellentmond t_1 definíciójának. □

10.6. Állítás és definíció. Legyen (M, ∇) affin-összefüggő sokaság. Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot, és jelöljünk ki egy $v \in T_pM$ érintővektort.

(1) Az affinösszefüggő sokaságnak létezik egy és csak egy olyan γ_v geodetikusa, amelyre teljesülnek a következők:

(i) $\dot\gamma_v(0) = v$, azaz γ_v-nek v a kezdősebessége.

(ii) γ_v értelmezési tartománya a lehető legbővebb: ha $\gamma : J \longrightarrow M$ szintén v kezdősebességű geodetikus, akkor J benne γ_v értelmezési tartományában, és $\gamma_v \restriction J = \gamma$.

Ezt a γ_v geodetikust az affinösszefüggő sokaság v kezdősebességű maximális geodetikusának hívjuk.

(2) v-nek, mint a TM érintősokaság egy pontjának megadható $\mathcal{V} \subset TM$ környezete, létezik továbbá a 0-t tartalmazó I nyílt intervallum úgy, hogy a

$$\mathcal{V} \times I \longrightarrow M, \quad (w, s) \longmapsto \gamma_w(s)$$

leképezés sima.

Bizonyítás. (1) Legyen

$$\mathcal{G} := \{ \gamma : I_\gamma \longrightarrow M \mid \gamma \text{ geodetikus és } \dot\gamma(0) = v \}.$$

10.4. értelmében $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Ha γ_1 és γ_2 egyaránt $\mathcal{G}$-be tartozik, akkor 10.5. alapján

$$\gamma_1 \restriction I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2} = \gamma_2 \restriction I_{\gamma_1} \cap I_{\gamma_2},$$

és ennélfogva a $\mathcal{G}$ halmaz konzisztens módon meghatároz egyetlen

egyetlen

$$\gamma_v : \quad I := \bigcup_{\gamma \in G} I_\gamma \longrightarrow M$$

görbét a $\gamma_v \restriction I_\gamma := \gamma$ előírás szerint. Ekkor γ_v nyilvánvalóan geodetikusa (M, ∇)-nak, és rendelkezik az (i)–(iii) tulajdonságokkal.

(2) A második megállapítás („sima függés a kezdeti feltételtől") következik a 9.0. (4)-ben megfogalmazott megfelelő lokális eredményből. $\square$

Definíció. Egy affinösszefüggő sokaságot geodetikusan teljesnek nevezünk, ha valamennyi maximális geodetikusa értelmezve van az egész valós számegyenesen.

10.7. Lemma (az átskálázási lemma). Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, $v \in TM$, és tekintsük a

$$\gamma_v : \; I_v \longrightarrow M, \; \dot\gamma_v(0) = v$$

v kezdősebességű maximális geodetikust. Ha „s" és t olyan valós számok, hogy $st \in I_v$, akkor t benne van a γ_{sv} sv kezdősebességű maximális geodetikus I_{sv} értelmezési tartományában és teljesül a

$$(*) \qquad \gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$$

egyenlőség. Megfordítva, ha $s, t \in \mathbb{R}$ és $t \in I_{sv}$, akkor $st \in I_v$, és $(*)$ ugyanakkor fennáll.

Bizonyítás. (1) Mivel a $\underline{0} \in T_pM$ kezdősebességű maximális geodetikus a

$$\gamma : \; \mathbb{R} \longrightarrow M, \; t \longmapsto \gamma(t) := p$$

konstans görbe, közvetlenül adódik, hogy a tett megállapítások $s = 0$ esetén minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra teljesülnek. Feltesszük ezért a továbbiakban, hogy $s \neq 0$.

(2) Tekintsük a

$$\theta_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \theta_s(t) := st$$

invertálható lineáris függvényt, és legyen

$$\tilde{I} := \{ t \in \mathbb{R} \mid \theta_s(t) \in I_v \} = \{ \tfrac{t}{s} \in \mathbb{R} \mid t \in I_v \}.$$

Ekkor a

$$\tilde{\gamma} := \gamma_v \circ \theta_s : \tilde{I} \longrightarrow M$$

görbe <u>10.1.</u> értelmében geodetikus; a kezdősebessége

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \theta_s'(\dot{\gamma}_v \circ \theta_s)(0) = s(\dot{\gamma}_v(0)) = sv.$$

$\tilde{\gamma}$ kezdősebessége tehát megegyezik a $\gamma_{sv} : I_{sv} \longrightarrow M$ maximális geodetikus kezdősebességével, így

$$\tilde{I} \subset I_{sv},$$

és minden $t \in \tilde{I}$ esetén

$$\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t).$$

Beláttuk ezzel, hogy

‖ ha $st \in I_v$, akkor $t \in I_{sv}$, és érvényes a $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$ egyenlőség.

(3) Megadva az s, t $(s \neq 0)$ valós számokat, legyen

$$\tilde{v} := sv, \quad \tilde{t} := st, \quad \tilde{s} := \frac{1}{s}.$$

A most igazolt észrevétel szerint

| ha $\tilde{s}\tilde{t} \in I_{\tilde{v}}$, akkor $\tilde{t} \in I_{\tilde{s}\tilde{v}}$, és $\gamma_{\tilde{v}}(\tilde{s}\tilde{t}) = \gamma_{\tilde{s}\tilde{v}}(\tilde{t})$.

Lefordítva ezt v-re, s-re és t-re:

‖ ha $t \in I_{sv}$, akkor $st \in I_v$, és $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$.

Ezzel a lemma megfordítási részét is igazoltuk. □

<u>Definíció.</u> Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság. Tekintve egy $p \in M$ pontot, jelentse $\mathcal{E}_p$ mindazon $v \in T_pM$ érintővektorok halmazát, amelyekre teljesül, hogy a γ_v maximális geodetikus értelmezve van legalább a $[0, 1]$ zárt intervallumon. Ekkor az

$$\exp_p : \mathcal{E}_p \longrightarrow M, \quad v \longmapsto \exp_p(v) := \gamma_v(1)$$

leképezést a (∇ kovariáns deriválásához csatolt) <u>p-beli exponenciális leképezésnek</u> nevezzük.

<u>Megjegyzés.</u> $\mathcal{E}_p$ nyilvánvalóan T_pM-nek az a legbővebb részhalmaza, amelyen a leírt hozzárendelési szabály működik. Amennyiben M geodetikusan teljes, úgy minden $p \in M$ pont esetén $\mathcal{E}_p = T_pM$.

<u>10. 8. Állítás.</u> Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, és jelöljünk ki egy $p \in M$ pontot.

(1) Legyen $v \in T_pM$. Egy t valós szám akkor és csak akkor van benne a γ_v maximális geodetikus értelmezési tartományában, ha tv benne van $\mathcal{E}_p$-ben, az $\exp_p$ leképezés értelmezési tartományában.

(2) Ha t benne van γ_v értelmezési tartományában, akkor

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t),$$

következésképpen <u>a p pontbeli exponenciális leképezés a T_pM érintőtér origón átmenő egyeneseit az M sokaság p-n átmenő geodetikusaiba viszi át.</u>

<u>Bizonyítás.</u> (1) Tegyük fel, hogy $tv \in \mathcal{E}_p$. Ekkor $\gamma_{tv}(1)$ definiálva van, amiből az átskálázási lemma alapján következik, hogy t benne van γ_v értelmezési tartományában, és

$$\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

A megfordítás hasonlóan igazolható.

(2) Ha t benne van γ_v értelmezési tartományában, akkor az (1) megállapítás alapján az $1 \in \mathbb{R}$ benne van γ_{tv} értelmezési tartományában és így

$$\exp_p(tv) := \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t). \qquad \square$$

<u>10.9. Tétel.</u> Ha (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, akkor minden $p \in M$ pont esetén létezik a $0_p \in T_pM$ origónak olyan $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{E}_p \subset T_pM$ környezete, hogy $\exp_p \restriction \tilde{\mathcal{U}}$ diffeomorfizmus a p pont egy $\mathcal{U} \subset M$ környezetére.

<u>Bizonyítás.</u> A <u>10.6.</u> (2) – ben mondottakból következik, hogy $\exp_p$ a $0_p \in T_pM$ origó egy környezetében jól definiált, sima leképezés.

Jegyezzük meg, hogy

$$\exp_p(0_p) = p.$$

Valóban, $\exp_p(0_p) := \gamma_{0_p}(1) = \gamma_{0v}(1) \overset{10.7.}{=} \gamma_v(0) = p$ (menet-közben tetszőleges $v \in T_pM \setminus \{0_p\}$ vektort szerepeltetve).

Megmutatjuk, hogy az

$$((\exp_p)_*)_{0_p} : T_{0_p}T_pM \longrightarrow T_pM$$

derivált éppen a <u>3.9.</u> állításban leírt, esetünkben a

$$\begin{cases} v \in T_pM \longmapsto L_{0_p}(v) := \dot{s}(0) \in T_{0_p}T_pM, \\ s : \mathbb{R} \longrightarrow T_pM, \quad t \longmapsto s(t) := tv \end{cases}$$

alakot öltő kanonikus izomorfizmus inverze.

Valóban, tetszőleges $v \in T_pM$ esetén

$$((\exp_p)_*)_{0_p}(L_{0_p}(v)) = ((\exp_p)_*)_{0_p}(\dot{s}(0)) \overset{3.7.(4)}{=}$$

$= \overline{\exp_p \circ \varsigma}^{\,\cdot} (0) \overset{10.8.(2)}{=} \dot{\gamma}_v (0) = v.$

Így módon $((\exp_p)_*)_{0_p}$ lineáris izomorfizmus, s ezért a <u>3.12.</u> inverzleképezési-tétel alapján létezik 0_p-nek $\tilde{\mathcal{U}} \subset T_pM$, p-nek pedig $\mathcal{U} \subset M$ környezete úgy, hogy $(\exp)_p \restriction \tilde{\mathcal{U}} : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$ diffeomorfizmus. □

<u>Definíció.</u> (1) Azt mondjuk, hogy egy valós vektortérnek egy, a 0-t tartalmazó C részhalmaza <u>csillagszerű</u> a 0 körül, ha $u \in C$ esetén minden $t \in [0,1]$-re teljesül, hogy $tu \in C$.

(2) Tegyük fel, hogy (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, és tekintsünk egy $p \in M$ pontot. Ha $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{E}_p$ csillagszerű nyílt halmaz 0_p körül T_pM-ben, és teljesül, hogy $\exp_p \restriction \tilde{\mathcal{U}}$ diffeomorfizmus, akkor az $\mathcal{U} := \exp_p(\tilde{\mathcal{U}})$ képhalmazt a p pont egy <u>normálkörnyezetének</u> nevezzük.

<u>10.10. Tétel.</u> Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, és tegyük föl, hogy $\mathcal{U}$ normálkörnyezete egy $p \in M$ pontnak. $\mathcal{U}$ $\exp_p$ általi ősképét jelölje $\tilde{\mathcal{U}}$. Minden $q \in \mathcal{U}$ ponthoz létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{U}$-ban futó $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{U}$ geodetikusa ∇-nak, amely a p pontot a q ponttal köti össze, vagyis amelyre $\gamma(0) = p$ és $\gamma(1) = q$ teljesül. Fennáll továbbá, hogy $\dot{\gamma}(0) \in \tilde{\mathcal{U}}$, és $\exp_p(\dot{\gamma}(0)) = q$.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Mivel $\mathcal{U}$ normálkörnyezete p-nek, $\exp_p$ diffeomorfan képezi le 0_p $\tilde{\mathcal{U}}$ környezetét $\mathcal{U}$-ra. Legyen $v := \exp_p^{-1}(q)$. Ekkor $v \in \tilde{\mathcal{U}}$.

$\tilde{\mathcal{U}}$ csillagszerűsége miatt a

$$\varsigma : [0,1] \longrightarrow T_p M, \quad t \longmapsto tv$$

leképezés képtere $\tilde{\mathcal{U}}$-ba esik, és így a

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \gamma(t) := \exp_p(tv),$$

röviden, a $\gamma := \exp_p \circ \varsigma$ geodetikus szakasz képe $\mathcal{U}$-ban van. γ a p pontot összeköti a q ponttal, ugyanis

$$\gamma(0) = \exp_p(\varsigma(0)) = \exp_p(0_p) = p_p$$

(felhasználva a 10.9. bizonyítása elején tett észrevételt), illetve

$$\gamma(1) = \exp_p(\varsigma(1)) = \exp_p(v) = q$$

(tekintettel v definíciójára).

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathcal{U}$ bármely pontja $\mathcal{U}$-ban haladó geodetikus segítségével összeköthető a p ponttal.

(2) Az előző tétel bizonyításában alkalmazott érveléssel

$$\dot\gamma(0) = \overline{\exp_p \circ \varsigma}^{\,\boldsymbol{\cdot}}(0) \overset{3.7.(4)}{=} ((\exp_p)_*)_{0_p}(\dot\varsigma(0))$$
$$= ((\exp_p)_*)_{0_p}(L_{0_p}(v)) = v.$$

(3) Megmutatjuk végül a p-t q-val összekötő, $\mathcal{U}$-ban futó geodetikus egyértelműségét.

Tegyük fel, hogy egy $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M$ geodetikus is eleget tesz $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_1(1) = q$ feltételnek. Legyen $w := \dot\gamma_1(0)$, és tekintsük a

$$\varsigma_1 : [0,1] \longrightarrow T_p M, \quad t \longmapsto \varsigma_1(t) := tw$$

egyenesszakaszt. Állítjuk, hogy ekkor

$$\gamma_1 = \exp_p \circ \varsigma_1 .$$

Valóban, a (2)-beli számolással azt kapjuk, hogy

$$\overline{\exp_p \circ \dot{s}_1}(0) = (\exp_p)_*(\dot{s}_1(0)) = (\exp_p)_*(\iota_{0_p}(w)) = w = \dot{\gamma}_1(0),$$

és 10.5. értelmében a kezdősebességek egyenlősége maga után vonja maguknak a geodetikusoknak az egyenlőségét a vizsgált szituációban.

Mivel így egyrészt

$$q = \gamma_1(1) = \exp_p(s_1(1)) = \exp_p(w),$$

másrészt

$$q = \gamma(1) = \exp_p(v),$$

és $\exp_p \restriction \tilde{U}$ diffeomorfizmus, s ezért – speciálisan – injektív, következik, hogy $v = w$. Azonban v a $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$, w pedig a $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow M$ geodetikus kezdősebessége, így – ismét 10.5. alapján – $\gamma_1 = \gamma$. □

10.11. Következmény – definíció – állítás. Tegyük fel, hogy (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, és jelöljünk ki egy $p \in M$ pont körül egy $\mathcal{U}$ normál-környezetet. Legyen $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n$ a T_pM érintőtér egy tetszőlegesen rögzített bázisa, $(e_i)_{i=1}^n$ pedig az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisa. Tekintsük azt a $\varphi_{\underline{v}} : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmust, amelyre

$$\varphi_{\underline{v}}(v_i) = e_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ha

$$u := \varphi_{\underline{v}} \circ \exp_p^{-1},$$

akkor $(\mathcal{U}, u)$ térkép a p pont körül, amelyet p középpontú normáltérképnek vagy normál-koordinátarendszernek nevezünk. Egy pontnak egy normáltérképre vonatkozó koordinátáit normál-koordinátáknak is említjük.

A megkonstruált $(\mathcal{U}, u)$ normáltérképpel kapcsolatban érvényesek a következők:

(1) A p pont $(\mathcal{U}, u)$-ra vonatkozó minden koordinátája zérus: $u(p) = (u^1(p), \dots, u^n(p)) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ha $\gamma_v : I_v \longrightarrow M$ a p pontból, v kezdősebességű maximális geodetikus, akkor ennek $(\mathcal{U}, u)$-ra vonatkozó $\gamma_v^i := u^i \circ \gamma = e^i \circ u \circ \gamma$ koordinátafüggvényei a

$$t \in I_v \longmapsto \gamma_v^i(t) = t\nu^i \in \mathbb{R} \quad , \text{ ha } \quad v = \sum_{i=1}^n \nu^i v_i$$

lineáris függvények, γ_v tehát normálkoordinátákban a

$$t \in I_v \longmapsto t(\nu^1, \dots, \nu^n) \in \mathbb{R}^n$$

parametrizált egyenesszakaszként írható le.

(3) $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = v_i$, minden $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre.

(4) Ha ∇ Christoffel-szimbólumai az $(\mathcal{U}, u)$ térképre vonatkozóan a Γ^i_{jk} függvények, akkor minden $(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \mathbb{R}^n$ szám n-es esetén

$$\sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(p)\lambda^j\lambda^k = 0 \qquad (i \in \{1, \dots, n\});$$

ha speciálisan a kovariáns deriválás torziómentes, akkor $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$; $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

<u>Bizonyítás.</u> Az, hogy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép p körül, világos a konstrukcióból. A továbbiakban rendre igazoljuk az $(\mathcal{U}, u)$ térképpel kapcsolatban tett megállapításainkat.

(1) A korábban látottak szerint $(\exp_p)^{-1}(p) = 0_p$, így $u(p) := \varphi_{\underline{v}} \circ (\exp_p)^{-1}(p) = \varphi_{\underline{v}}(0_p) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$; az $(\mathcal{U}, u)$ térkép tehát valóban p középpontú.

(2) Tetszőleges $t \in I_v$ esetén

$$u \circ \gamma_v(t) = \varphi_{\underline{v}} \circ (\exp_p)^{-1} \circ \gamma_v(t) \overset{10.8.(2)}{=} \varphi_{\underline{v}} \circ (\exp_p)^{-1} \circ (\exp_p)(tv) =$$
$$= \varphi_{\underline{v}}(tv) = t\,\varphi_{\underline{v}}\Big(\sum_{i=1}^{n} v^i v_i\Big)$$
$$= t \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = t\,(v^1, \dots, v^n)\,;$$

ez igazolja a geodetikusok normáltérképben való előállítására vonatkozó észrevételt.

(3) Tetszőleges $v = \sum_{i=1}^{n} v^i v_i \in T_pM$ érintővektor esetén

$$v = \dot\gamma_v(0) = \sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma_v(0)} \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \,;$$

speciálisan v gyanánt egy v_i bázisvektort véve,

$$v_i = \dot\gamma_{v_i}(0) = \sum_{j=1}^{n} \delta^j_i \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \,;\quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

(4) Legyen $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$. A $\gamma_v : I_v \longrightarrow M$ v kezdősebességű maximális geodetikus $(U, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó $\gamma_v^i := u^i \circ \gamma_v$ koordinátafüggvényei a (2)-ben mondottak szerint a

$$t \in I_v \longmapsto v^i t \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

lineáris függvények. Ezeknek eleget kell tenniük a (6) egyenletnek (10.3.), amely $(\gamma_v^i)'' = 0$ folytán most azt adja

$$\sum_{j,k=1}^{n} (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma_v)\, v^j v^k = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Speciálisan a $t = 0$ helyen

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(p)\, v^j v^k = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ez a reláció minden $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ számú n-esre érvényes, hiszen minden $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \in T_pM$ vektor fellép egy maximális geodetikus kezdősebességeként. Amennyiben a kovariáns deriválás torzióméntes, úgy $\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{kj}$ teljesül minden $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ indexre. Ekkor a

$$\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^{i}_{jk}(p)\,\xi^j \xi^k \in \mathbb{R}$$

függvény minden $i \in \{1,\dots,n\}$ indexre olyan kvadratikus forma, amely az előbb mondottak szerint azonosan nulla. A szimmetria folytán a polarizációs azonosság alapján rekonstruálható a kvadratikus formát származtató bilineáris forma, amely így szintén azonosan nulla. Ebből következik, hogy

$$\Gamma^{i}_{jk}(p) = 0, \quad \text{minden } i,j,k \in \{1,\dots,n\} \text{ indexre.} \qquad \square$$

11. Pszeudo-Riemann sokaságok, Riemann-izometriák, ívhossz

11. 0. Skaláris szorzat Jelenben ebben a szakaszban V nemtriviális – azaz a $\{0\}$-tól különböző – valós vektorteret.

(1) A V vektortéren adott skaláris szorzaton

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto b(u,v)$$

szimmetrikus bilineáris formát értünk. Ha b skaláris szorzat a V vektortéren, akkor a (V,b) párt (vagy egyszerűen V-t) szokás ortogonális térnek nevezni. Ha (V,b) ortogonális tér, $u,v \in V$ és $b(u,v) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az u és a v vektor (b-) ortogonális, és azt írjuk, hogy $u \perp_b v$, vagy – ha a skaláris szorzat mibenléte világos – azt, hogy $u \perp v$. V-nek egy U és egy W alterét akkor nevezzük egymásra merőlegesnek, ha

$b(u,w)=0$, minden $(u,w)\in U\times W$ esetén. Ilyenkor az $U\perp_b W$ vagy az $U\perp W$ jelölést használjuk. Ha egy $a\in V$ vektor ortogonális egy $U\subset V$ altér minden vektorára, akkor azt írjuk, hogy $a\perp U$. Az U altérre ortogonális összes vektorok halmazát U ortogonális komplementerének nevezzük, és rá az $U^\perp$ jelölést használjuk. Közvetlenül adódik, hogy $U^\perp$ maga is altér.

(2) Azt mondjuk, hogy egy $b: V\times V\longrightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat

nemelfajuló, ha abból, hogy $b(u,v)=0$ minden $v\in V$ vektorra teljesül, $u=0$ következik (azaz ha $u\perp V \Rightarrow u=0$);

pozitív definit, ha minden $v\neq 0$ esetén $b(v,v)>0$;

negatív definit, ha $-b$ pozitív definit.

Megmutatható, hogy a definitségből a nemelfajultság következik.

(3) Tegyük fel, hogy a V vektortér véges dimenziójú, és legyen $b: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ skaláris szorzat. b-nek a vektortér egy $(v_i)_{i=1}^n$ bázisára vonatkozó mátrixa a

$$(\beta_{ij}) := \left(b(v_i,v_j)\right)\in M_n(\mathbb{R})$$

szimmetrikus mátrix.

Tétel: (4) Egy véges dimenziójú V vektortéren adott $b: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ skaláris szorzat akkor és csak akkor nemelfajuló, ha a vektortér valamely – és ezért bármely – bázisára vonatkozó mátrixa invertálható.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy M sokaságon adott $(0,2)$ típusú g tenzormező pszeudo-Riemann struktúra M-en, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) g szimmetrikus: $g(X,Y) = g(Y,X)$ teljesül minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre;

(2) g nemelfajuló: bármely $p \in M$ pont esetén a g tenzormező p pontbeli
$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$
értéke nemelfajuló skaláris szorzat a T_pM érintőtéren.

Ha a (2) követelmény helyett az erősebb

(2^+) g pozitív definit: bármely $p \in M$ esetén $g_p \in T_2^0(T_pM)$ pozitív definit skaláris szorzat

feltétel teljesül, akkor a g tenzormezőt M-en adott Riemann-struktúrának nevezzük.

Pszeudo-Riemann-, ill. Riemann-sokaságon olyan összefüggő sokaságot értünk, amely el van látva egy pszeudo-Riemann, ill. egy Riemann-struktúrával.

11.1. Megjegyzések. (1) A Riemann-struktúra fogalmát – miként a sokaságok intuitív fogalmát is – Bernhard RIEMANN (1826–1866) német matematikus vezette be a Göttingeni Egyetemen 1854-ben tartott habilitációs előadásában.

(2) Ha (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, a $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ tenzormezőt szokás M-en adott metrikus tenzornak, vagy – kissé megtévesztő módon – pszeudo-Riemann-metrikának is nevezni – sőt ez az utóbbi szóhasználat talán a legnépszerűbb.

(3) Legyen (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, és jelöljünk M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. g komponensei erre vonatkozóan a

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\})$$

sima függvények; segítségükkel $\mathcal{U}$ fölött g a

$$g \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du^i \otimes du^j$$

alakban állítható elő. Ha $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ és

$$X \upharpoonright \mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y \upharpoonright \mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

akkor

$$g(X, Y) \upharpoonright \mathcal{U} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^i Y^j.$$

g nemelfajultsága a komponensfüggvények nyelvén azt jelenti, hogy tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ pont esetén a $(g_{ij}(p)) \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix invertálható szimmetrikus mátrix. Ennek inverzét a klasszikus tenzorkalkulus tradícióit követve $(g^{ij}(p))$-vel jelöljük, tehát

$$(g_{ij}(p))^{-1} =: (g^{ij}(p)),$$

és így

$$\sum_{r=1}^{n} g_{ir}(p) g^{rj}(p) = \delta_i^j \; ; \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A

$$g^{ij} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto g^{ij}(p)$$

függvények szintén simák, és $g^{ij} = g^{ji}$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$.

<u>11. 2. Példák</u> (1) Legyen $(V, \langle\,,\rangle)$ n-dimenziós euklideszi vektortér, vagyis olyan n-dimenziós ortogonális tér, ahol a $\langle\,,\rangle$-val jelölt skaláris szorzat pozitív definit. Lássuk el V-t a természetes sima struktúrával (<u>1.4.</u> (1)), és tetszőleges

jelölje ι_p a 3.9.-ben értelmezett $V \longrightarrow T_pV$ kanonikus izomorfizmust. Ekkor a

$$(*)\quad \left\| \begin{array}{l} g : p \in V \longmapsto g_p \in T^0_2(T_pM), \\ g_p(u,v) := \langle \iota_p^{-1}(u), \iota_p^{-1}(v) \rangle \end{array} \right.$$

előírás Riemann-struktúrát ad meg V-n, és így (V,g) n-dimenziós Riemann-sokaság.

$(V,\langle\,,\rangle)$ euklideszi vektortér gyanánt tekintsük speciálisan a kanonikus skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret, a skaláris szorzatot jelölje most is $\langle\,,\rangle$. Legyen $(e_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, $(e^i)_{i=1}^n$ ennek a duálisa. $\mathbb{R}^n$ szokásos sima struktúráját (1.4.) az $(\mathbb{R}^n, (e^i)_{i=1}^n)$ egytagú atlasz definiálja. Jelölje g_0 a $(*)$ előírással értelmezett metrikus tenzort! Mivel – szintén a 3.9.-ben mondottak szerint – tetszőleges $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in \mathbb{R}^n$ és $p \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\iota_p(v) = \sum_{i=1}^n e^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p = \sum_{i=1}^n v^i\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p ,$$

és így speciálisan

$$\iota_p(e_i) = \sum_{k=1}^n e^k(e_i)\left(\frac{\partial}{\partial e^k}\right)_p = \sum_{k=1}^n \delta^k_i\left(\frac{\partial}{\partial e^k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p$$

$(i \in \{1,\dots,n\})$, következik, hogy bármely $p \in \mathbb{R}^n$ pont esetén

$$(g_0)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial e^j}\right)_p\right) := \left\langle \iota_p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p, \iota_p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial e^j}\right)_p \right\rangle$$

$$= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad ; \quad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\left(\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$ minden $p \in \mathbb{R}^n$ pont esetén ortonormált bázisa $T_p\mathbb{R}^n$-nek a $(g_0)_p$ skaláris szorzatra nézve.

A $g_0 \in \mathcal{T}^0_2(\mathbb{R}^n)$ tenzort $\mathbb{R}^n$ <u>kanonikus Riemann-struktúrájának</u> vagy <u>kanonikus metrikus tenzorának</u> nevezzük.

Megjegyzés. $\mathbb{R}^n$ érintővektorainak, ill. vektormezőinek a <u>8.13.</u> (1)-ben leírt interpretációját alkalmazva, további kényelmes lehetőség adódik a g_0 kanonikus metrikus tenzor értelmezésére: tetszőleges $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n \cong \{p\} \times \mathbb{R}^n$ esetén legyen

$$(g_0)_p (v_p, w_p) := \langle v, w \rangle .$$

Ha $(E_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ természetes n-elemmezője, akkor

$$g_0(E_i, E_j) = \delta_{ij} \; ; \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

(2) Legyen $n = n_1 + n_2$; $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, és tekintsük az $\mathbb{R}^{n_1, n_2} := \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ szorzatteret. Ekkor $\mathbb{R}^{n_1,n_2}$ elemei (v_1, v_2) alakú párok, ahol $v_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $v_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, tetszőleges $p \in \mathbb{R}^{n_1,n_2}$ pont esetén pedig a $T_p\mathbb{R}^{n_1,n_2} \cong \{p\} \times \mathbb{R}^{n_1,n_2}$ geometriai érintőtér vektorai $v_p = (p, (v_1, v_2))$ alakban adhatók meg. Ha bármely $p \in \mathbb{R}^{n_1,n_2}$; $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^{n_1,n_2}$ esetén

$$(g_0)_p (v_p, w_p) := -\langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle ,$$

ha $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$, s mind $\mathbb{R}^{n_1}$-en, mind $\mathbb{R}^{n_2}$-n $\langle\, ,\rangle$ jelöli a kanonikus skaláris szorzatot, akkor a

$$g_0 : p \in \mathbb{R}^{n_1,n_2} \longmapsto (g_0)_p \in T^0_2(T_p\mathbb{R}^{n_1,n_2})$$

leképezés (indefinit) pszeudo-Riemann struktúra $\mathbb{R}^{n_1,n_2}$-n.

(3) Tegyük fel, hogy (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, és hogy $\varphi : N \to M$ immerziója egy N sokaságnak M-be. Ha tetszőleges $p \in N$ pont és $u, v \in T_pN$ érintővektorok esetén

$$h_p(u, v) := g_{\varphi(p)}\left((\varphi_*)_p(u), (\varphi_*)_p(v)\right),$$

azaz ha

$$h := \varphi^* g$$

(ld. 6.11.), akkor h pszeudo-Riemann struktúra az N sokaságon, hiszen $h \in \mathcal{T}^0_2(N)$ a 6.11.-ben mondottak szerint, a szimmetria nyilvánvaló, a nemelfajultság pedig adódik a $(\varphi_*)_p$ érintőleképezések injektivitása alapján. Azt mondjuk, hogy h az N sokaságon a g-ből φ által indukált metrikus tenzor.

Speciálisan: ha (M, g) pszeudo-Riemann sokaság és $N \subset M$ részsokasága M-nek, akkor N pszeudo-Riemann sokaság a $j: N \longrightarrow M$ kanonikus inklúzió által indukált j^*g metrikus tenzorral. Az (N, j^*g) pszeudo-Riemann sokaságot (M, g) egy pszeudo-Riemann részsokaságának nevezzük.

(4) Az előző pontban mondottak speciális eseteként vegyük alapul az $(\mathbb{R}^3, g_0)$ Riemann-sokaságot, és legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ kétdimenziós részsokasága, azaz felülete $\mathbb{R}^3$-nak. Ha $j: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a kanonikus inklúzió és $g := j^*g_0$, akkor (M, g) Riemann-sokaság, közelebbről Riemann-részsokaság $(\mathbb{R}^3, g_0)$-nak. Tetszőleges $p \in M$ pont és $u, v \in T_pM$ érintővektorok esetén

$$g_p(u, v) := (g_0)_p\left((j_*)_p(u), (j_*)_p(v)\right) = \langle u, v \rangle$$

írható, az g_p úgy tekinthető, mint a $T_p\mathbb{R}^3$ geometriai érintőteren adott $(g_0)_p$ skaláris szorzat T_pM-re való leszűkítése:

$$g_p = (g_0)_p \restriction^{T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3}_{T_pM \times T_pM}.$$

A klasszikus felületelméletben a felületek metrikus tenzorának vagy első alapformájának ez az egyik szokásos értelmezése.

Tekintsük most az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, ellátva a g indukált metrikus tenzorral, és tegyük fel, hogy $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, ahol $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, lokális paraméterezése M-nek: injektív immerzió és $f(\mathcal{U}) \subset M$. Ekkor f^*g az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon ad meg egy Riemann-struktúrát. Ennek explicit megadása céljából, az egyszerűség kedvéért, $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ geometriai interpretációban adott érintővektorait azonosítjuk a vektori részükkel. Ekkor tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén az

$$(f_*)_q : T_q\mathcal{U} = T_q\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}^3 ,$$
$$v_q \longmapsto (f_*)_q(v_q) = (f(q), f'(q)(v))$$

érintőleképezés az $f'(q): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deriválttal azonosítható, s tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ pont és $u, v \in \mathbb{R}^2 \cong T_q\mathbb{R}^2$ vektor esetén

$$(f^*g)_q(u,v) = \langle f'(q)(u), f'(q)(v) \rangle .$$

Ha (e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisa, akkor

$$(f^*g)_q(e_i, e_j) = \langle f'(q)(e_i), f'(q)(e_j) \rangle = \langle D_i f(q), D_j f(q) \rangle ;$$

a $\langle D_i f, D_j f \rangle : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $i, j \in \{1,2\}$ függvényeket nevezik a klasszikus felületelméletben az f paraméterezéshez tartozó első alapmennyiségeknek.

(5) Legyen (M, g_M) és (N, g_N) pszeudo-Riemann sokaság, és tekintsük az $M \times N$ szorzatsokaságot. Tetszőleges $a \times b \in M \times N$ esetén a $T_{(a,b)}(M \times N)$

érintőtér természetes módon azonosítható a $T_a M \oplus T_b N$ direkt összeggel (a kanonikus izomorfizmus megadását illetően ld. FTT, 6.3.). Alkalmazva a beazonosítást, tetszőleges $(a,b) \in M \times N$ és $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in T_{(a,b)}(M \times N) \cong T_a M \oplus T_b N$ esetén legyen

$$g_{(a,b)}\left((u_1,v_1),(u_2,v_2)\right) := (g_M)_a(u_1,v_1) + (g_N)_b(u_2,v_2).$$

Közvetlenül adódik, hogy ekkor g pszeudo-Riemann struktúra az $M \times N$ szorzatsokaságon; ezt g_M és g_N szorzatának is szokás nevezni, s használatos rá a $g_M \times g_N$ vagy a $g_M \oplus g_N$ jelölés.

(6) Tegyük föl, hogy (M, g) Riemann-sokaság és legyen $\varphi \in C^\infty(M)$ mindenütt pozitív függvény. Ha tetszőleges $p \in M$; $u, v \in T_p M$ esetén

$$(\varphi^2 g)_p(u,v) := \varphi^2(p)\, g_p(u,v),$$

akkor $\varphi^2 g$ is Riemann-struktúra M-en, amelyről azt mondjuk, hogy g-hez konform.

~~(7) Legyen $\mathbb{H}^2 := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$. Ha – a~~ szokásos módon – (e^1, e^2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus koordinátarendszere, akkor

$$\mathbb{H}^2 = \{\, p \in \mathbb{R}^2 \mid e^2(p) > 0 \,\}$$

is írható. $\mathbb{H}^2$, mint $\mathbb{R}^2$ nyílt részsokasága, maga is kétdimenziós sokaság; kanonikus koordinátarendszere az az (x, y) függvénypár, ahol $x := e^1 \restriction \mathbb{H}^2$, $y := e^2 \restriction \mathbb{H}^2$.

Legyen g_0 $\mathbb{R}^2$ kanonikus metrikus tenzora, és jelentse h_0 a $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(s,t) \longmapsto (s,t)$ kanonikus inklúzió által $\mathbb{H}^2$-n indukált metrikus tenzort. Tekintsük végül a h_0-hoz konform

$$g := \frac{1}{(y)^2} h_0$$

metrikus tenzort! Ezt Poincaré-metrikának, a $(\mathbb{H}^2, g)$ Riemann-sokaságot pedig hiperbolikus síknak nevezzük; a későbbiekből ki fog derülni, hogy így valóban a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometria ismert „felső félsík modell"-jéhez jutunk. Az értelmezés szerint tetszőleges $p \in \mathbb{H}^2$ pont és $u, v \in T_p\mathbb{H}^2 = T_p\mathbb{R}^2$ érintővektorok esetén

$$g_p(u,v) = \frac{1}{(y(p))^2}(h_0)_p(u,v) = \frac{1}{(y(p))^2}\langle u, v\rangle$$

(az érintővektorok geometriai interpretációját alkalmazva, és azonosítva őket a vektorrészükkel). $\mathbb{R}^2$ természetes bázismezője $\mathbb{H}^2$-n azt az (E_1, E_2) bázismezőt eredményezi, ahol

$$E_i : p \in \mathbb{H}^2 \longmapsto (E_i)_p := (p, e_i) \quad ; \quad i \in \{1,2\} \, ;$$

~~g erre vonatkozó komponensfüggvényei~~

$$g_{ij} := g(E_i, E_j) = \frac{1}{(y)^2}\langle E_i, E_j\rangle = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$$

$(i,j \in \{1,2\})$.

A $(\mathbb{H}^n, g)$ n-dimenziós hiperbolikus tér, ahol $\mathbb{H}^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid e^n(p) > 0\}$ analóg módon vezethető be.

Definíció. Legyen (M, g_M) és (N, g_N) pszeudo-Riemann-sokaság. Azt mondjuk, hogy egy $\varphi : M \longrightarrow N$ leképezés

(1) Riemann-izometria, ha diffeomorfizmus, és $\varphi^* g_N = g_M$;

(2) <u>lokális izometria</u>, ha $\varphi^* g_N = g_M$ és az M és az N sokaság dimenziója megegyezik.

<u>11.4. Megjegyzések.</u> (1) Ha φ <u>izometria</u> az (M, g_M) és (N, g_N) pszeudo-Riemann sokaság között, akkor tetszőleges $p \in M$ pont és $u, v \in T_pM$ érintővektorok esetén

$$(g_N)_{\varphi(p)}\left((\varphi_*)_p(u), (\varphi_*)_p(v)\right) = (g_M)_p(u, v)$$

(v.ö. <u>11.3</u> (3)). Mivel φ diffeomorfizmus, valamennyi $(\varphi_*)_p$ derivált lineáris izomorfizmus, és így – a skaláris szorzat megőrzése miatt – lineáris izometria.

(2) Ha φ <u>lokális izometria</u> az (M, g_M) és az az (N, g_N) pszeudo-Riemann sokaság között, akkor a $\dim(M) = \dim(N)$ feltétel miatt a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ deriváltak lineáris izomorfizmusok, a $\varphi^* g_N = g_M$ feltétel miatt pedig megtartják a skaláris szorzatot, és így lineáris izometriák. A lokális izometriák ily módon olyan sima leképezésekként is értelmezhetők, melyeknek tetszőleges pontbeli deriváltja lineáris izometria. Tekintettel az inverz leképezési tételre, a lokális izometriákra egy további, ekvivalens értelmezés is adható, amely megmagyarázza a „lokális" jelzőt:

> Egy $\varphi : M \to N$ sima leképezés lokális izometria az (M, g_M) és (N, g_N) szemi-Riemann-sokaság között, ha minden $p \in M$ pontnak van olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy $\varphi \restriction \mathcal{U}$ Riemann-izometria $\mathcal{U}$ és a $\varphi(p)$ pont egy környezete között.

(3) Közvetlenül ellenőrizhető, hogy

(i) egy pszeudo-Riemann sokaság identikus transzformációja izometria;

(ii) izometriák kompozíciója izometria;

(iii) izometria inverze izometria.

Ily módon egy (M, g) pszeudo-Riemann sokaság önmagára való összes Riemann-izometriái csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve; ezt a csoportot (M, g) izometriacsoportjának nevezzük és rá az $\mathrm{Iso}(M, g)$ vagy egyszerűen az $\mathrm{Iso}(M)$ jelölést használjuk. Azokat az objektumokat, amelyek alkalmas értelemben megőrződnek izometriák alkalmazása esetén, izometria-invariánsoknak hívjuk. A tradicionális megfogalmazási szerint a „pszeudo-Riemann geometria tárgya a Riemann-izometriák invariánsainak tanulmányozása". Ha egy (M, g_M) és (N, g_N) Riemann-sokaság között létezik Riemann-izometria, azt mondjuk, hogy M és N izometrikus; az izometrikus sokaságok - durván szólva - „geometriailag azonosak".

(4) Egy (M, g) pszeudo-Riemann sokaságot homogénnek nevezünk, ha az izometriacsoportja tranzitíven hat, vagyis ha tetszőleges $p, q \in M$ esetén van olyan $\varphi \in \mathrm{Iso}(M)$, hogy $\varphi(p) = q$.

Definíció. Legyen (M, g) Riemann-sokaság.

(1) Egy $v \in T_pM$ érintővektor normája vagy hossza
$$\|v\|_g := \sqrt{g_p(v, v)} \ .$$

(2) Azt mondjuk, az $u, v \in T_pM$ érintővektorok ortogonálisak (merőlegesek), ha $g_p(u, v) = 0$.

(3) Ha $u, v \in T_pM$ nemzérus érintővektorok, akkor a *szögük* az az egyértelműen meghatározott $\theta \in [0, \pi]$ valós szám, amelyre

$$\cos\theta = \frac{g_p(u,v)}{\|u\|_g \, \|v\|_g}$$

teljesül.

(4) Egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ szakaszonként sima görbe-szakasz *ívhossza* az

$$L_g(\gamma) := \int_a^b \|\dot\gamma\|_g$$

valós szám, ahol $\|\dot\gamma\|_g(t) := \|\dot\gamma(t)\|_g$ mindazon $t \in [a,b]$ pontokban, ahol γ' létezik. γ *ívhossz-függvénye* a

$$\sigma : [a,b] \longrightarrow [0, L_g(\gamma)], \quad t \longmapsto \sigma(t) := \int_a^t \|\dot\gamma\|_g$$

függvény.

(5) Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ (sima) görbe *egységpályasebességű*, *természetes paraméterezésű* vagy *ívhossz-paraméterezésű*, ha $\|\dot\gamma\|_g$ az 1-értékű konstans függvény; *konstans pályasebességű* vagy az *ívhosszal arányosan paraméterezett*, ha a $\|\dot\gamma\|_g$ függvény konstans.

Megjegyzések. (1) A $\|\dot\gamma\|_g$ függvény véges sok pont kivételével folytonos $[a,b]$-n, a nemfolytonossági helyeken pedig jóldefiniált bal vagy jobb oldali határértéke van, a (4)-beli integrál ezért létezik és jóldefiniált.

(2) Ha (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, akkor egy $v \in T_pM$ érintővektor hosszát a

$$\|v\|_g := \sqrt{|g_p(v,v)|}$$

előírással értelmezzük, ebben az esetben ugyanis $g_p(v,v)$ negatív is lehet.

<u>11. 5. Állítás.</u> <u>Riemann-sokaságbeli görbék ívhossza paramétertranszformációval szemben invariáns:</u> ha (M, g) Riemann-sokaság, $\gamma: [a,b] \to M$ szakaszonként sima görbe, $h: [c,d] \to [a,b]$ diffeomorfizmus és $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h$, akkor $L_g(\tilde{\gamma}) = L_g(\gamma)$.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Tegyük föl először, hogy γ sima. Mivel h diffeomorfizmus, $h'(t)$ vagy minden $t \in [a,b]$ esetén pozitív, vagy pedig minden $t \in [a,b]$ esetén negatív. Amennyiben h' mindenütt pozitív, úgy

$$L_g(\tilde{\gamma}) := \int_c^d \|\dot{\tilde{\gamma}}\|_g = \int_c^d \|\dot{\overline{\gamma \circ h}}\|_g = \int_c^d \|(\dot{\gamma} \circ h) h'\|_g = $$
$$= \int_c^d \|\dot{\gamma} \circ h\|_g h' = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} (\|\dot{\gamma}\|_g \circ h) h' \overset{(*)}{=} \int_a^b \|\dot{\gamma}\|_g =: L_g(\gamma);$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben a helyettesítéses integrálás jól ismert szabályát alkalmazva.

Ha a h' függvény mindenütt negatív, akkor az előző számolásban két helyen előjelváltás történik: $|h'| = -h'$ miatt a h' függvény $\| \ \|_g$ alól való kihozatalakor, továbbá h szigorúan monoton csökkenő volta miatt $d = h^{-1}(a)$, $c = h^{-1}(b)$, és így „fordul az integrálás iránya". Ez a két előjelváltás kioltja egymást, így az eredmény változatlan.

(2) Amennyiben γ csupán szakaszonként sima, úgy előző érvelés alkalmazható mindazon részintervallumokon, amelyeken teljesül a simaság. □

<u>11. 6. Lemma.</u> Jelentse $\| \ \|$ a szokásos euklideszi normát az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, és adjunk meg U-n egy g Riemann-metrikát. Ha $K \subset U$

kompakt halmaz, akkor léteznek olyan λ_1, λ_2 pozitív valós számok, hogy bármely $p \in K$ pont és $v_p := (p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektor esetén érvényes a

$$\lambda_1 \|v_p\| \leq \|v_p\|_g \leq \lambda_2 \|v_p\|$$

egyenlőtlenség, ahol $\|v_p\| := \|v\|$.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen

$$L := \{ v_p = (p, v) \in T\mathbb{R}^n \mid p \in K,\ \|v_p\| = 1 \}.$$

Ekkor $L = K \times S^{n-1}$, ahol S^{n-1} $\mathbb{R}^n$ egységgömb-felülete. L kompakt halmaz, hiszen két kompakt halmaz Descartes-szorzata. A

$$\| \ \|_g : \ L \longrightarrow \mathbb{R}, \ v_p = (p, v) \longmapsto \|v_p\|_g$$

függvény pozitív értékű folytonos függvény, így L kompaktsága miatt vannak olyan λ_1, λ_2 pozitív valós számok, hogy bármely $v_p \in L$ esetén

$$\lambda_1 \leq \|v_p\|_g \leq \lambda_2 .$$

Legyen ezek után $p \in K$ tetszőleges, és tekintsünk egy nemzérus $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ vektort. Ha $\lambda := \|v_p\| := \|v\|$, akkor $\frac{1}{\lambda} v \in S^{n-1}$, és így $(p, \frac{1}{\lambda} v) = \frac{1}{\lambda} v_p \in L$. Az előző észrevétel alapján így

$$\lambda_1 \leq \left\| \frac{1}{\lambda} v_p \right\|_g \leq \lambda_2 ,$$

amiből a $\| \ \|_g$ függvény (abszolút) homogenitása miatt $\lambda\lambda_1 \leq \|v_p\|_g \leq \lambda\lambda_2$, azaz a kívánt

$$\lambda_1 \|v_p\| \leq \|v_p\|_g \leq \lambda_2 \|v_p\|$$

egyenlőtlenség következik. □

<u>Definíció.</u> Tegyük fel, hogy (M, g) összefüggő Riemann-sokaság. Tetszőleges $p, q \in M$ esetén jelölje $\Omega(p, q)$ a p pontot a q ponttal összekötő, szakaszonként sima görbék halmazát. Egy p és egy q pont <u>Riemann-távolságán</u> a

$$d_g(p,q) := \inf\{L_g(\gamma) \in \mathbb{R} \mid \gamma \in \Omega(p,q)\}$$

valós számot értjük. A

$$d_g : M \times M \longrightarrow \mathbb{R},\ (p,q) \longmapsto d_g(p,q)$$

függvényt <u>Riemann-távolságfüggvénynek</u> nevezzük.

<u>Megjegyzés.</u> d_g definíciója értelmes, mert az összefüggőség miatt M bármely két pontja összeköthető szakaszonként sima görbével.

<u>11.7. Lemma.</u> Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér g_0 kanonikus Riemann-struktúrájából származó d_{g_0} Riemann-távolságfüggvény megegyezik $\mathbb{R}^n$ euklideszi távolságfüggvényével: tetszőleges $p,q \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$d_{g_0}(p,q) = \|p-q\|.$$

<u>Bizonyítás.</u> (1) Emlékeztetünk rá, hogy tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$, $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n \cong \{p\} \times \mathbb{R}^n$ esetén

$$(g_0)_p(v_p, w_p) = \langle v, w\rangle,$$

így $\|v_p\|_{g_0} = \|v\|$.

A következőkben – a szokásos módon – $(e_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, $(e^i)_{i=1}^n$ pedig $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere.

(2) Legyenek p,q $\mathbb{R}^n$ tetszőleges pontjai. Föltehetjük, hogy $p \neq q$, ugyanis $d_{g_0}(p,p) = 0 = \|p-p\|$ nyilvánvalóan teljesül. A kanonikus bázisban ezek a pontok $p = \sum_{i=1}^n p^i e_i$, ill. $q = \sum_{i=1}^n q^i e_i$ alakban állíthatók elő. A p-t q-val összekötő paraméterezett egyenes szakasz

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto \alpha(t) := (1-t)p + tq.$$

Ennek ívhossza

$$L_{g_0}(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\|_{g_0} = \int_0^1 \|\alpha'\| = \int_0^1 \|q-p\| =$$

$$= \|q-p\| = \|p-q\|.$$

(3) Megmutatjuk, hogy ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges p-t q-val összekötő sima görbe (azaz $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$), akkor $L_{g_0}(\gamma) \geq L_{g_0}(\alpha) = \|p - q\|$, ami igazolja állításunkat.

γ sebességvektormezője a

$$\dot{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} (\gamma^i)' \left(\frac{\partial}{\partial e^i} \circ \gamma\right), \quad \gamma^i := u^i \circ \gamma \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

alakban állítható elő. Képezzük az

$$X := \frac{1}{\|p-q\|} \sum_{i=1}^{n} (p^i - q^i) \frac{\partial}{\partial e^i}$$

konstans vektormezőt, és legyen

$$Y := \langle \dot{\gamma}, X \circ \alpha \rangle X \circ \alpha \in \mathfrak{X}(\alpha);$$

akkor Y a $\dot{\gamma}$ sebességvektormező X-szel párhuzamos komponense α mentén. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\|Y\| = |\langle \dot{\gamma}, X \circ \alpha \rangle X \circ \alpha| = |\langle \dot{\gamma}, X \circ \alpha \rangle| \, \|X \circ \alpha\| \leq \|\dot{\gamma}\|,$$

hiszen $\|X\| = 1$. Jegyezzük meg még, hogy

$$\langle \dot{\gamma}, X \circ \alpha \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial e^i} \circ \gamma\right), \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\|p-q\|} (p^j - q^j) \left(\frac{\partial}{\partial e^j} \circ \gamma\right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|p-q\|} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma^{i\prime} (p^j - q^j) \delta_{ij} = \frac{1}{\|p-q\|} \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i\prime} (p^i - q^i).$$

Ezek alapján

$$L_{g_0}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_{g_0} \geq \int_0^1 \|Y\| = \int_0^1 |\langle \dot{\gamma}, X \circ \alpha \rangle|$$

$$= \frac{1}{\|p-q\|} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i\prime} (p^i - q^i) \right| \geq \frac{1}{\|p-q\|} \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i\prime} (p^i - q^i) \right|$$

$$= \frac{1}{\|p-q\|} \left| \sum_{i=1}^{n} (p^i - q^i) \int_0^1 \gamma^{i\prime} \right| = \frac{1}{\|p-q\|} \left| \sum_{i=1}^{n} (p^i - q^i) (\gamma^i(1) - \gamma^i(0)) \right|$$

$$= \frac{1}{\|p-q\|} \sum_{i=1}^{n} (p^i - q^i)^2 = \frac{\|p-q\|^2}{\|p-q\|} = \|p - q\|,$$

és ezt akartuk belátni. $\square$

<u>11.8. Tétel.</u> Minden összefüggő Riemann-sokaság metrikus tér a Riemann-távolságfüggvénnyel. Ennek a metrikus térnek a metrikus topológiája megegyezik a sokaság (eleve adott) topológiájával.

<u>Bizonyítás.</u> Tegyük fel, hogy (M, g) összefüggő Riemann-sokaság, és jelölje a fentieknek megfelelően d_g a Riemann-távolságfüggvényt.

(1) Közvetlenül adódik a definícióból, hogy tetszőleges $(p,q) \in M \times M$ pontpár esetén $d_g(p,q) \geqq 0$. Mivel bármely konstans görbeszakasz zérus ívhosszúságú, az is automatikusan teljesül, hogy $d_g(p,p) = 0$, minden $p \in M$ pont esetén. A $d_g(p,q) = d_g(q,p)$ szimmetriatulajdonság következik abból, hogy minden p-ből q-ba futó görbeszakasz átparaméterezhető q-ból p-be futó görbeszakasszá, és az ívhossz paramétertranszformációval szemben invariáns.

(2) Belátjuk a háromszög-egyenlőtlenséget. Legyenek p, q, r M tetszőleges pontjai. Bármely ε pozitív valós számhoz megadható olyan $\gamma_1 \in \Omega(p,q)$ és $\gamma_2 \in \Omega(q,r)$ görbe, hogy

$$L_g(\gamma_1) < d_g(p,q) + \varepsilon, \quad L_g(\gamma_2) < d_g(q,r) + \varepsilon.$$

Ha γ_1 egy $[a, b_1]$ zárt intervallumon van értelmezve, akkor (szükség esetén átparaméterezéssel) az is elérhető, hogy γ_2 értelmezési tartománya $[b_1, b]$ alakú intervallum legyen. Tekintsük azt a $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ szakaszonként sima görbét, amelyre

$$\gamma \restriction [a, b_1] = \gamma_1, \quad \gamma \restriction [b_1, b] = \gamma_2$$

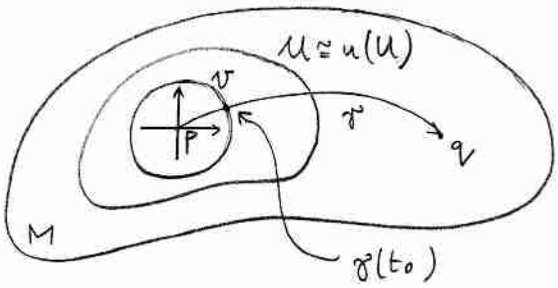
teljesül. Ekkor $\gamma \in \Omega(p,r)$ és

$$d_g(p,r) \leqq L_g(\gamma) = L_g(\gamma_1) + L_g(\gamma_2) < d_g(p,q) + d_g(q,r) + 2\varepsilon,$$

amiből ε tetszőlegessége folytán következik, hogy

$$d_g(p,r) \leq d_g(p,q) + d_g(q,r).$$

(3) Annak igazolásához, hogy (M, d_g) metrikus tér, már csak annak megmutatása van hátra, hogy ha p és q M különböző pontjai, akkor $d_g(p,q) > 0$. Adjunk meg ebből a célból olyan $(\mathcal{U}, u)$ térképet a p pont körül, amelynek tartománya nem tartalmazza a q pontot. Legyen $B_\varepsilon(u(p)) =: \mathcal{V}$ olyan nyílt gömbtest $\mathbb{R}^n$-ben, amelyre $\bar{\mathcal{V}} \subset u(\mathcal{U})$ teljesül.



Jelölje $\bar{g}$ a g által $u(\mathcal{U})$-n indukált metrikus tenzort. Ekkor – ld. 11.3 (3) – tetszőleges $a \in u(\mathcal{U})$ pont és $v, w \in T_a\mathbb{R}^n$ esetén

$$\bar{g}_a(v,w) = g_{u^{-1}(a)}\left((u^{-1})_*(v),\ (u^{-1})_*(w)\right).$$

A 11.6. lemma értelmében léteznek olyan λ_1, λ_2 pozitív valós számok, hogy tetszőleges $v \in T_{u(p)}\mathbb{R}^n$ érintővektor esetén

$$\lambda_1 \|v\| \leq \|v\|_{\bar{g}} \leq \lambda_2 \|v\|. \qquad (*)$$

Legyen $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ p-t q-val összekötő, szakaszonként sima görbe, és legyen

$$t_0 := \inf\{t \in [a,b] \mid u(\gamma(t)) \notin \bar{\mathcal{V}}\}.$$

Ekkor folytonossági okokból

$$u(\gamma(t_0)) \in \mathrm{bd}(\mathcal{V}) := \mathcal{V} \text{ határa},$$

és

$$u(\gamma(t)) \in \overline{\mathcal{V}}, \text{ ha } a \leqq t \leqq t_0 .$$

Így azt kapjuk, hogy

$$L_g(\gamma) \geqq L_g(\gamma \restriction [a,t_0]) \overset{(+)}{=} L_{\bar g}(u\circ\gamma \restriction [a,t_0])$$
$$\overset{(*)}{\geqq} \lambda_1 L_{\langle,\rangle}(u\circ\gamma) \overset{11.7.}{\geqq} \lambda_1 d_{g_0}(u(\gamma(a)), u(\gamma(t_0)))$$
$$\geqq \lambda_1 \varepsilon > 0 .$$

Infimumot véve minden γ görbére, következik, hogy $d(p,q) \geqq \lambda_1\varepsilon > 0$. A $(+)$ jellel jelölt lépésben azt használtuk fel, hogy egyrészt

$$L_g(\gamma \restriction [a,t_0]) := \int_a^{t_0} \|\dot\gamma\|_g ,$$

és itt

$$\|\dot\gamma\|_g(t) = (g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)))^{1/2}, \quad t \in [a,t_0];$$

másrészt

$$L_{\bar g}(u\circ\gamma \restriction [a,t_0]) := \int_a^{t_0} \|\dot{\overline{u\circ\gamma}}\|_{\bar g} ,$$

ahol

$$\|\dot{\overline{u\circ\gamma}}\|^2_{\bar g}(t) = \bar g(\dot{\overline{u\circ\gamma}}(t), \dot{\overline{u\circ\gamma}}(t)) =$$
$$= \bar g(u_*(\dot\gamma(t)), u_*(\dot\gamma(t))) =$$
$$= g((u^{-1})_*(u_*(\dot\gamma(t))), (u^{-1})_*(u_*(\dot\gamma(t))))$$
$$= g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)),$$

tehát a két ívhossz valóban egyenlő.

(4) Annak ellenőrzése van még hátra, hogy a sokaság-topológia nyílt halmazai nyílt halmazok a d_g által indukált metrikus topológiában, és megfordítva. Ez a 11.6. lemma ismételt alkalmazásával, a (3)-ban alkalmazottal analóg érveléssel viszonylag egyszerűen lehetséges; a részleteket mellőzzük. □

12. A Levi-Civita deriválás

12.1. Lemma. Ha (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, akkor a

$$\begin{cases} \flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M), \quad X \longmapsto X^\flat, \\ X^\flat(Y) := g(X, Y), \quad Y \in \mathfrak{X}(M) \end{cases}$$

leképezés természetes izomorfizmus M vektormezőinek $C^\infty(M)$-modulusa és ennek duálisa között (mely utóbbi természetes módon izomorf M 1-formáinak $\mathcal{A}_1(M)$ modulusával (5.21.)).

Bizonyítás. (1) Rögzített $X \in \mathfrak{X}(M)$ mellett az

$$Y \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto g(X, Y) =: X^\flat(Y) \in C^\infty(M)$$

leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, hiszen g $C^\infty(M)$-bilineáris. Így $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ valóban teljesül.

(2) Szintén közvetlenül adódik, hogy a

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M), \quad X \longmapsto X^\flat$$

leképezés is $C^\infty(M)$-lineáris.

(3) Megmutatjuk, hogy $\flat$ injektív.

Tegyük fel, hogy valamely $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre $X_1^\flat = X_2^\flat$ teljesül. Ekkor bármely $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $g(X_1, Y) = g(X_2, Y)$, azaz, bevezetve az $X := X_1 - X_2$ vektormezőt, $g(X, Y) = 0$. Így tetszőleges $p \in M$-re

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = 0.$$

Mivel minden $v \in T_pM$ érintővektor megadható $v = Y_p$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ alakban (5.7.), a kapott relációból g_p nemelfajultsága miatt az következik, hogy bármely $p \in M$ pont esetén $X_p = 0$. Így $X = 0$ és $X_1 = X_2$.

(4) Belátjuk végül, hogy $\flat$ szürjektív. Elegendő ezt lokálisan igazolnunk, így azt mutatjuk meg, hogy kijelölve M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és megadva egy $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i du^i$ 1-formát, van olyan $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektormező, hogy $X^\flat = \theta$.

Tekintsük g-nek a kijelölt térképre vonatkozó $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ komponensfüggvényeit, és a (g_{ij}) mátrix (g^{ij}) inverzét. Legyen

$$X := \sum_{i,j} g^{ij} \theta_j \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Ekkor tetszőleges $k \in \{1, \dots, n\}$ index esetén

$$g\left(X, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = g\left(\sum_{i,j} g^{ij} \theta_j \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_j \, g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

$$= \sum_{i,j} g^{ij} \theta_j g_{ik} = \sum_{j=1}^n \delta^j_k \theta_j = \theta_k = \theta\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right),$$

amiből a $C^\infty(\mathcal{U})$-linearitás alapján következik, hogy bármely $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ esetén

$$X^\flat(Y) = g(X, Y) = \theta(Y),$$

tehát $\theta = X^\flat$. □

12.2. Tétel (a Riemann-geometria alaplemmája). Ha (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, akkor létezik egy és csak egy olyan ∇ kovariáns deriválás M-en, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(∇_4) torziómentes, azaz $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ teljesül minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén;

(∇_5) metrikus abban az értelemben, hogy

$$X\, g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

bármely $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$-re.

Ezt a kovariáns deriválást jellemzi a

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\left(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\right)$$

$$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$$

összefüggés, az ún. Koszul-formula.

Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, és a metrikus tenzor erre vonatkozó komponensei a $g_{ij} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(i,j \in \{1,\dots,n\})$ függvények, akkor ∇ Christoffel-szimbólumai a kijelölt térképre vonatkozóan

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{jk}\right)$$

$$(i,j,k \in \{1,\dots,n\})$$

függvények.

Bizonyítás. (1) Először az unicitást igazoljuk, megmutatva, hogy ha ∇ torziómentes és metrikus kovariáns deriválás, akkor eleget tesz a Koszul-formulának. Legyenek X, Y, Z tetszőleges vektormezők M-en. (∇_5) és (∇_4) alapján

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y,[X,Z]),$$

$$Yg(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z,[Y,X]),$$

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X,[Z,Y]).$$

Kivonva az első két reláció bal és jobb oldalainak összegéből a harmadik reláció megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy

$$Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) = 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y,[X,Z]) + g(Z,[Y,X]) - g(X,[Z,Y]);$$

innen

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\left(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\right).$$

Ezzel megkaptuk a Koszul-formulát. Ennek jobb oldala egyúttal nem függ a kovariáns deriválástól, így ha ∇^1 és ∇^2 egyaránt torziómentes és metrikus kovariáns deriválás M-en, akkor tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén fennáll a $g(\nabla^1_X Y, Z) = g(\nabla^2_X Y, Z)$, ill. az ezzel ekvivalens $g(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z) = 0$ összefüggés, amiből g nemelfajultsága az következik, hogy $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$ minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén, és így $\nabla^1 = \nabla^2$.

(2) Levezetjük ∇ <u>Christoffel-szimbólumait</u> a kijelölt térképre vonatkozóan, és lokális megfontolásokkal igazoljuk a kívánt kovariáns deriválás <u>létezését</u>.

Legyen $j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ tetszőleges, és alkalmazzuk a Koszul-formulát a $\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektormezőkre. Mivel a koordinátavektormezők Lie-zárójele eltűnik, azt kapjuk, hogy

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{jk}\right).$$

A Christoffel-szimbólumok definíciója alapján

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial u^m},$$

így

$$\sum_{m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} g_{ml} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{jk}\right).$$

Megszorozva mindkét oldalt a (g_{ij}) mátrix inverzének g^{il} elemével és összegezve l-re 1-től n-ig,

$$\sum_{l,m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} g_{ml} g^{il} = \sum_{l,m=1}^{n} \Gamma^m_{jk} g_{ml} g^{li} = \sum \Gamma^m_{jk} \delta^i_m = \Gamma^i_{jk}$$

miatt a kívánt

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{jk}\right)$$

összefüggéshez jutunk.

<u>Definiáljunk</u> ezek után M-en egy kovariáns deriválást azzal az előírással, hogy tetszőleges $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó Christoffel-

szimbólumai a most levezetett formula által megadott Γ^i_{jk} $(i,j,k \in \{1,\dots,n\})$ függvények legyenek (v.ö. 8.4 – 8.6.). Közvetlenül látható, hogy ekkor $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, következésképpen – ld. 8.8. – ∇ torziómentes.

Megmutatjuk, hogy ∇ metrikus. Ez a kovariáns differenciál nyelvén azt jelenti, hogy $\nabla g = 0$; ld. 8.9.(3). Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\nabla g\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) = 0 \;;\; j,k,l \in \{1,\dots,n\}.$$

$$\begin{aligned}\nabla g\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) &:= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} g\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} - \\ &\quad - g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} - \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jk} g_{il} - \sum_{i=1}^n \Gamma^i_{jl} g_{ik}.\end{aligned}$$

Felhasználva a Christoffel-szimbólumok definícióját, itt

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \left(\Gamma^i_{jk} g_{il} + \Gamma^i_{jl} g_{ik}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,m=1}^n \Big(g^{im} g_{il} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{km} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{mj} - \frac{\partial}{\partial u^m} g_{jk}\right) + \\ &\qquad + g^{im} g_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{lm} + \frac{\partial}{\partial u^l} g_{mj} - \frac{\partial}{\partial u^m} g_{jl}\right)\Big) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \Big(\delta^m_l \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{km} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{mj} - \frac{\partial}{\partial u^m} g_{jk}\right) + \\ &\qquad + \delta^m_k \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{lm} + \frac{\partial}{\partial u^l} g_{mj} - \frac{\partial}{\partial u^m} g_{jl}\right)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl} + \underline{\frac{\partial}{\partial u^k} g_{lj}} - \underline{\frac{\partial}{\partial u^l} g_{jk}} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{lk} + \underline{\frac{\partial}{\partial u^l} g_{kj}} - \underline{\frac{\partial}{\partial u^k} g_{jl}}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^j} g_{kl},\end{aligned}$$

amiből következik az állításunk.

(3) Bemutatunk egy másik lehetőséget a létezés igazolására. Rögzítve egy X és egy Y vektormezőt M-en, értelmezzük egy

$$\theta_{XY} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M), \; Z \longmapsto \theta_{XY}(Z)$$

leképezést a

$$\underline{\theta_{XY}(Z) := \text{a Koszul-formula jobb oldala}}$$

előírással. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy θ_{XY} $C^\infty(M)$-lineáris, és így $\theta_{XY} \in \mathfrak{X}^*(M)$. A 12.1. lemma alapján ezért létezik egy és csak egy olyan $U \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $U^\flat = \theta_{XY}$, azaz

$$\theta_{XY}(Z) = g(U, Z), \qquad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Legyen

$$\nabla_X Y := U.$$

Közvetlen, de hosszadalmas számolással ellenőrizhető, hogy az így definiált

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

leképezés torziómentes és metrikus kovariáns deriválás. Példaként megmutatjuk a torziómentességet. Tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= 2\,\theta_{XY}(Z) - 2\,\theta_{YX} Z = \\
&= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \\
&- Yg(X,Z) - Xg(Z,Y) + Zg(Y,X) + g(Y,[X,Z]) - g(X,[Z,Y]) - g(Z,[Y,X]) \\
&= 2g([X,Y], Z),
\end{aligned}$$

tehát minden $Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], Z) = 0,$$

amiből g nemelfajultság alapján

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

következik. $\square$

12.3. Tétel Legyen (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, s tegyük fel, hogy ∇ torziómentes kovariáns deriválás M-en. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(1) ∇ metrikus.

(2) $\nabla g = 0$.

(3) Ha $\gamma : I \longrightarrow M$ egy görbe; $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ és $g(X,Y)$ jelöli az

$$I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t))$$

függvényt, akkor

$$(g(X,Y))' = g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y).$$

(4) Ha X és Y párhuzamos vektormező egy $\gamma : I \longrightarrow M$ görbe mentén, akkor a $g(X,Y) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény konstans.

(5) Tetszőleges $\gamma : I \longrightarrow M$ görbe és $t_0, t_1 \in I$ esetén a

$$(P_\gamma)_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)} M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)} M$$

párhuzamos eltolás lineáris izometria.

Bizonyítás. $(1) \Longleftrightarrow (2)$ Tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$\nabla g(X,Y,Z) := (\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

így $\nabla g = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z); \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

– vagyis ha ∇ metrikus.

$(1) \Longrightarrow (3)$ Jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és tegyük fel, hogy $\operatorname{Im}(\gamma) \subset \mathcal{U}$. Ekkor

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma\right), \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \gamma\right)$$

írható, ahol X^i, Y^i $(i \in \{1,\dots,n\})$ sima függvények az I intervallumon. Így a bizonyítandó összefüggés bal oldala

$$(g(X,Y))' = \left(g\left(\sum_{i=1}^{n} X^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\circ\gamma\right), \sum_{j=1}^{n} Y^j\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\circ\gamma\right)\right)\right)' =$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j (g_{ij}\circ\gamma)\right)' =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (X^{i\prime} Y^j + X^i Y^{j\prime})(g_{ij}\circ\gamma) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j (g_{ij}\circ\gamma)'.$$

Itt a láncszabály alapján

$$(g_{ij}\circ\gamma)' = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\circ\gamma\right)(u^k\circ\gamma)' = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\circ\gamma\right)\gamma^{k\prime}.$$

Legyenek ∇ Christoffel-szimbólumai a kijelölt térképre vonatkozóan a Γ^i_{jk} $(i,j,k\in\{1,\dots,n\})$ függvények. Ekkor – mint az előző bizonyítás (2) pontjában láttuk –

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \partial_k g_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\Gamma^{\ell}_{ki} g_{\ell j} + \Gamma^{\ell}_{kj} g_{\ell i}\right),$$

így

$$(g(X,Y))' = \sum_{i,j=1}^{n} (X^{i\prime}Y^j + X^iY^{j\prime})(g_{ij}\circ\gamma) +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(X^iY^j\gamma^{k\prime}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\Gamma^{\ell}_{ki}g_{\ell j} + \Gamma^{\ell}_{kj}g_{\ell i}\right)\circ\gamma\right)$$

Kifejtjük ezután a reláció jobb oldalát. A 9.1. bizonyításában látottak szerint tetszőleges $t\in I$ esetén

$$(\nabla_\gamma X)(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(X^{i\prime}(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} + X^i(t)\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^i}\right),$$

és analóg kifejezés írható fel $(\nabla_\gamma Y)(t)$-re, így azt kapjuk, hogy

$$(g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X,\nabla_\gamma Y))(t) =$$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X^{i\prime}(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} + X^i(t)\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^i}\right), \sum_{j=1}^{n} Y^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\gamma(t)}\right) +$$

$$+\, g\left(\sum_{i=1}^{n} X^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)},\ \sum_{j=1}^{n}\left(Y^{j\prime}(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\gamma(t)} + Y^j(t)\,\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}\left(X^{i\prime}Y^j + X^iY^{j\prime}\right)(t)\, g_{ij}(\gamma(t)) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n}(X^iY^j)(t)\left(g\left(\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^i}, \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\gamma(t)}\right) + g\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)}, \nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\right).$$

Ha $\dot\gamma(t) = \sum_{k=1}^{n}(\gamma^k)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_{\gamma(t)}$,

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^{n}(\gamma^k)'(t)\,\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_{\gamma(t)}}\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{k=1}^{n}(\gamma^k)'(t)\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^k}}\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(\gamma(t))$$

$$= \left(\sum_{k,l=1}^{n}\gamma^{k\prime}\left(\Gamma^l_{ki}\circ\gamma\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\circ\gamma\right)\right)(t),$$

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial u^j} = \left(\sum_{k,l=1}^{n}\gamma^{k\prime}\left(\Gamma^l_{kj}\circ\gamma\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\circ\gamma\right)\right)(t),$$

következésképpen

$$g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(X^{i\prime}Y^j + X^iY^{j\prime}\right)(g_{ij}\circ\gamma) +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(X^iY^j\gamma^{k\prime}\sum_{l=1}^{n}\left(\Gamma^l_{ki}g_{lj} + \Gamma^l_{kj}g_{li}\right)\circ\gamma\right);$$

ezzel igazoltuk (3) teljesülését.

<u>(3) ⟹ (1)</u> Legyenek X, Y, Z tetszőleges vektormezők M-en. Válasszunk ki egy $p\in M$ pontot, és legyen $\gamma: I \to M$ olyan görbe, hogy $\dot\gamma(0) = X_p$. Ekkor

$$(X\,g(Y,Z))(p) = X_p\,g(Y,Z) = \dot\gamma(0)\,g(Y,Z) \overset{3.7.(1)}{=} (g(Y,Z)\circ\gamma)'(0)$$

$$= (g(Y\circ\gamma, Z\circ\gamma))'(0) \overset{(3)}{=} g(\nabla_\gamma(Y\circ\gamma), Z\circ\gamma)(0) +$$

$$+ g(Y\circ\gamma, \nabla_\gamma(Z\circ\gamma))(0) = g_p((\nabla_\gamma(Y\circ\gamma))(0), Z(p)) +$$

$$+ g_p(Y(p), (\nabla_\gamma(Z\circ\gamma))(0)) = g_p(\nabla_{X(p)}Y, Z(p)) +$$

$$+ g_p(Y(p), \nabla_{X(p)}Z) = (g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z))(p),$$

amiből p tetszőlegessége miatt adódik (1).

<u>(3) ⟹ (4)</u> Ha $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ párhuzamos vektormező γ mentén, akkor $\nabla_\gamma X = \nabla_\gamma Y = 0$, és így a feltétel alapján

$$(g(X,Y))' = g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y) = 0;$$

a $g(X,Y)$ függvény tehát konstans.

<u>(4) ⟹ (3)</u> Válasszunk egy olyan $(E_i)_{i=1}^n$ n-élmezőt, amelynek tagjai γ mentén párhuzamos vektormezők. Legyen $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ tetszőleges. Ekkor
$X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$, $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i$ $\left(X^i, Y^i \in C^\infty(I);\ i \in \{1, \dots, n\} \right)$,
és

$$\nabla_\gamma X = \sum_{i=1}^n \left(X^{i\prime} E_i + X^i \nabla_\gamma E_i \right) = \sum_{i=1}^n X^{i\prime} E_i;$$

ugyanígy

$$\nabla_\gamma Y = \sum_{i=1}^n Y^{i\prime} E_i.$$

Mivel a feltétel értelmében a $g(E_i, E_j)$ függvények konstans függvények, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(g(X,Y))' &= \Big(g\Big(\sum_{i=1}^n X^i E_i, \sum_{j=1}^n Y^j E_j\Big)\Big)' = \\ &= \Big(\sum_{i,j=1}^n X^i Y^j g(E_i, E_j)\Big)' = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(X^{i\prime} Y^j + X^i Y^{j\prime} \right) g(E_i, E_j) \\ &= g\Big(\sum_{i=1}^n X^{i\prime} E_i, \sum_{j=1}^n Y^j E_j\Big) + g\Big(\sum_{i=1}^n X^i E_i, \sum_{j=1}^n Y^{j\prime} E_j\Big) \\ &= g(\nabla_\gamma X, Y) + g(X, \nabla_\gamma Y).\end{aligned}$$

<u>(4) ⟺ (5)</u> Mivel a párhuzamos eltolások lineáris izomorfizmusok, (5) pontosan akkor teljesül, ha bármely $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ érintővektor esetén

$$(*) \qquad g_{\gamma(t_0)}(v, v) = g_{\gamma(t_1)}\left((P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v), (P_\gamma)_{t_0}^{t_1}(v) \right).$$

Egyértelműen létezik olyan γ mentén párhuzamos X vektormező, hogy $X(t_0) = v$, és minden $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ párhuzamos vektormezőt egyértelműen meghatároz az $X(t_0) = v$ kezdeti feltétel. Megállapíthatjuk ily módon, hogy

$$(5) \iff (*) \iff g_{\gamma(t_0)}(X(t_0), X(t_0)) = g_{\gamma(t_1)}(X(t_1), X(t_1))$$
$$(X \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ párhuzamos})$$
$$\iff g(X, X) \text{ konstans függvény, ha } X \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ párhuzamos.}$$

Az utóbbi megállapítás azonban ekvivalens azzal, hogy a $g(X, Y)$ függvény minden γ menténi párhuzamos X és Y vektormező esetén konstans, tekintettel a

$$g(X, Y) = \frac{1}{4}\left(g(X+Y, X+Y) - g(X-Y, X-Y)\right)$$

polarizációs azonosságra. Ezzel beláttuk (5) és (4) ekvivalenciáját. □

13. Riemann-geodetikusok

<u>Definíció.</u> Egy Riemann-sokaság geodetikusán a Levi-Civita deriválás geodetikusát értjük.

<u>13. 1. Következmény.</u> A Riemann-sokaságok geodetikusai konstans pályasebességű görbék.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen (M, g) Riemann-sokaság, és tekintsük ennek egy $\gamma : I \to M$ geodetikusát. γ pályasebessége a

$$\|\dot\gamma\|_g : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|\dot\gamma\|_g(t) := \|\dot\gamma(t)\|_g$$

függvény $\|\dot\gamma\|_g^2$ deriváltja

$$(\|\dot\gamma\|_g^2)' = (g(\dot\gamma, \dot\gamma))' \overset{12.3.}{=} 2g(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma) = 0,$$

hiszen $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, mert γ geodetikus. □

<u>13.2. Megjegyzések.</u> (1) A Következmény értelmében egy (M,g) Riemann-sokaság geodetikusai meglehetősen egyöntetű viselkedést mutatnak. A konstans görbék nyilvánvalóan Riemann-geodetikusok. Ha azonban egy $\gamma: I \longrightarrow M$ geodetikusra $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ akár egyetlen $t \in I$ helyen is teljesül, akkor $\dot{\gamma}$ seholsem tűnhet el. Így egy geodetikus nem lassulhat le, nem állhat meg – „megőrzi mozgásállapotát".

(2) Az affin összefüggő sokaságok geodetikusaival kapcsolatban tett megállapítások természetesen megőrzik az érvényességüket a Riemann-geodetikusokra. Vonatkozik ez speciálisan az <u>exponenciális leképezés</u> és egy pont körüli <u>normálkoordinátarendszer</u> konstrukciójára is. Az utóbbival kapcsolatban megállapodunk abban, hogy egy p középpontú normáltérkép konstruálásakor a Riemann-esetben a T_pM érintőtérben egy $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n$ <u>g_p-ortonormált</u> bázist veszünk alapul. Egy p középpontú $(\mathcal{U}, u)$ normáltérkép tehát – a <u>10.11.</u>-ben mondottaknak megfelelően – olyan $(\mathcal{U}, u)$ pár, ahol $\mathcal{U}$ normálkörnyezete a p pontnak,

$$u = \varphi_{\underline{v}} \circ \exp_p^{-1},$$

$$\varphi_{\underline{v}} : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{\underline{v}}(v_i) = e_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Emlékeztetőül: ha $\mathcal{E}_p \subset T_pM$ az a legbővebb részhalmaz, amelyre teljesül, hogy a $v \in \mathcal{E}_p$ kezdősebességű γ_v maximális geodetikusok legalább a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezve vannak, akkor

$$\exp_p : \tilde{\mathcal{E}}_p \longrightarrow M, \ v \longmapsto \exp_p(v) := \gamma_v(1)$$

az adott - esetünkben a Levi-Civita - kovariáns deriváláshoz tartozó p-beli exponenciális leképezés; $\mathcal{U} := \exp_p(\tilde{\mathcal{U}})$, ahol $\tilde{\mathcal{U}}$ olyan, a 0 körüli csillagszerű nyílt halmaz T_pM-ben, amelyre teljesül, hogy $\exp_p \restriction \tilde{\mathcal{U}}$ diffeomorfizmus. ($\mathcal{U}$-t ekkor a p pont egy <u>normálkörnyezetének</u> nevezzük.)

<u>Definíció.</u> Vegyünk alapul egy (M, g) Riemann-sokaságot és válasszunk ki egy $p \in M$ pontot. Tetszőleges ε pozitív valós szám esetén legyen

$$B_\varepsilon(0_p) := \{ v \in T_pM \mid \|v\|_g < \varepsilon \}, \quad \overline{B_\varepsilon}(0_p) := \{ v \in T_pM \mid \|v\|_g \leq \varepsilon \},$$

és jelölje bd a határ-operátort ($\mathrm{bd} : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$, $H \longmapsto \mathrm{bd}(H) := \overline{H} \cap \overline{M \setminus H}$).

(1) Ha ε olyan pozitív valós szám, hogy $\exp_p \restriction B_\varepsilon(0_p)$ diffeomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $\exp_p(B_\varepsilon(0_p))$ <u>geodetikus gömb</u> M-ben. Amennyiben $\overline{B}_\varepsilon(0_p)$ benne van egy olyan $\mathcal{V} \subset T_pM$ nyílt halmazban, amelyen $\exp_p$ diffeomorfizmus, úgy az $\exp_p(\overline{B}_\varepsilon(0_p))$ halmazt <u>zárt geodetikus gömb</u>nek, az $\exp_p(\mathrm{bd}(\overline{B}_\varepsilon(0_p)))$ halmazt <u>geodetikus gömbfelület</u>nek nevezzük.

(2) Ha $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ tetszőleges p középpontú normáltérkép M-en, akkor az

$$r : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q \longmapsto r(q) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (u^i(q))^2}$$

függvényt <u>radiális távolságfüggvény</u>nek, a

$$\frac{\partial}{\partial r} := \sum_{i=1}^n \frac{u^i}{r} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

vektormezőt <u>radiális egységvektormező</u>nek nevezzük.

<u>13.3. Állítás</u> (<u>a Riemann-normálkoordináták alaptulajdonságai</u>) Legyen (M, g) Riemann-sokaság, $p \in M$, és tegyük föl, hogy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ (a <u>13.2</u> (2)-ben mondottak szerint konstruált) p központú normálkoordinátarendszer. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) $u(p) = (u^1(p), \dots, u^n(p)) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

(2) Tetszőleges $v = \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \in T_pM$ érintővektor esetén a p pontból induló, v kezdősebességű maximális geodetikus normálkoordinátákban a
$$t \longmapsto (u^1(\gamma_v(t)), \dots, u^n(\gamma_v(t))) = (v^1 t, \dots, v^n t)$$
„sugárirányú" parametrizált egyenesszakaszként állítható elő (mindaddig, amíg γ_v $\mathcal{U}$-ban halad).

(3) Ha g komponensfüggvényei az adott térképre vonatkozóan a $g_{ij} \in C^\infty(\mathcal{U})$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ függvények, akkor $(g_{ij}(p)) = (\delta_{ij})$.

(4) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(p) = 0$, $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$ $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$, a Γ^i_{jk} függvények a Levi-Civita derivált Christoffel-szimbólumai $(\mathcal{U}, u)$-ra vonatkozóan).

(5) Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ pont esetén a p-t q-val összekötő egységpályasebességű geodetikus sebességvektormezője $\frac{\partial}{\partial r} \circ \gamma$, ahol $\frac{\partial}{\partial r}$ a radiális egységvektormező, következésképpen $\frac{\partial}{\partial r}$ (valóban) 1-normájú g-re vonatkozóan.

(6) Minden $\mathcal{U}$ által tartalmazott
$$\{q \in \mathcal{U} \mid r(q) < \varepsilon\}$$
„euklideszi gömb" geodetikus gömb M-ben.

<u>Bizonyítás.</u> Korábban már megmutattuk (ld. <u>10.11.</u>), hogy (1) és (2) tetszőleges affin-összefüggő sokaság alapulvétele esetén is teljesül.

Mivel a p középpontú normálképképmegkonstruálásához egy $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n$ g_p-ortonormált bázist használtunk fel, és 10.11. (3) értelmében $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = v_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, következik, hogy

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right) = g_p(v_i, v_j) = \delta_{ij}$$

$(i, j \in \{1, \dots, n\})$, tehát (3) szintén teljesül.

10.11 (4) értelmében $\Gamma^i_{jk}(p) = 0$ $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$, 12.2. bizonyításának (2) pontjában pedig láttuk, hogy $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \sum_{s=1}^n \left(\Gamma^s_{ij} g_{sk} + \Gamma^s_{ik} g_{sj}\right)$, így következik, hogy $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(p) = 0$. Ezzel (4) is igazolást nyert.

Megmutatjuk (5) teljesülését. 10.10. bizonyításában láttuk, hogy a p pontot a q ponttal összekötő egyetlen geodetikus az a $\gamma_v : [0,1] \longrightarrow M$ geodetikus, ahol $v = \exp_p^{-1}(q)$. $v \neq 0$, mert $p \neq q$, így képezhető a $\gamma := \gamma_{\frac{1}{\|v\|_g} v}$ geodetikus. Ez $\|\dot\gamma(0)\|_g = \left\|\frac{1}{\|v\|_g} v\right\|_g = 1$ miatt, 13.1. figyelembevételével egységpályasebességű. Mivel az átskálázási lemma (10.7.) alapján

$$\gamma_{\frac{1}{\|v\|_g} v}\left(\|v\|_g\right) = \gamma_v\left(\frac{1}{\|v_g\|}\|v\|_g\right) = \gamma_v(1) = q,$$

γ szintén összeköti a p pontot a q ponttal.

A $v \in T_pM$ érintővektor a $(v_i)_{i=1}^n = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}(p)\right)_{i=1}^n$ g_p-ortonormált bázisban a

$$v = \sum_{i=1}^n \nu^i v_i = \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

alakban állítható elő; a fellépő együtthatókra ekkor

$$\sum_{i=1}^n (\nu^i)^2 = \|v\|_g^2 \qquad (*)$$

teljesül. A (2) tulajdonság alapján tetszőleges $t \in [0, \|v\|_g]$ esetén

$$u(\gamma(t)) = \left(\frac{1}{\|v\|_g} v^1 t, \ldots, \frac{1}{\|v\|_g} v^n t\right),$$

a γ geodetikus $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ komponensfüggvényei tehát a

$$t \in [0, \|v\|_g] \longmapsto \gamma^i(t) = \frac{v^i}{\|v\|_g} t \in \mathbb{R} \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

képlettel adhatók meg.

Így bármely $t \in [0, \|v\|_g]$ esetén egyrészt

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u^i(\gamma(t))}{r(\gamma(t))} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma^i(t)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (u^j(\gamma(t)))^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{v^i}{\|v\|_g} t}{\frac{|t|}{\|v\|_g} \sqrt{(v^1)^2 + \cdots + (v^n)^2}} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{v^i}{\|v\|_g} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)},$$

másrészt

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v^i}{\|v\|_g} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)},$$

következésképpen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \circ \gamma = \dot\gamma} \qquad (**) .$$

Ezzel beláttuk, hogy γ integrálgörbéje $\frac{\partial}{\partial r}$-nek, amiből következik, hogy $\frac{\partial}{\partial r}$ 1 g-normájú konstans vektormező, hiszen γ egységpályasebességű.

A még hátralevő (6) megállapítás igazolása feladat. Δ

13.4. Megjegyzés. A bevezetett $r: M \longrightarrow \mathbb{R}$ radiális távolságfüggvény hozzárendelési szabálya az

$$r(q) = \|\exp_p^{-1}(q)\|_g$$

formulával is megadható. Ez kiolvasható a megfelelő definíciókból: a $\underline{v} = (v_i)_{i=1}^n = \left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$

g-ortonormált bázis segítségével az $\exp_p^{-1}(q) \in T_pM$ érintővektor

$$\exp_p^{-1}(q) = \sum_{i=1}^{n} \nu^i v_i$$

alakban állítható elő, és így

$$\| \exp_p^{-1}(q) \|_g = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\nu^i)^2} .$$

Mivel

$$u^i(q) = e^i \circ \varphi_{\underline{v}} \circ \exp_p^{-1}(q) = e^i \circ \varphi_{\underline{v}} \left(\sum_{j=1}^{n} \nu^j v_j \right) =$$

$$= e^i \left(\sum_{j=1}^{n} \nu^j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \nu^j \delta^i_j = \nu^i ,$$

következik, hogy

$$\| \exp_p^{-1}(q) \|_g = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u^i(q))^2} =: r(q).$$

__13.5. Állítás__ (__a Gauss-lemma__). Legyen (M, g) Riemann-sokaság. Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot, és jelöljünk ki egy p középpontú $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ normáltérképet. Tekintsük az

$$r := ((u^1)^2 + \dots + (u^n)^2)^{1/2} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

radiális távolságfüggvényt és a

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

radiális egységvektormezőt. Ekkor fennáll a

$$\boxed{\mathrm{grad}(r) = \frac{\partial}{\partial r}}$$

összefüggés.

__Bizonyítás.__ (1) $\mathrm{grad}(r) := (dr)^{\#}$ az az egyértelműen meghatározott vektormező, amelyre bármely $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ mellett

$$g(\mathrm{grad}(r), X) = Xr = dr(X)$$

teljesül (ld. __61__/(1) feladat), így feladatunk annak megmutatása, hogy

$$\underline{g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = dr(X)}, \text{ minden } X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})\text{-ra.}$$

Ehhez természetesen elegendő azt ellenőrizni, hogy ez az összefüggés teljesül $\mathfrak{X}(U)$ egy alkalmas bázisának tagjaira.

(2) Jegyezzük meg, hogy

$$dr = d\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(2u^1du^1 + \dots + 2u^ndu^n\right)\frac{1}{r}$$
$$= \frac{1}{r}\left(u^1du^1 + \dots + u^ndu^n\right),$$

azaz

$$dr = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} u^i du^i.$$

(3) Képezzük az

$$X_{ij} := -u^i\frac{\partial}{\partial u^j} + u^j\frac{\partial}{\partial u^i}\ ;\quad 2 \leq i < j \leq n$$

vektormezőket. Ellenőrizhető, hogy ezek és a $\frac{\partial}{\partial r}$ vektormező generálják $\mathfrak{X}(U)$-t, így feladatunk annak megmutatására redukálódik, hogy

$$dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

és

$$dr\left(X_{ij}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right)\ ;\quad 2 \leq i < j \leq n.$$

Az az első összefüggés teljesülése közvetlenül adódik, mivel a jobb oldal 13.3/(5) értelmében 1, de 1-et ad a bal oldal is, mert

$$dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{r}\left(u^1du^1 + \dots + u^ndu^n\right)\left(\frac{1}{r}\left(u^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + u^n\frac{\partial}{\partial u^n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{r^2}\left((u^1)^2 + \dots + (u^n)^2\right) = 1.$$

(4) $$dr\left(X_{ij}\right) = \frac{1}{r}\left(u^1du^1 + \dots + u^ndu^n\right)\left(-u^i\frac{\partial}{\partial u^j} + u^j\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$$
$$= \frac{1}{r}\left(-u^ju^i + u^ju^i\right) = 0,$$

azt kell tehát még belátnunk, hogy

$$g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) = 0$$

is fennáll. Ebből a célból azt mutatjuk meg először, hogy

$$\frac{\partial}{\partial r} g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) = 0.$$

Néhány technikai észrevétellel kezdjük.

(a) $\underline{\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0}$, mert $\frac{\partial}{\partial r}$ integrál-
$\underline{\text{görbéi}}$ geodetikusok (ld. a fentebbi (**) relációt).

(b) Az X_{ij} vektormezők mindegyikére teljesül, hogy

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right] = 0.$$

Ennek igazolásához elegendő azt ellenőriznünk, hogy a bal oldal az u^k ($k \in \{1, \dots, n\}$) koordinátafüggvények mindegyikén zérust vesz fel.

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right] u^k = \frac{\partial}{\partial r}\left(X_{ij} u^k\right) - X_{ij} \frac{\partial u^k}{\partial r};$$

itt

$$X_{ij} u^k \overset{(3)}{=} \left(-u^i \frac{\partial}{\partial u^j} + u^j \frac{\partial}{\partial u^i}\right) u^k = -u^i \delta^k_j + u^j \delta^k_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u^k = \frac{1}{r}\left(\sum_{l=1}^{n} u^l \frac{\partial}{\partial u^l}\right) u^k = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{n} u^l \delta^k_l = \frac{1}{r} u^k;$$

így

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(X_{ij} u^k\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-u^i \delta^k_j + u^j \delta^k_i\right) = \frac{1}{r}\left(-u^i \delta^k_j + u^j \delta^k_i\right),$$

$$X_{ij}\left(\frac{\partial u^k}{\partial r}\right) = X_{ij}\left(\frac{1}{r} u^k\right) = \left(X_{ij} \frac{1}{r}\right) u^k + \frac{1}{r} X_{ij} u^k$$
$$= -\frac{1}{r^2} X_{ij}(r) u^k + \frac{1}{r}\left(-u^i \delta^k_j + u^j \delta^k_i\right),$$

tehát

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right] u^k = \frac{1}{r^2} X_{ij}(r) u^k.$$

Itt azonban $X_{ij}(r) = 0$, ugyanis

$$X_{ij}(r) = X_{ij}\left(\sqrt{r^2}\right) = \frac{1}{2r} X_{ij}\left(r^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2r} X_{ij}\left(\sum_{l=1}^{n} (u^l)^2\right) = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{n} \left(X_{ij} u^l\right) u^l$$

$$= \frac{1}{r}\left(\sum_{l=1}^{n}\left(-u^i\delta^l_j + u^j\delta^l_i\right)u^l\right) = \frac{1}{r}\left(-u^iu^j + u^ju^i\right) = 0.$$

(c) $\underline{\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X_{ij} = -\nabla_{X_{ij}}\frac{\partial}{\partial r}}$, tekintettel

∇ torziómentességére és (b)-re.

Így módon, alkalmazva ∇ metrikusságát,

$$\frac{\partial}{\partial r} g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X_{ij}\right)$$

$$\overset{(a),(c)}{=} -g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_{X_{ij}}\frac{\partial}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} X_{ij}\, g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0.$$

(5) A most levezetett $\frac{\partial}{\partial r} g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) = 0$ reláció értelmében a $g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right)$ függvény konstans a p-ből induló geodetikusok mentén. Vegyük észre, hogy a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\left|g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right)\right| \leq \left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\|_g \left\|X_{ij}\right\|_g = \left\|X_{ij}\right\|_g$$

$$= \left\|-u^i\frac{\partial}{\partial u^j} + u^j\frac{\partial}{\partial u^i}\right\|_g$$

$$\leq |u^i|\left\|\frac{\partial}{\partial u^j}\right\|_g + |u^j|\left\|\frac{\partial}{\partial u^i}\right\|_g$$

$$\leq r\left(\left\|\frac{\partial}{\partial u^j}\right\|_g + \left\|\frac{\partial}{\partial u^i}\right\|_g\right).$$

Itt azonban a $\left\|\frac{\partial}{\partial u^i}\right\|_g$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ függvények korlátosak (ez adódik az $(\exp_p)_*$ leképezés folytonossága alapján; ld. <u>10.9.</u> bizonyítását is), így $r \to 0$ esetén $\left|g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right)\right| = 0$, amiből következik, hogy $g\left(\frac{\partial}{\partial r}, X_{ij}\right) = 0$. □

<u>13.6. Megjegyzés.</u> A Gauss-lemmára adott megfogalmazásunk nem a legszokásosabb; megemlítünk két további, ekvivalens verziót.

(1) Legyen (M, g) Riemann-sokaság, $p \in B$, és válasszunk olyan ε pozitív valós számot, hogy

$$\exp_p : B_\varepsilon(0_p) \subset T_pM \longrightarrow \mathcal{U} \subset M$$

diffeomorfizmus a képére. Ekkor $(\exp)_p$ radiális izometria abban az értelemben, hogy tetszőleges $v \in T_pM$ esetén

$$g_p\left((\exp_p)_*\left(\iota_{0_p}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p\right), (\exp_p)_*(\iota_{0_p}(v))\right) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_p, v\right),$$

ahol $\iota_{0_p} : T_pM \longrightarrow T_{0_p}T_pM$ a kanonikus beágyazás.

Az előző bizonyítás gondos lefordításával látható, hogy éppen ez az, amit igazoltunk.

(2) Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $p \in M$, $\mathcal{U}$ pedig p-középpontú geodetikus gömb. A $\frac{\partial}{\partial r}$ radiális egységvektormező g-ortogonális az $\mathcal{U}$-beli geodetikus gömbfelületekre, és így a p-ből induló geodetikus sugarak merőlegesek az $\mathcal{U}$-beli geodetikus gömbfelületekre.

Definíció. Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sima függvény távolságfüggvény $\mathcal{U}$-n, ha eleget tesz a

$$(*) \qquad \|\operatorname{grad}(r)\|_g = 1$$

egyenletnek. Egy $J \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektormező Jacobi-mező r számára, ha

$$(**) \qquad [\operatorname{grad}(r), J] = 0 .$$

13.7. Megjegyzések. (1) $(*)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet r-re, az ún. Hamilton-Jacobi egyenlet; $(**)$ szintén elsőrendű PDE J-re, amely megoldható a karakterisztikák módszerével.

(2) A fentiekben bevezetett radiális távolság-

természetesen távolságfüggvény a most definiált értelemben, a 13.5. bizonyításában bevezetett $X_{ij} := -u^i \frac{\partial}{\partial u^j} + u^j \frac{\partial}{\partial u^i}$ vektormezők pedig Jacobi-mezők.

(3) Ha r tetszőleges távolságfüggvény egy (M,g) Riemann-sokaság egy $\mathcal{U}$ nyílt halmazán, akkor a $\operatorname{grad} r \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektormezőre – a Gauss-lemma által motiváltan – alkalmazzuk a $\frac{\partial}{\partial r}$ vagy ∂_r jelölést is.

<u>Definíció.</u> Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $p,q \in M$. Egy p-t q-val összekötő $\gamma : [a,b] \to M$ szakaszonként sima görbét <u>szakasznak</u> nevezünk, ha $d_g(p,q) = L_g(\gamma)$, és γ paraméterezése az ívhosszal arányos, vagyis $\|\dot\gamma\|_g$ konstans azon a halmazon, amelyen γ sima.

<u>13.8. Állítás.</u> Ha (M,g) Riemann-sokaság, $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz és $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény, akkor $\operatorname{grad}(r)$ integrálgörbéi szakaszok $\mathcal{U}$-ban.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $p,q \in \mathcal{U}$ és $\gamma \in \Omega(p,q)$; $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(b)$. Ekkor

$$L_g(\gamma) = \int_0^b \|\dot\gamma\|_g = \int_0^b 1 \cdot \|\dot\gamma\|_g = \int_0^b \|\operatorname{grad}(r)\circ\gamma\|_g \|\dot\gamma\|_g$$

$$\overset{(1)}{\geq} \int_0^b |g(\operatorname{grad}(r)\circ\gamma, \dot\gamma)| \geq \left|\int_0^b g(\operatorname{grad}(r)\circ\gamma, \dot\gamma)\right|$$

$$= \left|\int_0^b dr\circ\dot\gamma\right| \overset{(2)}{=} \left|\int_0^b (r\circ\gamma)'\right| = |r(\gamma(b)) - r(\gamma(0))|$$

$$= |r(q) - r(p)|,$$

az (1)-gyel jelölt lépésben a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget alkalmazva, a (2)-vel jelöltben pedig a következő észrevételt:

Tetszőleges $t \in [0,b]$ esetén

$$d\tau \circ \dot{\gamma}(t) = d\tau\left(\dot{\gamma}(t)\right) = \dot{\gamma}(t)(\tau) = (\gamma_*)_t\left(\frac{d}{de^1}\right)_t(\tau)$$

$$= \left(\frac{d}{de^1}\right)_t(\tau \circ \gamma) = (\tau \circ \gamma)'(t)$$

(ahol most $e^1 = 1_{\mathbb{R}}$).

Ha γ gyanánt speciálisan $\mathrm{grad}(\tau)$ p-n átmenő γ_0 integrálgörbéjét választjuk, akkor $\mathrm{grad}(\tau) \circ \gamma_0 = \dot{\gamma}_0$, és így (1)-ben egyenlőség áll, továbbá $d\tau \circ \dot{\gamma}_0 = \|\dot{\gamma}_0\|_g^2 > 0$; azt kapjuk tehát, hogy $L_g(\gamma_0) = |\tau(q) - \tau(p)|$. Beláttuk ezzel, hogy

$$\left.\begin{array}{l}\text{ha } \gamma_0 \in \Omega(p,q) \text{ \underline{integrálgörbéje} } \mathrm{grad}(\tau)\text{-nak,}\\ \text{akkor } \quad d_g(p,q) \le L_g(\gamma_0) = |\tau(q) - \tau(p)|.\end{array}\right\} \quad (*)$$

Ugyanakkor számolásaink szerint

$\underline{\text{bármely}}$ $\gamma \in \Omega(p,q)$ esetén $|\tau(q) - \tau(p)| \le L_g(\gamma)$.

Mivel $d_g(p,q) := \inf\limits_{\gamma \in \Omega(p,q)} L_g(\gamma)$, így azt kapjuk, hogy

$$|\tau(q) - \tau(p)| \le d_g(p,q). \qquad (**)$$

$(*)$ és $(**)$ alapján

$$d_g(p,q) \le L_g(\gamma_0) \le d_g(p,q),$$

következésképpen $L_g(\gamma_0) = d_g(p,q)$, tehát γ_0 <u>szakasz</u> M-ben. $\square$

<u>13.9. Megjegyzés.</u> Tekintsünk egy (M,g) Riemann-sokaságot. Kiválasztva M-nek egy p és egy q pontját, legyen

$$\Omega(p,q) := \left\{ \gamma : [0,1] \longrightarrow M \;\middle|\; \begin{array}{l}\gamma \text{ szakaszonként sima,}\\ \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q\end{array} \right\}.$$

A következőkben az

$$L_g : \Omega(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \gamma \longmapsto L_g(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|$$

ívhossz-funkcionált fogjuk vizsgálni. Ennek minimumai, ha léteznek, „pre-szakaszok": minimális ívhosszal rendelkező görbék, melyeknek „korrekt" – konstans pályasebességű – paraméterezése azonban nincs garantálva. A problémát az okozza, hogy a funkcionális paramétertranszformációval szemben invariáns, s ezért a minimumait – amennyiben léteznek – nem egy rögzített paraméterezéssel kapjuk. A nehézség – igaz, a geometriai szemlélet bizonyos sérelme árán – áthidalható, ha az ívhossz funkcionál helyett az

$$E_g : \Omega(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \gamma \longmapsto E_g(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\gamma}\|_g^2$$

ún. <u>energia-funkcionált</u> tekintjük. ($E_g(\gamma)$ úgy interpretálható, mint a γ által reprezentált mozgás pályasebességéből származó kinetikus energia.) Az áttérést azt teszi lehetővé, hogy a két funkcionál közös minimumokkal rendelkezik.

<u>13.10. Állítás.</u> Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $p,q \in M$. Ha $\sigma \in \Omega(p,q)$ konstans pályasebességű görbe és minimalizálja az $L_g : \Omega(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}$ ívhossz-funkcionált, akkor σ minimalizálja az $E_g : \Omega(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}$ energia-funkcionált is. Megfordítva, ha $\sigma \in \Omega(p,q)$ minimalizálja E_g-t, akkor minimalizálja L_g-t is.

Bizonyítás. (1) Alkalmazva a $[0,1]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények $C[0,1]$ vektorterében az

$$\langle f, h\rangle := \int_0^1 fh \quad ; \quad f, h \in C[0,1]$$

előírással értelmezett skaláris szorzatra a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy tetszőleges $\gamma \in \Omega(p,q)$ esetén

$$L_g(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma\|_g = \int_0^1 \|\dot\gamma\|_g \cdot 1 \overset{!}{\leq} \sqrt{\int_0^1 \|\dot\gamma\|_g^2}\sqrt{\int_0^1 1^2}$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \|\dot\gamma\|_g^2} = \sqrt{2\, E_g(\gamma)} ,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\|\dot\gamma\|_g = \lambda 1$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto 1(t) := 1$. Vagyis: egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha γ pályasebessége mindazon helyeken konstans, ahol értelmezve van.

(2) Tegyük fel, hogy $\sigma \in \Omega(p,q)$ konstans pályasebességű görbe, amely minimalizálja L_g-t, és legyen $\gamma \in \Omega(p,q)$. Ekkor

$$E_g(\sigma) = \frac{1}{2}(L_g(\sigma))^2 \leq \frac{1}{2}(L_g(\gamma))^2 \overset{(1)}{\leq} E_g(\gamma) ,$$

tehát σ az E_g funkcionált is minimalizálja.

(3) Megfordítva, legyen $\sigma \in \Omega(p,q)$ az E_g funkcionált minimalizáló görbe, és legyen $\gamma \in \Omega(p,q)$ tetszőleges. Ha γ nem konstans pályasebességű, akkor $L_g(\gamma)$ megváltozása nélkül átparaméterezhetjük egy olyan $\bar\gamma$ konstans pályasebességű görbévé, amely absztrakt folytonos és majdnem mindenütt konstans pályasebességű. Így

$$L_g(\sigma) \overset{(1)}{\leq} \sqrt{2\, E_g(\sigma)} \leq \sqrt{2\, E_g(\bar\gamma)} \overset{(1)}{=} L_g(\bar\gamma) = L_g(\gamma) ,$$

amivel beláttuk, hogy σ minimalizálja L_g-t. $\square$

Megjegyzés. Emlékeztetünk az abszolút folytonosság fogalmára, amely erősebb, mint az egyenletes folytonosságé, és lényeges a Lebesgue-integrál elméletében.

Legyenek a, b valós számok, $a < b$. Azt mondjuk, hogy egy $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos $[a,b]$-n, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy ha $(]a_i, b_i[)_{i=1}^{n}$ $[a,b]$ páronként diszjunkt részintervallumainak olyan családja, amelyre $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ teljesül, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Az egyenletes folytonosság definícióját az $n=1$ esetben kapjuk vissza. Megmutatható, hogy ha $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ abszolút folytonos, akkor f korlátos változású $[a,b]$-n: ha

$$P := \{a =: t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

egy felosztása $[a,b]$-nek,

$$V(P,f) := \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

és

$$V_a^b f := \sup\{V(P,f) \in \mathbb{R} \mid P \text{ felosztása } [a,b]\text{-nek}\},$$

akkor $V_a^b f < \infty$.

13.11. Megengedett görbék és görbecsaládok, variáció

Vegyünk alapul egy M sokaságot, és legyenek a, b valós számok; $a < b$.

(1) Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ folytonos leképezés szakaszonként reguláris görbeszakasz, ha $[a,b]$-nek van olyan $a_0 := a < a_1 < \dots < a_k = b$ véges felosztása, hogy $\gamma \restriction [a_{i-1}, a_i]$ reguláris görbe, minden $i \in \{1, \dots, k-1\}$ esetén. γ-ra ilyenkor használjuk a rövidebb megengedett görbeszakasz el-

nevezést is. Megállapodunk abban, hogy megengedetteknek tekintjük a $\gamma : \{a\} \subset \mathbb{R} \to M$, $a \mapsto \gamma(a) = p$ alakú konstans leképezéseket is. Egy $\gamma : [a,b] \to M$ megengedett görbe az $a_i \in [a,b]$ törésihelyek mindegyikében rendelkezik jól definiált, nem-zérus egyoldali sebességvektorokkal (aszerint, hogy „melyik oldalról tartunk a_i-hez"), amelyek nem kötelesek egybeesni. Ezekre az egyoldali sebességekre a

$$\dot{\gamma}(a_i^-) := \lim_{t \nearrow a_i} \dot{\gamma}(t) \quad \text{(bal oldali határérték)},$$

ill. a

$$\dot{\gamma}(a_i^+) := \lim_{t \searrow a_i} \dot{\gamma}(t) \quad \text{(jobb oldali határérték)}$$

jelöléseket használjuk.

(2) Tegyük fel, hogy $\gamma : [a,b] \to M$ megengedett görbe. Egy $X : [a,b] \to TM$ folytonos leképezést <u>γ-menti szakaszonként sima vektormezőnek</u> nevezünk, ha teljesülnek a következők:

(i) $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$, minden $t \in [a,b]$ esetén;

(ii) $[a,b]$-nek van olyan – az (1)-belinél esetleg finomabb – $a =: \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_m = b$ felosztása, hogy $X \restriction [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i]$ $(i \in \{1, \dots, m\})$ sima.

Amennyiben M-en egy kovariáns deriválás is adva van, úgy egy megengedett görbe mentén tekintett szakaszonként sima vektormezőnek a görbementi kovariáns deriváltját azon részintervallumok fölött értelmezzük, amelyeken teljesül a simaság. Egy $v \in T_{\gamma(a)}M$ vektor párhuzamos eltolását úgy hajtjuk végre, hogy először eltolunk $\gamma \restriction [a, a_1]$ mentén, így kapunk egy $v_{(1)}$ vektort, majd ezt eltoljuk $\gamma \restriction [a_1, a_2]$ mentén, és így tovább.

(3) Legyen ε pozitív valós szám. Egy

$$\Gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow M$$

folytonos leképezést <u>megengedett görbecsaládnak</u> mondunk, ha eleget tesz a következőknek:

(i) $[a,b]$-nek van olyan $a =: a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ felosztása, hogy $]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a_{i-1}, a_i]$ $(i \in \{1, \dots, k\})$ téglalapok fölött a Γ leképezés sima;

(ii) tetszőlegesen rögzített $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ esetén a

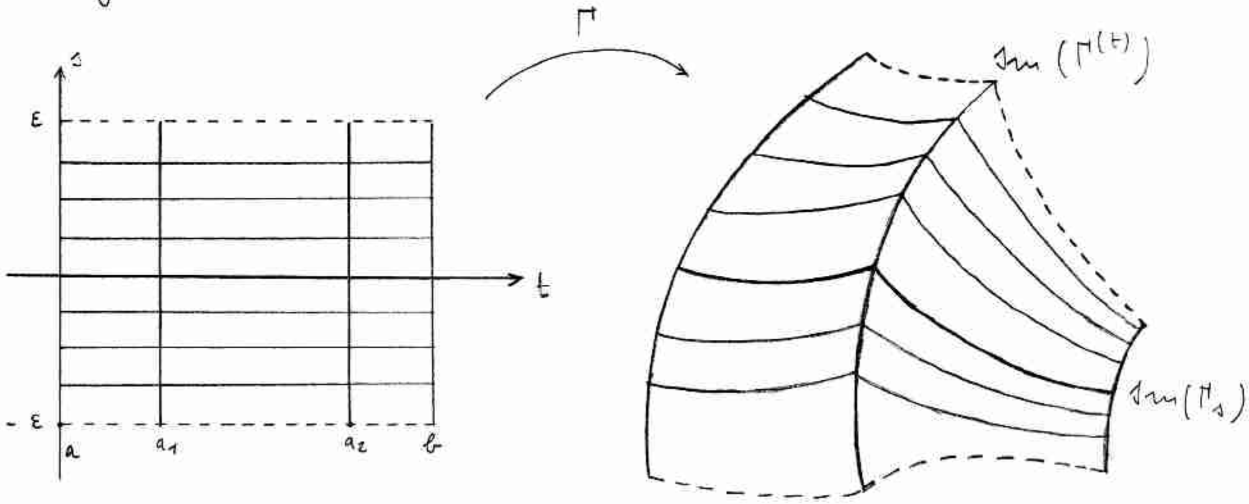
$$\Gamma_s : [a,b] \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$$

leképezés megengedett görbe.

A Γ_s görbéket a görbecsalád <u>fögörbéinek</u>, rögzített $t \in [a,b]$ mellett a

$$\Gamma^{(t)} :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M, \quad s \longmapsto \Gamma^{(t)}(s) := \Gamma(s,t)$$

görbéket a görbecsalád <u>transzverzális görbéinek</u> hívjuk.



A transzverzális görbék minden $t \in [a,b]$ esetén sima leképezései $]-\varepsilon, \varepsilon[$-nak M-be, míg a fögörbék általában csak szakaszonként reguláris\-ak.

(4) Tegyük fel, hogy $\Gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow M$ megengedett görbecsalád. Egy

$$X :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow TM$$

folytonos leképezést <u>Γ-menti vektormezőnek</u>

nevezünk, ha

(i) bármely $(s,t) \in]-\varepsilon,\varepsilon[\times [a,b]$ esetén

$$X(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)} M \; ;$$

(ii) megadható az $[a,b]$ zárt intervallumnak olyan – a (2)-belinél esetleg finomabb – $a =: \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_m = b$ felosztása, hogy

$$X \upharpoonright]-\varepsilon,\varepsilon[\times [\tilde{a}_{i-1}, \tilde{a}_i] \quad (i \in \{1,\dots,m\}) \text{ sima.}$$

A Γ megengedett görbecsalád <u>parciális sebességei</u> a

$$(\partial_1 \Gamma)(s,t) := \dot{\overline{\Gamma^{(t)}}}(s) \quad \text{és} \quad (\partial_2 \Gamma)(s,t) := \dot{\Gamma}_s(t)$$

leképezések. Ha Γ sima, akkor ezek Γ-menti vektormezők, mégpedig $(\partial_1\Gamma)(\cdot,t)$ a $\Gamma^{(t)}$ transzverzális görbe sebességvektormezője, $(\partial_2\Gamma)(s,\cdot)$ pedig a Γ_s főgörbe sebességvektormezője. Amennyiben Γ nem sima, úgy $\partial_2\Gamma$ a törési helyeken általában nem folytonos. Ha M-en adva van egy ∇ kovariáns deriválás is, akkor X-nek képezhetők a görbementi deriváltjai mind a főgörbék, mind a transzverzális görbék mentén (az előbbi esetben azokon a helyeken, ahol teljesül a differenciálhatóság). A főgörbék menti kovariáns deriválást ∇_2-vel, a transzverzális görbék menti kovariáns deriválást ∇_1-gyel jelöljük.

(5) Legyen $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ megengedett görbe. γ egy <u>variációján</u> olyan $\Gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow M$ megengedett görbecsaládot értünk, amelyre teljesül, hogy

$$\underline{\Gamma_0(t) = \gamma(t), \text{ minden } t \in [a,b] \text{ esetén}} \;,$$

azaz a $0 \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ paraméterhez tartozó főgörbe az adott görbe. Amennyiben, ráadásul, minden $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ esetén

$$\Gamma_s(a) = \gamma(a) \quad \text{és} \quad \Gamma_s(b) = \gamma(b),$$

úgy rögzített végpontú vagy szűkebb értelemben vett variációról beszélünk.

Ha Γ variációja γ-nak, akkor az

$$X : t \in [a,b] \longmapsto X(t) := (\partial_1 \Gamma)(0,t) := \dot{\overline{\Gamma^{(t)}}}(0)$$

γ-menti vektormezőt γ variációs vektormezőjének nevezzük.

13.12. Állítás (a szimmetria-lemma). Legyen ∇ torziómentes kovariáns deriválás az M sokaságon. Ha

$$\Gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow M$$

megengedett görbecsalád, akkor minden olyan $]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a_{i-1}, a_i]$ téglalapon $(a = a_0 < \dots < a_{i-1} < a_i < \dots < b)$, amelyen Γ sima, érvényes a

$$\nabla_1 \partial_2 \Gamma = \nabla_2 \partial_1 \Gamma$$

reláció.

Bizonyítás. Válasszunk ki egy $(s_0, t_0) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b]$ pontot. Mivel a kérdés lokális, elegendő a felírt reláció teljesülését egy, a $\Gamma(s_0, t_0)$ pont körüli $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképen ellenőrizni. Tekintsük a Γ lekép ezé

$$\Gamma^i := u^i \circ \Gamma \; : \;]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; i \in \{1, \dots, n\}$$

komponensfüggvényeit. Ezeknek képezhetők a $D_1 \Gamma^i$, $D_2 \Gamma^i$ „hagyományos" parciális deriváltjai. Ha (s,t) az (s_0, t_0) pont elegendően kicsiny környezetébe esik, akkor

$$(\partial_2 \Gamma)(s,t) := (\dot{\Gamma}_s)(t) = \sum_{i=1}^n (D_2 \Gamma^i)(s,t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\Gamma(s,t)}.$$

Legyenek Γ^i_{jk} $(i,j,k \in \{1, \dots, n\})$ ∇ Christoffel-

szimbólumai a kijelölt térképre vonatkozóan.
A görbementi kovariáns derivált korábban levezetett lokális alakját (ld. pl. 9.3. bizonyítása, (*)) használva kapjuk, hogy

$$\nabla_1(\partial_2\Gamma)(s,t)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(D_1D_2\Gamma^i+\sum_{j,k=1}^{n}(\Gamma^i_{jk}\circ\Gamma)D_2\Gamma^jD_1\Gamma^k\big)\Big)(s,t)\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big)_{\Gamma(s,t)},$$

$$\nabla_2(\partial_1\Gamma)(s,t)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(D_2D_1\Gamma^i+\sum_{j,k=1}^{n}(\Gamma^i_{jk}\circ\Gamma)D_1\Gamma^jD_2\Gamma^k\big)\Big)(s,t)\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}\Big)_{\Gamma(s,t)}$$

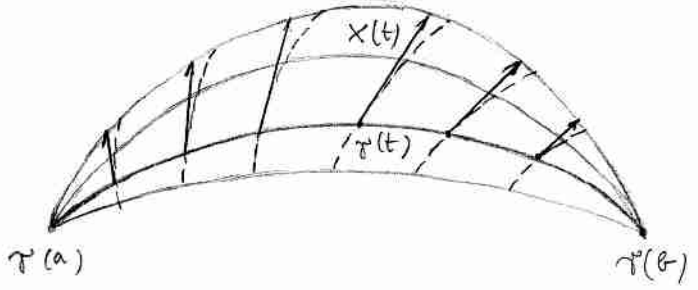
A második relációban $j\leftrightarrow k$ indexcserét hajtva végre, a torziómentességből adódó $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$ szimmetria-tulajdonság, valamint a D_1 és a D_2 operátor felcserélhetősége folytán kapjuk, hogy $\nabla_1(\partial_2\Gamma)=\nabla_2(\partial_1\Gamma)$. □

<u>13. 13. Lemma.</u> Tegyük fel, hogy (M,∇) affin-összefüggő sokaság. Ha $\gamma:[a,b]\to M$ megengedett görbe, $X:[a,b]\to TM$ pedig γ-menti vektormező, akkor létezik olyan variációja γ-nak, amelynek X a variációs vektormezője. Amennyiben $X(a)=X(b)=0$, úgy a variáció választható rögzített végpontúnak.

<u>Bizonyítás.</u> $[a,b]$ kompaktsága miatt megadható olyan $\varepsilon>0$ valós szám, hogy a

$$\Gamma:\,]-\varepsilon,\varepsilon[\,\times[a,b]\to M,\ (s,t)\mapsto\Gamma(s,t):=\exp(sX(t))$$

leképezés értelmezve van, folytonos, és sima mindazon részintervallumokon, amelyeken X sima. Az exponenciális leképezés tulajdonságai alapján következik, hogy ekkor Γ variációs vektormezője az X vektormező. Ha $X(a)=X(b)=0$, akkor $\Gamma(s,a)=\gamma(a)$, $\Gamma(s,b)=\gamma(b)$. □



Minden γ-menti vektormező variációs vektormezője γ egy variációjának

---

13.14. Állítás (az energia első variációs formulája). Legyen (M,g) Riemann-sokaság, ellátva a ∇ Levi-Civitá-deriválással. Tekintsünk egy $\gamma : [a,b] \to M$ megengedett görbét, amely sima és reguláris az $[a,b]$ intervallum egy $a_0 := a < a_1 < \dots < a_k = b$ felosztásának részintervallumain. Legyen

$$\dot\gamma(a_i^+) := \lim_{\substack{t\to a_i\\ t>a_i}} \dot\gamma(t), \quad \dot\gamma(a_i^-) := \lim_{\substack{t\to a_i\\ t<a_i}} \dot\gamma(t), \quad \Delta\dot\gamma(a_i) := \dot\gamma(a_i^-) - \dot\gamma(a_i^+);$$

$$i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Legyen

$$H : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto H(s,t)$$

variációja γ-nak (és így $H(0,t) = \gamma(t)$, minden $t \in [a,b]$-re). Vezessük be a korábbiaknak megfelelően a

$$H_s := H(s,\cdot) \quad (s \text{ rögzített}) \text{ főgörbéket}$$

és a

$$H^{(t)} := H(\cdot, t) \quad (t \text{ rögzített}) \text{ transzverzális görbéket.}$$

Jelentse X γ variációs vektormezőjét; ekkor

$$X : [a,b] \to TM, \quad t \mapsto X(t) := \dot{\overline{H^{(t)}}}(0).$$

Ha

$$E : \,]-\varepsilon,\varepsilon[\, \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto E(s) := E_g(H_s),$$

akkor E differenciálható és érvényes az

$$\boxed{E'(0) = g(X, \dot\gamma)\Big|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g(X(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)) - \int_a^b g(X, \nabla_2\dot\gamma)}$$

formula. Amennyiben a variáció rögzített végpontú, úgy ez az

$$\boxed{E'(0) = \sum_{i=1}^{k-1} g(X(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)) - \int_a^b g(X, \nabla_2\dot\gamma)}$$

alakot ölti.

<u>Bizonyítás.</u> Tetszőleges $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ esetén

$$E(s) := E_g(\Gamma_s) := \frac{1}{2}\int_a^b g(\dot\Gamma_s, \dot\Gamma_s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\dot\Gamma_s, \dot\Gamma_s),$$

amiből E differenciálhatósága kiolvasható, és világos, hogy az „integrál alatti differenciálás" feltétele is teljesül. Így egy $[a_{i-1}, a_i]$ részintervallumon

$$\begin{aligned}
(E \restriction [a_{i-1}, a_i])'(0) &= \left(s \longmapsto \frac{1}{2}\int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\dot\Gamma_s, \dot\Gamma_s)\right)'(0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{a_{i-1}}^{a_i} (s \longmapsto g(\dot\Gamma_s, \dot\Gamma_s))'(0) \\
&\overset{12.3(3)}{=} \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\nabla_1\dot\Gamma_0, \dot\Gamma_0) \\
&\overset{\text{feltétel}}{=} \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\nabla_1\partial_2\Gamma(0,\cdot), \dot\gamma) \\
&\overset{13.12.}{=} \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\nabla_2\partial_1\Gamma(0,\cdot), \dot\gamma) = \\
&\overset{12.3(3)}{=} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (t \longmapsto g(\partial_1\Gamma(0,\cdot), \dot\gamma))' \\
&\quad - \int_{a_{i-1}}^{a_i} g(\partial_1\Gamma(0,\cdot), \nabla_2\dot\gamma)
\end{aligned}$$

$$= g\left(X(a_i), \dot\gamma(a_i^-)\right) - g\left(X(a_{i-1}), \dot\gamma(a_{i-1}^+)\right) -$$
$$- \int_{a_{i-1}}^{a_i} g\left(X, \nabla_2 \dot\gamma\right).$$

Összegezve i-re 1-től k-ig azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \left(g\left(X(a_i), \dot\gamma(a_i^-)\right) - g\left(X(a_{i-1}), \dot\gamma(a_{i-1}^+)\right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(X(a_1), \underline{\dot\gamma(a_1^-)}\right) - \underline{g\left(X(a), \dot\gamma(a)\right)} \\
&+ g\left(X(a_2), \dot\gamma(a_2^-)\right) - g\left(X(a_1), \underline{\dot\gamma(a_1^+)}\right) + \\
&+ g\left(X(a_3), \dot\gamma(a_3^-)\right) - g\left(X(a_2), \dot\gamma(a_2^+)\right) + \\
&\quad \cdots\cdots \\
&+ g\left(X(a_{k-1}), \underline{\dot\gamma(a_{k-1}^-)}\right) - g\left(X(a_{k-2}), \dot\gamma(a_{k-2}^+)\right) + \\
&+ \underline{g\left(X(b), \dot\gamma(b)\right)} - g\left(X(a_{k-1}), \underline{\dot\gamma(a_{k-1}^+)}\right)
\end{aligned}$$

$$= g(X, \dot\gamma)\Big|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g\left(X(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)\right),$$

tehát

$$E'(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \left(E \upharpoonright [a_{i-1}, a_i]\right)'(0)$$
$$= g(X, \dot\gamma)\Big|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g\left(X(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)\right) - \int_a^b g\left(X, \nabla_2 \dot\gamma\right),$$

amint állítottuk. Ha a variáció rögzített végpontú, akkor

$$g(X, \dot\gamma)\Big|_a^b = g\left(X(b), \dot\gamma(b)\right) - g\left(X(a), \dot\gamma(a)\right) =$$
$$= g\left(0, \dot\gamma(b)\right) - g\left(0, \dot\gamma(a)\right) = 0,$$

ebben az esetben tehát a második formulát kapjuk. □

13.15. Tétel. Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $p, q \in M$;
$$\Omega(p,q) := \left\{ \gamma : [a,b] \to \;\middle|\; \begin{matrix} \gamma \text{ szakaszonként sima}, \\ \gamma(a) = p, \ \gamma(b) = q \end{matrix} \right\}.$$

Ha $\gamma \in \Omega(p,q)$ lokális minimuma az
$$E_g : \Omega(p,q) \to \mathbb{R}, \quad c \mapsto E_g(c) := \frac{1}{2}\int_a^b \|\dot c\|_g^2$$
energia-funkcionálnak, akkor γ sima geodetikusa (M,g)-nek.

Bizonyítás. (1) A feltétel garantálja, hogy γ bármely rögzített végpontú
$$\Gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \to M$$
variációja esetén $E'(0) = 0$, ahol
$$E :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}, \quad s \mapsto E(s) := E_g(\Gamma_s);$$
$\Gamma_s := \Gamma(s,\cdot) : t \in [a,b] \mapsto \Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$. További meggondolásainkban a „trükk" az lesz, hogy alkalmas variációkat adunk meg.

(2) Tegyük fel, hogy
$$X : [a,b] \to M, \quad t \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}M$$
tetszőleges γ-menti vektormező. Tudjuk (13.13.), hogy van olyan Γ variációja γ-nak, amelynek X a variációs vektormezője:
$$X(t) = \dot{\overline{\Gamma^{(t)}}}(0); \quad \Gamma^{(t)} := \Gamma(\cdot, t), \quad t \in [a,b].$$
Ilyen variációhoz jutunk, ha előírjuk, hogy a $\Gamma^{(t)} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ transzverzális görbék legyenek geodetikusok, melyekre
$$\dot{\overline{\Gamma^{(t)}}}(0) = X(t).$$
Mivel a geodetikusok „simán függnek a kezdeti feltételektől", ez a variáció sima lesz, ha X sima vektormező, és rögzített végpontú, ha megkövetelјük, hogy $X(a) = X(b) = 0$. Ilyen

variációt alkalmazva, az első variációs formula az
$$E'(0) = -\int_a^b g\left(\nabla_\gamma \dot\gamma, X\right) + \sum_{i=1}^{k-1} g\left(X(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)\right)$$

alakot ölti (mivel $\nabla_2 \dot\gamma = \nabla_\gamma \dot\gamma$).

(3) Most tovább specifikáljuk az X vektormezőt: az
$$X := \lambda \nabla_\gamma \dot\gamma$$
választással élünk, ahol $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely eltűnik az $a_i \in [a,b]$, $i \in \{0,\dots,k\}$ törésipontokban, egyébként pozitív értékű. Ekkor
$$0 = E'(0) = -\int_a^b g\left(\nabla_\gamma \dot\gamma, \lambda \nabla_\gamma \dot\gamma\right) = -\int_a^b \lambda \, \|\nabla_\gamma \dot\gamma\|_g^2 .$$

Mivel $\lambda(t) > 0$, ha $(\nabla_\gamma \dot\gamma)(t)$ definiálva van, innen $\|\nabla_\gamma \dot\gamma\|_g = 0$ és így $\nabla_\gamma \dot\gamma = 0$ következik, amivel igazoltuk, hogy <u>γ szakaszonként sima geodetikus.</u>

(4) Válasszunk végül olyan X variációs vektormezőt, amelyre
$$X(a_i) = \Delta\dot\gamma(a_i) := \dot\gamma(a_i^-) - \dot\gamma(a_i^+); \quad X(a) = X(b) = 0$$
teljesül, egyébként tetszőleges. Ekkor ((3) figyelembevételével)
$$0 = E'(0) = \sum_{i=1}^{k-1} g\left(\Delta\dot\gamma(a_i), \Delta\dot\gamma(a_i)\right)$$
$$= -\sum_{i=1}^{k-1} \|\dot\gamma(a_i^-) - \dot\gamma(a_i^+)\|^2 ,$$
és így $\dot\gamma(a_i^-) = \dot\gamma(a_i^+)$, $i \in \{1,\dots,k-1\}$. Ez azt jelenti, hogy a γ szakaszonként sima geodetikus ugyanazzal a bal, ill. jobb oldali sebességgel rendelkezik azokon a helyeken, ahol potenciálisan megtörik. Ebből a geodetikusok egyértelműsége miatt következik, hogy γ sima. $\square$

<u>13.16. Következmény</u> (<u>a szakaszok jellemzése</u>). <u>Egy Riemann-sokaság minden szakasza geodetikus.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Ez a tétel alapján adódik abból, hogy a szakaszok olyan konstans pályasebességű görbék, amelyek minimalizálják az ívhossz-funkcionált, és így – <u>13.10.</u> miatt – az energia-funkcionált is. □

<u>Megjegyzés.</u> A Riemann-sokaságnak tekintett $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ euklideszi vektortér geodetikusai minimalizáló görbéi az ívhossz-funkcionálnak, ugyanis integrálgörbéi a globálisan definiált

$$\tau : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \tau(p) := \langle p, v \rangle$$

távolságfüggvényeknek, ahol $v \in \mathbb{R}^n$ rögzített egységvektor, és ezek az integrálgörbék szakaszok (<u>13.8.</u>).

Ugyanakkor az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér euklideszi struktúrája által indukált Riemann-struktúrával ellátott $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ egységgömb π-nél nagyobb ívhosszúságú geodetikusai nem lehetnek lokálisan minimalizáló görbék: mivel minden ilyen geodetikus egy főkörös részre, a főkörre vonatkozó komplementere π-nél kisebb ívhosszúságú geodetikus. <u>13.15.</u> bizonyításából az is kiderül, hogy egy $\gamma \in \Omega(p,q)$ <u>geodetikus</u> mindig <u>kritikus pontja</u> az $E_g : \Omega(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}$ energia-funkcionálnak abban az értelemben, hogy γ bármely $\Gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times [a,b] \longrightarrow M$ rögzített végpontú variációja esetén az $E : s \in]-\varepsilon, \varepsilon[\longmapsto E(s) := L_g(\Gamma_s) \in \mathbb{R}$ függvényre $E'(0) = 0$ teljesül. Annak megvizsgálása azonban, hogy a geodetikusok mikor válnak egyben minimalizáló görbékké, nem kevés további munkát igényel.

14. A Riemann-féle görbületi tenzor. Ricci-görbület, skalárgörbület

14.1. Lemma. Tegyük fel, hogy K egységelemes gyűrű, amelyben $6\alpha \neq 0$, ha $\alpha \neq 0$. Legyen V K-modulus, és tegyük fel, hogy

$$B : V \times V \times V \times V \longrightarrow K$$

olyan 4-lineáris függvény, amely eleget tesz a következő azonosságoknak: tetszőleges $X, Y, Z, U \in V$ esetén

(1) $B(X,Y,Z,U) = -B(Y,X,Z,U)$;

(2) $B(X,Y,Z,U) = -B(X,Y,U,Z)$;

(3) $B(X,Y,Z,U) + B(Y,Z,X,U) + B(Z,X,Y,U) = 0$.

Ekkor teljesül, hogy

(4) $B(X,Y,Z,U) = B(Z,U,X,Y)$.

Amennyiben (1)–(3) mellett B az

(5) $B(X,Y,Y,X) = 0 \quad (X, Y \in V)$

feltételnek is eleget tesz, úgy $B = 0$.

Bizonyítás. A (3) azonosság négyszeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$B(X,Y,Z,U) + \underline{B(Y,Z,X,U)} + B(Z,X,Y,U) = 0,$$
$$\underline{B(Y,Z,U,X)} + \underline{B(Z,U,Y,X)} + B(U,Y,Z,X) = 0,$$
$$\underline{B(Z,U,X,Y)} + \underline{B(U,X,Z,Y)} + B(X,Z,U,Y) = 0,$$
$$\underline{B(U,X,Y,Z)} + B(X,Y,U,Z) + B(Y,U,X,Z) = 0.$$

Összeadjuk ezt a négy relációt. Ekkor a 3. és a 4. változóban a (2) feltétel értelmében fennálló ferdeszimmetria miatt 4×2 tag, mégpedig az első két oszlopban szereplő tagok, páronként kiejtik egymást. Így azt kapjuk,

$$B(Z,X,Y,U) + B(U,Y,Z,X) + B(X,Z,U,Y) + B(Y,U,X,Z) = 0 .$$

És

$$B(Z,X,Y,U) \overset{(1)}{=} -B(X,Z,Y,U) \overset{(2)}{=} B(X,Z,U,Y) ,$$
$$B(U,Y,Z,X) \overset{(1)}{=} -B(Y,U,Z,X) \overset{(2)}{=} B(Y,U,X,Z) ,$$

így az iménti összefüggés a

$$2B(X,Z,U,Y) + 2B(U,Y,Z,X) = 0$$

relációra redukálódik, ahonnan a gyűrűre előírt feltétel és (1) alapján

$$B(Z,X,U,Y) = B(U,Y,Z,X)$$

adódik, érvényes tehát a „párok szerinti szimmetriát" kifejező (4) azonosság.

Tegyük fel ezek után, hogy (1)–(3) mellett B (5)-nek is eleget tesz. A következő megállapításokat tehetjük:

(a) Tetszőleges $X, Y, U \in V$ esetén

$$B(X,Y,X,U) \overset{(4)}{=} B(X,U,X,Y) .$$

Innen kiolvasható, hogy rögzített $X \in V$ mellett az

$$(Y,U) \in V \times V \longmapsto B(X,Y,X,U) \in K$$

függvény szimmetrikus K-bilineáris függvény.

(b) Tetszőleges $X, Y \in V$ esetén

$$B(X,Y,X,Y) \overset{(2)}{=} -B(X,Y,Y,X) \overset{(5)}{=} 0 .$$

Így tetszőleges $X, Y, U \in V$-re azt kapjuk, hogy

$$0 = B(X, Y+U, X, Y+U) = B(X,Y,X,Y+U) +$$
$$+ B(X,U,X,Y+U) = B(X,Y,X,Y) + B(X,Y,X,U) +$$
$$+ B(X,U,X,Y) + B(X,U,X,U) =$$
$$= B(X,Y,X,U) + B(X,U,X,Y) \overset{(a)}{=} 2B(X,Y,X,U) .$$

Mivel a K-ra előírt feltétel miatt $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ esetén $2\alpha \neq 0$, innen

$B(X,Y,X,U)=0$ következik. (1)-ből és (2)-ből közvetlenül adódik, hogy $B(X,X,Y,U)=B(Y,U,X,X)=0$. $B(X,Y,X,U)=0$ miatt (1) alapján $B(Y,X,X,U)=0$, ebből pedig (2) alapján $B(Y,X,U,X)=0$ következik.

Beláttuk ily módon, hogy B <u>alternáló</u>: minden olyan vektornégyesen 0-t vesz föl, amelynek van két egyenlő tagja. Ebből következik (App. 2.3.), hogy B <u>ferdeszimmetrikus</u>. Ezt alkalmazva az alább (*)-gal jelölt lépésben kapjuk, hogy tetszőleges $X,Y,Z,U\in V$ esetén

$$0 \overset{(3)}{=} B(X,Y,Z,U)+B(Y,Z,X,U)+B(Z,X,Y,U)$$
$$= 3\,B(X,Y,Z,U),$$

amiből, felhasználva, hogy K nem 3 karakterisztikájú, $B(X,Y,Z,U)=0$, és így B eltűnése következik. □

<u>Definíció.</u> Legyen (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, és jelentse R a Levi-Civita deriválás görbületi tenzorát. Az

$$R^\flat(X,Y,Z,U) := g(R(X,Y)Z,U)\ ;\ X,Y,Z,U\in\mathfrak{X}(M)$$

negyedrendű kovariáns tenzort (M,g) <u>Riemann-féle görbületi tenzorának</u> nevezzük.

<u>Megjegyzés.</u> A klasszikus tenzorkalkulus nyelvén, az $R^\flat\in\mathcal{T}^0_4(M)$ tenzor az $R\in\mathcal{T}^1_3(M)$ tenzorból a „kontravariáns index leszállításával" keletkezik. Valóban, jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképet, s legyenek g, R és $R^\flat$ erre vonatkozó komponensei rendre a

$g_{ij}\,,\ R_{ijk}{}^{\ell}\,,\ R_{ijk\ell}\quad (i,j,k,\ell\in\{1,\dots,n\})$
függvények. Ekkor
$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right),\quad \sum_{\ell=1}^{n} R_{ijk}{}^{\ell}\frac{\partial}{\partial u^\ell}=R\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^\ell},$$

és így
$$\begin{aligned}R_{ijk\ell} &:= g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^\ell}\right)\\ &= g\left(\sum_{m=1}^{n} R_{ijk}{}^{m}\frac{\partial}{\partial u^m},\frac{\partial}{\partial u^\ell}\right)=\\ &=\sum_{m=1}^{n} R_{ijk}{}^{m} g_{m\ell}\,.\end{aligned}$$

A Riemann-féle görbületi tenzorra használatos az Rm jelölés is, gyakran azonban R és R^b között nem teszünk a jelölésben különbséget.

<u>14.2. Állítás.</u> Egy pszeudo-Riemann sokaság Riemann-féle görbületi tenzora rendelkezik a következő szimmetria-tulajdonságokkal:

(1) $R^b(X,Y,Z,U)=-R^b(Y,X,Z,U)$ – ferde-szimmetria az első két változóban;

(2) $R^b(X,Y,Z,U)=-R^b(X,Y,U,Z)$ – ferde-szimmetria a 3. és a 4. változóban;

(3) $R^b(X,Y,Z,U)+R^b(Y,Z,X,U)+R^b(Z,X,Y,U)=0$ – az algebrai Bianchi-azonosság;

(4) $R^b(X,Y,Z,U)=R^b(Z,U,X,Y)$ – a párok szerinti szimmetria

(X,Y,Z,U tetszőleges vektormezők).

<u>Bizonyítás.</u> (1) közvetlenül adódik az R görbületi tenzor $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$ ferdeszimmetria-tulajdonságából.

(2) igazolásához elegendő azt meg-

mutatni, hogy $R^b(X,Y,Z,Z)=0$, ekkor ugyanis

$$0 = R^b(X,Y,Z+U,Z+U) = R^b(X,Y,Z,Z+U) +$$
$$+ R^b(X,Y,U,Z+U) = R^b(X,Y,Z,Z) + R^b(X,Y,Z,U) +$$
$$+ R^b(X,Y,U,Z) + R^b(X,Y,U,U) = R^b(X,Y,Z,U) + R^b(X,Y,U,Z),$$

ami (2) teljesülését jelenti.

g-vel jelölve a metrikus tenzort és ∇-val a Levi-Civita-deriválást, ∇ metrikussága alapján a következők írhatók:

$$X(Yg(Z,Z)) = 2Xg(\nabla_Y Z,Z) = 2g(\nabla_X \nabla_Y Z,Z) + \underline{2g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z)},$$
$$Y(Xg(Z,Z)) = 2g(\nabla_Y \nabla_X Z,Z) + \underline{2g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z)},$$
$$[X,Y]g(Z,Z) = 2g(\nabla_{[X,Y]} Z,Z).$$

Kivonva az első egyenlőségből a másodikat és a harmadikat, a bal oldalon zérust kapunk, a jobb oldalon pedig az aláhúzott tagok kiesnek; így a

$$0 = 2g(\nabla_X \nabla_Y Z,Z) - 2g(\nabla_Y \nabla_X Z,Z) - 2g(\nabla_{[X,Y]} Z,Z)$$
$$= 2g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z)$$
$$= 2g(R(X,Y)Z,Z) = 2R^b(X,Y,Z,Z)$$

relációhoz jutunk – amit éppen igazolni akartunk.

(3) közvetlen következménye a torziómentes kovariáns deriváltra vonatkozó algebrai Bianchi-azonosságnak (<u>8.12.</u> /(1)), (4) pedig adódik (1)–(3) teljesüléséből az előrebocsátott lemma értelmében. □

<u>14.3. Állítás.</u> Egy (M,g) pszeudo-Riemann sokaság R^b Riemann-féle görbületi tenzora

eleget tesz a

$$(\nabla_X R^b)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R^b)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R^b)(X,Y,U,V) = 0$$

$$(X,Y,Z,U,V \in \mathfrak{X}(M))$$

differenciális Bianchi-azonosságnak.

Bizonyítás. Tekintettel az R görbületi tenzorra érvényes

$$\sum_{ciklikus} (\nabla_X R)(Y,Z) = 0 \in \operatorname{End}(\mathfrak{X}(M))$$

azonosságra (8.12. / (2)), elegendő azt megmutatni, hogy

$$(\nabla_X R^b)(Y,Z,U,V) = g((\nabla_X R)(Y,Z)U, V).$$

Ez azonban közvetlen számolással adódik:

$$\begin{aligned}(\nabla_X R^b)(Y,Z,U,V) &= X R^b(Y,Z,U,V) - R^b(\nabla_X Y, Z, U, V)\\ &\quad - R^b(Y,\nabla_X Z, U, V) - R^b(Y,Z,\nabla_X U, V) - R^b(Y,Z,U,\nabla_X V)\\ &= X g(R(Y,Z)U,V) - g(R(\nabla_X Y, Z)U, V)\\ &\quad - g(R(Y,\nabla_X Z)U,V) - g(R(Y,Z)\nabla_X U, V) -\\ &\quad - g(R(Y,Z)U, \nabla_X V) =\\ &= g(\nabla_X (R(Y,Z)U), V) + g(R(Y,Z)U, \nabla_X V)\\ &\quad - g(R(\nabla_X Y, Z)U, V) - g(R(Y,\nabla_X Z)U, V) -\\ &\quad - g(R(Y,Z)\nabla_X U, V) - g(R(Y,Z)U, \nabla_X V)\\ &= g(\nabla_X (R(Y,Z)U - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y,\nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U, V)\\ &= g((\nabla_X R)(Y,Z)U, V).\end{aligned}$$

□

Definíció. Ha (M,∇) affinösszefüggő sokaság és R ∇ görbületi tenzora, akkor a

$$\operatorname{Ric}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$$(X,Y) \longmapsto \operatorname{Ric}(X,Y) := \operatorname{tr}(Z \longmapsto R(Z,X)Y)$$

$(0,2)$-típusú tenzort (M,∇) Ricci-tenzorának nevezzük. Pszeudo-Riemann-sokaság Ricci-tenzorán a Levi-Civita derivált görbületi tenzorából képzett Ricci-tenzort értjük.

<u>14.4. Megjegyzés.</u> Legyen (M,∇) affinösszefüggő sokaság, és jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ha

$$R_{ij} := \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \quad (i,j \in \{1,\dots,n\})$$

a Ricci-tenzor komponensei a választott térképre vonatkozóan, akkor

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{kij}.$$

Valóban, a $Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \longmapsto R\left(Z, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ $C^\infty(\mathcal{U})$-lineáris leképezés mátrixa a $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{i=1}^n$ bázisra vonatkozóan az

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^l}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{k=1}^n R^k_{lij}\frac{\partial}{\partial u^k} \; ; \; l \in \{1,\dots,n\}$$

előállításból kiolvashatóan az $\left(R^k_{lij}\right) \in M_n(C^\infty(\mathcal{U}))$ mátrix (i és j rögzített), amelynek nyoma $\sum_{k=1}^n R^k_{kij}$.

<u>14.5. Lemma.</u> Ha (M,g) Riemann-sokaság és $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmező egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött, akkor (M,g) Ricci-tenzora $\mathcal{U}$ fölött kiszámítható a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^n g(R(E_i,X)Y, E_i)\\ &= \sum_{i=1}^n R^\flat(E_i,X,Y,E_i) = \sum_{i=1}^n R^\flat(X,E_i,E_i,Y)\end{aligned}$$

formula alapján $(X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}))$, következésképpen a Ricci-tenzor <u>szimmetrikus</u> $(0,2)$-tenzor M-en.

<u>Bizonyítás.</u> Rögzített $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ mellett tekintsük a

$$\varphi_{XY} : \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U), \quad Z \mapsto \varphi_{XY}(Z) := R(Z,X)Y$$

leképezést. Ekkor $\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr}\, \varphi_{XY}$.

Az $(E_i)_{i=1}^{n}$ ortonormált n-elemű szerinti Fourier-kifejtést alkalmazva,

$$\varphi_{XY}(E_i) = \sum_{j=1}^{n} g(\varphi_{XY}(E_i), E_j) E_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} g(R(E_i,X)Y, E_j) E_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n} R^b(E_i, X, Y, E_j) E_j \qquad (i \in \{1, \dots, n\}),$$

tehát φ_{XY} mátrixa az $(E_i)_{i=1}^{n}$ bázisra vonatkozóan

$$\big(g(R(E_i,X)Y, E_j) \big) = \big(R^b(E_i, X, Y, E_j) \big) \overset{14.2./(1),(2)}{=} \big(R^b(X, E_i, E_j, Y) \big) \in M_n(C^\infty(U)),$$

amiből közvetlenül adódik a $\mathrm{Ric}(X,Y)$-ra felírt formula. Így egyben

$$\mathrm{Ric}(Y,X) = \sum_{i=1}^{n} R^b(E_i, Y, X, E_i) \overset{14.2./(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} R^b(X, E_i, E_i, Y)$$
$$= \mathrm{Ric}(X,Y),$$

Ric tehát szimmetrikus. $\square$

<u>Definíció.</u> Egy (M,g) pszeudo-Riemann sokaság <u>Ricci-endomorfizmusán</u> azt a $\mathrm{Ric}^\# \in \mathcal{T}^1_1(M)$ $(1,1)$-tenzort értjük, amelyet a

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ric}^\#(X), Y); \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

reláció határoz meg. A Ricci-endomorfizmus

$$\mathrm{scal} := \mathrm{tr}\, \mathrm{Ric}^\# \in C^\infty(M)$$

nyomát <u>skalárgörbületnek</u> hívjuk.

<u>14. 6. Lemma.</u> Legyen (M, g) pszeudo-Riemann sokaság, $(U, (u^i)_{i=1}^n)$ pedig egy térkép M-en. Ha Ric, ill. $Ric^\#$ komponensei e térképre vonatkozóan az R_{ij}, ill. R^i_j függvények, akkor

$$\underline{R^i_j = \sum_{k=1}^n g^{ik} R_{kj}} \quad ; \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$\left((g^{ij}) := (g_{ij})^{-1} \right.$; (g_{ij}) g mátrixa az adott térképre vonatkozóan$\left.\right)$. Így a skalárgörbület U fölött a

$$scal = \sum_{i=1}^n R^i_i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}$$

függvény.

<u>Bizonyítás.</u> Az R^i_j komponensfüggvényeket a

$$Ric^\# \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i=1}^n R^i_j \frac{\partial}{\partial u^i} \quad ; \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

reláció értelmezi. Tetszőleges $k \in \{1, \dots, n\}$ indexre innen egyrészt

$$g \left(\sum_{i=1}^n R^i_j \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = \sum_{i=1}^n R^i_j g_{ik} \, ,$$

másrészt

$$g \left(Ric^\# \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = Ric \left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = R_{jk} \, ,$$

így

$$\sum_{i=1}^n R^i_j g_{ik} = R_{jk} \, ,$$

ahonnan tetszőleges $l \in \{1, \dots, n\}$-re

$$\sum_{k=1}^n g^{lk} R_{kj} = \sum_{k=1}^n g^{lk} R_{jk} = \sum_{i,k=1}^n R^i_j g^{lk} g_{ik} =$$

$$= \sum_{i,k=1}^n R^i_j g^{lk} g_{ki} = \sum_{i=1}^n R^i_j \delta^l_i = R^l_j \, ,$$

ami igazolja a $Ric^\#$ komponenseire vonatkozó észrevételt; ebből pedig $scal$ előállítása közvetlenül adódik. $\square$

14. 7. Lemma. Tegyük fel, hogy (M, g) Riemann-sokaság, és legyen $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmező egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött. Ekkor tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$Ric^\#(E_i) = \sum_{j=1}^n Ric(E_i, E_j) E_j,$$

így

$$scal \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n Ric(E_i, E_i).$$

Bizonyítás. Az adott ortonormált n-élmező szerinti Fourier-előállítást alkalmazva,

$$Ric^\#(E_i) = \sum_{j=1}^n g(Ric^\#(E_i), E_j) E_j = \sum_{j=1}^n Ric(E_i, E_j) E_j;$$

tehát $Ric^\#$ mátrixa $(E_i)_{i=1}^n$-re vonatkozóan $(Ric(E_i, E_j)) \in M_n(C^\infty(\mathcal{U}))$, amiből kiolvasható $scal \restriction \mathcal{U}$ előállítása. □

14. 8. Megjegyzések Tekintettel fontosságukra, áttekintjük és kiegészítjük az $(1, s)$-típusú tenzorok $(s \in \mathbb{N}^*)$ $c_i := c_i^1$ – kontrakciójával $(i \in \{1, \dots, s\})$, valamint a vektormezők és a szimmetrikus kovariáns tenzorok divergenciájával kapcsolatban mondottakat, különös tekintettel a Riemann-metrikára.

(1) Legyen K nullkarakterisztikájú test. Egy $A = (\alpha^i_j) \in M_n(K)$ mátrix nyoma

$$tr A := \sum_{i=1}^n \alpha^i_i.$$

Ha V n-dimenziós K-vektortér és $\varphi \in End(V)$, akkor φ nyomát tetszőleges mátrixreprezentánsa nyomaként szokás értelmezni, megmutatva, hogy így jól definiált – a mátrixreprezentáns választásától függetlenadathoz jutunk. Most megadjuk φ nyomának egy mátrixmentes értelmezését.

A $\Lambda^n V^*$ vektortér dimenziója $\binom{n}{n} = 1$; $\Lambda^n V^*$ nemzérus elemeit V-n adott <u>térfogati formák</u>nak is mondjuk. Jelöljünk ki V-n egy ω térfogati formát. Ha $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, a

$$(v_1, \dots, v_n) \in V^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \omega(v_1, \dots, \varphi(v_i), \dots, v_n) \in \mathbb{K}$$

függvény n-lineáris és alternáló, így ω-nak skalárszorosa: létezik egy és csak egy $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy bármely $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$-re

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(v_1, \dots, \varphi(v_i), \dots, v_n) = \lambda\, \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Mivel két térfogati forma egyike a másiknak (nemzérus) skalárszorosa, közvetlenül adódik, hogy a λ skalár független a térfogati forma választásától; ezt a skalárt a φ <u>lineáris transzformáció nyomának</u> nevezzük és $\mathrm{tr}\,\varphi$-vel jelöljük.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a

$$\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi \longmapsto \mathrm{tr}\,\varphi$$

függvény lineáris, belátható továbbá a definíció alkalmazásával, hogy

$$\mathrm{tr}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{tr}(\varphi \circ \psi) \quad ; \quad \varphi, \psi \in \mathrm{End}(V).$$

Megmutatjuk, hogy a $\mathrm{tr}\,\varphi$-re adott definíciónk visszaadja a klasszikus értelmezését: egy (véges dimenziójú vektortéren ható) <u>lineáris transzformáció nyoma megegyezik tetszőleges mátrixreprezentánsának nyomával.</u>

Jelöljük ki ebből a célból V-nek egy $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^{n}$ bázisát, és legyen $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ $\mathcal{B}$-re vonatkozó mátrixa

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) := A = (\alpha^i_j)\ ,$$

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_j b_i \qquad (j \in \{1, \dots, n\}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\varphi\, \omega(b_1, \dots, b_n) &= \sum_{j=1}^{n} \omega(b_1, \dots, \varphi(b_j), \dots, b_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega(b_1, \dots, \overset{j}{\sum_{i=1}^{n} \alpha^i_j b_i}, \dots, b_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha^i_j\, \omega(b_1, \dots, \overset{j}{b_i}, \dots, b_n) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i\Big)\, \omega(b_1, \dots, b_n)\ ,
\end{aligned}$$

amiből $\operatorname{tr}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i$ következik, hiszen $\omega \neq 0$ miatt $\omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$.

(2) Ha V <u>euklideszi vektortér</u> és $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, akkor φ nyoma egy $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^{n}$ <u>ortonormált bázis</u> kijelölése után a

$$\underline{\operatorname{tr}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(b_i), b_i \rangle}$$

formulával adható meg, hiszen φ $\mathcal{B}$-re vonatkozó mátrixa a

$$\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(b_i), b_j \rangle b_j \qquad (i \in \{1, \dots, n\})$$

Fourier-előállításából a $(\langle \varphi(b_i), b_j \rangle) \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix.

Ezt az észrevételt az eddigiek során már többször alkalmaztuk.

(3) Legyen (M, g) Riemann-sokaság. A Ricci-endomorfizmus konstrukciójának mintájára tetszőleges $A \in \mathcal{T}^0_2(M)$ <u>csatolt $(1,1)$-tenzora</u> az az $A^\# \in \mathcal{T}^1_1(M)$ tenzor, amelyet a

$$g(A^\#(X), Y) = A(X, Y)\ ; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

előírás határoz meg. <u>Egy $A \in \mathcal{T}^0_2(M)$ tenzor nyomán csatolt $(1,1)$-tenzora nyomát értjük</u>, és ezt $\operatorname{tr}_g A$-val jelöljük. Tehát:

Tehát:

$$\underline{\operatorname{tr}_g A := \operatorname{tr} A^\#, \quad \text{ha } A \in \mathcal{T}^0_2(M).}$$

Ekkor

$$\operatorname{tr}_g g = n.$$

Valóban, jelöljünk ki egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött egy $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmezőt. Mivel tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$g^\#(E_i) = \sum_{j=1}^n g(g^\#(E_i), E_j)\, E_j = \sum_{j=1}^n g(E_i, E_j)\, E_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \delta_{ij}\, E_j,$$

következik, hogy

$$\operatorname{tr}_g g := \operatorname{tr} g^\# = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = n.$$

(4) Legyen M egy sokaság, $s \in \mathbb{N}^*$. Tetszőleges $i \in \{1, \ldots, s\}$ index esetén a 6.11.-ben mondottaknak megfelelően képezhető a

$$c^1_i : \mathcal{T}^1_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^0_{s-1}(M), \quad A \longmapsto c^1_i A$$

$(1,i)$-kontrakció, ezt jelöljük a továbbiakban c_i-vel. Megadjuk c_i-nek egy, a korábbiakkal ekvivalens leírását.

Rögzített $X_1, \ldots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett jelölje $A(X_1, \ldots, \overset{i}{\cdot}, \ldots, X_{s-1})$ a

$$Z \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto A(X_1, \ldots, \overset{i}{\cdot}, \ldots, X_{s-1})(Z) := A(X_1, \ldots, \overset{i}{Z}, \ldots, X_{s-1})$$

$(1,1)$-tenzort. Ennek 6.10. szerint értelmezve van a nyoma; ezt felhasználva legyen

$$\underline{c_i A(X_1, \ldots, X_{s-1}) := \operatorname{tr}(A(X_1, \ldots, \overset{i}{\cdot}, \ldots, X_{s-1}))}$$

(a bal oldalon $X_1, \ldots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges; a jobb oldalon ezeket tetszőlegesen rögzítettnek gondoljuk).

Tegyük föl, hogy M el van látva egy g Riemann-struktúrával is! Ha $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmező egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött, akkor

$$\underline{c_i A(X_1,\dots,X_{s-1}) \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{j=1}^{n} g(A(X_1,\dots,\overset{i}{E_j},\dots,X_{s-1}), E_j),}$$

hiszen ($\mathcal{U}$ fölött)

$$A(X_1,\dots,E_i,\dots,X_{s-1}) = \sum_{j=1}^{n} g(A(X_1,\dots,E_i,\dots,X_{s-1}), E_j)E_j,$$

így $A(X_1,\dots,\overset{i}{\cdot},\dots,X_{s-1})$ mátrixa az $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmezőre vonatkozóan

$$(g(A(X_1,\dots,E_i,\dots,X_{s-1}), E_j)) \in M_n(C^\infty(\mathcal{U})),$$

és ennek nyomát a felírt formula adja.

(5) Legyen (M,g) Riemann-sokaság, és jelentse ∇ a Levi-Civita deriváltat M-en. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr} \nabla X = c_1 \nabla X$$

(ld. <u>8.9.</u> (2)). Ha $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmező egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött, akkor a (2)-ben mondottak mondottak figyelembevételével

$$\operatorname{div} X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} g(\nabla X(E_i), E_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i).$$

Egy $A \in \mathcal{T}^0_s(M)$ $(s \geqq 2)$ <u>szimmetrikus tenzor divergenciáját</u> $\mathcal{U}$ fölötti az $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmező segítségével a

$$\underline{(\operatorname{div} A)(X_1,\dots,X_{s-1}) := \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A)(E_i, X_1,\dots,X_{s-1})}$$

$(X_1,\dots,X_{s-1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}))$ előírással értelmezzük. Ekkor $\operatorname{div} A$ jól definiált – az ortonormált n-élmező választásától független – szimmetrikus $(0,s-1)$-típusú tenzor $\mathcal{U}$ fölött (ld. <u>70.</u> feladat).

<u>14. 9. Állítás.</u> (a) Legyen (M, ∇) affinösszefüggő sokaság, R a görbületi tenzora, és tekintsük ennek egy $\nabla_X R \in \mathcal{T}^1_3(M)$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$ kovariáns deriváltját. Rögzített $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mellett jelentse $(\nabla_X R)(Y, Z)$ az

$$U \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto (\nabla_X R)(Y,Z)(U) := (\nabla_X R)(Y,Z,U) \in \mathfrak{X}(M)$$

$(1,1)$ - tenzort. Ekkor érvényes az

$$(1) \qquad (\nabla_X R)(Y,Z)U = -(\nabla_X R)(Z,Y)U$$

ferdeszimmetria - tulajdonság.

(b) Tegyük föl, hogy g Riemann - struktúra M-en. Legyen ∇ a belőle származó Levi-Civita deriválás, R pedig ∇ görbületi tenzora. Ebben az esetben a $\nabla_X R$ kovariáns deriváltra teljesülnek a következők:

$$(2) \qquad g((\nabla_X R)(Y,Z)U, V) = -g((\nabla_X R)(Y,Z)V, U);$$

$$(3) \qquad g((\nabla_X R)(Y,Z)U, V) = g((\nabla_X R)(U,V)Y, Z).$$

A Riemann-sokaság Ricci-tenzora és skalárgörbülete között fennáll a

$$(4) \qquad \boxed{\operatorname{div}(\mathrm{Ric}) = \frac{1}{2}\, d(\mathrm{scal})}$$

összefüggés, az ún. <u>kontrahált Bianchi - azonosság.</u>

<u>Bizonyítás.</u> (1) $(\nabla_X R)(Y,Z)(U) := (\nabla_X R)(Y,Z,U) =$

$$= \nabla_X (R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U$$

$$= -\nabla_X (R(Z,Y)U) + R(\nabla_X Z, Y)U + R(Z, \nabla_X Y)U + R(Y,Z)\nabla_X U$$

$$= -(\nabla_X R)(Z,Y)U,$$

$\nabla_X R$ tehát az első két változójában ferdeszimmetrikus.

(2) $$g\big((\nabla_X R)(Y,Z)U, V\big) = g\big((\nabla_X R)(Y,Z,U), V\big)$$
$$= g\big(\nabla_X(R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y,Z)U - R(Y,\nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U, V\big)$$
$$= g\big(\nabla_X(R(Y,Z)U), V\big) - R^b(\nabla_X Y, Z, U, V) -$$
$$- R^b(Y, \nabla_X Z, U, V) - R^b(Y, Z, \nabla_X U, V)$$
$$= X g(R(Y,Z)U, V) - g(R(Y,Z)U, \nabla_X V) - (\ldots)$$
$$= X R^b(Y,Z,U,V) - R^b(Y,Z,U,\nabla_X V) - R^b(\nabla_X Y, Z, U, V)$$
$$- R^b(Y,\nabla_X Z, U, V) - R^b(Y, Z, \nabla_X U, V)$$
$$\overset{14.2.(2)}{=} -\big(\underline{X R^b(Y,Z,V,U)} - R^b(Y,Z,\nabla_X V, U) - R^b(\nabla_X Y, Z, V, U)$$
$$- R^b(Y,\nabla_X Z, V, U) - \underline{R^b(Y,Z,V,\nabla_X U)}\big)$$
$$= -\big(X g(R(Y,Z)V, U) - g(R(Y,Z)V, \nabla_X U)\big) -$$
$$- \big(-g(R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y,\nabla_X Z)V - R(Y,Z)\nabla_X V, U\big)$$
$$= -g\big((\nabla_X R)(Y,Z)V, U\big).$$

(3) Az előző számolás szerint
$$g((\nabla_X R)(Y,Z)U, V) = X R^b(Y,Z,U,V) - R^b(\nabla_X Y, Z, U, V)$$
$$- R^b(Y,\nabla_X Z, U, V) - R^b(Y,Z,\nabla_X U, V) - R^b(Y,Z,U,\nabla_X V).$$
A jobb oldali tagok mindegyikében alkalmazva a párok szerinti szimmetria tulajdonságát kapjuk, hogy
$$g((\nabla_X R)(Y,Z)U,V) = X R^b(U,V,Y,Z) - R^b(\nabla_X U, V, Y, Z)$$
$$- R^b(U,\nabla_X V, Y, Z) - R^b(U,V,\nabla_X Y, Z) - R^b(U,V,Y,\nabla_X Z)$$
$$= g\big((\nabla_X R)(U,V)Y, Z\big).$$

(4) Számolásainkat egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazon kijelölt $(E_i)_{i=1}^n$ ortogonális n-élmező segítségével végezzük, ismételten felhasználva, hogy a kovariáns deriválás a kontrakciókkal fölcserélhető.

Legyen $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tetszőleges. Ekkor

$$
\begin{aligned}
(d(\mathrm{scal}))(X) &= (\nabla(\mathrm{scal}))(X) = \nabla_X \mathrm{scal} \\
&= \nabla_X \operatorname{tr} \mathrm{Ric}^{\#} = \nabla_X \operatorname{tr}_g \mathrm{Ric} = \operatorname{tr}_g \nabla_X (c_1 R) \\
&= \operatorname{tr} (c_1 \nabla_X R)^{\#} \\
&= \sum_{i=1}^{n} g\left((c_1 \nabla_X R)^{\#} E_i, E_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c_1 \nabla_X R)(E_i, E_i) \\
&\overset{14.8./(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g\left((\nabla_X R)(E_j, E_i) E_i, E_j\right) \\
&\overset{\text{diff. Bianchi}}{=} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(g((\nabla_{E_j} R)(E_i, X) E_i + g((\nabla_{E_i} R)(X, E_j) E_i, E_j \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \left(g((\nabla_{E_j} R)(E_i, X) E_j, E_i) + g((\nabla_{E_i} R)(X, E_j) E_j, E_i) \right) \\
&\overset{(1),(2)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} g((\nabla_{E_j} R)(E_i, X) E_j, E_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{g((\nabla_{E_i} R)(E_j, X) E_i, E_j)}_{i \longleftrightarrow j} \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_j} R)(E_i, X) E_j, E_i \right) \\
&\overset{14.8./(4)}{=} 2 \sum_{j=1}^{n} (c_1 \nabla_{E_j} R)(X, E_j) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{E_j} c_1 R)(X, E_j) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{E_j} \mathrm{Ric})(X, E_j) = \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{E_j} \mathrm{Ric})(E_j, X) \\
&\overset{14.8./(5)}{=:} 2 \operatorname{div}(\mathrm{Ric})(X)
\end{aligned}
$$

(felhasználva közben, hogy a Ric tenzor szimmetriájából adódóan Ric kovariáns deriváltjai is szimmetrikusak). □

14.10. Lemma. Ha (M, g) Riemann-sokaság és $\lambda \in C^\infty(M)$, akkor $\operatorname{div}(\lambda g) = d\lambda$.

Bizonyítás. Legyen $(E_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-édmerő egy $U \subset M$ nyílt halmazon. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(U)$ esetén

$$\operatorname{div}(\lambda g)(X) \overset{14.8(5)}{:=} \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}(\lambda g))(E_i, X) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(E_i((\lambda g)(E_i, X)) - \lambda g(\nabla_{E_i} E_i, X) - \lambda g(E_i, \nabla_{E_i} X) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n (E_i \lambda) g(E_i, X) + \sum_{i=1}^n \lambda \left(E_i g(E_i, X) - g(\nabla_{E_i} E_i, X) - g(E_i, \nabla_{E_i} X) \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n g(E_i, X) E_i \right) \lambda + \lambda \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} g)(E_i, X)$$

$$\overset{\nabla \text{ metrikus}}{=} \left(\sum_{i=1}^n g(E_i, X) E_i \right) \lambda = X\lambda = d\lambda(X),$$

következésképpen $\operatorname{div}(\lambda g) = d\lambda$. □

Definíció. Egy Riemann-sokaságot <u>Einstein-sokaság</u>nak (ill. egy Riemann-metrikát <u>Einstein-metrikának</u>) nevezünk, ha a <u>Ricci-tenzora a metrikus tenzor függvényszerese</u>, azaz ha

$$\operatorname{Ric} = \lambda g, \qquad \lambda \in C^\infty(M).$$

14.11. Következmény. Ha (M, g) n-dimenziós Einstein-sokaság, akkor

$$\operatorname{Ric} = \frac{1}{n} \operatorname{scal} \cdot g.$$

Bizonyítás. A $\operatorname{Ric} = \lambda g$ $(\lambda \in C^\infty(M))$ feltételből

$$\operatorname{scal} := \operatorname{tr} \operatorname{Ric}^\# = \operatorname{tr}_g \operatorname{Ric} = \operatorname{tr}_g(\lambda g)$$

$$= \lambda \operatorname{tr}_g g \overset{14.8.(13)}{=} \lambda n,$$

így $\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{scal}$ és $\operatorname{Ric} = \frac{1}{n} \operatorname{scal} \cdot g$. □

14.12. Megjegyzés. Tetszőleges (M, g) n-dimenziós Riemann-sokaság esetén a

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\cdot g$$

tenzor nyommentes. Valóban,

$$\mathrm{tr}_g\left(\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\cdot g\right) = \mathrm{tr}_g\,\mathrm{Ric} - \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\cdot \mathrm{tr}_g g$$
$$= \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}^{\#} - \mathrm{scal} = \mathrm{scal} - \mathrm{scal} = 0.$$

14.13. Állítás. Ha (M, g) legalább 3-dimenziós, összefüggő Einstein-sokaság, akkor a skalárgörbülete konstans, és így a Ricci-tenzora a metrikus tenzor konstansszorosa.

Bizonyítás. Legyen M n-dimenziós. Ekkor 14.11. alapján $\mathrm{Ric} = \frac{1}{n}\,\mathrm{scal}\cdot g$, és így

$$\mathrm{div}\,\mathrm{Ric} = \frac{1}{n}\,\mathrm{div}(\mathrm{scal}\cdot g) \overset{14.10.}{=} \frac{1}{n}\,d(\mathrm{scal}).$$

Másrészt a kontrahált Bianchi-azonosság (14.3.(4)) szerint $\mathrm{div}(\mathrm{Ric}) = \frac{1}{2}\,d(\mathrm{scal})$, következésképpen

$$\frac{1}{2}\,d(\mathrm{scal}) = \frac{1}{n}\,d(\mathrm{scal}),$$

ami $n > 2$ esetén csak úgy lehetséges, hogy $d(\mathrm{scal}) = 0$. Ebből M összefüggősége miatt a scal függvény konstans volta következik. □

14.14. Állítás és definíció. Legyen (M, g) kétdimenziós Riemann-sokaság. Ekkor a

$$(*)\qquad K = \frac{R^b(X, Y, Y, X)}{\|X\|_g^2\,\|Y\|_g^2 - (g(X, Y))^2}$$

függvényt, ahol (X, Y) tetszőleges kételemű M fölött, (M, g) Gauss-görbületének nevezzük. A Gauss-görbület, valamint (M, g) görbületi tenzora, Ricci-tenzora és skalárgörbülete között fennállnak a következő összefüggések:

(1) $R^b(X,Y,Z,U) = K\,(g(X,U)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,U))$;

(2) $\mathrm{Ric}(X,Y) = K\,g(X,Y)$;

(3) $\mathrm{scal} = 2K$

($X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges).

A Gauss-görbület teljesen meghatározza a kétdimenziós Riemann-sokaság görbületi tenzorát, és független a definíciójában alkalmazott kétélmező választásától.

Bizonyítás. Mivel az (1) reláció mindkét oldalán tenzor szerepel, az igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy a felírt egyenlőség teljesül, ha X, Y, Z, U gyanánt $\mathfrak{X}(M)$ egy alkalmas lokális bázisának tagjait választjuk. Tegyük föl ezért, hogy (E_1, E_2) ortonormált kétélmező U fölött, és legyenek R^b erre vonatkozó komponensei az

$$R_{ijkl} := R^b(E_i, E_j, E_k, E_l) \; ; \quad i,j,k,l \in \{1,2\}$$

függvények. Az (E_1, E_2) lokális bázist használva, a Gauss-görbület definíciója azt adja, hogy

$$K = R^b(E_1, E_2, E_2, E_1) = R_{1221} .$$

R^b ferdeszimmetria-tulajdonságai (14.2./(1), (2)) miatt

$$R_{ijkl} = 0, \text{ ha } i=j \text{ vagy } k=l .$$

Így R^b egyedüli nemzérus komponensei

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{1212} = -R_{2121} = K .$$

Ezek után

$$R^b(X,Y,Z,U) \text{ és } K(g(X,U)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,U))$$

összehasonlítása, ahol $X, Y, Z, U \in \{E_1, E_2\}$ közvetlenül adja az (1) egyenlőséget.

(2) teljesülését is elegendő az $X, Y \in \{E_1, E_2\}$ választásokkal ellenőrizni.

$$\mathrm{Ric}(E_i, E_j) \overset{14.5.}{=} \sum_{k=1}^{2} R^b(E_i, E_k, E_k, E_j)$$

$$= R^b(E_i, E_1, E_1, E_j) + R^b(E_i, E_2, E_2, E_j)\ ; \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Így

$$\mathrm{Ric}(E_1, E_2) = 0 = K g(E_1, E_2),$$
$$\mathrm{Ric}(E_2, E_1) = 0 = K g(E_2, E_1),$$
$$\mathrm{Ric}(E_1, E_1) = R^b(E_1, E_2, E_2, E_1) = K = K g(E_1, E_1),$$
$$\mathrm{Ric}(E_2, E_2) = R^b(E_2, E_1, E_1, E_2) = K = K g(E_2, E_2),$$

amivel (2) igazolást nyert.

Felhasználva a kapott összefüggéseket,

$$\mathrm{Ric}^\#(E_1) = g(\mathrm{Ric}^\#(E_1), E_1) E_1 + g(\mathrm{Ric}^\#(E_1), E_2) E_2$$
$$= (\mathrm{Ric}(E_1, E_1)) E_1 + (\mathrm{Ric}(E_1, E_2)) E_2 = K E_1,$$
$$\mathrm{Ric}^\#(E_2) = (\mathrm{Ric}(E_2, E_1)) E_1 + (\mathrm{Ric}(E_2, E_2)) E_2 = K E_2,$$

így

$$\mathrm{scal} := \mathrm{tr}\, \mathrm{Ric}^\# = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = 2K.$$

Ebből az is következik, hogy K független a értelmezéséhez használt kétlmérő választásától, hiszen scal független attól. Világos végül a mondottakból, hogy a K függvény teljesen meghatározza az R^b Riemann-féle görbületi tenzort, és így az R görbületi tenzort is. □

<u>14.15. Következmény.</u> Minden kétdimenziós Riemann-sokaság Einstein-sokaság. □

<u>Megjegyzés.</u> Bár minden (M, g) kétdimenziós Riemann-sokaság esetén

$$\mathrm{Ric} = K g,$$

ahol K a Gauss-görbület, az természetesen nem következik, hogy a K függvény konstans. Így a kétdimenziós Einstein-sokaságok nem bírnak önálló érdekességgel.

15. Vektornyalábok

15.1. <u>Nyalábon</u> olyan (E, π, M) hármast értünk, ahol E és M nemüres halmazok, π pedig szürjektív leképezése E-nek M-re. A „nyaláb" elnevezéssel akkor élünk, amikor a hangsúly a $p \in M$ pontok $E_p := \pi^{-1}(p)$ ősképén van. Ekkor azt mondjuk, hogy E_p a $p \in M$ pont fölötti <u>fibrum</u>, p-t pedig a fibrum <u>alappontjaként</u> is említjük. Az E és az M halmazra a <u>totáltér</u>, ill. <u>bázistér</u>, a π leképezésre a <u>projekció</u> elnevezést használjuk. Nyalábok kontextusában az alábbi kijelentéseket egymás szinonimáiként kezeljük:

(1) (E, π, M) nyaláb.

(2) $\pi : E \to M$ nyaláb.

(3) π nyaláb.

(4) $E \to M$ nyaláb.

(5) E M fölötti nyaláb.

(6) E nyaláb.

A felsorolt alternatívák közül részben egyszerűségi szempontok, részben aszerint választunk, hogy a nyaláb melyik alkotórészét kívánjuk hangsúlyozni. ((6) a legkevésbé pontos, de az egyik legnépszerűbb.)

<u>Topologikus</u>, ill. <u>sima nyalábról</u> szólunk aszerint, amint E és M topologikus tér, π folytonos leképezés; ill. E és M (sima) sokaság, π pedig sima leképezés. A továbbiakban sima nyalábokat tekintünk és a „sima" jelzőt elhagyjuk.

<u>15.2.</u> Legyen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Azt mondjuk, hogy egy $\pi : E \longrightarrow M$ nyaláb <u>M fölötti</u> <u>$\mathbb{K}$-vektornyaláb</u>, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

$(VB)_1$ Valamennyi fibrum k-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött.

$(VB)_2$ Minden $p \in M$ ponthoz megadható p-nek egy $\mathcal{U} \subset M$ környezete és egy

$$\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

diffeomorfizmus úgy, hogy

(1) $\pi \circ \varphi = pr_1$, ahol pr_1 az $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k$ szorzat első tényezőjére való természetes projekció, vagyis az

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív;

(2) minden $q \in \mathcal{U}$ pont esetén a

$$\varphi_q : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_q, \quad v \longmapsto \varphi_q(v) := \varphi(q, v)$$

leképezés $\mathbb{K}$-lineáris izomorfizmus.

A k pozitív egész számot ekkor a vektornyaláb <u>rangjának</u> hívjuk; az 1-rangú vektornyalábokat <u>vonalnyalábokként</u> említjük. <u>Valós</u>, ill. <u>komplex vektornyalábról</u> szólunk aszerint, amint $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ill. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A $(VB)_2$ feltételt a <u>lokális trivializitás axiómájának</u> nevezzük, az ebben szereplő φ leképezést $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ egy <u>trivializációjának</u>, vagy E egy <u>lokális trivializációjának</u> mondjuk.

15.3. Példák

(1) Legyen M egy sokaság, k pedig egy pozitív egész szám. Ha

$$\pi : M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M, \quad (p,v) \longmapsto \pi(p,v) := p,$$

akkor π k-rangú valós vektornyaláb, ezt az M fölötti <u>triviális</u> k-rangú (valós) <u>vektornyalábnak</u> nevezzük. Ennek egy $p \in M$ pont fölötti fibruma $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, ellátva a természetes vektortér-struktúrával:

$$(p,u) + (p,v) := (p, u+v); \quad \lambda(p,u) := (p, \lambda u)$$

$(u, v \in \mathbb{R}^k;\ \lambda \in \mathbb{R})$.

(2) Egy M n-dimenziós sokaság <u>5.2.</u>-ban leírt $\tau : TM \longrightarrow M$ érintőnyalábja n-rangú valós vektornyaláb M fölött, amelynek fibrumai az M sokaság érintőterei. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, akkor a

$$\phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \tau^{-1}(\mathcal{U}), \quad (q, (v^1, \dots, v^n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q$$

leképezés lokális trivializációja M-nek.

> <u>Megállapodás</u>: a továbbiakban vektornyalábon valós vektornyalábot értünk.

15.4. Nyalábleképezések

(1) Legyenek $\pi : E \longrightarrow M$ és $\pi' : E' \longrightarrow M'$ vektornyalábok. Egy $F : E \longrightarrow E'$ sima leképezést <u>fibrumtartónak</u> mondunk, ha azonos fibrumba tartozó pontok képpontjai is azonos fibrumba esnek:

$$\pi(z_1) = \pi(z_2) \Longrightarrow \pi'(F(z_1)) = \pi'(F(z_2)); \quad z_1, z_2 \in E.$$

Minden $F : E \longrightarrow E'$ fibrumtartó leképezés indukál a bázissokaságok között egy $f : M \longrightarrow M'$ leképezést, amelyet egyértelműen meghatároz az

$$f \circ \pi = \pi' \circ F$$

feltétel, vagyis az a követelmény, hogy az

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, dashed, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

diagram legyen kommutatív. Valóban, ha az f leképezést az

$$f(p) := \pi'(F(z)), \quad \text{ha } z \in E_p$$

előírással értelmezzük, akkor F fibrumtartó tulajdonsága miatt f jól definiált, az $f \circ \pi = \pi' \circ F$ követelménynek pedig nyilvánvalóan eleget tesz. A lokális trivialitás alkalmazásával megmutatható, hogy az $f: M \to M'$ indukált leképezés sima.

(2) Tegyük fel továbbra is, hogy $\pi: E \to M$ és $\pi': E' \to M'$ vektornyaláb. Egy $F: E \to E'$ fibrumtartó leképezést nyalábleképezésnek (vagy vektornyaláb-homomorfizmusnak) mondunk, ha tetszőleges $p \in M$ pont esetén az

$$F_p := F \upharpoonright E_p : E_p \to E'_{f(p)}$$

leszűkítés, ahol $f: M \to M'$ az F által indukált leképezés, lineáris. Egy $F: E \to E'$ nyalábleképezést nyalábizomorfizmusnak, röviden izomorfizmusnak nevezünk, ha diffeomorfizmus. Közös bázissokasággal rendelkező vektornyalábok közötti erős nyalábleképezésen olyan nyalábleképezést értünk, amely a bázissokaságon az identikus transzformációt indukálja.

(3) Érvényes a következő

Állítás. Egy $F: E \longrightarrow E'$ nyalábleképezés, amely a bázissokaságok között az $f: M \longrightarrow M'$ leképezést indukálja, akkor és csak akkor izomorfizmus, ha

(i) f diffeomorfizmus;

(ii) az $F_p : E_p \longrightarrow E'_{f(p)}$ leképezés minden $p \in M$ esetén lineáris izomorfizmus. Δ

(4) Példaként megemlítjük, hogy hogy egy $f: M \longrightarrow M'$ sima leképezés $f_*: TM \longrightarrow TM'$ érintőleképezése a definíciójából kiolvashatóan (ld. 5.3.) nyalábleképezés, amely éppen az f leképezést indukálja.

15.5. Vektornyaláb - konstrukciók

(1) Legyen adva

(i) egy M sokaság;

(ii) páronként diszjunkt k-dimenziós (nem triviális) valós vektorterek egy $(E_p)_{p\in M}$ családja;

(iii) M-nek egy $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ nyílt lefedése;

(iv) minden $\alpha \in A$ index és $p \in \mathcal{U}_\alpha$ pont esetén egy $\varphi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_p$ lineáris izomorfizmus.

Ha bármely $(\alpha,\beta) \in A \times A$ esetén a

$$\theta_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow GL_k(\mathbb{R}),\ p \longmapsto \theta_{\alpha\beta} := \varphi_{\alpha,p}^{-1} \circ \varphi_{\beta,p}$$

leképezés sima, akkor az

$$E := \bigcup_{p\in M} E_p \quad (\text{diszjunkt unió})$$

halmaz egyértelműen ellátható olyan sima struktúrával, hogy (E, π, M), ahol $\pi(z) := p$, ha $z \in E_p$, k-rangú vektornyalábbá válik, amelynek a

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),\ (p,v) \longmapsto \varphi_\alpha(p,v) := \varphi_{\alpha,p}(v)$$

leképezései lokális trivializációi. Δ

(2) <u>Visszahúzás</u>. Legyen $\pi : E \longrightarrow M$ k-rangú vektornyaláb M fölött, és legyen adva egy $f : N \longrightarrow M$ sima leképezés. Tetszőleges $q \in N$ pont esetén legyen

$$(f^*E)_q := \{(q,z) \in N \times E \mid z \in E_{f(q)}\} = \{q\} \times E_{f(q)} .$$

Lássuk el $(f^*E)_q$-t a

$$(q,z_1) + (q,z_2) := (q, z_1 + z_2) , \quad \lambda(q,z) := (q, \lambda z) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

előírás szerinti vektortér-struktúrával, vagyis azzal a vektortér struktúrával, amely az

$$(f^*E)_q = \{q\} \times E_{f(q)} \longrightarrow E_{f(q)} , \quad (q,z) \longmapsto z$$

leképezést lineáris izomorfizmussá teszi.

Mivel $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyaláb, van olyan $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ nyílt lefedése M-nek, amelynek minden tagjához megadható E-nek egy

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$$

lokális trivializációja. Tetszőleges $q \in f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \subset N$ pont esetén értelmezzük a $\psi_{\alpha,q} : \mathbb{R}^k \longrightarrow (f^*E)_q$ leképezést a

$$\psi_{\alpha,q}(u) := (q, \varphi_{f(q)}(u)) , \quad u \in \mathbb{R}^k$$

előírással. Ekkor $\psi_{\alpha,q}$ lineáris izomorfizmus, és az $(f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \psi_{\alpha,q})_{(\alpha,q) \in A \times N}$ család eleget tesz az (1)-beli feltételnek. Ilymódon egy <u>N fölötti</u>,

$$f^*E := \bigcup_{q \in N} (f^*E)_q = \bigcup_{q \in N} (\{q\} \times E_{f(q)})$$
$$= \{(q,z) \in N \times E \mid f(q) = \pi(z)\}$$

<u>totálterű vektornyalábhoz</u> jutunk, amelynek projekciója az $N \times E \longrightarrow N$ természetes projekció f^*E-re való leszűkítése. Ez a vektornyaláb szintén k-rangú; neve: az E vektornyaláb (pontosabban: (E, π, M)) <u>f általi visszahúzottja</u>. Ennek totálterére az

$$N \times_M E \quad (:= \{(q,z) \in N \times E \mid f(q) = \pi(z)\})$$

jelölést is gyakran használjuk.

(3) <u>Lineáris konstrukciók</u> Az általános elv a következő: egy vektornyaláb fibrumaiból a lineáris algebrából ismert eljárásokkal újabb vektortereket konstruálunk (vesszük például valamennyi fibrum duálisát, a fibrumok (r,s)-típusú tenzorainak vektorterét, ...), s ezekkel a „bázissokaság pontjaival paraméterezett vektortércsaládokkal" (ld. (1)/(iii)) végrehajtjuk az (1)-ben leírt szerkesztési eljárást.

(i) <u>Duális nyaláb</u> Legyen adva egy (E,π,M) k-rangú vektornyaláb. Tetszőleges $p\in M$ pont esetén jelölje E_p^* az E_p vektortér duális terét. Legyen $(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan halmazcsalád, ahol $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedése M-nek, $\varphi_\alpha : U_\alpha\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\pi^{-1}(U_\alpha)$ pedig minden $\alpha\in A$ esetén lokális trivializációja E-nek. Ha $\alpha\in A$, $p\in U_\alpha$, akkor $(VB)_2$ / (2) értelmében

$$\varphi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k\longrightarrow E_p\,,\ v\longmapsto\varphi_\alpha(p,v)$$

lineáris izomorfizmus. Jelentse $\hat{\varphi}_{\alpha,p}$ az

$$\mathbb{R}^k\cong(\mathbb{R}^k)^*\longrightarrow E_p^*\,,\ l\longmapsto\hat{\varphi}_{\alpha,p}(l):=l\circ\varphi_{\alpha,p}^{-1}$$

lineáris izomorfizmust! Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, akkor a

$$\theta_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow GL_k(\mathbb{R}),\ p\longmapsto\theta_{\alpha\beta}(p):=\hat{\varphi}_{\alpha,p}^{-1}\circ\hat{\varphi}_{\beta,p}$$

leképezés sima. Így az (1)-ben mondottak alapján az $E^*:=\bigcup_{p\in M}E_p^*$ diszjunkt unió egyértelműen ellátható olyan sokaság-struktúrával, amely az (E^*,π^*,M) hármast, ahol $\pi^*(z^*):=p$, ha $z^*\in E_p^*$, k-rangú vektornyalábbá teszi. Ezt a vektornyalábot az (E,π,M) vektornyaláb <u>duális nyalábjának</u> nevezzük; speciálisan egy M sokaság $\tau : TM\longrightarrow M$ érintőnyalábjának $\tau^* : T^*M\longrightarrow M$ duálisát $(T^*M:=(TM)^*)$ M <u>koérintő</u> vagy <u>kotangens nyalábjának</u> hívjuk.

(iii) <u>Whitney- vagy direkt összeg</u> Tekintsük a közös bázissokasággal rendelkező

$$\pi' : E' \longrightarrow M \ , \ \text{ill.} \ \pi'' : E'' \longrightarrow M$$

k'-, ill. k''-rangú vektornyalábot. Legyen $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan nyílt lefedése M-nek, amelynek minden tagjához van

$$\varphi'_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{k'} \longrightarrow (\pi')^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \ \text{ill.} \ \varphi''_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{k''} \longrightarrow (\pi'')^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$$

lokális trivializációja E'-nek, ill. E''-nek. Tetszőleges $p \in \mathcal{U}_\alpha$ pont esetén definiáljuk a

$$\varphi_{\alpha,p} : \mathbb{R}^{k'+k''} \cong \mathbb{R}^{k'} \oplus \mathbb{R}^{k''} \longrightarrow E'_p \oplus E''_p$$

lineáris izomorfizmust a

$$\varphi_{\alpha,p}(u,v) := (\varphi'_{\alpha,p}(u), \varphi''_{\alpha,p}(v)), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^{k'} \oplus \mathbb{R}^{k''}$$

előírással. Ekkor a

$$\theta_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \longrightarrow GL_{k+k'}(\mathbb{R}), \ p \longmapsto \theta_{\alpha\beta}(p) := \varphi^{-1}_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}$$

leképezések simák, így az (1)-beli feltétel teljesül. Ez biztosítja olyan M fölötti,

$$E' \oplus E'' := \bigcup_{p \in M} E'_p \oplus E''_p \quad (\text{diszjunkt unió})$$

totálteri, $k'+k''$-rangú vektornyaláb létezését, amelynek projekciója az $E' \oplus E'' \longrightarrow M$ természetes leképezés (amelynél egy elem képe az azt tartalmazó fibrum alappontja), és amelynek a

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^{k'+k''} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \ (p,(u,v)) \longmapsto \varphi_{\alpha,p}(u,v)$$

leképezések lokális trivializációi.

Az így kapott $E' \oplus E'' \longrightarrow M$ vektornyalábot E' és E'' <u>Whitney-összegének</u> vagy <u>direkt összegének</u> nevezzük.

~o~

Néhány további, lineáris konstrukcióval nyerhető vektornyalábot már csak felsorolásszerűen, fibrumait és totálterük leírásával adunk meg. A projekció minden esetben a természetes: a totáltér egy pontjához a pontot tartalmazó fibrum alappontját rendeli.

(iii) <u>A τ-tenzorok nyalábja</u> Legyen adva egy $\pi: E \longrightarrow M$ vektornyaláb, és legyen $(r,s) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(r,s) \neq (0,0)$. Tetszőleges $p \in M$ pont esetén képezzük az E_p fibrum fölötti (r,s)-típusú tenzorok $T^r_s E_p$ vektorterét. Ha $T^r_s E := \bigcup_{p\in M} T^r_s E_p$ (diszjunkt unió), akkor $T^r_s E$ vektornyaláb M fölött. Ha speciálisan a $\tau: TM \longrightarrow M$ érintőnyalábból indulunk ki, akkor a $T^r_s TM \longrightarrow M$ M fölötti nyalábhoz jutunk ($T^r_s TM = \bigcup_{p\in M} T^r_s(T_pM)$), ez az M sokaságon adott <u>(r,s)-tenzorok nyalábja</u>. Ennek totálterére gyakran (a kissé pontatlan) $T^r_s M$ jelölés használatos.

(iv) <u>Az alternáló formák nyalábja</u> Legyen $\pi: E \longrightarrow M$ k-rangú vektornyaláb, $r \in \{1,\dots,k\}$. $Alt^r(E)$ vagy $\Lambda^r E^*$ az az M fölötti, $\binom{k}{r}$-rangú vektornyaláb, amelynek egy $p \in M$ pont fölötti fibruma $Alt^r E_p = \Lambda^r(E_p)^*$, a totáltér ezek diszjunkt uniója.

(v) <u>Az r-vektorok nyalábja</u> Egy $\pi: E \longrightarrow M$ vektornyaláb fibrumaitól a $\Lambda^r E_p$ külső hatványokat képezzük, $\Lambda^r E := \bigcup_{p\in M} \Lambda^r E_p$; $\Lambda^r E \longrightarrow M$ vektornyaláb M fölött. Ha a konstrukciót a $\tau: TM \longrightarrow M$ érintőnyalábra alkalmazzuk, akkor a totáltérre – $\Lambda^r TM$ mellett – most is használatos a kevésbé következetes $\Lambda^r M$ jelölés.

15.6. Vektornyalábok szeletei Egy $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyaláb szeletén olyan $\sigma : M \longrightarrow E$ sima leképezést értünk, amely eleget tesz a

$$\pi \circ \sigma = 1_M$$

feltételnek. Rögtön világos innen, hogy a szeletek injektív leképezések (hiszen van balinverzük); speciálisan a

$$\sigma : M \longrightarrow \sigma(M) \quad (\subset E)$$

leképezés diffeomorfizmus. Minden $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyalábnak létezik szelete: ezt szolgáltatja az

$$o : p \in M \longmapsto o(p) := 0_p := E_p \text{ zérusvektora } \in E$$

leképezés, amelyet zérusszeletnek hívunk. A tániskolaságot sérelem nélkül azonosíthatjuk a zérusszelet általi képével, miközben az $o : M \longrightarrow o(M)$ leképezés természetes diffeomorfizmus.

Ha $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ szeletei a $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyalábnak, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig sima függvény, akkor a

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(p) := \sigma_1(p) + \sigma_2(p), \quad (f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p)$$

előírással definiált $\sigma_1 + \sigma_2$ és $f\sigma$ leképezés is szelete π-nek. Így módon π összes szeleteinek halmaza $C^\infty(M)$-modulussá válik, amelyet $Sec(\pi)$-vel jelölünk.

A $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyaláb egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölötti szeletén olyan $\sigma : \mathcal{U} \longrightarrow E$ sima leképezést értünk, amelyre $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$ teljesül. Az $\mathcal{U}$ fölötti szeletek az előbb jelzett módon – a pontonkénti összeadással és függvénnyel szorzással – egy $C^\infty(\mathcal{U})$-modulust alkotnak, amelyet $Sec(\mathcal{U})$-val (is) jelölünk.

15.7. Tétel („a differenciálgeometria alaplemmája”).

Legyen $\pi : E \longrightarrow M$ egy vektornyaláb, s legyen adva egy $A : Sec(\pi) \longrightarrow C^\infty(M)$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés.

Akkor és csak akkor létezik olyan – szükségképpen egyértelműen meghatározott $\alpha : M \longrightarrow E^*$ szelése a $\pi^* : E^* \longrightarrow M$ duális nyalábnak, amelyre bármely $p \in M$ pont és $\sigma \in Sec(\pi)$ szelés esetén

$$A(\sigma)(p) = \alpha(p)(\sigma(p))$$

teljesül, ha az A leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, azaz tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény és $\sigma \in Sec(\pi)$ szelés esetén

$$A(f\sigma) = f A(\sigma) .$$

Δ

15.8. Példák : tenzormezők és differenciálformák

(1) Legyen adva egy M sokaság, és tekintsük az M-en adott $(r,s)\ (\neq (0,0))$ típusú tenzorok

$$\tau^r_s : T^r_s TM \longrightarrow M$$

nyalábját. A totálteret, mint említettük, egyszerűen $T^r_s M$-mel jelölhetjük, két kivételt azonban teszünk: $T^1_0 TM$ helyett TM-et (és nem $T^1_0 M$-et), $T^0_1 TM$ helyett T^*M-et (és nem $T^0_1 M$-et) írunk. $T^r_s TM$ szeléseinek modulusára a $\mathcal{T}^r_s(M)$ jelölést használjuk, ha $(r,s) \notin \{(1,0),(0,1)\}$;

$$Sec(T^1_0 TM) = Sec(TM) = Sec(\tau) =: \mathfrak{X}(M),$$

$$Sec(T^0_1 TM) = Sec(T^*M) = Sec(\tau^*) = \mathfrak{X}^*(M).$$

$\mathcal{T}^r_s(M)$ elemeit a korábbiakban mondottaknak megfelelően M (r,s)-típusú tenzormezőinek / tenzorainak hívjuk (v.ö. 6.7.). Ha tehát $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, akkor A olyan sima leképezés M-nek $T^r_s TM$, amelyre $\tau^r_s \circ A = 1_M$ teljesül, azaz bármely $p \in M$ pont esetén $A_p := A(p) \in T^r_s(T_pM)$.

Egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ és egy $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$ tenzor tenzori szorzata az

$$(A \otimes B)_p := A_p \otimes B_p \quad ; \quad p \in M$$

előírással értelmezett $A \otimes B \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}$ tenzor.

Minden $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzormező meghatároz egy

$$\tilde{A} : (\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

<u>$C^\infty(M)$ - multilineáris</u> leképezést az

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{A}(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) := A_p(\theta^1(p), \dots, \theta^r(p), X_1(p), \dots, X_s(p)) \\ p \in M; \ \theta^i \in \mathfrak{X}^*(M), X_j \in \mathfrak{X}(M), \ i \in \{1, \dots, r\}, \ j \in \{1, \dots, s\} \end{array} \right.$$

előírás szerint. Megfordítva, minden $(\mathfrak{X}^*(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \longrightarrow C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$ - multilineáris leképezés egy egyértelműen meghatározott $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzorból származik a leírt módon. - Ezt az interpretációs lehetőséget („fordított irányban") <u>6.4.</u> - <u>6.7.</u> - ben részletesen tárgyaltuk.

(2) Tekintsük az M sokaság fölötti k-adfokú formák $\Lambda^k M := \Lambda^k (TM)^*$ nyalábját! Ekkor a $Sec(\Lambda^k M)$ $C^\infty(M)$-modulusra az $\Omega^k(M)$ jelölést használjuk; $\Omega^k(M)$ elemeit <u>k-adfokú differenciál-formáknak</u> hívjuk. Egy $\omega \in \Omega^k(M)$ és egy $\psi \in \Omega^\ell(M)$ differenciálforma <u>ékszorzata</u> (külső / exterior szorzata) az

$$(\omega \wedge \psi)_p := \omega_p \wedge \psi_p \quad ; \quad p \in M$$

előírással értelmezett $(k+\ell)$ - forma. Az így definiált szorzás a

$$\Omega(M) := \sum_{k=0}^{n} \Omega^k(M) \qquad (n := \dim M)$$

direkt összeget a $C^\infty(M)$ gyűrű fölötti asszociatív, graduáltan kommutatív ($\varphi \wedge \psi = (-1)^{k\ell} \psi \wedge \varphi$) algebrává teszi. $\Omega^k(M)$ elemei az (1)-ben leírt módon, s az egyszerűség kedvéért változatlanul jelölt

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) = (\mathfrak{X}(M))^k \longrightarrow C^\infty(M)$$

<u>ferdeszimmetrikus</u> $C^\infty(M)$-multilineáris leképezésként interpretálhatók:

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\,\omega(X_1, \dots, X_k)\ ;$$
$$X_i \in \mathfrak{X}(M)\ ;\ i \in \{1, \dots, k\}\ ;\ \sigma \in S_k .$$

Ebben az interpretációban $\omega \in \Omega^k(M)$ és $\psi \in \Omega^\ell(M)$ ékszorzatára az <u>A 3.3. (2)</u>-ben mondottaknak megfelelően azt kapjuk, hogy

$$(\omega \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) =$$
$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\,\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\,\psi(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) .$$

<u>15. 9. $\Omega(M)$ klasszikus gradált derivációi</u>

A következőkben $\Omega(M)$ elemeit $C^\infty(M)$-be történő ferdeszimmetrikus, $C^\infty(M)$-multilineáris leképezésként interpretáljuk.

(1) <u>A helyettesítési operátor</u> Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$. Az

$$i_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)\ ,\ \omega \longmapsto i_X\omega$$

<u>helyettesítési operátort</u> az

$$i_X\,\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

előírással értelmezzük ($X_i \in \mathfrak{X}(M)\ ;\ i \in \{1, \dots, k-1\}$), ha $k \in \mathbb{N}^*$, és

$$i_X f := 0\ ,\ \text{ha}\ f \in \Omega^0(M) := C^\infty(M).$$

Ekkor i_X <u>(-1)-edfokú gradált derivációja az $\Omega(M)$ gradált algebrának</u>, és így

$$\boxed{\begin{array}{l} i_X(\omega \wedge \psi) = (i_X\omega) \wedge \psi + (-1)^k\,\omega \wedge i_X\psi\ , \\ \omega \in \Omega^k(M)\ ,\ \psi \in \Omega(M) \end{array}}\ ,$$

(vö. <u>A 6.3. (ii)</u>), teljesül továbbá, hogy

$$[i_X, i_Y] := i_X \circ i_Y + i_Y \circ i_X = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)),$$

ahol tehát a $[\ ,\ ]$ az <u>A 3.5. (2)</u>-ben bevezetett gradált kommutátor.

(2) A Lie-deriválás Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező szerinti

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^r_s(M), \quad A \longmapsto \mathcal{L}_X A$$

Lie-deriválást már 7.8.-ban értelmeztük, megadva $C^\infty(M)$-en és $\mathfrak{X}(M)$-en a hatását az

$$\mathcal{L}_X f := Xf, \quad \text{ill.} \quad \mathcal{L}_X Y := [X, Y]$$

előírásokkal, és ezt a szorzatszabály (7.4.) alapján tenzorderivációvá terjesztve ki. Ha $\omega \in \Omega^k(M)$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$, akkor ez a definíció azt adja, hogy

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) \\ (X_i \in \mathfrak{X}(M);\ i \in \{1, \dots, k\})\end{gathered}}$$

Ekkor $\mathcal{L}_X \omega \in \Omega^k(M)$ és az $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$ leképezés nullad fokú gradált derivació, így

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \varphi) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \varphi + \omega \wedge \mathcal{L}_X \varphi$$
$$(\omega, \varphi \in \Omega(M))$$

A Lie-deriválás és a helyettesítési operátor gradált kommutátoraival kapcsolatban érvényesek a következők:

(i) $[\mathcal{L}_X, i_Y] := \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}$;

(ii) $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}$

$$(X, Y \in \mathfrak{X}(M)) .$$

(3) A külső derivált Értelmezzük a

$$d : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M), \quad \omega \longmapsto d\omega$$

leképezést a következő előírással:

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega(X_0,\dots,X_k) := &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\left(\omega(X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X^k)\right) + \\ &+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\,\omega\left([X_i,X_j],\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_k\right) \end{aligned}},$$

ha $\omega \in \Omega^k(M)$, $k \geqq 1$; $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \{0,\dots,k\}$;

$$\underline{df(X) := Xf}, \quad \text{ha } f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M).$$

Jegyezzük meg, hogy $\omega \in \Omega^1(M)$ esetén a definíció azt adja, hogy

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\ ; \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

<u>A külső derivált elsőfokú graduált deriváció ja $\Omega(M)$-nek</u>, így

$$\left\| \begin{array}{l} d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi, \\ \text{ha } \omega \in \Omega^k(M),\ \varphi \in \Omega(M). \end{array} \right.$$

Érvényesek a következő alapvető relációk:

(i) $\boxed{\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \quad , \ X \in \mathfrak{X}(M)}$

– H. Cartan bűvös formulája;

(ii) $d^2 = d \circ d = 0$.

Graduált kommutátort szerepeltetve, ezek a következő alakban írhatók fel:

(i') $[i_X, d] = \mathcal{L}_X$;

(ii') $\frac{1}{2}[d,d] = 0$.

<u>15.10.</u> <u>Kovariáns deriválás vektornyalábok</u>ban az A 8. fejezetben bevezetett kovariáns deriválás és az ott tárgyaltak egy része egyszerűen átültethető vektornyaláb-kontextusba; ezzel kapcsolatban tesszünk most néhány észrevételt.

(1) Egy $\pi : E \longrightarrow M$ vektornyalábon adott kovariáns deriváláson olyan
$$D : \mathfrak{X}(M) \times Sec(\pi) \longrightarrow Sec(\pi),\ (X, \sigma) \longmapsto D_X\sigma$$
leképezést értünk, amely X-ben tenzoriális, σ-ban derivació, azaz amelyre teljesülnek a következők:

(D_1) $\quad D_{f_1X_1+f_2X_2}\sigma = f_1 D_{X_1}\sigma + f_2 D_{X_2}\sigma$;

(D_2) $\quad D_X(\sigma_1+\sigma_2) = D_X\sigma_1 + D_X\sigma_2$;

(D_3) $\quad D_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f D_X\sigma$

$((X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M),\ \sigma \in Sec(\pi);\ f, f_1, f_2 \in C^\infty(M))$.

Ebben az értelemben egy M sokaságon adott – korábban értelmezett – kovariáns deriválás a $\tau : TM \longrightarrow M$ érintőnyalábon adott kovariáns deriválást jelent.

Ha D kovariáns deriválás π-n, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $\sigma \in Sec(\pi)$ esetén a $D_X\sigma$ szelést σ X szerinti kovariáns deriváltjának hívjuk. A (D_1) értelmében $C^\infty(M)$-lineáris
$$D\sigma : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow Sec(\pi),\ X \longmapsto (D\sigma)(X) := D_X\sigma$$
leképezést a σ szelés kovariáns differenciáljának mondjuk; σ párhuzamos, ha $D\sigma = 0$.

A 8.2.-ben mondottak mintájára minden $D : \mathfrak{X}(M) \times Sec(\pi) \longrightarrow Sec(\pi)$ lokalizálható a következő értelemben: ha $p \in M$ és a $\sigma_1, \sigma_2 \in Sec(\pi)$ szelések egybeesnek a p pont egy környezetében, akkor
$$(D_X\sigma_1)(p) = (D_X\sigma_2)(p),\ \text{minden } X \in \mathfrak{X}(M)\text{-re.}$$

(2) Egy $D : \mathfrak{X}(M) \times Sec(\pi) \longrightarrow Sec(\pi)$ kovariáns deriválás R görbületi tenzorát a 8.10.-ben mondottak analógiájára az

$$\left\| \begin{aligned} & R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \operatorname{Sec}(\mathcal{V}) \longrightarrow \operatorname{Sec}(\mathcal{V}), \\ & (X, Y, \sigma) \longmapsto R(X,Y)\sigma := D_X D_Y \sigma - D_Y D_X \sigma - D_{[X,Y]}\sigma \end{aligned} \right.$$

leképezésként értelmezzük. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ekkor R mindhárom változójában tenzoriális (azaz $C^\infty(M)$-lineáris), X-ben és Y-ban pedig ferdeszimmetrikus ($R(X,Y)\sigma = -R(Y,X)\sigma$).

16. Riemann-sokaságok görbületi operátora és metszetgörbülete

16. 1. Megjegyzések. (1) Ha M egy sokaság, akkor a 15.5. (3)/(c)-ben mondottaknak megfelelően

$$\Lambda^2 TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^2 T_pM$$

az M feletti bivektorok nyalábja; e nyaláb szeléseinek modulusát az általános elméletnek megfelelően $\operatorname{Sec}(\Lambda^2 TM)$-mel jelöljük. Ha $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ és

$$X \wedge Y : p \in M \longmapsto (X \wedge Y)_p := X_p \wedge Y_p \in \Lambda^2 T_pM,$$

akkor $X \wedge Y \in \operatorname{Sec}(\Lambda^2 TM)$.

(2) Amennyiben (M, g) Riemann-sokaság, úgy a $\Lambda^2 T_pM$ vektorterek mindegyike el van látva a g_p skaláris szorzatból származó, és továbbra is g_p-vel jelölt, s a

$$g_p(u \wedge v, w \wedge z) := g_p(u,w)g_p(v,z) - g_p(u,z)g_p(v,w)$$

előírással meghatározott skaláris szorzattal (ld. A 8 (1)). Egy $u \wedge v \in \Lambda^2 T_pM$ bivektor normája ekkor

$$\| u \wedge v \| := (g_p(u \wedge v, u \wedge v))^{1/2},$$

amely u és v lineáris függetlensége esetén az általuk kifeszített paralelogramma területe.

(3) A következőkben a szereplő vektormező- (vagy bivektor-mező) változós tenzorok pontbeli értékeit időnként úgy jelöljük, mint magát a tenzort (tehát nem utalunk a pontra). Mivel ekkor a változók pontbeli érintővektorok (bivektorok), ez nem jár a félreértés komoly veszélyével. Így például ha g egy Riemann-sokaság metrikus tenzora, akkor $g(u,v)$-t (is) írunk $g_p(u,v)$ helyett, ahol $u,v \in T_pM$, vagy ha R egy kovariáns deriválás görbületi tenzora, akkor $R(u,v)w := R_p(u,v)w$, ha $u,v,w \in T_pM$.

(4) Legyen (M,g) Riemann-sokaság, $p \in M$, $u \in T_pM \setminus \{0\}$. $pr_u^{\perp}$-val jelöljük a
$$T_pM \longrightarrow T_pM, \quad v \longmapsto pr_u^{\perp}(v) := v - \frac{g(u,v)}{g(u,u)}u$$
projekció operátort. (Ha $\|u\|_g = 1$, akkor $pr_u^{\perp}(v) = v - g(u,v)u$.) Ekkor $Ker(pr_u) = span(u)$, $Im(pr_u) = (span(u))^{\perp_{g_p}}$.

16.2. Görbületi operátorok, metszetgörbület

Legyen ebben a szakaszban (M,g) egy Riemann-sokaság. Jelentse ∇ a Levi-Civita deriválást M-en, R ∇ görbületi tenzorát, R^b pedig a Riemann-féle görbületi tenzort:
$$R^b(X,Y,Z,U) := g(R(X,Y)Z,U) \; ; \; X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M).$$

(1) Értelmezzük az
$$\mathcal{R} : Sec(\Lambda^2TM) \times Sec(\Lambda^2TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$
leképezést az
$$\mathcal{R}(X \wedge Y, Z \wedge U) := R^b(X,Y,U,Z) \; ; \; X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M)$$
előírással és $C^\infty(M)$-lineáris kiterjesztéssel. Ekkor létezik egy és csak egy olyan
$$\mathcal{R}^{\#} : Sec(\Lambda^2TM) \longrightarrow Sec(\Lambda^2TM)$$

tenzoriális - tehát $C^\infty(M)$-lineáris - leképezés, amelyre

$$\underline{g\left(\mathcal{R}^\#(X\wedge Y), Z\wedge U\right) = \mathcal{R}(X\wedge Y, Z\wedge U)}$$
$$(X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M))$$

(itt g az M-en adott Riemann-struktúrából származó tenzor; v.ö. 16.1.(2)). Az $\mathcal{R}^\#$ tenzort a Riemann-sokaság görbületi operátorának hívjuk.

$\mathcal{R}^\#$ önadjungált a (kiterjesztett) g tenzorra nézve, ugyanis R^b 14.2.-beli szimmetriatulajdonságai alapján

$$g(\mathcal{R}^\#(X\wedge Y), Z\wedge U) := \mathcal{R}(X\wedge Y, Z\wedge U) := R^b(X, Y, U, Z)$$
$$= R^b(U, Z, X, Y) = R^b(Z, U, Y, X) =: \mathcal{R}(Z\wedge U, X\wedge Y)$$
$$=: g(\mathcal{R}^\#(Z\wedge U), X\wedge Y) = g(X\wedge Y, \mathcal{R}^\#(Z\wedge U)).$$

(2) Rögzítve egy $v \in T_pM$ érintővektort, az

$$R_v : T_pM \longrightarrow T_pM, \quad w \longmapsto R_v(w) := R(w, v)v$$

lineáris transzformációt a p pontbeli, v-irányú görbületi operátornak (vagy Ricci-operátornak) nevezzük. Közvetlenül - lényegében az előző számolással - adódik, hogy R_v önadjungált lineáris transzformációja T_pM-nek:

$$g(R_v(w), z) = g(R(w,v)v, z) = R^b(w, v, v, z)$$
$$= R^b(v, z, w, v) = R^b(z, v, v, w) = g(R(z,v)v, w)$$
$$= g(R_v(z), w) = g(w, R_v(z)).$$

Világos, hogy ha $v \neq 0$, akkor v sajátvektora R_v-nek és a hozzá a 0 sajátérték tartozik.

(3) Legyenek v és w T_pM lineárisan független vektorai. A Riemann-sokaság p pontbeli, a $\mathrm{span}(v, w) \subset T_pM$ kétdimenziós altérhez - vagy (v, w)-hez - tartozó metszetgörbületén a

$$\boxed{\begin{aligned} K(v,w) &:= \frac{g(R_v(w),w)}{g(v,v)g(w,w)-(g(v,w))^2} = \frac{g(R(w,v)v,w)}{g(v\wedge w, v\wedge w)} \\ &= \frac{\mathcal{R}(v\wedge w, v\wedge w)}{\|v\wedge w\|^2} = \frac{g(\mathcal{R}^{\#}(v\wedge w), v\wedge w)}{\|v\wedge w\|^2} \end{aligned}}$$

valós számot érjük. Mivel a formulák nevezőjében a v és w által kifeszített $\{sv+tw \in T_pM \mid s,t\in[0,1]\}$ paralelogramma területe szerepel, egyszerűen ellenőrizhető, hogy $K(v,w)$ valóban csak a $\sigma := \operatorname{span}(v,w)$ kétdimenziós altértől függ, $K(v,w)$ helyett ezért használatos a $K(\sigma)$ jelölés is.

<u>16.3. Megjegyzés.</u> Emlékeztetünk rá, hogy ha $B: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma a V valós vektortéren, akkor az ehhez csatolt kvadratikus forma a $Q: V\longrightarrow \mathbb{R}$, $v\longmapsto Q(v) := B(v,v)$ függvény, és hogy B rekonstruálható Q-ból a

$$2B(v,w) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$$

polarizációs azonosság alapján.

A p-beli, (v,w)-hez tartozó metszetgörbület definíciójában a lényeges szerepet a

$$\varkappa_p : (T_pM)^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(v,w) \longmapsto g_p(R_p(v,w)w, v) = \mathcal{R}^b_p(v,w,w,v)$$

függvény játssza, hiszen ha v,w g_p-ortonormált vektorok, akkor $\|v\wedge w\| = 1$, és az általánosság sérelme nélkül élhetünk ilyen választással.

Az $\mathcal{R}^b_p : (T_pM)^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v,w,z,u) \longmapsto \mathcal{R}^b_p(v,w,z,u)$ 4-lineáris függvény rögzített $w=z$, ill. $v=u$ mellett 1. és 4., ill. 2. és 3. változójában <u>szimmetrikus</u> bilineáris forma, tekintettel arra, hogy <u>14.2.</u> alkalmazásával például

$$\mathcal{R}^b_p(v,w,w,u) = \mathcal{R}^b_p(w,u,v,w) = \mathcal{R}^b_p(u,w,w,v).$$

Így a $\varkappa_p$ függvény úgy tekinthető, mint az a R^b_p -hez tartozó „bikvadratikus forma", amelyből a polarizációs azonosság alapján rögzített w mellett például az $R^b_p(\cdot, w, w, \cdot) = g_p(R_p(\cdot, w)w, \cdot)$ szimmetrikus bilineáris forma rekonstruálható.

A következő fontos észrevételben a mondottakat az $R^b : (\mathfrak{X}(M))^4 \longrightarrow C^\infty(M)$ Riemann-féle görbületi tenzorra és az ebből származó

$$\varkappa : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$$(X, Y) \longmapsto \varkappa(X, Y) := R^b(X, Y, Y, X) := g(R(X, Y)Y, X)$$

bikvadratikus formára fogjuk alkalmazni.

<u>16.4. Állítás.</u> Egy Riemann-sokaság R görbületi tenzorát a belőle származó

$\varkappa : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, $(X, Y) \longmapsto \varkappa(X, Y) := R^b(X, Y, Y, X) = g(R(X,Y)Y, X)$

bikvadratikus forma egyértelműen meghatározza.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Megmutatjuk, hogy tetszőleges X, Y, Z esetén $R(X, Y)Z$ kifejezhető tisztán $R(X, Y)Y$ alakú tagok segítségével.

$$R(X, Y+Z)(Y+Z) = R(X,Y)Y + R(X,Y)Z + R(X,Z)Y + R(X,Z)Z$$
$$-R(Y, X+Z)(X+Z) = -R(Y,X)X + R(X,Y)Z + R(Z,Y)X - R(Y,Z)Z$$
$$0 = R(X,Y)Z + R(Y,X)Z$$

Összeadva a három relációt, a jobb oldali harmadik oszlop hozzájárulása zérus a Bianchi-azonosság alapján, így azt kapjuk, hogy

$$3R(X,Y)Z = R(X, Y+Z)(Y+Z) - R(Y, X+Z)(X+Z) - R(X,Y)Y -$$
$$- R(X,Z)Z + R(Y,X)X + R(Y,Z)Z.$$

(2) Az előző megjegyzésben mondottakból adódóan tetszőlegesen rögzített $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$R^b(\cdot, Y, Y, \cdot) = g(R(\cdot, Y)Y, \cdot)$$

$C^\infty(M)$-bilineáris függvény, amely ezért $\varkappa$-ból rekonstruálható. Bármely rögzített $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén azt kapjuk tehát, hogy

$$2\, R^b(X,Y,Y,Z) = \varkappa(X+Z,Y) - \varkappa(X,Y) - \varkappa(Z,Y);$$

$X, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(3) Felhasználva a fent észrevételeket, tetszőleges $X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}
6\, g(R(X,Y)Z,U) &= 2\, g(3R(X,Y)Z,U) \\
&\overset{(1)}{=} 2\, g\big(R(X,Y+Z)(Y+Z) - R(Y,X+Z)(X+Z), U\big) \\
&\quad - 2\, g\big(R(X,Y)Y + R(X,Z)Z - R(Y,X)X - R(Y,Z)Z, U\big) \\
&= 2R^b(X,Y+Z,Y+Z,U) - 2R^b(Y,X+Z,X+Z,U) - \\
&\quad - 2R^b(X,Y,Y,U) - 2R^b(X,Z,Z,U) + 2R^b(Y,X,X,U) + 2R^b(Y,Z,Z,U) \\
&= \varkappa(X+U,Y+Z) - \varkappa(X,Y+Z) - \varkappa(U,Y+Z) - \\
&\quad - \varkappa(Y+U,X+Z) + \varkappa(Y,X+Z) + \varkappa(U,X+Z) \\
&\quad - \varkappa(X+U,Y) + \varkappa(X,Y) + \varkappa(U,Y) - \\
&\quad - \varkappa(X+U,Z) + \varkappa(X,Z) + \varkappa(U,Z) + \\
&\quad + \varkappa(Y+U,X) - \varkappa(Y,X) - \varkappa(U,X) + \\
&\quad + \varkappa(Y+U,Z) - \varkappa(Y,Z) - \varkappa(U,Z).
\end{aligned}$$

Így explicit formulát kaptunk R^b $\varkappa$-val való kifejezésére, ami igazolja az állítást. □

<u>16.5. Következmény.</u> A metszetgörbületek ismerete egy Riemann-sokaság összes pontjában teljesen meghatározza a görbületi tenzort. □

<u>16.6. Tétel és definíció</u> (<u>Riemann, 1854</u>).

Kijelölve egy (M,g) Riemann-sokaság egy p pontját, a következő állítások ekvivalensek:

(1) Bármely $\sigma \subset T_pM$ kétdimenziós vektor-altér esetén $K(\sigma) = k$, ahol k egy valós szám.

(2) Bármely $v_1, v_2, v_3 \in T_pM$ érintővektor esetén

$$R(v_1,v_2)v_3 = k\,(v_1 \wedge v_2)(v_3) = k\,\big(g(v_2,v_3)v_1 - g(v_3,v_1)v_2\big).$$

(3) $R_v(w) = k\,(w - g(v,w)v) = k\, pr_v^{\perp}(w)$,

$v, w \in T_pM$; $\|v\|_g = 1$.

(4) $R^{\#}(\omega) = k\omega$, minden $\omega \in \Lambda^2 T_pM$ bivektor esetén.

Ha a felsorolt feltételek valamelyike, és ezért mindegyike, teljesül bármely $p \in M$ pont, és minden p-re ugyanazon $k \in \mathbb{R}$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy a Riemann-sokaság *konstans görbületű*, míg pedig *k konstans görbülettel rendelkezik*.

Bizonyítás. A tételt a következő séma szerint igazoljuk:

$$\begin{tikzcd}
 & (1) \arrow[d, Rightarrow] & \\
(4) \arrow[ur, Rightarrow] & (2) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(a) A $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ implikációk közvetlenül adódnak a megfelelő definíciókból:

(2) teljesülése esetén $v_1 := w$, $v_2 = v_3 := v$ választással kapjuk, hogy

$$R_v(w) := R(w,v)v \overset{(2)}{=} k\,(w \wedge v)(v) \overset{A8(2)}{:=} k\big(g(v,v)w - g(v,w)v\big)$$
$$= k(w - g(v,w)v) = k\, pr_v^{\perp}(w)$$

(kihasználva, hogy a feltétel szerint $g(v,v) = 1$).

Ha $\sigma = span(v,w)$, ahol $\|v\| = 1$, akkor

$$K(\sigma) = K(v,w) := \frac{g(R_v(w), w)}{g(w,w) - (g(v,w))^2} \overset{(3)}{=} \frac{g(k(w - g(v,w)v), w)}{g(w,w) - (g(v,w))^2}$$
$$= \frac{k\,(g(w,w) - (g(v,w))^2)}{g(w,w) - (g(v,w))^2} = k,$$

tehát $(3) \Rightarrow (1)$.

(b) Megmutatjuk, hogy $(1) \Rightarrow (2)$. Legyen ebből a célból

$$R_k(v_1,v_2)v_3 := k\,(v_1\wedge v_2)(v_3)\,,$$
$$R_k^b(v_1,v_2,v_3,v_4) := g\big(R_k(v_1,v_2)v_3\,,v_4\big)$$
$$= k\,g\big((v_1\wedge v_2)(v_3)\,,v_4\big)\,,$$

ahol $v_i\in T_pM$, $i\in\{1,\dots,4\}$ tetszőleges. Ekkor $R_k^b : (T_pM)^4 \to \mathbb{R}$ 4-lineáris függvény, amely rendelkezik a Riemann-féle görbületi tenzor 14.2.-ban megfogalmazott tulajdonságaival. A ferdeszimmetria az első két változóban világos abból, hogy $v_1\wedge v_2 = -v_2\wedge v_1$. A 3. és 4. változóban való ferdeszimmetria abból adódik, hogy az A8/(2)-ben mondottak szerint $v_1\wedge v_2$ ferdeszimmetrikus g-re nézve, és így

$$R_k^b(v_1,v_2,v_4,v_3) := k\,g\big((v_1\wedge v_2)(v_4),v_3\big) = -k\,g\big(v_4,(v_1\wedge v_2)(v_3)\big)$$
$$= -k\,g\big((v_1\wedge v_2)(v_3),v_4\big) =: -R_k^b(v_1,v_2,v_3,v_4)\,.$$

Az algebrai Bianchi-azonosság következik a $v_1\wedge v_2$-re, mint T_pM lineáris transzformációjára vonatkozó Jacobi-Bianchi-azonosságból. E három tulajdonságnak a 14.1. lemma értelmében a párok szerinti szimmetria már következménye.

Legyen

$$T(v_1,v_2,v_3,v_4) := R^b(v_1,v_2,v_3,v_4) - R_k^b(v_1,v_2,v_3,v_4)\,.$$

A T tenzor nyilvánvalóan szintén rendelkezik a 14.2./(1)-(4) szimmetriatulajdonságokkal. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $v,w\in T_pM$ esetén

$$T(v,w,w,v) = 0\,.$$

Föltételezzük, hogy v és w lineárisan független. Ekkor

$$K(v,w) := \frac{R^b(v,w,w,v)}{\|u\wedge v\|^2} \overset{(1)}{=} k\,,$$

így

$$T(v,w,w,v) = k\,\|v\wedge w\|^2 - R_k^b(v,w,w,v) =$$
$$= k\,\|v\wedge w\|^2 - k\,g\big((v\wedge w)(w),v\big)$$

$$= k\|v\wedge w\|^2 - k\, g\big(g(w,w)v - g(w,v)w,\, v\big)$$
$$= k\|v\wedge w\|^2 - k\big(g(v,v)g(w,w) - (g(v,w))^2\big)$$
$$= k\|v\wedge w\|^2 - k\|v\wedge w\|^2 = 0.$$

Így – ismét <u>14.1.</u> alapján – következik, hogy $T=0$; tehát tetszőleges $v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_pM$ esetén

$$R^b(v_1,v_2,v_3,v_4) = R^b_k(v_1,v_2,v_3,v_4),$$

azaz

$$g\big(R(v_1,v_2)v_3, v_4\big) = k\, g\big((v_1\wedge v_2)(v_3), v_4\big),$$

és így

$$R(v_1,v_2)v_3 = k\,(v_1\wedge v_2)(v_3).$$

(c) Belátjuk, hogy <u>(2) $\Rightarrow$ (4).</u> Jelöljünk ki T_pM-ben egy $(e_i)_{i=1}^n$ bázist. Ekkor $(e_i\wedge e_j)_{1\le i<j\le n}$ bázisa $\Lambda^2 T_pM$-nek, és tetszőleges $i,j,l,m \in \{1,\dots,n\}$, $i<j$, $l<m$ indexek esetén

$$g\big(R^\#(e_i\wedge e_j), e_l\wedge e_m\big) := R\big(e_i\wedge e_j, e_l\wedge e_m\big)$$
$$:= R^b(e_i,e_j,e_m,e_l) = g\big(R(e_i,e_j)e_m, e_l\big)$$
$$\overset{(2)}{=} k\, g\big((e_i\wedge e_j)(e_m), e_l\big) = k\, g\big(g(e_j,e_m)e_i - g(e_m,e_i)e_j, e_l\big)$$
$$= k\big(g(e_j,e_m)g(e_i,e_l) - g(e_i,e_m)g(e_j,e_l)\big)$$
$$= -k\big(g(e_i,e_m)g(e_j,e_l) - g(e_i,e_l)g(e_j,e_m)\big)$$
$$= -k\, g(e_i\wedge e_j, e_m\wedge e_l) = k\, g(e_i\wedge e_j, e_l\wedge e_m).$$

A kapott eredményből

$$R^\#(e_i\wedge e_j) = k(e_i\wedge e_j)\ ;\ 1\le i<j\le n$$

következik, ami igazolja a (4) relációt.

(d) <u>(4) $\Rightarrow$ (1)</u> $v,w \in T_pM$ (g-) ortogonális egységvektorokat választva, egyben

$g(v\wedge w, v\wedge w) = 1$, és így

$$k = k\, g(v\wedge w, v\wedge w) \overset{(4)}{=} g\big(R^\#(v\wedge w), v\wedge w\big)$$
$$= K(v,w),$$

tehát (1) teljesül. □

<u>16.7. Tétel</u> (<u>F. Schur, 1886.</u>). Legyen (M,g) legalább háromdimenziós, összefüggő Riemann-sokaság. Tegyük fel, hogy (M,g) eleget tesz az alábbi két feltétel egyikének:

(1) Van olyan $f: M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy bármely $\sigma \subset T_pM$ kétdimenziós altér esetén $K(\sigma) = f(p)$.

(2) Van olyan $f: M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy bármely $p \in M$ pont és $v \in T_pM$ érintővektor esetén
$$\mathrm{Ric}^{\#}(v) = (n-1) f(p) v.$$

<u>Az f függvény mindkét esetben konstans</u>; az első esetben (M,g) konstans görbületű Riemann-sokaság, a második esetben Einstein-sokaság.

<u>Bizonyítás.</u> Vegyük észre, hogy (2) éppen azt fejezi ki, hogy (M,g) Einstein-sokaság, ugyanis tetszőleges $v, w \in T_pM$ esetén
$$\mathrm{Ric}(v,w) = g(\mathrm{Ric}^{\#}(v), w) \overset{(2)}{=} (n-1) f(p) g(v,w),$$
így
$$\mathrm{Ric} = (n-1) f g.$$
Ekkor azonban <u>14.13.</u> értelmében az f függvény konstans, így ha belátjuk, hogy $(1) \Rightarrow (2)$, akkor a bizonyítás teljessé válik.

Tegyük föl tehát (1) teljesülését, és jelöljük ki T_pM-nek egy $(e_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisát. Ekkor
$$K(e_i, v) = \frac{g(R_{e_i} v, v)}{\|v\|^2 - (g(e_i,v))^2} = f(p), \quad i \in \{1, \dots, n\};$$
tetszőleges $v \in T_pM \setminus \mathrm{span}(e_i)$ esetén. Innen

$$\sum_{i=1}^{n} g(R_{e_i}(v), v) = f(p)\Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\|v\|^2 - (g(e_i,v))^2\big)\Big)$$

$$= f(p)\Big(n\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(g(e_i,v))^2\Big) = f(p)\big(n\|v\|^2 - \|v\|^2\big)$$

$$= f(p)(n-1)\|v\|^2 = f(p)(n-1)g(v,v).$$

Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n} g(R_{e_i}(v), v) = \sum_{i=1}^{n} g(R(v,e_i)e_i, v) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R^\flat(v, e_i, e_i, v) \overset{14.5.}{=} \mathrm{Ric}(v,v) = g(\mathrm{Ric}^\#(v), v),$$

és így

$$g(\mathrm{Ric}^\#(v), v) = g(f(p)(n-1)v, v).$$

Ebből a polarizációs azonosság alapján

$$g(\mathrm{Ric}^\#(v), w) = g(f(p)(n-1)v, w)$$

következik, amiből a kívánt

$$\mathrm{Ric}^\#(v) = f(p)(n-1)v$$

összefüggéshez jutunk. □

<u>16.8. Állítás.</u> Minden 3-dimenziós, összefüggő Einstein-sokaság konstans görbületű.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen (M,g) 3-dimenziós összefüggő Einstein-sokaság. Válasszunk ki egy $p\in M$ pontot, és jelöljük ki a T_pM érintőtér egy (e_1,e_2,e_3) ortonormált bázisát. Ekkor minden $1 \le i < j \le 3$ esetén

$$K_{ij} := K(e_i,e_j) := g(R(e_j,e_i)e_i, e_j) =$$

$$= R^\flat(e_j,e_i,e_i,e_j) = R^\flat(e_i,e_j,e_j,e_i).$$

Másrészt

$$\mathrm{Ric}(e_1,e_1) \overset{14.5.}{=} \sum_{i=1}^{3} R^\flat(e_1,e_i,e_i,e_1) =$$

$$= R^\flat(e_1,e_2,e_2,e_1) + R^\flat(e_1,e_3,e_3,e_1);$$

hasonlóan

$$\mathrm{Ric}(e_2,e_2) = R^\flat(e_2,e_1,e_1,e_2) + R^\flat(e_2,e_3,e_3,e_2),$$

$$\mathrm{Ric}(e_3,e_3) = R^\flat(e_1,e_3,e_3,e_1) + R^\flat(e_2,e_3,e_3,e_2),$$

így

$$K_{12} + K_{13} = \mathrm{Ric}(e_1, e_1) ,$$
$$K_{12} + K_{23} = \mathrm{Ric}(e_2, e_2) ,$$
$$K_{13} + K_{23} = \mathrm{Ric}(e_3, e_3) .$$

Másrészt az Einstein-feltétel miatt van olyan λ valós szám, hogy bármely $p \in M$ pont esetén $\mathrm{Ric}_p = \lambda g_p$. Így

$$\mathrm{Ric}(e_i, e_j) = \lambda g(e_i, e_j) = \lambda \delta_{ij} \ ; \ i, j \in \{1, 2, 3\},$$

következésképpen

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} K_{12} + K_{13} &= \lambda \\ K_{12} + K_{23} &= \lambda \end{aligned}\right\} &\Rightarrow K_{13} = K_{23} \\ K_{13} + K_{23} &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{13} = K_{23} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow K_{12} = \frac{\lambda}{2} .$$

Tekintettel az (e_1, e_2, e_3) ortonormált bázis tetszőlegességére, megállapíthatjuk, hogy (M, g) metszetgörbülete bármely $p \in M$ pont és $\Theta \subset T_pM$ kétdimenziós altér esetén ugyanaz a $K(\Theta) = \frac{\lambda}{2}$ érték, (M, g) tehát konstans görbületű. □

<u>16. 9. A modell-terek</u> A következőkben vázoljuk, hogy $(\mathbb{R}^n, g_0)$, ahol g_0 a <u>kanonikus Riemann-struktúra</u> (ld. <u>11.2.</u>/(1)); (S^n, g), ahol S^n $\mathbb{R}^{n+1}$ <u>egységgömbje</u>, g pedig a $g_0 \in \mathcal{T}^0_2(\mathbb{R}^{n+1})$ kanonikus Riemann-struktúra által indukált metrikus tenzor (tetszőleges $p \in S^n$ esetén $g_p := g_0 \restriction T_pS^n \times T_pS^n$), továbbá a (H^n, g) <u>n-dimenziós hiperbolikus tér</u> (ahol $H^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid e^n(p) > 0\}$, g pedig a Poincaré-metrika: $g_p(v, w) := \frac{1}{(e^n(p))^2} (g_0)_p(v, w)$; ld. <u>11.2.</u>/(7)) rendre <u>0, 1 és -1 konstans görbületű Riemann-sokaságok</u>; ezeket a Riemann-sokaságokat szokás <u>modell-tereknek</u> nevezni.

(1) $\mathbb{R}^n$ érintőterei megadhatók a $T_p\mathbb{R}^n := \{p\} \times \mathbb{R}^n$ $(p \in \mathbb{R}^n)$ előírással, ezek vektortér-struktúráját ekkor a

$$(p,v)+(p,w) := (p, v+w), \quad \lambda(p,v) := (p, \lambda v)$$

$(v,w \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R})$ összeadás, ill. skalárral való szorzás értelmezi. (p,v) helyett gyakran egyszerűen v_p-t vagy $\underline{v}$-t írunk. $\mathbb{R}^n$ érintőnyalábja (vagy annak totáltere) $T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. $T\mathbb{R}^n$ szeletei, azaz $\mathbb{R}^n$ vektormezői az

$$\underline{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n, \quad p \longmapsto \underline{X}(p) =: \underline{X}_p := (p, X(p))$$

alakban adhatók meg, ahol $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sima leképezés. Azt is mondjuk, hogy X a vektormező fő része, és $\mathbb{R}^n$ vektormezőit gyakran azonosítjuk a fő részükkel. Ha $(e_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa, akkor az

$$E_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow T\mathbb{R}^n, \quad p \longmapsto (E_i)_p := (p, e_i)\ ; \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

leképezések vektormezők, ezek $(E_i)_{i=1}^n$ sorozata $\mathbb{R}^n$ <u>természetes n-élmezője</u>. $(E_i)_{i=1}^n$ bázisa az $\mathbb{R}^n$ vektormezői által alkotott $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-modulusnak.

Egy $\underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormezőnek egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ <u>érintővektor szerinti természetes kovariáns deriváltja</u>

$$D_{v_p}\underline{Y} := (p, D_v Y(p)) \in T_p\mathbb{R}^n,$$

ahol Y a vektormező fő része és

$$(D_v Y)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(Y(p+tv) - Y(p)\big) = Y'(p)(v);$$

$\mathbb{R}^n$-en a <u>természetes kovariáns deriválás</u> a

$$D : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \quad (\underline{X},\underline{Y}) \longmapsto D_{\underline{X}}\underline{Y}\ ;$$
$$(D_{\underline{X}}\underline{Y})(p) := D_{\underline{X}(p)}\underline{Y} \quad (p \in \mathbb{R}^n)$$

leképezés. <u>8.13.</u>-ban láttuk, hogy D <u>torziómentes</u>

és a görbületi tenzora is eltűnik.

$\mathbb{R}^n$-en a kanonikus Riemann-struktúra megadható a

$$\left\| \begin{array}{l} g_0 : p \in \mathbb{R}^n \longmapsto (g_0)_p \in T_2^0(T_p\mathbb{R}^n), \\ (g_0)_p(v_p, w_p) := \langle v, w \rangle \qquad (v, w \in \mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

előírással, ahol $\langle \, , \rangle$ a kanonikus skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-en. Az $(\mathbb{R}^n, g_0)$ Riemann-sokaságon a Levi-Civita derivált éppen a természetes kovariáns derivált, így $(\mathbb{R}^n, g_0)$ zérus görbületi tenzorral, s ennélfogva zérus konstans görbülettel rendelkezik.

(2) (A) Az (S^n, g) Riemann-sokaság vizsgálatát egy általánosabb észrevétellel készítjük elő.

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sima függvény, $M := f^{-1}(0)$ nem üres, és hogy f szubmerzió M pontjaiban. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$, ha $p \in M$. Ekkor M n-dimenziós részsokasága – hiperfelülete – $\mathbb{R}^{n+1}$-nek (ld. 4.8.), így „saját jogán" n-dimenziós sokaság. M tetszőleges p pontbeli érintőtere megadható a

$$T_pM = \{ v_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1} \mid \langle (\operatorname{grad} f)(p), v \rangle = 0 \}$$

alakban. $\mathbb{R}^{n+1}$ g_0 kanonikus metrikus tenzora metrikus tenzort indukál M-en a

$$\left\| \begin{array}{l} g : p \in M \longmapsto g_p \in T_2^0(T_pM) ; \\ g_p(v_p, w_p) := (g_0)_p(v_p, w_p) := \langle v, w \rangle \end{array} \right.$$

előírás szerint; így az (M, g) Riemann-sokasághoz jutunk.

Vezessük be az M hiperfelület normál-egységvektormezőjét az

$$\left\| \begin{aligned} &\underline{N} : \; p \in M \longmapsto \underline{N}(p) \in (T_p M)^{\perp_{g_0}} \; ; \\ &\underline{N}(p) := \left(p, \frac{1}{\|(\mathrm{grad} f)(p)\|} (\mathrm{grad} f)(p)\right) = \frac{1}{\|(\mathrm{grad} f)(p)\|} \left(p, (\mathrm{grad} f)(p)\right) \end{aligned} \right.$$

előírással, majd – felhasználva $\mathbb{R}^{n+1}$ D természetes kovariáns deriváltját –, tetszőleges $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ esetén legyen

$$\nabla_{\underline{X}} \underline{Y} := D_{\underline{X}} \underline{Y} - g_0 \left(D_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N} \right) \underline{N} .$$

Ekkor $g_0 \left(\nabla_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N} \right) = 0$, így $\nabla_{\underline{X}} Y \in \mathfrak{X}(M)$, és közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy a

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \; (\underline{X}, \underline{Y}) \longmapsto \nabla_{\underline{X}} \underline{Y}$$

leképezés torziómentes, metrikus kovariáns deriválás, tehát – a 12.2. tétel unicitás-állítása értelmében – a Levi-Civita deriválás M-en.

(B) Rátérünk az $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ egységgömb vizsgálatára. Ha

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto f(p) := \langle p, p \rangle - 1,$$

akkor $f^{-1}(0) = S^n$. Az f függvény differenciálható, tetszőleges p pontbeli deriváltja az

$$f'(p)(v) = \langle 2p, v \rangle , \quad v \in \mathbb{R}^n$$

formula szerint hat. Így f gradiense bármely $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontban a

$$(\mathrm{grad} f)(p) = 2p$$

előírás szerint hat. grad f csak a 0-ban zérusvektor, így f szubmerzió S^n pontjaiban, s ezért S^n n-dimenziós részsokasága $\mathbb{R}^{n+1}$-nek. Felruházva az így adódó sima struktúrával, S^n n-dimenziós sokasággá válik. Az (A)-ban mondottak szerint S^n tetszőleges p pontbeli érintőtere megadható a

$$T_p S^n = \{ v_p \in T_p \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0 \}$$

alakban, hiszen most $(\operatorname{grad} f)(p) = 2p$. $\mathbb{R}^{n+1}$ g_0 kanonikus metrikus tenzora ugyanazok az (A)-ban mondottak szerint egy $g \in \mathcal{T}^0_2(S^n)$ metrikus tenzort indukál S^n-en; így jutunk az (S^n, g) Riemann-sokasághoz.

S^n (egyik) normál-egységvektormezője az
$$\underline{N}: p \in S^n \longmapsto \underline{N}(p) = (p, p) = p_p \in (T_p S^n)^{\perp}$$
leképezés. Ha
$$\tilde{N} := \sum_{i=1}^{n+1} e^i E_i ,$$
ahol $(e^i)_{i=1}^{n+1}$ $\mathbb{R}^{n+1}$ kanonikus koordinátarendszere, $(E_i)_{i=1}^{n+1}$ pedig a természetes $(n+1)$-élmező $\mathbb{R}^{n+1}$-en, akkor $\tilde{N} \upharpoonright S^n = \underline{N}$. Ha D a természetes kovariáns deriválás $\mathbb{R}^{n+1}$-en, akkor tetszőleges $\underline{v} \in T_p S^n$ érintővektor esetén $D_{\underline{v}} \underline{N} = D_{\underline{v}} \tilde{N}$, és így bármely $\underline{X} \in \mathfrak{X}(S^n)$ vektormező esetén
$$D_{\underline{X}} \underline{N} = D_{\underline{X}} \tilde{N} = D_{\underline{X}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} e^i E_i \right) = \sum_{i=1}^{n+1} (\underline{X} e^i) E_i = \underline{X} .$$

Felhasználva ezt az észrevételt, a Levi-Civita deriválás S^n-en a
$$\boxed{\nabla_{\underline{X}} \underline{Y} = D_{\underline{X}} \underline{Y} + g_0(\underline{X}, \underline{Y}) \underline{N} \ ; \ \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(S^n)}$$
formulával adható meg, ugyanis
$$\nabla_{\underline{X}} \underline{Y} \overset{(A)}{:=} D_{\underline{X}} \underline{Y} - g_0(D_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N}) \underline{N} ,$$
s mivel $g_0(\underline{Y}, \underline{N}) = 0$, következik, hogy
$$0 = \underline{X}(g_0(\underline{Y}, \underline{N})) = g_0(D_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N}) + g_0(\underline{Y}, D_{\underline{X}} \underline{N})$$
$$= g_0(D_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N}) + g_0(\underline{X}, \underline{Y}) ,$$
ahonnan $g_0(D_{\underline{X}} \underline{Y}, \underline{N}) = -g_0(\underline{X}, \underline{Y})$. A Levi-Civita derivált ismeretében egyszerűen levezethető

(S^n, g) görbületi tenzorára az

$$\underline{R(\underline{X},\underline{Y})\underline{Z} = g_0(\underline{Y},\underline{Z})\underline{X} - g_0(\underline{Z},\underline{X})\underline{Y}}$$

$$(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z} \in \mathfrak{X}(S^n))$$

formula, amiből a „Riemann-tétel" (<u>16.6.</u> (2)) alapján következik, hogy (S^n, g) <u>1 konstans görbülettel rendelkező Riemann-sokaság</u>.

(3) A $(\mathbb{H}^n, g)$ hiperbolikus teret csak az $n = 2$ esetben tárgyaljuk – ekkor <u>hiperbolikus síkról</u> szólunk –; az általános esetben a metszetgörbületek kiszámítása bonyolultabb. Most tehát

$$\mathbb{H}^2 := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid e^2(p) > 0\};$$

(e^1, e^2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus koordinátarendszere. $\mathbb{H}^2$ $\mathbb{R}^2$-nek nyílt részsokasága, s mint ilyen, kétdimenziós sokaság. $\mathbb{H}^2$ kanonikus koordinátarendszere az

$$(x, y) \quad ; \quad x := e^1 \restriction \mathbb{H}^2, \quad y := e^2 \restriction \mathbb{H}^2$$

függvénypár. Tetszőleges $p \in \mathbb{H}^2$ pont esetén

$$T_p \mathbb{H}^2 = T_p \mathbb{R}^2 = \{p\} \times \mathbb{R}^2 ;$$

$\mathbb{H}^2$ (E_1, E_2) természetes költőmezőjét az

$$\underline{E}_i : p \in \mathbb{H}^2 \longmapsto \underline{E}_i(p) := (p, e_i) = (e_i)_p \ , \quad i \in \{1, 2\}$$

vektormezők alkotják. A

$$g : p \in \mathbb{H}^2 \longmapsto g_p \in T^0_2(T_p \mathbb{H}^2)$$

Poincaré-metrika a

$$\underline{g_p(v_p, w_p) := \frac{\langle v, w \rangle}{(y(p))^2}} \quad ; \quad v, w \in \mathbb{R}^2$$

formulával adható meg. A $g \in T^0_2(\mathfrak{X}(\mathbb{H}^2))$ interpretációt alkalmazva,

$$g(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{1}{y^2} \langle X, Y \rangle \ ;$$

$\underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$; X és Y a vektormezők fő része az (1)-ben mondottak mintájára. g komponens -

függvényei az $(\underline{E}_1, \underline{E}_2)$ kétbázisra vonatkozóan a

$$g_{ij} := g(\underline{E}_i, \underline{E}_j) = \frac{1}{y^2}\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}\ ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

függvények.

(A) A $(\mathbb{H}^2, g)$ Riemann-sokaságon a ∇ Levi-Civita derivált Christoffel-szimbólumaira a 17.7.-ban felírt általános formula $\left(\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}g_{kl} + \frac{\partial}{\partial u^k}g_{lj} - \frac{\partial}{\partial u^l}g_{jk}\right)\right)$ egyszerűen a következő alakot ölti:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{il}\left(D_j g_{kl} + D_k g_{lj} - D_l g_{jk}\right),$$

ahol $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = (y)^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Így

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{1l}\left(D_1 g_{1l} + D_1 g_{l1} - D_l g_{11}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{11}\left(D_1 g_{11} + D_1 g_{11} - D_1 g_{11}\right) \qquad (\text{mert } g^{12} = 0)$$

$$= \frac{1}{2}(y)^2 \cdot 0 \quad = 0$$

Hasonlóan egyszerű számolásokkal kapható a többi Christoffel-szimbólum is, ezek teljes listája

$$\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{22} = 0,$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

A görbületi tenzor komponensfüggvényei az

$$R(\underline{E}_j, \underline{E}_k)\underline{E}_l = \sum_{i=1}^{2} R^i_{jkl}\,\underline{E}_i\ ; \quad j,k,l \in \{1,2\}$$

reláció által meghatározott R^i_{jkl} függvények; számuk $2^4 = 16$. Explicite:

$$R^i_{jkl} = D_j\Gamma^i_{kl} - D_k\Gamma^i_{jl} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl}\right),$$

$i,j,k,l \in \{1,2\}$.

A Christoffel-szimbólumok ismeretében egyszerűen kapjuk, hogy az R^i_{jkl} függvények közül csak

6 különbözik zérustól, nevezetesen

$$R^1_{\ 122} = -R^1_{\ 212} = R^2_{\ 211} = -R^2_{\ 121} = R^2_{\ 122} = -R^2_{\ 212} = -\frac{1}{(y)^2}.$$

Mivel $(\mathbb{H}^2, g)$ kétdimenziós Riemann-sokaság, a metszetgörbületek a Gauss-görbületre (ld. 14.14.) redukálódnak. Így

$$\boxed{K} = \frac{R^b(E_1, E_2, E_2, E_1)}{g(E_1,E_1)\,g(E_2,E_2) - (g(E_1,E_2))^2} = (y)^4\, g\left(R(E_1,E_2)E_2, E_1\right) =$$

$$= (y)^4\, g\left(R^1_{\ 122} E_1 + R^2_{\ 122} E_2, E_1\right) = (y)^4 R^1_{\ 122}\, g(E_1,E_1)$$

$$= (y)^4 \cdot -\frac{1}{(y)^2} \cdot \frac{1}{(y)^2} = \underline{\underline{-1}}.$$

(B) **Lemma.** Egy $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\end{pmatrix} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ (g-re nézve) konstans pályasebességű görbe akkor és csak akkor geodetikusa $(\mathbb{H}^2, g)$-nek, ha komponensfüggvényeire

$$\begin{cases} \gamma^{1\,\prime\prime} - 2\dfrac{\gamma^{1\,\prime}\gamma^{2\,\prime}}{\gamma^2} = 0 \\[2mm] \gamma^{2\,\prime\prime} + \dfrac{(\gamma^{1\,\prime})^2 - (\gamma^{2\,\prime})^2}{\gamma^2} = 0 \end{cases}$$

teljesül, azaz ha γ eleget tesz az

$$\begin{cases} x'' - 2\dfrac{x'y'}{y} = 0 \\[2mm] y'' + \dfrac{(x')^2 - (y')^2}{y} = 0 \end{cases}$$

közönséges másodrendű differenciálegyenlet-rendszernek.

Valóban – ld. 10.3. (G) – a geodetikus egyenlet

$$\begin{cases} (x^1)' + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} (\Gamma^1_{jk} \circ x)\, x^{j\,\prime} x^{k\,\prime} = 0 \\[2mm] (x^2)' + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} (\Gamma^2_{jk} \circ x)\, x^{j\,\prime} x^{k\,\prime} = 0 \end{cases}$$

($(x,y) := (x^1, x^2)$). Mivel most $\Gamma^1_{jk} = -\frac{1}{y}$, ha $j \neq k$ és $\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 0$, ill. $\Gamma^2_{jk} = 0$, ha $j \neq k$ és $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$, $\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$, a felírt egyenletekhez jutunk.

(C) **Lemma** (a megmaradási szabály). Ha $\gamma = \binom{\gamma^1}{\gamma^2} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ geodetikusa a hiperbolikus síknak, akkor az

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto f(t) := g(\gamma', \underline{E}_1 \circ \gamma)(t) := g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \underline{E}_1(\gamma(t)))$$

függvény konstans.

Bizonyítás. γ sebességvektormezője a

$$\gamma' = (\gamma^{1\prime} \underline{E}_1 + \gamma^{2\prime} \underline{E}_2) \circ \gamma$$

alakban állítható elő. Mivel

$$(g_{ij}) = (g(\underline{E}_i, \underline{E}_j)) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

azt kapjuk, hogy

$$g(\gamma', \underline{E}_1 \circ \gamma) = g(\gamma^{1\prime}(\underline{E}_1 \circ \gamma) + \gamma^{2\prime}(\underline{E}_2 \circ \gamma), \underline{E}_1 \circ \gamma)$$

$$= \gamma^{1\prime} g(\underline{E}_1, \underline{E}_2) \circ \gamma + \gamma^{2\prime} g(\underline{E}_2, \underline{E}_1) \circ \gamma$$

$$= \gamma^{1\prime}\left(\frac{1}{(y)^2} \circ \gamma\right) = \frac{\gamma^{1\prime}}{(\gamma^2)^2}.$$

Így

$$f' = \left(\frac{\gamma^{1\prime}}{(\gamma^2)^2}\right)' = \frac{\gamma^{1\prime\prime}(\gamma^2)^2 - 2\gamma^{1\prime}\gamma^2\gamma^{2\prime}}{(\gamma^2)^4} \overset{(B)}{=} \frac{\gamma^{1\prime\prime}(\gamma^2)^2 - \gamma^{1\prime\prime}(\gamma^2)^2}{(\gamma^2)^4} = 0. \quad \square$$

(D) **Tétel** A $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus sík összes geodetikusai a

$$t \in]0, \infty[\longmapsto (\alpha, t) = (\alpha, 0) + t e_2 \in \mathbb{H}^2$$

alakú paraméterezett félegyenesek ($\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített), továbbá azok a konstans pályasebességű paraméterezett félkörök, melyeknek középpontja a span(e_1) „x-tengely"-en van.

Bizonyítás. Ha $\gamma = \binom{\gamma^1}{\gamma^2} : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ geodetikus, akkor a megmaradási szabály alapján a $g(\gamma', \underline{E}_1 \circ \gamma)$ függvény konstans, ami – mint láttuk – arra vezet, hogy a $\gamma^{1\prime}\frac{1}{(\gamma^2)^2}$ függvény konstans. Így γ-nak eleget kell tennie a

(*) $$x' \frac{1}{(y)^2} = \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

<u>elsőrendű</u> közönséges differenciálegyenletnek. (A megmaradási szabály jelentőségét az ilyen redukciós lehetőség adja!)

<u>1. eset:</u> <u>$\lambda = 0$</u>.

Ekkor (*) $\mathbb{H}^2$-beli megoldásai

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (\alpha, h(t)) \in \mathbb{H}^2$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig pozitív értékű differenciálható függvény. Mivel a pályasebesség konstans, következik, hogy $h' = 0$, s így a megoldás megadható

$$t \in]0, \infty[\longmapsto (\alpha, t) \in \mathbb{H}^2$$

alakban.

<u>2. eset:</u> <u>$\lambda \neq 0$</u>.

Ekkor a keresett $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$ geodetikusra teljesül, hogy $\gamma^{1\prime}$ sehol sem tűnik el. Megkívánva, hogy γ egységpályasebességű legyen, a $g(\gamma', \gamma') = 1$ feltétel azt adja, hogy

$$1 = \frac{1}{(y \circ \gamma)^2} (\gamma^{1\prime} \; \gamma^{2\prime}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{1\prime} \\ \gamma^{2\prime} \end{pmatrix} = \frac{(\gamma^{1\prime})^2 + (\gamma^{2\prime})^2}{(\gamma^2)^2} .$$

(*) miatt $\gamma^{1\prime} = \lambda (\gamma^2)^2$; ezt figyelembe véve, a

$$\frac{\lambda^2 (\gamma^2)^4 + (\gamma^{2\prime})^2}{(\gamma^2)^2} = 1$$

relációhoz jutunk. Innen

$$\gamma^{2\prime} = \pm \gamma^2 \sqrt{1 - \lambda^2 (\gamma^2)^2} .$$

Keressük a γ görbét $t \longmapsto (t, k(t))$ alakban! Ekkor, minthogy (*) miatt, $\lambda k^2 = 1$ (és így $\lambda > 0$), s egyenletünk a

$$k' = \pm\, k\sqrt{1-\lambda^2 k^2} = \pm\, \lambda k \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - k^2}$$

$$= \pm\, \frac{1}{k}\sqrt{\varrho^2 - k^2} \quad ; \quad \varrho := \frac{1}{\lambda}$$

alakot ölti. A hagyományos írásmódot használva, a keresett függvény annak az

$$y' = f(x)\, h(y)$$

szeparábilis differenciálegyenletnek tesz eleget, ahol

$$f(t) = \pm 1\,,\ t \in \mathbb{R}\,; \quad h(t) := \frac{\sqrt{\varrho^2 - t^2}}{t}\,.$$

Ismeretes, hogy a differenciálegyenlet megoldásai

$$H(y) = F(x) + \alpha$$

implicit egyenlettel adhatók meg, ahol F f-nek, H pedig $\frac{1}{h}$-nak primitív függvénye. Esetünkben $F(x) = \pm x$,

$$H(y) = \int \frac{y}{\sqrt{\varrho^2 - y^2}} = -\sqrt{\varrho^2 - y^2}\,,$$

így a megoldásgörbék egyenlete

$$-\sqrt{\varrho^2 - y^2} = \pm(x + \alpha)\,,$$

ahonnan az

$$(x+\alpha)^2 + y^2 = \varrho^2$$

egyenlethez jutunk. Így most a geodetikusok képe olyan $\mathbb{H}^2$-beli félkör, amelynek középpontja az x-tengelyen van. □

(E) A $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus sík egy $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\end{pmatrix} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ szakaszonként sima görbéjének ívhosszát megadja az

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y \circ \gamma} \sqrt{(\gamma^{1\prime})^2 + (\gamma^{2\prime})^2}$$

formula.

Valóban, egy szakaszonként sima $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ görbe ívhosszát tetszőleges (M,g) Riemann-sokaság esetén az $L_g(\gamma) := \int_a^b \|\dot\gamma\|_g$ formula értelmezi, ahol

$$\|\dot\gamma\|_g(t) := \left(g_{\gamma(t)}\left(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right)\right)^{1/2}, \quad t \in [a,b].$$

Esetünkben

$$\|\dot\gamma\|_g(t) = \left(\frac{1}{[y(\gamma(t))]^2} \left(\gamma^{1\prime}(t), \gamma^{2\prime}(t)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{1\prime}(t) \\ \gamma^{2\prime}(t) \end{pmatrix} \right)^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{[y(\gamma(t))]^2} \left((\gamma^{1\prime})^2(t) + (\gamma^{2\prime})^2(t) \right) \right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{y(\gamma(t))} \sqrt{(\gamma^{1\prime}(t))^2 + (\gamma^{2\prime}(t))^2},$$

ami a tett észrevételt adja.

(F) $(\mathbb{H}^2, g)$ izometriacsoportja

(i) Myers – Steenrod tétel (Annals of Math. 40 (1939), 400–416) Legyen (M,g) és $(N,\bar g)$ összefüggő Riemann-sokaság, és tegyük föl, hogy $\varphi : M \longrightarrow N$ távolságtartó bijekció a d_g, ill. $d_{\bar g}$ távolságfüggvényre nézve. Ekkor φ Riemann-izometria, vagyis olyan diffeomorfizmus M és N között, amelyre tetszőleges $p \in M$ pont és $u, v \in T_pM$ érintővektorok esetén

$$\bar g_{\varphi(p)}\left((\varphi_*)_p(u), (\varphi_*)_p(v)\right) = g_p(u,v)$$

teljesül. Δ

A tétel megfordítása (ha $\varphi : M \longrightarrow N$ Riemann-izometria, akkor φ távolságtartó bijekció az (M, d_g) és az $(N, d_{\bar g})$ metrikus tér között) egyszerűen ellenőrizhető. Megállapíthatjuk speciálisan, hogy ha (M,g) (összefüggő) Riemann-sokaság, *akkor (M, g) önmagára való Riemann-izometriáinak csoportja egybeesik az (M, d_g) metrikus tér távolságtartó bijekcióinak csoportjával.*

(iii) Leírjuk a $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus sík önmagára való Riemann-izometriáinak csoportját, ezzel az (i)-ben mondottak értelmében megkapjuk $\mathbb{H}^2$ bijektív távolságtartó transzformációinak csoportját (azaz a Hiperbolikus geometria kurzuson tárgyalt $\mathrm{iso}(\mathbb{H}^2)$ csoportot).

Tétel. A $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus sík Riemann-izometriáinak csoportját a következő transzformációk generálják:

φ_1: $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^2 \longmapsto (\xi + \lambda, \eta) \in \mathbb{H}^2$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ – *transzláció* az x-tengely mentén;

φ_2: $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^2 \longmapsto (\lambda\xi, \lambda\eta) \in \mathbb{H}^2$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*_+)$ – pozitív arányú *nyújtás*;

φ_3: $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^2 \longmapsto (-\xi, \eta) \in \mathbb{H}^2$ – *tükrözés* az y-tengelyre;

φ_4: $(\xi, \eta) \in \mathbb{H}^2 \longmapsto \left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right) \in \mathbb{H}^2$ – az $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ egységkörre vonatkozó *inverzió* $\mathbb{H}^2$-re való leszűkítése.

Az, hogy a felsorolt transzformációk Riemann-izometriák, közvetlen számolással ellenőrizhető. Világos például, hogy φ_2 diffeomorfizmus, és hogy bármely $p \in \mathbb{H}^2$ esetén $\varphi_2'(p) = \varphi_2$. Így tetszőleges $p \in \mathbb{H}^2$ pontot és $u, v \in \mathbb{R}^2$ vektorokat tekintve,

$$g_{\varphi_2(p)}(\varphi_2'(p)(u), \varphi_2'(p)(v)) = g_{\varphi_2(p)}(\varphi_2(u), \varphi_2(v)) =$$

$$= g_{\varphi_2(p)}(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 g_{\varphi_2(p)}(u,v) := \lambda^2 \frac{\langle u,v\rangle}{[y(\lambda p)]^2} =$$

$$= \lambda^2 \frac{\langle u,v\rangle}{\lambda^2 (y(p))^2} = \frac{\langle u,v\rangle}{(y(p))^2} =: g_p(u,v)$$

(a rövidség kedvéért a p-beli érintővektorokat azonosítottuk a vektori részükkel).

Annak megmutatása, hogy a felsorolt transzformációk valóban generálják az izometriacsoportot, már finomabb meggondolásokat igényel (ld. pl. Hiperbolikus geometria).

16.10. Térformák

(1) A Hopf–Rinow tétel (1931) Egy (M,g) összefüggő Riemann-sokaságra a következők ekvivalensek:

(MC) M a d_g Riemann-távolságfüggvényre nézve teljes metrikus tér, azaz minden Cauchy-sorozata konvergens – metrikus teljesség.

(C_1) Van olyan $p \in M$ pont, hogy az $\exp_p$ p-beli exponenciális leképezés értelmezve van a teljes T_pM érintőtéren.

(C) (M,g) minden maximális geodetikusa értelmezve van a teljes valós számegyenesen – geodetikus teljesség.

(HB) M minden korlátos, zárt részhalmaza kompakt – Heine–Borel tulajdonság.

Ha e négy feltétel valamelyike – és így mindegyike – teljesül, akkor M bármely két pontja összeköthető szakasszal, azaz minimalizáló geodetikussal.

A bizonyítást illetően ld. pl. O'Neill: Semi-Riemannian geometry; 138–140. old. A kulcslépés annak a megmutatása, hogy a (C_1) tulajdonság teljesülése esetén minden $q \in M$ pont összeköthető p-ből induló szakasszal.

A továbbiakban teljes Riemann-sokaságon olyan (összefüggő) Riemann-sokaságot értünk, amely rendelkezik az (MC), (C_1), (C), (HB) tulajdonságok valamelyikével.

(2) Egy összefüggő, teljes, konstans görbületű Riemann-sokaságot térformának nevezünk. Egy térformát elliptikusnak, euklideszinek, ill. hiperbolikusnak mondunk aszerint, amint a görbületi konstans pozitív, zérus, ill. negatív.

A következő alapvető eredmény szerint egyszeresen összefüggő térforma lényegében csak a 16.9.-ben tárgyalt modell-terek egyike és csakis egyike lehet.

Killing–Hopf tétel (1891/1925). Ha (M, g) n-dimenziós, egyszeresen összefüggő, teljes, $k \in \{1, 0, -1\}$ konstans görbülettel rendelkező Riemann-sokaság, akkor (M, g) izometrikus

(i) az (S^n, g) Riemann-sokasággal, ha $k = 1$;

(ii) az $(\mathbb{R}^n, g_0)$ euklideszi térrel, ha $k = 0$;

(iii) a $(\mathbb{H}^n, g_0)$ hiperbolikus térrel, ha $k = -1$.

Pontosabban: kijelölve egy $p \in M$ pontot, valamint egy q pontot az S^n, $\mathbb{R}^n$, ill. $\mathbb{H}^n$ sokaságból aszerint, amint $k = 1$, $k = 0$, ill. $k = -1$, és megadva egy $\varphi : T_pM \longrightarrow T_qN$, $N \in \{S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n\}$ skalárisszorzat-tartó lineáris leképezést, létezik pontosan egy olyan $F : M \longrightarrow N \in \{S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n\}$ Riemann-izometria, hogy $(F_*)_p = \varphi$. $\triangle$

17. Irányított sokaságok

17.1. Definíció és lemma. (1) Egy n-dimenziós sokaságon adott térfogati formán sehol sem zérus n-edfokú differenciálformát értünk. Tehát: ha M n-dimenziós sokaság, $\omega \in \Omega^n(M)$ és $\omega_p \neq 0$ ($\in \Lambda^n T_p^*M$) teljesül minden $p \in M$ pont esetén, akkor ω térfogati M-en.

(2) Ha ω_1 és ω_2 térfogati forma egy M sokaságon, akkor létezik pontosan egy $f \in C^\infty(M)$ függvény oly módon, hogy $\omega_2 = f\omega_1$, és ez az f függvény sehol sem vehet föl zérust. Nevezzük ω_1-et és ω_2-t relációban állónak, ha az f függvény mindenütt pozitív - azaz legyen

$$\omega_1 \sim \omega_2 \overset{\text{def.}}{\iff} \omega_2 = f\omega_1;\ f \in C^\infty(M),\ f(p) > 0 \text{ minden } p \in M \text{ esetén.}$$

Ez a reláció ekvivalenciareláció.

(3) Egy sokaságot irányíthatónak nevezünk, ha létezik rajta térfogati forma. Irányítható sokaság egy irányításán a sokaság ekvivalens térfogati formáinak egy ekvivalenciaosztályát értjük. Irányítható sokaság egy irányításának kijelölése után a sokaságot irányítottnak mondjuk.

17.2. Megjegyzések. (1) Értelemszerűen, egy sokaságot nem irányíthatónak nevezünk, ha nem adható meg rajta térfogati forma. Léteznek nem irányítható sokaságok; a legnépszerűbb példa a „Möbius-szalag". A szemléltetés egyszerű, ahhoz azonban, hogy a nem irányíthatóságot bebizonyítsuk, először is pontosan definiálni kellene a Möbius-szalagot...

(2) Ha ω térfogati forma egy M n-dimenziós sokaságon, akkor az értelmezés szerint $\omega_p \in \Lambda^n T_p^* M$ térfogati forma a $T_p M$ érintőtéren, és így egy irányítást reprezentál azon. A $p \in M \longmapsto \omega_p \in \Lambda^n T_p^* M$ leképezés sima leképezés a $\Lambda^n M := \Lambda^n (TM)^*$ nyalábba – az n-edfokú differenciálformák szeléselként történő interpretációjának megfelelően.

(3) Ha M irányítható sokaság és k összefüggő komponense van, akkor M-en összesen 2^k irányítás adható meg. Ennek belátására gondoljuk meg a következőket:

Kijelölve M-en egy ω_1 és egy ω_2 térfogati formát, megadható olyan $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\omega_1(p) = f(p)\, \omega_2(p) \quad , \text{ bármely } p \in M\text{-re.}$$

Ekkor f bizonyosan folytonos. Tekintsük ezután a $\{-1, 1\}$ halmazt, és lássuk el a diszkrét topológiával. Ekkor az

$$M \longrightarrow \{-1, 1\}, \quad p \longmapsto \operatorname{sgn}(f(p))$$

függvény folytonos, hiszen folytonos függvények kompozíciója. Így $\operatorname{sgn} \circ f$ M valamennyi összefüggő komponensén konstans. Mivel az előjel megválasztására a k számú komponens mindegyikén két lehetőség van, a lehetséges irányítások száma 2^k.

Megállapíthatjuk speciálisan, hogy <u>egy összefüggő irányítható sokaságnak pontosan két irányítása van.</u>

(4) $\mathbb{R}^n$, ellátva természetes sokaság-struktúrájával, kanonikus módon irányítható: ilyen irányítást ad meg az

$$\omega_0 = de^1 \wedge \ldots \wedge de^n$$

(konstans) térfogati forma. Gyakran - kissé pontatlanul - ω_0-at említjük $\mathbb{R}^n$ kanonikus irányításaként.

(5) Ha M irányítható n-dimenziós sokaság, akkor M-nek minden $\mathcal{U}$ nyílt részsokasága is irányítható. Valóban, ha ω térfogati forma M-en, akkor ω $\mathcal{U}$-ra való leszűkítése seholsem zérus és $\Omega^n(\mathcal{U})$-ba tartozik.

<u>17.3. Definíció és lemma.</u> (1) Tegyük fel, hogy M és N irányított sokaság, az irányításaikat reprezentálja az $\alpha \in \Omega^n(M)$, ill. a $\beta \in \Omega^n(N)$ térfogati forma. Egy $f: M \longrightarrow N$ diffeomorfizmust <u>irányítástartó</u>nak nevezünk, ha van olyan $h \in C^\infty(M)$ mindenütt pozitív függvény, hogy $f^*\beta = h\alpha$.

(2) Legyen M irányított n-dimenziós sokaság. M-nek egy $(\mathcal{U}, u)$ <u>térképét</u> <u>pozitív irányításúnak</u> mondjuk, ha az $u: \mathcal{U} \longrightarrow u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmus irányítástartó az $\mathcal{U}$, ill. az $u(\mathcal{U})$ nyílt részsokaságon indukált irányításra nézve ($\mathbb{R}^n$-en a kanonikus irányítást tekintve).

Ha $(\mathcal{U}, u)$ és $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{u})$ pozitív irányítású térképe M-nek, melyekre $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, akkor az

$$\tilde{u} \circ u^{-1} : u(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{u}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^n$$

átmenet-diffeomorfizmus irányítástartó.

<u>Bizonyítás.</u> Tetszőleges $p \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ pont esetén

$$((\tilde{u} \circ u^{-1})^* \omega_0)_{u(p)} = ((\tilde{u} \circ u^{-1})'(u(p)))^* (\omega_0)_{u(p)} =$$

$$= \det((\tilde{u} \circ u^{-1})'(u(p)))(\omega_0)_{u(p)} \quad , \quad \text{és itt}$$

$\det((\tilde{u} \circ u^{-1})'(u(p))) > 0$, mert a tekintett térképek pozitív irányításúak. $\square$

17. 4. Tétel. Egy sokaság pontosan akkor irányítás-tartó, ha van olyan atlasza, amelynél valamennyi átmenet-diffeomorfizmus irányítástartó.

Bizonyítás. Tekintsünk egy M n-dimenziós sokaságot.

(1) Szükségesség. Tegyük fel, hogy M irányítható, és legyen $(\mathcal{U}_i, u_i)_{i\in I}$ olyan atlasza M-nek, amelynél az $\mathcal{U}_i$ koordinátakörnyezetek mindegyike összefüggő. Tekintsük az

$$s: (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto (-a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$$

irányításváltó diffeomorfizmust! Helyettesítsük a megadott atlasz minden olyan $(\mathcal{U}_i, u_i)$ térképét, amelyik nem pozitív irányítású, az $(\mathcal{U}_i, s\circ u_i)$ térképpel. Így M-nek egy olyan atlaszához jutunk, amelyet kizárólag pozitív irányítású térképek alkotnak. Az előző lemma értelmében ennél az atlasznál az átmenet-diffeomorfizmusok irányítás-tartók.

(2) Elegendőség. Megfordítva, tegyük föl, hogy $(\mathcal{U}_i, u_i)_{i\in I}$ olyan atlasza M-nek, amelynek átmenet-diffeomorfizmusai irányítástartók, s adjunk meg egy, az $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ nyílt lefedéshez tartozó $(f_i)_{i\in I}$ sima egységbontást (2.4.). Tekintsük $\mathbb{R}^n$ ω_0 kanonikus térfogati formáját, és legyen

$$\omega := \sum_{i\in I} f_i\, u_i^{*}\omega_0 .$$

Állítjuk, hogy ekkor ω térfogati forma M-en. Az ω-t megadó formula az egységbontás tulajdonságai miatt értelmes, és a $p\in M \longmapsto \omega_p \in \Lambda^n T_p^*M$ leképezés sima. Megmutatjuk, hogy ω_p minden $p\in M$ esetén különbözik 0-tól.

Legyen tehát $p \in M$ tetszőleges. Válasszunk ki egy olyan $i_0 \in I$ indexet, hogy $f_{i_0}(p) \neq 0$. Ha $i \in I \setminus \{i_0\}$, akkor

$$(f_i\, u_i^* \omega_0)(p) = f_i(p)\big(((u_i \circ u_{i_0}^{-1}) \circ u_{i_0})^* \omega_0\big)(p)$$
$$= f_i(p)\; u_{i_0}^* \big((u_i \circ u_{i_0}^{-1})^* \omega_0\big)(p)$$

írható. Itt azonban (némi egyszerűsítéssel, ld. az előző lemma bizonyítását a pontos formulát illetően)

$$(u_i \circ u_{i_0})^* \omega_0 = \big(\det (u_i \circ u_{i_0})'\big)\, \omega_0 ,$$

és így azt kapjuk, hogy

$$\omega(p) = \Big(f_{i_0}(p) + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} f_i(p)\big(\det(u_i \circ u_{i_0})'\big)\, u_{i_0}(p)\Big)(u_{i_0}^* \omega_0)(p) .$$

A jobb oldal első tényezőjében a feltétel értelmében és a konstrukció alapján véges sok nemnegatív tag összege szerepel. A tagok között az első, $f_{i_0}(p)$ ráadásul pozitív, így $\omega(p) \neq 0$. □

<u>17.5. Lemma.</u> Legyen M n-dimenziós sokaság.

(1) Tekintsünk egy $\omega \in \Omega^n(M)$ n-formát és egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en és $X \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor

$$\underline{(i_X \omega) \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f X^i\, du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^i} \wedge \ldots \wedge du^n} ,$$

ahol $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ω által egyértelműen meghatározott sima függvény.

(2) Ha M irányítható sokaság, akkor egy $\omega \in \Omega^n(M)$ térfogati forma kijelölése után az

$$X \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow i_X \omega \in \Omega^{n-1}(M)$$

leképezés izomorfizmus az $\mathfrak{X}(M)$ és az $\Omega^{n-1}(M)$ $C^\infty(M)$-modulus között.

<u>Bizonyítás.</u> Az (1) megállapítás <u>A 6.4.</u>, a (2) megállapítás <u>A 6.5.</u> „pontonkénti alkalmazásával" következik. □

17.6. Példák.

(1) Legyen $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ olyan n-dimenziós részsokaság, amely benne van egy $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nyílt halmazban. Tegyük fel, hogy van olyan $X \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező, amelyre teljesül, hogy

$$\underline{X(p) \notin T_pM, \text{ bármely } p \in M \text{ esetén.}}$$

Jelentse ω_0 $\mathbb{R}^{n+1}$ kanonikus térfogati formáját. Megmutatjuk, hogy

$$\underline{i_X \omega_0 \upharpoonright M \text{ térfogati forma } M\text{-en.}}$$

Mivel $i_X\omega_0 \in \Omega^n(U)$, $i_X\omega_0 \upharpoonright M \in \Omega^n(M)$ könnyen átgondolható módon teljesül. Belátjuk, hogy $i_X\omega_0 \upharpoonright M$ sehol sem vesz föl zérust, és így valóban térfogati forma. Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot, s jelöljünk ki a T_pM érintőtérben egy $(v_i)_{i=1}^n$ bázist. Az X-re előírt feltétel folytán ekkor $(X(p), v_1, \dots, v_n)$ bázisa $T_p\mathbb{R}^{n+1}$-nek, és így

$$(i_X\omega_0)(p)(v_1,\dots,v_n) = (\omega_0)_p\,(X(p), v_1,\dots,v_n) \neq 0,$$

hiszen ω_0 térfogati forma.

(2) $\mathbb{R}^{n+1}$-beli n-dimenziós sokaságnak válasszuk az S^n szférát, S^n-et tartalmazó nyílt halmaznak magát $\mathbb{R}^{n+1}$-et, és tekintsük az

$$X: \mathbb{R}^{n+1} \to T\mathbb{R}^{n+1},\ p \mapsto X(p) := (p, p)$$

„radiális vektormezőt". Ez eleget tesz az

$$\underline{X(p) \notin T_pS^n,\ \text{bármely } p \in S^n\text{-re}}$$

feltételnek, így ha $\omega_0 \in \Omega^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ a kanonikus térfogati forma, akkor

$$\sigma := i_X\,\omega_0 \upharpoonright S^n$$

térfogati forma S^n-en. Ezt a térfogati formát S^n kanonikus térfogati formájának, az általa reprezentált irányítást S^n kanonikus irányításának nevezzük.

σ explicit előállítása 17.5.(1) alkalmazásával egyszerűen megadható. $\mathbb{R}^{n+1}$ $(e^i)_{i=1}^{n+1}$ kanonikus koordinátarendszere segítségével az X radiális vektormező az

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} e^i \frac{\partial}{\partial e^i}$$

alakban állítható elő. Így

$$\sigma := (i_X \omega_0) \restriction S^n \overset{17.5.(1)}{=} \Big(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} e^i de^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{de^i} \wedge \ldots \wedge de^{n+1} \Big) \restriction S^n ,$$

a 17.5.(1)-beli képletben szereplő f függvény ugyanis $\omega_0(e_1, \ldots, e_{n+1})$, – v.ö. 6.4. –, ami azonosan 1.

Speciálisan:

(i) $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ kanonikus térfogati formája

$\sigma = e^1 de^2 - e^2 de^1 =: x dy - y dx$;

(ii) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ kanonikus térfogati formája

$$\begin{aligned}\sigma &= e^1 de^2 \wedge de^3 - e^2 de^1 \wedge de^3 + e^3 de^1 \wedge de^2 \\ &= e^1 de^2 \wedge de^3 + e^2 de^3 \wedge de^1 + e^3 de^1 \wedge de^2 \\ &=: x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy\end{aligned}$$

(az egyszerűség kedvéért a leszűkítés jelét elhagyva).

Megjegyzés. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret, ellátva a kanonikus skaláris szorzattal és az ω_0 kanonikus irányítással. Az A 4.4.(4)-ben mondottak létezik egy és csak egy olyan $\nu_{\mathbb{R}^n} \in [\omega_0]$ térfogati forma amelynek 1 a normája, ez $\mathbb{R}^n$ kanonikus térfogati formája. Ha $M \subset \mathbb{R}^n$ irányított részsokaság, akkor tetszőleges $p \in M$ pont esetén a T_pM érintőtér irányítást és euklideszi struktúrát örököl $\mathbb{R}^n$-től. Így T_pM kanonikus térfogati formával látható el, amelyet λ_{T_pM}-mel jelölünk.

A következő észrevétel arról szól, hogy a λ_{T_pM} térfogati formák kijelölésével térfogati formához, és ezáltal irányításhoz jutunk M-en; az M-en így megadott térfogati formát ill. irányítást szintén kanonikusnak mondjuk.

17.7. Állítás. Ha M k-dimenziós irányítható részsokasága $\mathbb{R}^n$-nek, akkor az

$$\omega : p \in M \longmapsto \omega_p := \lambda_{T_pM} \in \Omega^k(T_p^*M)$$

kelelőpesi térfogati forma M-en. Megadva M-nek egy pozitív irányítású paraméterezését, vagyis egy olyan $(\mathcal{U}, f)$ párt, ahol $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, $f : \mathcal{U} \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset M$ pedig irányítástartó diffeomorfizmus az indukált irányításokra nézve, az ω térfogati forma f általi visszahúzottja

$$f^*\omega = \sqrt{\det(\langle D_i f, D_j f\rangle)}\, de^1 \wedge \dots \wedge de^k \in \Omega^k(\mathcal{U}),$$

ahol $(e^1, \dots, e^k)$ $\mathbb{R}^k$ kanonikus koordinátarendszere.

Bizonyítás. Csak ω simasága igényel indoklást, ehhez pedig elegendő az $f^*\omega$-ra vonatkozó formulát levezetni. Jelöljünk ki egy tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ pontot. Legyen $p := f(q)$, és jelentse $(e_i)_{i=1}^k$ $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisát. Ekkor

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)_q((e_1)_q, \dots, (e_k)_q) &:= \omega_p((f_*)(e_1)_q, \dots, (f_*)(e_k)_q) \\
&:= \omega_p((f'(q)(e_1))_p, \dots, (f'(q)(e_k))_p) \\
&= \omega_p((D_1 f(q))_p, \dots, (D_k f(q))_p) \\
&:= \lambda_{T_pM}((D_1 f(q))_p, \dots, (D_k f(q))_p)
\end{aligned}$$

$$\overset{A\,4.4.(6)}{=} \left(G\left((D_1 f)(q), \dots, (D_k f)(q) \right) \right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{\det\left(\langle (D_i f)(q), (D_j f)(q) \rangle \right)}\,,$$

felhasználva a Gram-determinánsra való áttérésnél, hogy az irányítástartás miatt $f'(q)$ az $(e_1, \dots, e_k)$ pozitív irányítású bázist pozitív irányítású bázisba viszi át, s ezért $\lambda_{T_pM}\left((f'(q)(e_1))_p, \dots, (f'(q)(e_k))_p \right) > 0$.

□

<u>17.8. Példák.</u> (1) Ha $M \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és így nyílt részsokasága $\mathbb{R}^n$-nek, akkor M kanonikus térfogati formája $\omega_0 \upharpoonright M$.

(2) Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $h : U \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ha
$$M := \{ (s, t, h(s,t)) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in U \},$$
akkor M felület – kétdimenziós részsokaság – $\mathbb{R}^3$-ban, amelyet <u>Monge-</u> vagy <u>Euler–Monge felületnek</u> hívunk. M irányítható, hiszen van egytagú atlasza. Tegyük fel, hogy M-en azt az irányítást adtuk meg, amelyre nézve a kézenfekvő
$$f : U \longrightarrow M,\ (s,t) \longmapsto f(s,t) := (s, t, h(s,t))$$
paraméterezés irányítástartó. Mivel
$$D_1 f = (1, 0, D_1 h), \quad D_2 f = (0, 1, D_2 h),$$
$$\det\left(\langle D_i f, D_j f \rangle \right) = \begin{vmatrix} 1 + (D_1 h)^2 & (D_1 h)(D_2 h) \\ (D_1 h)(D_2 h) & 1 + (D_2 h)^2 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 + (D_1 h)^2 + (D_2 h)^2,$$
az $\omega \in \Omega^2(M)$ kanonikus térfogati forma f általi visszahúzottja most
$$f^* \omega = \sqrt{1 + (D_1 h)^2 + (D_2 h)^2}\, de^1 \wedge de^2,$$

ill. a hagyományos írásmóddal

$$f^*\omega = \sqrt{1+(D_1h)^2+(D_2h)^2}\, dx \wedge dy .$$

<u>17. 9. Állítás.</u> Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret, ellátva a $\langle , \rangle$ természetes Riemann-struktúrával. Tegyük fel, hogy M 1 kodimenziójú – azaz $(n-1)$-dimenziós – irányított részsokasága $\mathbb{R}^n$-nek. Létezik egy és csak egy olyan

$$\underline{N} : M \longrightarrow T\mathbb{R}^n , \quad p \longmapsto \underline{N}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

differenciálható leképezés, az ún. <u>kanonikus normálegységvektormező</u> M-en, amelyre teljesülnek a következők:

(i) Tetszőleges $p \in M$ pont esetén $\underline{N}(p) \in (T_pM)^{\perp}$.

(ii) $\|\underline{N}(p)\| = 1$, minden $p \in M$-re.

(iii) Ha $(v_2, \dots, v_n)$ pozitív bázisa T_pM-nek, akkor $(\underline{N}(p), v_2, \dots, v_n)$ pozitív bázisa $T_p\mathbb{R}^n$-nek.

<u>Bizonyítás.</u> Az (i) és az (iii) feltétel pozitív skalárszorzó erejéig meghatározza az $\underline{N}$ leképezést, így (iii) előírása biztosítja az unicitást. Elegendő ezért azt megmutatni, hogy ha egy $\underline{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ leképezés eleget tesz az (i)-(iii) feltételeknek, akkor $\underline{N}$ sima. Azt látjuk be ebből a célból, hogy ha ω_0 és ω $\mathbb{R}^n$, ill. M kanonikus térfogati formája, akkor

$$\omega = i_{\underline{N}}\, \omega_0 .$$

Mindkét oldalt kiértékeljük T_pM egy $(v_2, \dots, v_n)$ pozitív ortonormált bázisán. Ekkor – nyilvánvalóan – $\omega_p(v_2, \dots, v_n) = 1$, míg

$$(i_{\underline{N}}\, \omega_0)_p\, (v_2, \dots, v_n) := (\omega_0)_p\, (\underline{N}(p), v_2, \dots, v_n) \overset{(iii)}{=} 1$$

– és így következik az $\omega = i_{\underline{N}}\, \omega_0$ egyenlőség. □

APPENDIX: MULTILINEÁRIS ALGEBRA

A1. Bevezető megjegyzések

(1) A következőkben $\mathbb{K}$-val egy tetszőleges nulla-karakterisztikájú testet jelölünk, azaz olyan testet, amelyben bármely n pozitív egész esetén

$$n \cdot 1 := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \neq 0.$$

Ha közelebbit nem mondunk, $\mathbb{K}$ fölötti vektorterek – röviden $\mathbb{K}$-vektorterek – alapulvételével dolgozunk, bár az elmélet egy jelentős része $\mathbb{K}$-modulusok (ld. 6.1.) általánosságában is kifejthető.

(2) Legyen V és W $\mathbb{K}$-vektortér, $k \in \mathbb{N}^*$. Emlékeztetünk rá, hogy egy

$$f : V^k := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow W$$

leképezést $\mathbb{K}$-multilineárisnak (multilineárisnak, k-lineárisnak) mondunk, ha minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ index és tetszőlegesen rögzített $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ vektorok esetén a

$$v \in V \longmapsto f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k) \in W$$

leképezés lineáris. Az összes $V^k \longrightarrow W$ multilineáris leképezés $\mathbb{K}$-vektorteret alkotnak az összeadás és a skalárral való szorzás szokásos értelmezése esetén, erre a vektortérre az $L^k(V, W)$ jelölést használjuk. Speciálisan

$$L^1(V, V) =: L(V, V) =: \mathrm{End}(V)$$

a V vektortér $\mathbb{K}$-lineáris endomorfizmusainak a vektortere. $L^k(V,\mathbb{K})$ helyett egyszerűen azt írjuk, hogy $L^k(V)$, vagy – alkalmazva a 6.1.(4)-ben bevezetett jelöléseket – azt, hogy $T_k^0(V)$, ill. $T_k(V)$, és V-n adott k-adrendű kovariáns tenzorokról (is) szólunk. Speciálisan $L^1(V) =: L(V) =: V^*$ a V vektortér konjugált tere vagy duálisa. $L^k(V,V)$ természetes módon azonosítható az $(1,k)$-típusú tenzorok $T_k^1(V)$ vektorterével, amelyet a

$$V^* \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{K}$$

multilineáris függvények alkotnak; ilyen azonosítást ad meg az

$f \in L^k(V,V) \longmapsto \bar{f} \in T_k^1(V)$, $\bar{f}(\theta, v_1, \dots, v_k) := \theta\left(f(v_1,\dots,v_k)\right)$ $(\theta \in V^*;\ v_1,\dots,v_k \in V)$ leképezés; v.ö. 6.3(2).

(3) A szokásos módon S_k-val jelöljük az $\{1,\dots,k\}$ halmaz permutációcsoportját. $\iota \in S_k$ az egységelem (az identikus permutáció); $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ $\sigma \in S_k$ paritása.

A2. Alternáló leképezések

2.1. Lemma. Legyenek E és F nemüres halmazok, k egy pozitív egész, és jelentse E^k az $E \times \dots \times E$ k-tényezős Descartes-szorzatot. Ha $f : E^k \longrightarrow F$ egy leképezés és $\sigma \in S_k$ egy permutáció, értelmezzük a $\sigma f : E^k \longrightarrow F$ leképezést a

$$\sigma f(u_1,\dots,u_k) := f(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(k)})\ ;\quad (u_1,\dots,u_k) \in E^k$$

előírással. Ekkor

(i) $\iota f = f$;

(ii) $\varrho(\sigma f) = (\varrho \circ \sigma) f$, bármely $\varrho, \sigma \in S_k$ esetén.

<u>Bizonyítás.</u> Az első megállapítás evidens. A második igazolása céljából jelöljünk ki egy tetszőleges $(u_1, \ldots, u_k) \in E^k$ k-ast, és vezessük be a jobb át-tekinthetőség érdekében a $v_i := u_{\varrho(i)}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ jelöléseit. Ekkor

$$(\varrho(\sigma f))(u_1, \ldots, u_k) := (\sigma f)(u_{\varrho(1)}, \ldots, u_{\varrho(k)}) =$$
$$= (\sigma f)(v_1, \ldots, v_k) := f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Ha itt $\sigma(i) = j$, akkor

$$v_{\sigma(i)} = v_j := u_{\varrho(j)} = u_{\varrho(\sigma(i))} = u_{\varrho \circ \sigma(i)},$$

és így

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = f(u_{\varrho\circ\sigma(1)}, \ldots, u_{\varrho\circ\sigma(k)})$$
$$=: ((\varrho \circ \sigma) f)(u_1, \ldots, u_k),$$

amivel igazoltuk a tett észrevételt. □

<u>2.2. Lemma.</u> Legyen V és W $\mathbb{K}$-vektortér; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, és tegyük fel, hogy $f: V^k \longrightarrow W$ k-lineáris leképezés. Ekkor tetszőleges $\sigma \in S_k$ esetén a σf leképezés is k-lineáris.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Foglalkozzunk először a $k = 2$ esettel. Ekkor $f: V \times V \longrightarrow W$ bilineáris leképezés, és azt kell ellenőriznünk, hogy ha $\tau \in S_2 \setminus \{\iota\}$, akkor τf is bilineáris. Tetszőleges $(u_1, u_2) \in V \times V$ esetén

$$(\tau f)(u_1, u_2) := f(u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}) = f(u_2, u_1),$$

a hatására tehát „f változói felcserélődnek". Így ha $u_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$; $v_1, v_2 \in V$), akkor

$$(\tau f)(u_1, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\tau f)(u_1, u_2) = f(u_2, u_1) =$$
$$= \lambda_1 f(v_1, u_1) + \lambda_2 f(v_2, u_1) = \lambda_1 (\tau f)(u_1, v_1) + \lambda_2 (\tau f)(u_1, v_2),$$

amivel beláttuk, hogy τf lineáris a második változójában. Az első változóban való linearitás ugyanígy adódik.

(2) Térjünk rá az általános esetre. Ha $\tau \in S_k$ transzpozíció, akkor τf k-lineáris volta az előbbi gondolatmenettel adódik. Amennyiben $\sigma \in S_k$ tetszőleges, úgy előállítható transzpozíciók kompozíciójaként $\sigma = \tau_m \circ \ldots \circ \tau_2 \circ \tau_1$ alakban, s mivel az előző lemma alkalmazásával $\sigma f = \tau_m(\cdots(\tau_2(\tau_1 f)))$ írható, következik az állítás. $\square$

<u>Definíció.</u> Legyen V és W $\mathbb{K}$-vektortér; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Azt mondjuk, hogy egy $f: V^k \longrightarrow V$ k-lineáris leképezés

<u>alternáló</u>, ha minden olyan vektor k-ason zérust vesz fel, amelynek van két egyenlő tagja, azaz $f(v_1, \ldots, v_k) = 0$, ha valamely $i \neq j$ indexekre $v_i = v_j$;

<u>ferdeszimmetrikus</u>, ha egy vektor k-ason fölvett értéke előjelet vált, ha annak két tagját felcseréljük, vagyis ha $\tau f = -f$, bármely $\tau \in S_k$ transzpozíció esetén.

<u>2.3. Állítás.</u> Legyenek V és W $\mathbb{K}$-vektorterek; $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Egy $f \in L^k(V, W)$ k-lineáris leképezésre a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(1) f alternáló.

(2) f ferdeszimmetrikus.

(3) Ha $\sigma \in S_k$, akkor $\sigma f = \varepsilon(\sigma) f$.

(4) f minden lineárisan függő vektor k-ason zérusvektort vesz fel.

<u>Bizonyítás.</u> $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Tegyük fel, hogy f alternáló, és legyenek $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ különböző indexek,

például $i < j$. Tetszőleges $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ vektorsorozat esetén

$$(f + \tau f)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) =$$
$$= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, \overset{i}{v_j}, \dots, \overset{j}{v_i}, \dots, v_k)$$
$$= f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) -$$
$$- f(v_i, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) - f(v_i, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_k)$$
$$\overset{\text{feltétel}}{=} 0 \,,$$

tehát $f + \tau f = 0$, ami azt jelenti, hogy f ferdeszimmetrikus.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Tegyük fel, hogy $f \in L^k(V, W)$ ferdeszimmetrikus. Legyen $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ olyan vektorsorozat, amelyben valamely $i \neq j$ indexekre $v_i = v_j$. Jelentse $\tau \in S_k$ az i-t j-vel felcserélő transzpozíciót. Ekkor

$$f(v_1, \dots, v_k) \overset{\text{feltétel}}{=} (-\tau f)(v_1, \dots, v_k) = -((\tau f)(v_1, \dots, v_k))$$
$$\overset{v_i = v_j}{=} - f(v_1, \dots, v_k) \,,$$

így $2 f(v_1, \dots, v_k) = 0 \in W$, amiből $2 = 1 + 1 \neq 0$ miatt $f(v_1, \dots, v_k) = 0$ következik.

$\boxed{(2) \Leftrightarrow (3)}$ Tegyük fel először, hogy $f \in L^k(V, W)$ ferdeszimmetrikus, és legyen $\sigma \in S_k$ tetszőleges. σ felbontható transzpozíciók kompozíciójára $\sigma = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1$ alakban, és ekkor $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$. Így

$$\sigma f = (\tau_m \circ \dots \circ \tau_1) f \overset{2.1.(iii)}{=} \tau_m(\dots \tau_2(\tau_1 f)) \overset{\text{feltétel}}{=} (-1)^m f$$
$$= \varepsilon(\sigma) f \,.$$

Megfordítva, ha minden $\sigma \in S_k$ permutáció esetén $\sigma f = \varepsilon(\sigma)$, akkor speciálisan tetszőleges $\tau \in S_k$ transzpozícióra $\tau f = \varepsilon(\tau) f = -f$, tehát τ ferdeszimmetrikus.

$\boxed{(1) \Leftrightarrow \overset{4}{(3)}}$ Legyen $f \in L^k(V, W)$ alternáló, és tekintsünk egy $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ lineárisan függő vektorsorozatot.

Ekkor a sorozat valamelyik tagja, mondjuk v_k, lineárisan kombinálható a többiből: előállítható $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i$ alakban. Így
$$f(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_i) = 0,$$
mert a $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_i)$ vektorsorozat minden $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ index esetén tartalmaz két egyenlő tagot. A megfordítás nyilvánvaló, hiszen ha egy vektorsorozat két tagja egyenlő, akkor a vektorsorozat lineárisan függő. $\square$

<u>2.4. Megjegyzés.</u> Ha V és W $\mathbb{K}$-vektortér és $k \in \mathbb{N}^*$, akkor az összes $V^k \longrightarrow W$ alternáló k-lineáris leképezések $\mathbb{K}$ fölötti vektorteret alkotnak az összeadásra és skalárral való szorzásra nézve, $L^k(V, W)$-nek ezt az alterét $L^k_a(V, W)$-vel jelöljük, de használatos az $\mathrm{Alt}^k(V, W)$ vagy $A_k(V, W)$ jelölés is. Megállapodunk abban, hogy $L^0_a(V, W) := L^0(V, W) := W$. Ha speciálisan $W = \mathbb{K}$, akkor egyszerűen azt írjuk, hogy $L^k_a(V)$ (ill. $\mathrm{Alt}^k(V)$, vagy $A_k(V)$).

<u>2.5. Lemma és definíció.</u> Legyen V és W $\mathbb{K}$-vektortér, $k \in \mathbb{N}$; $k \geqq 2$. Ha $f \in L^k(V, W)$ és
$$\mathrm{Alt}(f) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \sigma f,$$
akkor $\mathrm{Alt}(f)$ alternáló k-lineáris leképezés, speciálisan $f \in \mathrm{Alt}^k(V, W)$ esetén $\mathrm{Alt}(f) = f$.

Az így értelmezett $\mathrm{Alt} : L^k(V, W) \longrightarrow \mathrm{Alt}^k(V, W)$ leképezést az <u>alternálási operátornak</u>, röviden <u>alternátornak</u> hívjuk.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $\sigma \in S_k$ tetszőleges. Közvetlenül látható, hogy az $f \in L^k(V, W) \longmapsto \sigma f \in L^k(V, W)$

leképezés $\mathbb{K}$-lineáris, így

$$\varrho(\mathrm{Alt}(f)) = \varrho\Big(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\sigma f\Big) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\varrho(\sigma f)$$

$$\overset{2.1.(ii)}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)(\varrho\circ\sigma)f = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\varrho)\varepsilon(\varrho\circ\sigma)(\varrho\circ\sigma)f$$

$$\overset{(*)}{=} \varepsilon(\varrho)\frac{1}{k!}\sum_{\tilde\sigma\in S_k}\varepsilon(\tilde\sigma)\tilde\sigma f = \varepsilon(\varrho)\,\mathrm{Alt}(f),$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben azt használva fel, hogy a $\sigma\in S_k \longmapsto \varrho\circ\sigma\in S_k$ leképezés bijektív, s ezért ha σ végigfut az $\{1,\dots,k\}$ halmaz összes permutációin, akkor $\varrho\circ\sigma$ is ezt teszi.

Amennyiben $f\in \mathrm{Alt}^k(V,W)$, úgy

$$\mathrm{Alt}(f) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\sigma f \overset{2.3(3)}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma) f = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} f$$

$$= \frac{1}{k!}k!\,f = f.$$

□

<u>Megjegyzés.</u> Az $\mathrm{Alt}(f)\in \mathrm{Alt}^k(V,W)$ leképezés egy $(v_1,\dots,v_k)$ vektor k-ason az értelmezésből adódóan az

$$\mathrm{Alt}(f)(v_1,\dots,v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})$$

formula szerint hat.

<u>2.6. Lemma.</u> Ha $f\in L^k(V,W)$ és $\sigma\in S_k$, akkor

$$\mathrm{Alt}(\sigma f) = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Alt}(f).$$

<u>Bizonyítás.</u> $\mathrm{Alt}(\sigma f) := \frac{1}{k!}\sum_{\varrho\in S_k}\varepsilon(\varrho)\varrho(\sigma f) \overset{2.1.(ii)}{=} \frac{1}{k!}\sum_{\varrho\in S_k}\varepsilon(\varrho)(\varrho\circ\sigma)f =$

$$= \varepsilon(\sigma)\frac{1}{k!}\sum_{\varrho\in S_k}\varepsilon(\varrho\circ\sigma)(\varrho\circ\sigma)f \overset{(*)}{=} \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Alt}(f),$$

ahol a $(*)$-gal jelölt lépésben most is úgy érvelhetünk, mint fentebb.

□

<u>2.7. Következmény.</u> Az alternátor lineáris projekciója az $L^k(V,W)$ vektortérnek az $\mathrm{Alt}^k(V,W)$ altérre.

<u>Bizonyítás.</u> Az $f\in L^k(V,W)\longmapsto \sigma f\in L^k(V,W)$ $(\sigma\in S_k)$ leképezés linearitásából adódik, hogy Alt lineáris transzformációja $L^k(V,W)$-nek. Mivel $f\in \mathrm{Alt}^k(V,W)$ esetén

$Alt(f)=f$ (2.5.), világos, hogy Alt szürjekció $Alt^k(V,W)$-re. Végül – ugyanilyen okból – $Alt(f)\in Alt^k(V,W)$ miatt $Alt(Alt(f))=Alt(f)$, tehát $Alt\circ Alt=Alt$. □

A3. A külső algebra

3.1. Megjegyzés. Legyen V $\mathbb{K}$-vektortér; $k,l\in\mathbb{N}^*$; $f_1\in L^k(V)=T^0_k(V)$, $f_2\in L^l(V)=T^0_l(V)$. f_1 és f_2 tenzori szorzata az az $f_1\otimes f_2\in T^0_{k+l}(V)$ $(k+l)$-lineáris függvény, amelyet az

$$f_1\otimes f_2(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l}):=f(v_1,\dots,v_k)f(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

$(v_i\in V;\ i\in\{1,\dots,k+l\})$ előírás értelmez; v.ö. 6.2. (3). Megállapodunk abban, hogy egy $\lambda\in L^0(V):=\mathbb{K}$ skalárral (balról vagy jobbról) képzett tenzori szorzat skalárszorost jelent.

3.2. Lemma. Ha $f_1\in L^k(V)$, $f_2\in L^l(V)$, akkor

$$Alt(f_1\otimes f_2)=Alt(f_1\otimes Alt(f_2))=Alt(Alt(f_1)\otimes f_2).$$

Bizonyítás. Tekintettel a tenzori szorzat definícióból adódó elemi tulajdonságaira és az alternátor linearitására,

$$Alt(Alt(f_1)\otimes f_2)=Alt\left(\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\sigma f_1\right)\otimes f_2\right)=$$

$$=Alt\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)((\sigma f_1)\otimes f_2)\right)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\,Alt((\sigma f_1)\otimes f_2).$$

Tetszőleges $\sigma\in S_k$ permutációhoz tekintsük azt a $\tilde\sigma\in S_{k+l}$ permutációt, amelyre

$$(\tilde\sigma(1),\dots,\tilde\sigma(k),\tilde\sigma(k+1),\dots,\tilde\sigma(k+l))=(\sigma(1),\dots,\sigma(k),k+1,\dots,k+l).$$

Ekkor – nyilvánvalóan – $\varepsilon(\tilde\sigma)=\varepsilon(\sigma)$, fennáll továbbá a

$$(\sigma f_1)\otimes f_2=\tilde\sigma(f_1\otimes f_2)$$

reláció, hiszen tetszőleges $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$ vektorsorozat esetén

$$(\sigma f_1) \otimes f_2 (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) =$$
$$= (\sigma f_1)(v_1, \dots, v_k) f_2(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = f_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f_2(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$
$$= f_1 \otimes f_2 (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}, v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$
$$= f_1 \otimes f_2 (v_{\tilde\sigma(1)}, \dots, v_{\tilde\sigma(k)}, v_{\tilde\sigma(k+1)}, \dots, v_{\tilde\sigma(k+l)})$$
$$= \tilde\sigma (f_1 \otimes f_2)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

Így

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(f_1) \otimes f_2) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \mathrm{Alt}((\sigma f_1) \otimes f_2) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\tilde\sigma) \mathrm{Alt}(\tilde\sigma(f_1 \otimes f_2))$$
$$\overset{2.6.}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\tilde\sigma)\varepsilon(\tilde\sigma) \mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2) = \frac{1}{k!} k! \,\mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2)$$
$$= \mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2),$$

amivel a felírt két reláció együttesét igazoltuk. A másik bizonyítása ugyanígy történik. □

<u>Definíció.</u> Egy $f_1 \in \mathrm{Alt}^k(V)$ alternáló k-forma és egy $f_2 \in \mathrm{Alt}^l(V)$ alternáló l-forma <u>ékszorzatán</u> (<u>külső</u> vagy <u>exterior szorzatán</u>) az

$$f_1 \wedge f_2 := \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2) = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\, \sigma(f_1 \otimes f_2)$$

külső $(k+l)$-formát értjük.

<u>3.3. Megjegyzések és példák.</u> (1) Két alternáló forma tenzori szorzata általában nem alternáló, ezért már pusztán algebrai okokból is indokolt ennek a ferdeszimmetrizálása. A numerikus faktort illetően nem egységes az irodalom: az

$$f_1 \wedge f_2 := \frac{1}{k!\,l!} \mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2), \text{ ill. az } f_1 \wedge f_2 := \frac{1}{(k+l)!} \mathrm{Alt}(f_1 \otimes f_2)$$

definícióval is találkozhatunk.

(2) A mi értelmezésünk szerint tetszőleges

$(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \in V^{k+\ell}$ vektorsorozat esetén

$$f_1 \wedge f_2 (v_1, \dots, v_{k+\ell}) =$$
$$= \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in S_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\, f_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\, f_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

Itt a jobb oldalon számos tag ismétlődik, nevezetesen az a $k!\,\ell!$ számú permutáció, amely az $\{1, \dots, k+\ell\}$ halmaz ugyanazon

$$\{1, \dots, k+\ell\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \cup \{\sigma(k+1), \dots, \sigma(k+\ell)\}$$

felbontását eredményezi egy k, ill. egy ℓ elemű részhalmazra, tekintettel arra, hogy f_1 és f_2 is alternáló. Nevezzünk egy $\sigma \in S_{k+\ell}$ permutációt <u>(k,ℓ)-keverésnek</u>, ha

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(k) \quad \text{és} \quad \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell),$$

és jelöljük $S(k,\ell)$-lel az összes ilyen permutációk halmazát. Mivel minden (k,ℓ)-keverést egyértelműen meghatároz a $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ halmaz, $S(k,\ell)$ elemszáma $\binom{k+\ell}{k} = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}$.

Következik a mondottakból, hogy $f_1 \wedge f_2$ kiértékelési formulája megadható az

$$\boxed{\begin{aligned} &f_1 \wedge f_1 (v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in S(k,\ell)} \varepsilon(\sigma)\, f_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\, f_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \end{aligned}}$$

képlettel.

(3) Ha $f_1 \in \mathrm{Alt}^2(V)$, $f_2 \in \mathrm{Alt}^1(V) = V^*$, akkor tetszőleges $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ esetén

$$f_1 \wedge f_2 (v_1, v_2, v_3) = f_1(v_1, v_2) f_2(v_3) - f_1(v_1, v_3) f_2(v_2) +$$
$$+ f_1(v_2, v_3) f_2(v_1),$$

ugyanis S_3-ban $\binom{3}{2} = 3$ $(2,1)$-keverés van, nevezetesen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ és az } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció, s ezek közül egyedül a másodiknak -1 a paritása.

3.4. Algebrák

(1) Egy A $\mathbb{K}$-vektorteret a $\mathbb{K}$ test fölötti algebrának ($\mathbb{K}$-algebrának, gyakran egyszerűen algebrának) nevezünk, ha adva van A-n egy szorzásnak mondott

$$A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \longmapsto ab$$

$\mathbb{K}$-bilineáris művelet, vagyis egy olyan művelet, amelyre tetszőleges $a,b,c \in A$; $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ esetén teljesülnek a következők:

(i) $(\lambda a + \mu b)c = \lambda(ac) + \mu(bc)$;

(ii) $a(\lambda b + \mu c) = \lambda(ab) + \mu(ac)$.

Egy A $\mathbb{K}$-algebrát asszociatívnak, ill. kommutatívnak mondunk aszerint, amint a szorzás asszociatív, ill. kommutatív művelet:

$$a(bc) = (ab)c, \quad \text{ill.} \quad ab = ba$$

teljesül, minden $a,b,c \in A$ esetén. „A" egységelemes algebra, ha van olyan $e \in A$, hogy minden $a \in A$-ra

$$ea = ae = a.$$

Létezése esetén „e" egyértelmű; e-t az algebra egységelemének hívjuk.

(2) Tegyük fel, hogy A asszociatív $\mathbb{K}$-algebra. Egy $S \subset A$ részhalmazt A generátorhalmazának hívunk, ha minden $a \in A$ elem előállítható S-beli elemek szorzatainak lineáris kombinációjaként, azaz ha

$$a = \sum_{(i)} \lambda^{i_1 \dots i_k} a_{i_1} \dots a_{i_k} \;; \quad a_{i_j} \in S, \; \lambda^{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K}$$

írható.

(3) Egy A és egy B $\mathbb{K}$-algebra közötti <u>homomorfizmuson</u> (<u>algebra-homomorfizmuson</u>) olyan $\varphi : A \longrightarrow B$ $\mathbb{K}$-lineáris leképezést értünk, amely megőrzi a szorzatot, vagyis amelyre

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \quad ; \quad a_1, a_2 \in A$$

teljesül.

(4) (<u>Klasszikus példa</u>) Legyen V $\mathbb{K}$-vektortér, és tekintsük V lineáris transzformációinak $\mathrm{End}(V)$ vektorterét. Értelmezzük az $\mathrm{End}(V)$-beli szorzást a lineáris transzformációk kompozíciójaként: ha $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$, legyen

$$\varphi\psi := \varphi \circ \psi .$$

Ismert a lineáris algebrából, hogy ekkor <u>$\mathrm{End}(V)$ egységelemes, asszociatív algebra</u>. Ez az algebra $\dim V \geq 2$ esetén <u>nem kommutatív</u>. A nem-kommutativitás igazolására tekintsük a következő példát: V előállítható

$$V = \mathrm{span}(u) \oplus \mathrm{span}(v) \oplus W$$

direkt összegként, ahol u és v lineárisan független vektorok. Értelmezzük a φ és ψ lineáris transzformációt a következőképpen:

$$\varphi(u) := 0, \; \varphi(v) := u \;; \quad \varphi(w) := 0, \; w \in W \;;$$
$$\psi(u) := v, \; \psi(v) := 0 \;; \quad \psi(w) := 0, \; w \in W .$$

Ekkor

$$(\varphi\psi)(v) = \varphi(0) = 0 \;, \quad (\psi\varphi)(v) = \psi(u) = v \;,$$

következésképpen $\varphi\psi \neq \psi\varphi$.

(5) Derivációk Egy A $\mathbb{K}$-algebra derivációján olyan $\theta : A \longrightarrow A$ lineáris transzformációt értünk, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $a, b \in A$ esetén

$$\theta(ab) = (\theta a)b + a(\theta b).$$

Amennyiben A-nak van e egységeleme, úgy

$$\theta(e) = 0,$$

hiszen az $e^2 = e$ relációból azt kapjuk, hogy $\theta(e) = \theta(e^2) = (\theta e)e + e(\theta e) = \theta(e) + \theta(e)$, ahonnan valóban $\theta(e) = 0$ következik.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy egy algebra derivációinak lineáris kombinációja is deriváció, azonban két deriváció szorzata már általában nem deriváció. Két deriváció kommutátora viszont mindig derivációt eredményez: ha θ_1 és θ_2 derivációja az A $\mathbb{K}$-algebrának, akkor

$$[\theta_1, \theta_2] : a \in A \longmapsto [\theta_1, \theta_2](a) := \theta_1(\theta_2 a) - \theta_2(\theta_1 a)$$

szintén deriváció.

3.5. Gradált algebrák

(1) Egy A $\mathbb{K}$-algebrát gradáltnak nevezünk, ha előáll alterei egy $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatának direkt összegeként oly módon, hogy bármely $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad A_m A_n \subset A_{m+n}.$$

Amennyiben A-nak van e egységeleme, föltesszük, hogy $e \in A_0$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n altérbe tartozó elemeket n-edfokú homogén elemeknek mondjuk. A zéruselem ekkor bármely

$n \in \mathbb{N}$-re n-edfokú homogén, minden más $a \in A$ homogén elem egyetlenegy A_n altérbe tartozik. Ha $a \in A_n \setminus \{0\}$, akkor azt is írjuk, hogy $\deg(a) = n$. Ezzel a jelöléssel a $(*)$ feltétel úgy is megfogalmazható, hogy ha $a, b \in A$ homogén elemek, akkor

$$\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b).$$

Azt mondjuk, hogy egy gradált algebra <u>gradáltan kommutatív</u>, ha $ab = (-1)^{\deg(a)\deg(b)}\, ba$; <u>gradáltan antikommutatív</u>, ha $ab = -(-1)^{\deg(a)\deg(b)}\, ba$, minden a, b homogén elem esetén.

(2) Legyen $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gradált $\mathbb{K}$ - algebra. A-nak egy θ deriválóját <u>r-edfokúnak</u> nevezzük, ahol $r \in \mathbb{Z}$, ha

$$\theta(A_n) \subset A_{n+r}, \quad n \in \mathbb{N};$$

megállapodva abban, hogy $A_m = \{0\}$, ha $m < 0$. Ez utóbbi megállapodás megtartása mellett A egy <u>r-edfokú gradált deriválásán</u> $(r \in \mathbb{Z})$ olyan $\theta : A \longrightarrow A$ $\mathbb{K}$-lineáris leképezést értünk, amelyre teljesülnek a következők:

(i) $\theta(A_n) \subset A_{n+r}$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\underline{\theta(a_m a_n) = \theta(a_m)a_n + (-1)^{mr} a_m \theta(a_n)}$,

ha $a_m \in A_m$, $a_n \in A_n$; $m, n \in \mathbb{N}$.

Világos, hogy ha r <u>páros</u>, akkor θ r-edfokú derivációvá válik. Amennyiben r <u>páratlan</u>, úgy könnyen ellenőrizhető, hogy $\theta^2 := \theta \circ \theta$ $2r$-edfokú derivació.

Egy θ_r r-edfokú és egy θ_s s-edfokú gradált derivació <u>gradált kommutátora</u>

$$\underline{[\theta_r, \theta_s] := \theta_r \circ \theta_s - (-1)^{rs}\, \theta_s \circ \theta_r .}$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $[\theta_r, \theta_s]$ $(r+s)$-edfokú gradált deriváció, és hogy a gradált kommutátor rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) $\underline{[\theta_r, \theta_s] = -(-1)^{rs}\, [\theta_s, \theta_r]}$ – gradált antikommutativitás;

(ii) $(-1)^{qs}\, [\theta_q, [\theta_r, \theta_s]] + (-1)^{rq}\, [\theta_r, [\theta_s, \theta_q]] + (-1)^{sr}\, [\theta_s, [\theta_q, \theta_r]] = 0$
– gradált Jacobi-azonosság.

3.6. Az alternáló formák gradált algebrája

(1) Legyen V $\mathbb{K}$-vektortér. A továbbiakban a V-n értelmezett alternáló k-formák vektorterére az eddigiek mellett / helyett alkalmazni fogjuk a
$$\Lambda^k V^* := Alt^k(V) = A_k(V) = L^k_a(V)$$
jelölést; $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$. Képezzük a
$$\Lambda V^* := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k V^*$$
(külső) direkt összeget! Ekkor ΛV^* elemei azok az
$$(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} =: (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) =: \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$$
sorozatok, amelyeknek csak véges sok tagja különbözik 0-tól, és ahol $\alpha_i \in \Lambda^i V^*$ $(i \in \mathbb{N})$. Az összeadást és a skalárral való szorzást a műveletek tagonkénti elvégzésével értelmezzük:

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i + \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i := \sum_{i\in\mathbb{N}} (\alpha_i + \beta_i) , \\ \lambda \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda \alpha_i ; \end{array} \right.$$

így $\wedge V^*$ $\mathbb{K}$-vektortérré válik. Ebben az ékszorzatát a

$$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i\Big) \wedge \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j\Big) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i+j=k} \alpha_i \wedge \beta_j\Big)$$

előírással definiáljuk.

(2) **TÉTEL.** Tetszőleges V $\mathbb{K}$-vektortér esetén az ékszorzással ellátott $\wedge V^*$ vektortér egységelemes, asszociatív, graduáltan kommutatív algebra.

Bizonyítás. $\wedge V^*$ egységeleme az $(1, 0, \dots, 0, \dots)$ sorozat, ahol az 1 a $\mathbb{K}$ test egységeleme (amellyel azonosíthatjuk a sorozatot).

Asszociativitás. Legyen $\alpha \in \wedge^k V^*$, $\beta \in \wedge^\ell V^*$, $\gamma \in \wedge^m V^*$. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &:= \frac{(k+\ell+m)!}{k!(\ell+m)!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes (\beta \wedge \gamma)) \\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{k!(\ell+m)!} \operatorname{Alt}\Big(\alpha \otimes \frac{(\ell+m)!}{\ell!m!} \operatorname{Alt}(\beta \otimes \gamma)\Big) \\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \operatorname{Alt}(\beta \otimes \gamma)) \\ &\overset{3.2.}{=} \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!} \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma))) \\ &= \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) , \end{aligned}$$

az utolsó lépésben azt használva fel, hogy 2.7. értelmében $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$, továbbá hogy a tenzori szorzat asszociatív. Analóg számolással kapjuk, hogy $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$, tehát fennáll a kívánt $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ relació.

<u>Gradált kommutativitás.</u> Legyen $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda^l V^*$, és tekintsük a

$$\sigma_0 : \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & l+k \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{pmatrix}$$

permutációt. Ennek paritása

$$\varepsilon(\sigma_0) = (-1)^{kl}.$$

Tetszőleges $(v_1, \dots, v_{k+l}) \in V^{k+l}$ vektorsorozat esetén

$$\sigma_0(\beta \otimes \alpha)(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+k})$$
$$= (\beta \otimes \alpha)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(l)}, v_{\sigma_0(l+1)}, \dots, v_{\sigma_0(l+k)})$$

$$= \beta(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(l)})\, \alpha(v_{\sigma_0(l+1)}, \dots, v_{\sigma_0(l+k)})$$
$$= \beta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})\, \alpha(v_1, \dots, v_k)$$
$$= \alpha \otimes \beta\,(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}),$$

tehát $\alpha \otimes \beta = \sigma_0(\beta \otimes \alpha)$, és így

$$\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) = \mathrm{Alt}(\sigma_0(\beta \otimes \alpha)) \overset{2.6.}{=} \varepsilon(\sigma_0)\, \mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha) =$$
$$= (-1)^{kl}\, \mathrm{Alt}(\beta \otimes \alpha),$$

amiből következik, hogy

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl}\, \beta \wedge \alpha.$$

Ezt kellett ellenőriznünk. □

(3) <u>Következmény.</u> Ha k páratlan természetes szám és $\alpha \in \Lambda^k V^*$, akkor $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Valóban, a gradált kommutativitás miatt

$$\alpha \wedge \alpha = (-1)^{k \cdot k}\, \alpha \wedge \alpha = -(\alpha \wedge \alpha),$$

így $2(\alpha \wedge \alpha) = 0$, amiből $2 \neq 0$ miatt $\alpha \wedge \alpha = 0$ adódik.

(4) Tegyük fel, hogy V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér, és legyenek adva az

$$\ell^i \in \Lambda^1 V^* = V^*; \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad k \leq n$$

1-formák. Ekkor

(i) tetszőleges $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok esetén

$$(\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^1(v_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \ell^k(v_{\sigma(k)})$$

$$= \det\left(\ell^i(v_k)\right) ;$$

(ii) bármely $\sigma \in S_k$ permutációra

$$\ell^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \ell^{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma)\, \ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k ;$$

(iii) $\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k = \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \ell^{\sigma(k)}$.

<u>Bizonyítás.</u> (i) Az ék-szorzás asszociativitásának igazolásakor (ld. (2)) levezetett formula alapján teljes indukcióval következik, hogy

$$\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k = \frac{(1 + \dots + 1)!}{1! \dots 1!} \operatorname{Alt}(\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^k)$$

$$= k! \operatorname{Alt}(\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^k) ,$$

így

$$\ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k (v_1, \dots, v_k) = k! \operatorname{Alt}(\ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^k)(v_1, \dots, v_k)$$

$$= k! \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^1 \otimes \dots \otimes \ell^k (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^1(v_{\sigma(1)}) \dots \ell^k(v_{\sigma(k)}) = \det\left(\ell^i(v_k)\right) .$$

(ii) Az előző észrevétel ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ vektorsorozat esetén

$$\ell^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \ell^{\sigma(k)} (v_1, \dots, v_k) = \det\left(\ell^{\sigma(i)}(v_k)\right) =$$

$$= \varepsilon(\sigma) \det\left(\ell^i(v_k)\right) = \varepsilon(\sigma)\, \ell^1 \wedge \dots \wedge \ell^k (v_1, \dots, v_k) ,$$

ami igazolja a felírt formulát.

(iii) Kiértékelve a bizonyítandó összefüggés jobb oldalát egy $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ vektorsorozaton,

$$\Big(\sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes \ell^{\sigma(k)}\Big)(v_1,\ldots,v_k)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_k} \varepsilon(\sigma)\, \ell^{\sigma(1)}(v_1)\ldots \ell^{\sigma(k)}(v_k) = \det\big(\ell^i(v_k)\big)$$

$$\overset{(i)}{=} \ell^1\wedge\ldots\wedge\ell^k(v_1,\ldots,v_k)$$

adódik, így (iii) is fennáll. $\square$

(5) **TÉTEL.** Legyen V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér ($n\in\mathbb{N}^*$). Ha $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, $(b^i)_{i=1}^n$ az ehhez duális bázisa V^*-nak, akkor a

$$\left(b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}\right)_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \qquad (*)$$

elemcsalád bázisa $\Lambda^k V^*$-nak, tetszőleges $k\leq n$ pozitív egész esetén. Így módon

$$\underline{\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}}, \quad \underline{\dim \Lambda V^* = 2^n}.$$

Bizonyítás. (a) Azt mutatjuk meg először, hogy a $(*)$ elemcsalád generálja a $\Lambda^k V^*$ vektorteret.

Legyen $\alpha\in\Lambda^k V^*$ tetszőleges. Ekkor egyben $\alpha\in L^k(V)=T^0_k(V)$, és így lehetséges az

$$\alpha = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, b^{i_1}\otimes\ldots\otimes b^{i_k}$$

előállítás; ahol $\alpha_{i_1\ldots i_k}=\alpha(b_{i_1},\ldots,b_{i_k})$; v.ö. 6.8. Alkalmazva az Alt operátort mindkét oldalra, azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \mathrm{Alt}(\alpha) = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k}\,\mathrm{Alt}\left(b^{i_1}\otimes\ldots\otimes b^{i_k}\right)$$

$$= \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\varepsilon(\sigma)\, b^{\sigma(i_1)}\otimes\ldots\otimes b^{\sigma(i_k)}\right)$$

$$\overset{(4)/(iii)}{=} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k}\,\frac{1}{k!}\, b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}.$$

α alternáló volta miatt $\alpha_{i_1\ldots i_k} = 0$, ha az $(i_1,\ldots,i_k)$ indexsorozatnak van két megegyező tagja. Ha $(i_1,\ldots,i_k)$ tagjai különbözők, akkor tetszőleges $\sigma\in S_k$ permutáció esetén

$$\alpha_{i_1\ldots i_k} b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k} = \alpha(b_{i_1},\ldots,b_{i_k})\, b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}$$
$$= \alpha(b_{\sigma(i_1)},\ldots,b_{\sigma(i_k)})\, b^{\sigma(i_1)}\wedge\ldots\wedge b^{\sigma(i_k)},$$

hiszen mindkét tényező $\varepsilon(\sigma)$-val szorzódik. Mivel $k!$ számú ilyen átrendezés van, következik, hogy

$$\alpha = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k} b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}$$

– és ezt akartuk belátni.

(b) Belátjuk, hogy a $(*)$ elemcsalád <u>lineárisan független</u>. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k} b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k} = 0.$$

Tetszőlegesen rögzített $i_1' < \ldots < i_k'$ indexsorozat esetén tekintsük a megmaradt indexekből képzett $j_{k+1}' < \ldots < j_n'$ indexsorozatot. Ekkor

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_k} b^{i_1}\wedge\ldots\wedge b^{i_k}\wedge b^{j_{k+1}'}\wedge\ldots\wedge b^{j_n'} = 0.$$

Ez azonban az

$$\alpha_{i_1'\ldots i_k'} b^{1}\wedge\ldots\wedge b^{n} = 0$$

relációra redukálódik, amiből

$$b^1\wedge\ldots\wedge b^n(b_1,\ldots,b_n) \overset{(4)/(ii)}{=} \det(b^i(b_j)) = \det(\delta^i_j) = 1$$

$\alpha_{i_1'\ldots i_k'} = 0$ következik. Így a felírt lineáris kombináció tetszőlegesen kiválasztott, és ezért minden együtthatója eltűnik.

Mivel $\Lambda^k V^*$ $(*)$ bázisa $\binom{n}{k}$-tagú, $\dim\Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$, és így $\dim\Lambda V^* = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^k$. □

(6) Következmények. Legyen V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér, $n \geq 1$.

(i) Ha $(f^1, \dots, f^n)$ bázisa V^*-nak, akkor $f^1 \wedge \dots \wedge f^n$ bázisa $\Lambda^n V^*$-nak.

(ii) V^* elemeinek egy $(\alpha^1, \dots, \alpha^k)$ sorozata akkor és csak akkor lineárisan független, ha
$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \neq 0.$$

(iii) Legyen $\theta \in V^*$, $\alpha \in \Lambda^k V^*$. $\theta \wedge \alpha = 0$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan $\beta \in \Lambda^{k-1} V^*$, hogy $\alpha = \theta \wedge \beta$.

Bizonyítás. (i) Az előző tétel értelmében $\dim \Lambda^n V = \binom{n}{n} = 1$, és láttuk a bizonyításában, hogy ha $(f^1, \dots, f^n)$ bázisa V^*-nak, akkor $f^1 \wedge \dots \wedge f^n \neq 0$.

(ii) Ha $(\alpha^i)_{i=1}^k$ lineárisan független, akkor kiegészíthető V^*-nak egy $(\alpha^i)_{i=1}^n$ bázisává. Ebben az esetben az $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k$ k-forma tagja az $\Lambda^k V^*$ vektortér egy bázisának (ld. (5)/(*)), így $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \neq 0$.

Tegyük fel ezután, hogy $(\alpha^i)_{i=1}^k$ lineárisan függő. Ekkor valamelyik tagja, mondjuk α^1, lineárisan kombinálható a többi tagból:
$$\alpha^1 = \lambda_2 \alpha^2 + \dots + \lambda_k \alpha^k \quad ; \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$$
írható. Így
$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^k = (\lambda_2 \alpha^2 + \dots + \lambda_k \alpha^k) \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^k$$
$$= \lambda_2 \alpha^2 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \dots \wedge \alpha^k + \lambda_3 \alpha^3 \wedge \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \dots \wedge \alpha^k +$$
$$+ \lambda_k \alpha^k \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^k = 0,$$
mert a kapott összeg minden tagjában szerepel két megegyező 1-forma, és így (3) figyelembevételével az összes tag zérus. Tehát ha

$(\alpha^i)_{i=1}^k$ lineárisan függő, akkor $\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^k = 0$, amiből kontrapozícióval kapjuk a kívánt állítást.

(iii) Amennyiben $\alpha = \theta \wedge \beta$, úgy közvetlenül következik, hogy $\theta \wedge \alpha = \theta \wedge \theta \wedge \beta = 0$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\theta \wedge \alpha = 0$, $\theta \neq 0$. Adjuk meg V^*-nak egy olyan $(\theta^i)_{i=1}^n$ bázisát, amelyben $\theta^1 = \theta$. Ekkor

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_k}$$

írható. A $\theta \wedge \alpha = 0$ feltétel miatt a jobb oldali összegben minden olyan tag 0, amelyben θ^1 nem szerepel. A többi tag mindegyikéből törölve θ^1-et, olyan $\beta \in \Lambda^{k-1} V^*$ formához jutunk, amelyre teljesül, hogy $\alpha = \theta \wedge \beta$. □

(7) Példák (A) Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ valós vektorteret, legyen (e_1, e_2) a kanonikus bázisa, (e^1, e^2) ennek duálisa. Ekkor tetszőleges $\alpha \in \Lambda^1 (\mathbb{R}^2)^* = (\mathbb{R}^2)^*$ elem egyértelmű módon az

$$\alpha = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

alakban, tetszőleges $\beta \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^2)^*$ elem pedig – szintén egyértelműen – a

$$\beta = \lambda e^1 \wedge e^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

alakban állítható elő.

(B) Tekintsük most az $\mathbb{R}^3$ valós vektorteret, az (e_1, e_2, e_3) kanonikus bázissal és ennek (e^1, e^2, e^3) duálisával. Ha $\alpha \in \Lambda^1 (\mathbb{R}^3)^* = (\mathbb{R}^3)^*$, $\beta \in \Lambda^2 (\mathbb{R}^3)^*$, $\gamma \in \Lambda^3 (\mathbb{R}^3)^*$, akkor ezek egyértelmű módon

$$\alpha = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3, \quad \beta = \beta_{12} e^1 \wedge e^2 + \beta_{13} e^1 \wedge e^3 + \beta_{23} e^2 \wedge e^3,$$
$$\gamma = \lambda e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$$

alakú $\mathbb{R}$-lineáris kombinációkként állíthatók elő.

(8) <u>Visszahúzás (pull-back)</u>. Legyenek V_1, V_2, W $\mathbb{K}$-vektorterek, és legyen $\varphi : V_1 \longrightarrow W$ lineáris leképezés. Tetszőleges $\alpha : V_2^k \longrightarrow W$ k-lineáris leképezés esetén értelmezzük a $\varphi^*\alpha : V_1^k \longrightarrow W$ leképezést a

$$(\varphi^*\alpha)(v_1, \dots, v_k) := \alpha(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$$

előírással ($v_1, \dots, v_k \in V_1$). Nyilvánvaló, hogy ekkor $\varphi^*\alpha$ k-lineáris leképezése V_1-nek W-be, és ha α alternáló, akkor $\varphi^*\alpha$ is alternáló. Azt mondjuk, hogy $\varphi^*\alpha$ α-nak a φ általi <u>visszahúzottja</u> vagy <u>pull-backje</u> (v.ö. <u>6.12.</u>).

A következő megállapítások egyszerűen ellenőrizhetők:

(i) Ha V_1, V_2, V_3, W $\mathbb{K}$-vektorterek, $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ és $\psi : V_2 \longrightarrow V_3$ lineáris leképezés, $\alpha : V_3^k \longrightarrow W$ pedig k-lineáris leképezés, akkor

$$(\psi \circ \varphi)^*\alpha = \varphi^*(\psi^*\alpha) ;$$

röviden, de formálisan:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* .$$

(ii) Amennyiben $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ lineáris leképezés, úgy a

$$\varphi^* : \wedge V_2^* \longrightarrow \wedge V_1^*$$

visszahúzó leképezés algebra-homomorfizmus.

<u>A 4. Térfogati formák, determinánsok, sűrűségek</u>

<u>4.1. Lemma.</u> Legyen V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér ($n \in \mathbb{N}^+$), és tekintsünk egy $\omega \in \wedge^n V^*$ n-formát. Ha $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek és

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha^i_j b_i \quad , \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

akkor

$$\omega(v_1,\dots,v_n) = \det(\alpha^i_j)\,\omega(b_1,\dots,b_n),$$

következésképpen egy n-dimenziós vektortéren adott n-edfokú formát egyértelműen meghatároz a vektortér egy bázisán fölvett értéke. Speciálisan, ha $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, akkor ω V egyetlen bázisán sem veheti fel a 0 értéket.

Bizonyítás. A multilinearitás alapján
$$\omega(v_1,\dots,v_n) = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq n} \alpha^{i_1}_1 \dots \alpha^{i_n}_n\, \omega(b_{i_1},\dots,b_{i_n}).$$

Mivel ω alternáló, a jobb oldali összegben minden olyan tag zérus, amelyben az $i_1,\dots,i_n$ indexek közül legalább kettő egybeesik. Így az összegzésnél szoríthatkozhatunk azokra az $(i_1,\dots,i_n)$ indexsorozatokra, amelyeknek tagjai különbözők. Ezek azonban az $\{1,\dots,n\}$ halmaz permutációiként nyerhetők, tehát

$$\begin{aligned}\omega(v_1,\dots,v_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \alpha^{\sigma(1)}_1 \dots \alpha^{\sigma(n)}_n\, \omega(b_{\sigma(1)},\dots,b_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \alpha^{\sigma(1)}_1 \dots \alpha^{\sigma(n)}_n\, \omega(b_1,\dots,b_n) \\ &= \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \alpha^{\sigma(1)}_1 \dots \alpha^{\sigma(n)}_n\Big)\, \omega(b_1,\dots,b_n) \\ &= \det(\alpha^i_j)\,\omega(b_1,\dots,b_n).\end{aligned}$$ □

4.2. Lineáris transzformáció determinánsa

Legyen V n-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött, $n \geq 1$.

(1) V egy térfogati formáján V-n adott nem-zérus n-formát értünk, azaz V térfogati formái a $\Lambda^n V^*$ 1-dimenziós vektortér nem-zérus elemei.

(2) Legyen V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér ($n \geq 1$), és jelöljünk ki egy $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ térfogati formát. Bármely $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ lineáris transzformációhoz létezik egy és csak egy olyan $\det\varphi \in \mathbb{K}$ skalár, hogy

$$\varphi^* \omega = (\det\varphi)\,\omega .$$

Ezt a skalárt a φ lineáris transzformáció determinánsának nevezzük; $\det\varphi$ megegyezik φ tetszőleges mátrixreprezentációjának determinánsával.

Bebizonyítjuk a tett kijelentéseket.

(a) 3.6.(8)-ban már megállapítottuk, hogy alternáló forma visszahúzottja is alternáló, most azonban ténylegesen ellenőrizzük, hogy $\varphi^*\omega \in \Lambda^n V^*$.

Legyen $(v_i)_{i=1}^n \in V^n$ tetszőleges, és tekintsünk egy $\sigma \in S_n$ permutációt. Vezessük be a

$$w_{\sigma(i)} := \varphi(v_{\sigma(i)}) \; ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

rövidítést. Ekkor

$$\begin{aligned}
(\sigma(\varphi^*\omega))(v_1, \dots, v_n) &= \varphi^*\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \\
&= \omega(\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(n)})) = \omega(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \\
&= \varepsilon(\sigma)\,\omega(w_1, \dots, w_n) = \varepsilon(\sigma)\,\omega(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \\
&= \varepsilon(\sigma)(\varphi^*\omega)(v_1, \dots, v_n) \; ;
\end{aligned}$$

következésképpen $\sigma(\varphi^*\omega) = \varepsilon(\sigma)\varphi^*\omega$, tehát $\varphi^*\omega \in \Lambda^n V^*$ valóban teljesül.

(b) Mivel $\varphi^*\omega \in \Lambda^n V^*$ és ω – egytagú – bázisa $\Lambda^n V^*$-nak, $\varphi^*\omega = \gamma\,\omega$ írható egy egyértelműen meghatározott $\gamma \in \mathbb{K}$ skalárral. Be kell azonban látni, hogy γ független az ω térfogati forma megválasztásától. Tekintsünk ezért egy további, $\tilde{\omega} \in \Lambda^n V^*$ térfogati formát. Ez ω-nak skalárszorosa, mondjuk $\tilde{\omega} = \lambda\omega$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Így tetszőleges $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ vektorsorozat esetén

$$(\varphi^* \tilde{\omega})(v_1, \dots, v_n) = \tilde{\omega}(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) =$$
$$= (\lambda\omega)(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) = \lambda(\varphi^*\omega)(v_1, \dots, v_n)$$
$$= \lambda(\gamma\, \omega)(v_1, \dots, v_n) = \gamma\,(\lambda\omega)(v_1, \dots, v_n) =$$
$$= \gamma\, \tilde{\omega}(v_1, \dots, v_n),$$

tehát $\varphi^* \tilde{\omega} = \gamma \tilde{\omega}$ – az $\tilde{\omega}$ térfogati forma alkalmazása ugyanahhoz a skalárszorzóhoz vezetett.

(c) Jelöljük ki V-nek egy $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisát, és legyen φ erre vonatkozó mátrixa $m_{\mathcal{B}}(\varphi) := (\alpha^i_j) \in M_n(\mathbb{K})$. Ekkor

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha^i_j b_i \; ; \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

és így

$$((\det\varphi)\,\omega)(b_1, \dots, b_n) = (\varphi^*\omega)(b_1, \dots, b_n) =$$
$$= \omega(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$$
$$\overset{4.1.}{=} \det(\alpha^i_j)\, \omega(b_1, \dots, b_n),$$

amiből $\det\varphi = \det(\alpha^i_j)$ következik.

(3) Legyen V továbbra is $n\ (\geq 1)$-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér. A definíció közvetlen alkalmazásával egyszerűen adódnak a következők:

(i) Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$, akkor $\det(\psi \circ \varphi) = (\det\psi)(\det\varphi)$;

(ii) $\det 1_V = 1$;

(iii) $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ pontosan akkor izomorfizmus, ha $\det\varphi \neq 0$, és ebben az esetben $\det\varphi^{-1} = \dfrac{1}{\det\varphi}$.

<u>4.3.</u> <u>Vektortér irányítása</u> Ebben a szakaszban véges dimenziós (de nem triviális) VALÓS vektortérben dolgozunk.

(1) A V (n-dimenziós, valós) vektortér térfogati formáinak halmazában az

$$\omega_1 \sim \omega_2 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*_+ : \omega_2 = \lambda\omega_1$$

reláció ekvivalenciareláció, a szerinte vett ekvivalenciaosztályok száma kettő.

Valóban, közvetlenül ellenőrizhető, hogy a $\sim$ reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Ha $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$, akkor ω és $-\omega$ nyilvánvalóan nem ekvivalens térfogati forma, van tehát legalább két ekvivalenciaosztály. Tegyük fel ezután, hogy ω_1 és ω_2 nem ekvivalens térfogati forma V-n, s tekintsünk egy tetszőleges további ω térfogati formát V-n. Mivel $\dim \Lambda^n V^* = 1$, $\omega = \lambda_1 \omega_1$ és $\omega = \lambda_2 \omega_2$ írható, ahol $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$. Itt λ_1 és λ_2 különböző előjelű, ellenkező esetben ui. $\omega_1 \sim \omega_2$ adódna, amit kizártunk. Így ω ekvivalens ω_1 és ω_2 valamelyikével, amivel beláttuk, hogy az ekvivalenciaosztályok száma legfeljebb kettő.

A mondottak szerint az

$$\mathcal{O}(V) := \Lambda V^* \setminus \{0\} \big/ \sim$$

faktorhalmaz kételemű, az elemeit V irányításainak hívjuk. A (V, O) párt irányított vektortérnek nevezzük, ha $O = [\mu] \in \mathcal{O}(V)$ $(\mu \in \Lambda V^* \setminus \{0\})$. A $(V, [\mu])$ irányított vektortér egy $(b_i)_{i=1}^n$ bázisát pozitív irányításúnak vagy pozitívnak mondjuk, ha $\mu(b_1, \dots, b_n) > 0$, ellenkező esetben negatív irányítású (negatív) bázisról szólunk.

(2) Legyen $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisa a V vektortérnek, és tekintsük ennek $\mathcal{B}^* := (b^i)_{i=1}^n$ duálisát. Ekkor

$$\mu_{\mathcal{B}} := b^1 \wedge \dots \wedge b^n$$

térfogati forma V-n (v.ö. 3.6. (51)), s mivel

$$\mu_{\mathcal{B}}(b_1,\dots,b_n) \overset{3.6./(4)(i)}{=} \det(b^i(b_j)) = $$
$$= \det(\delta^i_j) = 1,$$

a $\mathcal{B}$ bázis pozitív irányítású a $[\mu_{\mathcal{B}}]$ irányításra nézve. Ezt az irányítást a $\mathcal{B}$ <u>bázis által meghatározott irányításnak</u> hívjuk.

(3) Legyen $(V,[\mu])$ irányított vektortér. Egy $\varphi \in End(V)$ lineáris transzformációt <u>irányítástartónak</u> mondunk, ha $\varphi^*\mu \in [\mu]$, különben <u>irányításváltónak</u> nevezzük. Mivel $\varphi^*\mu = (\det\varphi)\mu$, φ pontosan akkor irányítástartó, ha $\det\varphi > 0$.

<u>Példák</u> (a) Legyen $(V,[\mu])$ irányított vektortér, és tekintsük a $\varphi := -1_V$ origóra való tükrözést. Ha $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, akkor

$$(\det\varphi)\,\mu(b_1,\dots,b_n) = \mu(\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n))$$
$$= \mu(-b_1,\dots,-b_n) = (-1)^n \mu(b_1,\dots,b_n);$$

így $\det\varphi = (-1)^n$, és φ aszerint irányítástartó, ill. irányításváltó, aszerint n páros, ill. páratlan.

(b) Tekintsük a komplex számok $\mathbb{C}$ halmazát valós vektortérnek. Ekkor $\mathbb{C}$-nek bázisa $\mathcal{B} = (1, i) \leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$. Ha $[\mu_{\mathcal{B}}]$ a $\mathcal{B}$ által meghatározott irányítás, akkor tetszőleges $z = \begin{pmatrix}re(z)\\im(z)\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}re(w)\\im(w)\end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ esetén

$$\mu_{\mathcal{B}}(z,w) = \mu_{\mathcal{B}}\left(re(z)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + im(z)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, re(w)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + im(w)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= re(z)\,im(w)\,\mu_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) +$$
$$+ im(z)\,re(w)\,\mu_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$= re(z)\,im(w) - im(z)\,re(w).$$

Minden $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés $z \in \mathbb{C} \longmapsto \varphi(z) = az \in \mathbb{C}$ alakú, ahol $a = \alpha + i\beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ egy rögzített komplex szám. Mivel

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot 1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot i = -\beta + i\alpha = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

φ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozóan

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Így $\det \varphi = \alpha^2 + \beta^2 > 0$, ha $\varphi \neq 0$, következésképpen <u>$\mathbb{C}$-nek minden nemzérus $\mathbb{C}$-lineáris transzformáció-ja irányítástartó.</u>

<u>4.4. Euklideszi vektortér kanonikus térfogati formája és sűrűsége</u>

(1) Ebben a szakaszban végig egy V n-dimenziós euklideszi vektorteret veszünk alapul, az euklideszi struktúrát definiáló pozitív definit skaláris szorzatot a $\langle\, ,\rangle$, az ebből származó normát a $\|\ \|$ szimbólummal jelöljük. Emlékeztetünk rá, hogy egy V euklideszi vektortér V^* duális tere a

$$\left\| \begin{array}{l} \flat : V \longrightarrow V^*, \quad a \longmapsto a^\flat ; \\ a^\flat(v) := \langle a, v\rangle \end{array}\right.$$

leképezés révén természetes módon izomorf V-vel (ez az észrevétel a <u>Riesz-lemma</u> egyik lehetséges megfogalmazása). A $\flat$ leképezés inverzére a $\#$ jelölést használjuk. A V és V^* közötti természetes izomorfizmus lehetővé teszi, hogy kanonikus módon euklideszi struktúrával ruházzuk fel a V^* vektorteret is: tetszőleges $\alpha, \beta \in V^*$ esetén legyen

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \langle \alpha^{\#}, \beta^{\#} \rangle .$$

Ez a konstrukció kiterjeszthető az $\Lambda^k V^*$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) vektorterek mindegyikére.

(2) A V euklideszi vektortér egy $\varphi : V \to V$ transzformációjára a következő feltételek ekvivalensek:

(i) φ <u>megtartja a skaláris szorzatot</u>:
$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, bármely $(u, v) \in V \times V$-re.

(ii) φ <u>lineáris</u> és <u>normatartó</u> ($\|\varphi(v)\| = \|v\|$, minden $v \in V$-re);

(iii) φ <u>lineáris</u> és V valamely <u>ortonormált bázisát ortonormált bázisba viszi át</u>;

(iv) φ lineáris és ortonormált bázisra vonatkozóan ortogonális mátrix reprezentálja.

Ha φ eleget tesz e feltételek valamelyikének – és így bármelyikének –, akkor azt mondjuk, hogy <u>ortogonális transzformációja</u> V-nek.

$$O(V) := \{ \varphi \in \mathrm{End}(V) \mid \forall v \in V : \|\varphi(v)\| = \|v\| \}$$

csoport a leképezéskompozíció művelettel, V <u>ortogonális csoportja</u>. Tetszőleges $\varphi \in O(V)$ esetén $\det \varphi \in \{-1, 1\}$; $O(V)$-nek részcsoportja az

$$O^+(V) := \{ \varphi \in O(V) \mid \det \varphi = 1 \}$$

<u>forgáscsoport</u>. <u>Nem</u> részcsoportja $O(V)$-nek

$$O^-(V) := \{ \varphi \in O(V) \mid \det \varphi = -1 \};$$

$O^-(V)$ elemeit <u>nemvalódi forgásokként</u> is említjük.

(3) <u>Lemma.</u> Ha V n-dimenziós euklideszi vektortér, akkor a $\Lambda^n V^*$ 1-dimenziós vektortéren normát ad meg az

$$\omega \in \Lambda^n V^* \longmapsto \|\omega\| := |\omega(b_1, \ldots, b_n)| \in \mathbb{R}$$

függvény, ahol $(b_i)_{i=1}^n$ tetszőlegesen választott ortonormált bázisa V-nek.

Bizonyítás. Közvetlenül látható, hogy a $\| \|$ függvény eleget tesz a normára előírt feltételeknek, csupán az szorul ellenőrzésre, hogy jól definiált: független az alkalmazott ortonormált bázis választásától. Tekintsünk tehát egy további, $(\tilde{b}_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázist. Létezik (egyetlenegy) olyan $\varphi \in O(V)$ ortogonális transzformáció, hogy $\tilde{b}_i = \varphi(b_i)$ $(i \in \{1, \dots, n\})$. Így

$$
\begin{aligned}
|\omega(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)| &= |\omega(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))| = \\
&= |(\det\varphi)\, \omega(b_1, \dots, b_n)| = \\
&= |\det\varphi|\, |\omega(b_1, \dots, b_n)| = \\
&=: \|\omega\|,
\end{aligned}
$$

hiszen $\det\varphi \in \{-1, 1\}$. □

(4) Tegyük föl, hogy $(V, [\mu])$ irányított n-dimenziós euklideszi vektortér.

Egyértelműen létezik olyan $\lambda_V \in [\mu]$ térfogati forma, amelynek 1 a normája. Ezt V <u>kanonikus térfogati formájának</u> nevezzük.

Ha speciálisan V háromdimenziós irányított vektortér, akkor a kanonikus térfogati formát <u>vegyesszorzatnak</u> is mondjuk és időnként az

$$|a, b, c| := \lambda_V(a, b, c) \quad ; \quad a, b, c \in V$$

jelölést használjuk.

(5) Egy V n-dimenziós euklideszi vektortér <u>kanonikus sűrűségén</u> a

$$\varrho_V : V^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ (v_1, \dots, v_n) \longmapsto |\lambda_V(v_1, \dots, v_n)|$$

függvényt értjük, ahol λ_V egy V-n tetszőlegesen kijelölt irányításhoz tartozó kano-

Unicus térfogati forma.

Világos a definícióból, hogy ha ϱ_V a V euklideszi vektortér kanonikus sűrűsége, akkor bármely $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázis esetén $\varrho_V(b_1,\dots,b_n)=1$, míg ha λ_V egy $(V,[\mu])$ irányított euklideszi vektortér kanonikus térfogati formája, akkor tetszőleges pozitív $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázis esetén teljesül ugyanez.

(6) Ha ϱ_V a V n-dimenziós euklideszi vektortér kanonikus sűrűsége, akkor tetszőleges $(v_1,\dots,v_n)\in V^n$ vektorsorozat esetén
$$\varrho_V(v_1,\dots,v_n)=\left(G(v_1,\dots,v_n)\right)^{1/2},$$
ahol $G(v_1,\dots,v_n):=\det(\langle v_i,v_j\rangle)$ a $(v_i)_{i=1}^n$ vektorsorozat Gram-determinánsa.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}=(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázis, $(v_i)_{i=1}^n$ tetszőleges n-tagú vektorsorozata a V vektortérnek. Létezik (egy és csak egy) olyan $\varphi\in\mathrm{End}(V)$ lineáris transzformáció, amelyre $\varphi(b_i)=v_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$ teljesül. Legyen $A:=[\varphi]_{\mathcal{B}}$ φ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozóan, és jelölje A_i, ill. A^i az A mátrix i-edik oszlop-, ill. sorvektorát ($i\in\{1,\dots,n\}$). Ekkor egyrészt
$$\begin{aligned}G(v_1,\dots,v_n):&=\det(\langle v_i,v_j\rangle)=\det(\langle\varphi(b_i),\varphi(b_j)\rangle)\\&=\det(\langle A_i,A_j\rangle)=\det(\langle({}^tA)^i,A_j\rangle)\\&=\det({}^tAA)=\det({}^tA)\det A=(\det A)^2\\&=(\det\varphi)^2,\end{aligned}$$
másrészt
$$\begin{aligned}\varrho_V(v_1,\dots,v_n):&=|\lambda_V(v_1,\dots,v_n)|=|\lambda_V(\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n))|\\&=|(\det\varphi)\lambda_V(b_1,\dots,b_n)|=\\&=|\det(\varphi)|\,|\lambda_V(b_1,\dots,b_n)|=|\det\varphi|,\end{aligned}$$
így $\varrho_V(v_1,\dots,v_n)=\left(G(v_1,\dots,v_n)\right)^{1/2}$. □

A5. Az absztrakt külső algebra

5.1. Formális lineáris kombinációk

Legyen $\mathbb{K}$ egy (nullkarakterisztikájú) test, S pedig egy nemüres halmaz. Ebben a szakaszban értelmet adunk a

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$$

alakú kifejezéseknek, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\mathbb{K}$-ból való, $s_1, \dots, s_n$ pedig az S halmaz különböző elemei.

Jegyezzük meg először, hogy az S halmaz $\mathbb{K}$-ba való leképezéseinek $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ halmaza $\mathbb{K}$ fölötti vektortér az összeadás és skalárral való szorzás pontonkénti értelmezése esetén, azaz ha tetszőleges $f, g \in \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$(f+g)(s) := f(s) + g(s) \; ; \quad (\lambda f)(s) := \lambda f(s) \; ; \quad s \in S .$$

Jelentse ezek után tetszőleges $s \in S$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén λs azt az S-en értelmezett, $\mathbb{K}$-értékű függvényt, amelyet a

$$\lambda s(s) := s \; ; \quad \lambda s(z) := 0, \text{ ha } z \neq s$$

előírás definiál. Mint az $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ vektortér elemeinek, szólhatunk e függvények összegéről és skalárszorosáról. Közvetlenül látható, hogy

$$\mu(\lambda s) = (\mu\lambda) s \quad , \quad (\lambda + \mu) s = \lambda s + \mu s \qquad (s \in S; \; \lambda, \mu \in \mathbb{K}).$$

(A felírt relációk $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$-beli függvények egyenlőségét jelentik!) Legyen

$$C(S) := \left\{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \in \mathcal{F}(S, \mathbb{K}) \;\middle|\; \begin{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} ; \\ \{s_1, \dots, s_n\} \subset S \end{matrix} \right\} ,$$

és nevezzük a $C(S)$ halmaz elemeit az <u>S elemeiből képzett formális lineáris kombi-</u>

<u>nációknak</u>. Állítjuk, hogy <u>ha $s_1, \dots, s_n$ S különböző elemei, akkor</u>

$$1s_1, \dots, 1s_n$$

<u>$C(S)$ lineárisan független elemei.</u>

Valóban, tegyük fel, hogy valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ skalárokkal

$$\lambda_1(1s_1) + \dots + \lambda_n(1s_n) = 0 \in \mathcal{F}(S, K)$$

teljesül. Mivel $\lambda_i(1s_i) = (\lambda_i \cdot 1)s_i = \lambda_i s_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, ez a reláció a

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n = 0$$

alakban is felírható. Kiértékelve mindkét oldalt rendre az $s_1, \dots, s_n$ pontokban, azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$. Ezzel igazoltuk a tett észrevételt.

A gyakorlatban kényelmesebb az $1s_i$ függvények helyett egyszerűen s_i-t írni; ezek után $C(S)$ elemei a különböző $s_1, \dots, s_n \in S$ elemek formális lineáris kombinációiként állnak elő – innen az elnevezés. Jegyezzük meg, hogy $C(S)$ minden eleme <u>egyértelműen</u> állítható elő $\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n$ alakban, tekintettel $s_1, \dots, s_n$ most igazolt lineáris függetlenségére.

<u>5.2.</u> Legyenek V és W nemtriviális K-vektorterek. Tegyük föl, hogy V n-dimenziós. Válasszunk ki egy $k \in \{1, \dots, n\}$ egész számot, és tekintsünk egy $f \in Alt^k(V, W)$ alternáló k-lineáris leképezést. Legyen $(v_i)_{i=1}^{n}$ egy bázisa V-nek, és adjunk meg egy $A = (\alpha^i_j) \in M_{n,k}(K)$ mátrixot. Képezzük ennek segítségével az

$$u_1 = \alpha_1^1 v_1 + \dots + \alpha_1^n v_n ,$$
$$u_2 = \alpha_2^1 v_1 + \dots + \alpha_2^n v_n$$
$$\vdots$$
$$u_k = \alpha_k^1 v_1 + \dots + \alpha_k^n v_n$$

vektorokat. Röviden:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i v_i \quad , \quad j \in \{1, \dots, k\} .$$

Ekkor

$$f(u_1, \dots, u_k) = f\Big(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_1^{i_1} v_{i_1} , \dots , \sum_{i_k=1}^{n} \alpha_k^{i_k} v_{i_k} \Big)$$

$$= \sum_{\sigma} \alpha_1^{\sigma(1)} \dots \alpha_k^{\sigma(k)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) ,$$

ahol az összegzés kiterjesztendő az összes $\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ leképezésre. Minden olyan tag 0-val járul azonban az összeghez, ahol σ nem injektív, a következőkben ezért a $\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ injektív leképezésekre szorítkozunk. Ekkor $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ egyértelműen egy olyan $(i_1, \dots, i_k)$ k-as permutációja, ahol $i_1 < \dots < i_k$.

Az $f(u_1, \dots, u_k)$ -ra nyert kifejezést átírjuk determinánsok segítségével. Az $\{1, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges S k-elemű részhalmaza esetén tekintsük A-nak azt az $(a_j^i) \in M_k(\mathbb{K})$ $k \times k$-as részmátrixát, ahol $i \in S$. Jelölje

$$\det_S A$$

e részmátrix determinánsát; ezt az S halmazhoz tartozó aldeterminánsnak is mondhatjuk. Jelölje továbbá $P(S)$ mindazon

$$\sigma : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

injektív leképezések halmazát, melyeknek képhalmaza az S halmaz. Ekkor

$$\det_S A = \sum_{\sigma \in P(S)} \varepsilon_S(\sigma)\, \alpha_1^{\sigma(1)} \ldots \alpha_k^{\sigma(k)}$$

ahol $\varepsilon_S(\sigma)$ σ értelemszerűen definiált paritása.

Mindezen jelöléseink és megállapodásaink birtokában az $f(u_1, \ldots, u_k)$-ra kapott kifejezés az

$$\boxed{f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_S (\det_S A)\, f(v_S)}$$

alakba írható, ahol $v_S := (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$, $\{i_1, \ldots, i_k\} \in S$; $i_1 < \ldots < i_k$.

<u>**5.3. Tétel és definíció.**</u> Legyen V egy n-dimenziós, nemtriviális $\mathbb{K}$-vektortér, $k \in \{1, \ldots, n\}$ pedig egy egész szám. Létezik olyan véges dimenziójú $\Lambda^k V$ $\mathbb{K}$-vektortér és egy

$$\Lambda^k : V^k \longrightarrow \Lambda^k V$$

alternáló k-multilineáris leképezés, hogy teljesülnek a következők:

(Λ_1) Ha W tetszőleges $\mathbb{K}$-vektortér és $f \in \mathrm{Alt}^k(V, W)$, akkor létezik egy és csak egy olyan $f_* : \Lambda^k V \longrightarrow W$ lineáris leképezés, hogy $f = f_* \circ \Lambda^k$:

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Lambda^k"'] & & W \\ & \Lambda^k V \arrow[ur, dashed, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

– <u>univerzális tulajdonság</u>.

(Λ_2) Ha $(v_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, akkor az $\binom{n}{k}$ tagszámú

$$\Lambda^k(v_{i_1},\dots,v_{i_k}) \ ; \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

elemsorozat bázisa a $\Lambda^k V$ vektortérnek – <u>kanonikus bázis tulajdonság</u>.

A $(\Lambda^k V, \Lambda^k)$ párt, vagy egyszerűen csak a $\Lambda^k V$ vektorteret a V vektortér <u>k-adik külső hatványának</u> nevezzük. A $\Lambda^k V$ vektortér elemeit <u>k-vektoroknak</u> hívjuk, a $k=2$ esetben <u>bivektorokról</u> szólunk. A $\Lambda^k(v_1,\dots,v_k)$ alakú k-vektorokat <u>dekomponálhatók</u> mondjuk és rájuk a $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ jelölést használjuk.

<u>Megjegyzés.</u> A $\Lambda^k : V^k \longrightarrow \Lambda^k V$ leképezés alternáló volta miatt bármely $\sigma \in S_k$ permutáció és $(v_1,\dots,v_k) \in V^k$ vektorsorozat esetén

$$v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \, .$$

Ha $(v_1,\dots,v_k)$ lineárisan függő vektorsorozat, akkor szintén Λ^k alternáló tulajdonságából adódóan

$$(*) \qquad v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$$

következik. Megfordítva, $(*)$ teljesülése esetén a $(v_1,\dots,v_k)$ vektorsorozat lineárisan függő, ellenkező esetben ugyanis tagja volna V egy bázisának, így $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ (Λ_2) miatt $\Lambda^k V$ kanonikus bázisának egy tagja lenne, ami $(*)$-nak ellentmond.

<u>A tétel bizonyítása.</u> Az $\{1,\dots,n\}$ halmaz minden k-elemű S részhalmazához rendeljünk hozzá egy t_S szimbólumot (különböző részhalmazokhoz értelemszerűen különbözőket). A <u>5.1.</u>-ben

ben mondottak szerint e szimbólumok bázisát képezik egy $\binom{n}{k}$-dimenziós vektortérnek, a t_S szimbólumok formális lineáris kombinációi vektorterének. t_S helyett alkalmazhatjuk a

$$t_{(i)} := t_{i_1 \ldots i_k} \; ; \quad i_1 < \ldots < i_k$$

írásmódot is.

Kijelölve V-nek egy $(v_i)_{i=1}^{n}$ bázisát, tetszőleges $(u_1, \ldots, u_k) \in V^k$ esetén legyen

$$(*) \qquad \underline{\Lambda^k(u_1, \ldots, u_k) =: u_1 \wedge \ldots \wedge u_k := \sum_S (\det_S A) t_S} \, ,$$

ha $\quad u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j^i v_i \quad (j \in \{1, \ldots, k\})$ és $A = (\alpha_j^i) \in M_{n,k}(\mathbb{K})$.

Így megadtuk a V^k vektortér egy leképezését a t_S szimbólumok formális lineáris kombinációinak vektorterébe; állítjuk, hogy ez a leképezés és ez a vektortér eleget tesz a kívánalmaknak.

Λ^k alternáló k-lineáris volta adódik a determináns megfelelő tulajdonságaiból. Jegyezzük meg, hogy ha $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \ldots < i_k$, akkor

$$(**) \qquad v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} = t_S \, .$$

A lineáris algebra egyik standard tétele szerint egyértelműen létezik olyan lineáris leképezés, amely egy vektortér egy adott bázisán előírt értékeket vesz föl. Így ha adva van egy $f: V^k \longrightarrow W$ alternáló k-lineáris leképezés egy W $\mathbb{K}$-vektortérbe, akkor létezik egy és csak egy olyan

$$f_* : \Lambda^k V \longrightarrow W$$

lineáris leképezés, hogy valamennyi

$$S = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}, \quad i_1 < \ldots < i_k$$

részhalmaz esetén
$$f_*(t_S) = f(v_S) = f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}).$$

Ekkor az 5.2.-ban levezetett formula alkalmazásával kapjuk, hogy tetszőleges $(u_1, \ldots, u_k) \in V^k$ vektorsorozat esetén
$$f(u_1, \ldots, u_k) = \sum_S (\det_S A) f(v_S) = \sum_S (\det_S A) f_*(t_S)$$
$$= f_*\Big(\sum_S (\det_S A) t_S\Big) \overset{(*)}{=} f_*\big(\Lambda^k(u_1, \ldots, u_k)\big),$$
tehát
$$f = f_* \circ \Lambda^k.$$

Ezzel (Λ_1) igazolást nyert. (Λ_2) teljesülése egyszerűen adódik a konstrukció alapján: ha $(v_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, akkor a
$$t_S \overset{(**)}{=} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}\ ; \quad S = \{i_1, \ldots, i_k\},\ i_1 < \ldots < i_k$$
elemek bázisát képezik a t_S szimbólumok formális lineáris kombinációi által alkotott $\Lambda^k V$ vektortérnek. $\square$

<u>5.4. Tétel.</u> Legyen V n-dimenziós, nemtriviális $\mathbb{K}$-vektortér; $k, l \in \{1, \ldots, n\}$; $k + l \leq n$. Létezik egy és csak olyan szorzásnak mondott
$$\cdot : \Lambda^k V \times \Lambda^l V \longrightarrow \Lambda^{k+l} V$$
bilineáris leképezés, hogy tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots, v_l$ V-beli vektorok esetén
$$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) \cdot (v_1 \wedge \ldots \wedge v_l) = u_1 \wedge \ldots u_k \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_l .$$
Ez a szorzás asszociatív.

<u>Bizonyítás.</u> Tetszőlegesen rögzített $(u_1, \ldots, u_k) \in V^k$ vektor k-as esetén tekintsük a
$$(v_1, \ldots, v_l) \in V^l \longmapsto u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_l \in \Lambda^{k+l} V$$

leképezését. Ez nyilvánvalóan l-multilineáris és alternáló, így az univerzális tulajdonság alapján létezik egy és csak egy olyan

$$f_{(u)} = f_{u_1,\dots,u_k} : \Lambda^l V \longrightarrow \Lambda^{k+l} V$$

lineáris leképezés, hogy tetszőleges $v_1,\dots,v_l \in V$ esetén

$$f_{(u)}(v_1,\dots,v_l) = u_1\wedge\dots\wedge u_k \wedge v_1\wedge\dots\wedge v_l .$$

A

$$V^k \longrightarrow L(\Lambda^l V, \Lambda^{k+l} V), \quad (u_1,\dots,u_k) \longmapsto f_{u_1\dots u_k}$$

leképezés nyilvánvalóan szintén alternáló multilineáris leképezés, így ismét az univerzális tulajdonság alapján következik olyan

$$f_* : \Lambda^k V \longrightarrow L(\Lambda^l V, \Lambda^{k+l} V)$$

lineáris leképezés egyértelmű létezése, hogy tetszőleges $(u_1,\dots,u_k) \in V^k$ esetén

$$f_{u_1,\dots,u_k} = f_*(u_1\wedge\dots\wedge u_k)$$

A kívánt szorzást értelmezzük ezek után az

$$(\omega,\varphi) \in \Lambda^k V \times \Lambda^l V \longmapsto \omega\wedge\varphi := f_*(\omega)(\varphi)$$

előírással. Ekkor ez nyilvánvalóan bilineáris és egyértelműen meghatározott, mert az $u_1\wedge\dots\wedge u_k$ alakú elemek generálják a $\Lambda^k V$ vektorteret, a $v_1\wedge\dots\wedge v_l$ alakú elemek pedig generálják $\Lambda^l V$-t. Az asszociativitás teljesülése dekomponálódó elemek szorzatára azonnal látható, ebből pedig a linearitás alapján általánosságban is adódik.

□

A6. A helyettesítési operátor

<u>6.1. Lemma és definíció.</u> Legyen V tetszőleges $\mathbb{K}$-vektortér. Ha $\alpha \in T_k^0(V)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, $v \in V$ és és tetszőleges $v_2, \dots, v_k \in V$ esetén

$$i_v\alpha(v_2, \dots, v_k) = \alpha(v, v_2, \dots, v_k),$$

akkor $i_v\alpha \in T_{k-1}^0(V)$. Amennyiben – speciálisan – α alternáló, úgy $i_v\alpha$ is alternáló. Megállapodva abban, hogy $i_v\alpha := 0$, ha $\alpha \in T_0^0(V) := \mathbb{K}$, tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén az

$$i_v : T_k^0(V) \longrightarrow T_{k-1}^0(V), \quad \alpha \longmapsto i_v\alpha$$

leképezést a v vektorhoz tartozó <u>helyettesítési operátornak</u> nevezzük.

<u>6.2. Lemma.</u> Legyen V $\mathbb{K}$-vektortér, $v \in V$. Ha $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ 1-formák V-n, akkor

$$i_v(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i_v\alpha^i (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}^i \wedge \dots \wedge \alpha^k).$$

<u>Bizonyítás.</u> Tetszőleges $(v_2, \dots, v_k) \in V^{k-1}$ vektorsorozat esetén

$$i_v(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(v_2, \dots, v_k) = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(v, v_2, \dots, v_k)$$

$$\overset{\underline{3.6.(4)(i)}}{=} \begin{vmatrix} \alpha^1(v) & \alpha^1(v_2) & \dots & \alpha^1(v_k) \\ \alpha^2(v) & \alpha^2(v_2) & \dots & \alpha^2(v_k) \\ \vdots & & & \\ \alpha^k(v) & \alpha^k(v_2) & \dots & \alpha^k(v_k) \end{vmatrix} \overset{\text{1. oszlop szerinti kifejtés} + \underline{3.6.(4)(i)}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \alpha^i(v)(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}^i \wedge \dots \wedge \alpha^k)(v_2, \dots, v_k).$$

Itt $\alpha^i(v) = i_v(\alpha^i)$, úgyhogy a tett észrevételt igazoltuk. $\square$

6.3. Állítás. Legyen V $\mathbb{K}$-vektortér, $v \in V$. Az i_v helyettesítési operátor <u>(-1)-edfokú graduált deriválciója</u> a V vektortér alternáló formái által alkotott ΛV^* graduált algebrának:

(i) $i_v(\Lambda^k V^*) = \Lambda^{k-1} V^*$;

(ii) $i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v \beta$,

ha $\alpha \in \Lambda^k V^*$, $\beta \in \Lambda V^*$.

<u>Bizonyítás.</u> Közvetlenül adódik a definícióból, hogy $i_V \in \mathrm{End}(\Lambda V^*)$, és hogy (i) teljesül.

(ii) igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy a felírt összefüggés érvényes az

$$\alpha = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \text{ , ill. } \beta = \beta^1 \wedge \dots \wedge \beta^l$$

alakú dekomponálható formákra ($\alpha^i, \beta^j \in \Lambda^1 V^* = V^*$; $(i,j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$), ugyanis ilyen alakú formákból minden k-, ill. l-forma lineárisan kombinálható, és i_v lineáris. Ekkor azonban 6.2. alapján adódik, hogy

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i_v \alpha^i (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^l \wedge \beta) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} (-1)^{k+j+1} i_v \beta^j (\alpha \wedge \beta^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\beta^j} \wedge \dots \wedge \beta^l)$$

$$= (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v \beta . \qquad \square$$

6.4. Állítás. Legyen V n-dimenziós $\mathbb{K}$-vektortér, $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, $(b^i)_{i=1}^n$ az ehhez duális bázisa V^*-nak. Ha $\alpha \in \Lambda^n V^*$, akkor tetszőleges $v = \sum_{i=1}^n v^i b_i$ vektor esetén

$$\underline{i_v \alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} k v^i b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n} ,$$

ahol $k \in \mathbb{K}$ az α n-forma által egyértelműen meghatározott skalár.

Bizonyítás. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén

$$i_v \alpha(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} v^j b_j, b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n\right)$$

$$= (-1)^{i-1} \alpha\left(b_1, \dots, \overset{i}{\sum_{j=1}^{n} v^j b_j}, \dots, b_n\right)$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} v^j \alpha(b_1, \dots, \overset{i}{b_j}, \dots, b_n)$$

$$= (-1)^{i-1} v^i \alpha(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$$

Másrészt az $i_v \alpha \in \Lambda^{n-1} V^*$ $(n-1)$-forma a 3.6. (5) tétel alapján

$$i_v \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\, b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n$$

alakban állítható elő, ahol $x_i = i_v \alpha(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n)$.
Maga az α n-forma $\alpha = k\, b^1 \wedge \dots \wedge b^n$ alakú (hiszen $b^1 \wedge \dots \wedge b^n$ bázisát alkotja $\Lambda^n V^*$-nak), ahol $k = \alpha(b_1, \dots, b_n)$.

Összevetve a tett észrevételeket,

$$i_v \alpha = \sum_{i=1}^{n} i_v \alpha(b_1, \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_n)\, b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} v^i \alpha(b_1, \dots, b_n)\, b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} k\, v^i\, b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n .$$

6.5. Következmény. Tegyük fel, hogy V n-dimenziós, nemtriviális $\mathbb{K}$-vektortér, és legyen $\omega \in \Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ egy rögzített térfogati forma. A

$$V \longrightarrow \Lambda^{n-1} V^*, \quad v \longmapsto i_v \omega$$

leképezés lineáris izomorfizmus.

Bizonyítás. Jelöljük ki V-nek egy $(b_i)_{i=1}^{n}$ bázisát. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén 6.4. alapján
$i_{b_i} \omega = (-1)^{i-1} k\, b^1 \wedge \dots \wedge \widehat{b^i} \wedge \dots \wedge b^n$, ahol $k = \omega(b_1, \dots, b_n) \neq 0$, így a megadott lineáris leképezés bázist bázisba visz. $\square$

6.6. Vektoriális szorzás Tegyük föl, hogy V háromdimenziós euklideszi vektortér. Legyen (e_1, e_2, e_3) ortonormált bázisa V-nek, (e^1, e^2, e^3) pedig ennek a duálisa; egyébként alkalmazzuk 4.4. jelöléseit. Tekintsük a $\mu := e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ térfogati formát, és jelentse λ_V a $[\mu]$ irányításhoz tartozó kanonikus térfogati formát. Mivel (e_1, e_2, e_3) pozitív bázis $[\mu]$-re nézve, ezért $\lambda_V = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$. A 6.5.-ben mondottak értelmében V izomorf a V-n adott alternáló bilineáris formák $\Lambda^2 V^*$ vektorterével a

$$v \in V \longmapsto i_v \lambda_V \in \Lambda^2 V^*$$

leképezés révén; jelölje ϑ ennek az izomorfizmusnak az inverzét. A V vektortér „a" és b vektorainak vektoriális szorzatán az

$$a \times b := \vartheta(a^\flat \wedge b^\flat) \in V$$

vektort értjük, az

$$(a, b) \in V \times V \longmapsto a \times b \in V$$

leképezést (az adott irányításhoz tartozó) vektoriális szorzásnak hívjuk. Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy ha $a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$, $b = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3$, akkor érvényes az

$$a \times b = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} e_3$$

klasszikus kiszámítási formula.

A7. Paralelepipedonok térfogata

7.1. Lemma. Legyen V euklideszi vektortér. V egy $(v_i)_{i=1}^k$ vektorsorozatának

$$G(v_1, \dots, v_k) := \det(\langle v_i, v_j \rangle)$$

Gram-determinánsa mindig nemnegatív; $G(v_1, \dots, v_k) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha a vektorsorozat lineárisan függő.

Bizonyítás. (1) Tegyük fel először, hogy $(v_i)_{i=1}^k$ lineárisan függő. Ekkor vannak olyan nem csupa nulla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ skalárok, hogy $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$. Skalárisan szorozva (bal oldalról) e reláció mindkét oldalát rendre a $v_1, \dots, v_k$ vektorokkal, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_1, v_k \rangle = 0,$$

$$\lambda_1 \langle v_2, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_2, v_2 \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_2, v_k \rangle = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_1 \langle v_k, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_k, v_2 \rangle + \dots + \lambda_k \langle v_k, v_k \rangle = 0.$$

Mivel

$$(\langle v_i, v_j \rangle) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix},$$

világos, hogy e mátrix oszlopvektorainak a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ skalárokkal képzett – s így nem-triviális – lineáris kombinációja zérusvektort eredményez. Így az oszlopvektorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, s ezért $\det(\langle v_i, v_j \rangle) = 0$.

(2) Tegyük fel ezután, hogy $(v_i)_{i=1}^k$ lineárisan független. Ekkor egy V_1 k-dimenziós alteret generál, amely az örökölt skaláris szorzattal euklideszi vektortér. Ha ϱ_1 V_1 kanonikus sűrűsége, akkor 4.4.(6) értelmében

$$G(v_1,\dots,v_k) = (\varrho_1(v_1,\dots,v_k))^2 = (\lambda_{V_1}(v_1,\dots,v_k))^2 ,$$

ahol λ_{V_1} a V_1 vektortér egyik irányításához tartozó kanonikus térfogati forma. $(v_i)_{i=1}^k$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_{V_1}(v_1,\dots,v_k) \neq 0$, így most $G(v_1,\dots,v_k) > 0$. □

Megjegyzés. $G(v_1,v_2) = \begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{vmatrix} = \|v_1\|^2\|v_2\|^2 - \langle v_1,v_2\rangle^2$,

így a Lemma a $k=2$ esetben visszaadja a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget.

7.2. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ a V euklideszi vektortér lineárisan független vektorai. Ekkor a

$$\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^k x^i a_i \,;\, x^i \in [0,1],\ i \in \{1,\dots,k\} \}$$

halmazt az adott vektorok által kifeszített k-dimenziós paralelepipedonnak nevezzük. Ennek térfogata

$$V(a_1,\dots,a_k) := \varrho_1(a_1,\dots,a_k) ,$$

ahol ϱ_1 az $a_1,\dots,a_k$ vektorok által generált altér kanonikus sűrűsége. Az előző pontban látottak szerint

$$(V(a_1,\dots,a_k))^2 = G(a_1,\dots,a_k) = \begin{vmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_1,a_k\rangle \\ \vdots & & \\ \langle a_k,a_1\rangle & \cdots & \langle a_k,a_k\rangle \end{vmatrix} .$$

A $k=2$ esetben ez a formula azt adja, hogy

$(V(a_1,a_2))^2 = \|a_1\|^2\|a_2\|^2 - \langle a_1,a_2\rangle^2 = \|a_1\|^2\|a_2\|^2 \sin\theta$,

ahol θ a_1 és a_2 szöge. Innen

$$V(a_1, a_2) = \|a_1\| \|a_2\| \sin \vartheta \quad ,$$

ami a paralelogrammák jól ismert területképlete.

Visszatérve az általános esethez, válasszunk ki egy $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexet, és állítsuk elő az a_i vektort

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda^j a_j + h_i \; ; \; \langle h_i, a_j \rangle = 0 \, , \text{ ha } i \neq j$$

alakban. Ha ϱ_1 a $V_1 := \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k)$ altér λ_{V_1} kanonikus térfogati formája segítségével van megadva, akkor

$$V(a_1, \ldots, a_k) := \varrho_1(a_1, \ldots, a_k) := |\lambda_{V_1}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)|$$
$$= |\lambda_{V_1}(a_1, \ldots, h_i, \ldots, a_k)|$$
$$= \varrho_1(a_1, \ldots, h_i, \ldots, a_k) \, ,$$

és így <u>4.4.</u> (4) alkalmazásával

$$(V(a_1, \ldots, a_k))^2 = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{a}_1, a_i \rangle & \cdots & \langle a_1, a_k \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle \hat{a}_i, a_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{a}_i, \hat{a}_i \rangle & \cdots & \langle \hat{a}_i, a_k \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle a_k, a_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{a}_k, \hat{a}_i \rangle & \cdots & \langle a_k, a_k \rangle \end{vmatrix} \langle h_i, h_i \rangle$$

$$= (V(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k))^2 \, \|h_i\|^2 \quad ;$$

tehát

$$V(a_1, \ldots, a_k) = V(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_k) \, \|h_i\|$$

– „a paralelepipedon térfogata megkapható „i-edik lapja" térfogatának és a hozzátartozó magasságnak a szorzataként".

A 8. Bivektorok euklideszi vektortérben

Állítás. Legyen adva egy $(V, \langle\,,\,\rangle)$ euklideszi vektortér, és tekintsük V bivektorainak $\Lambda^2 V$ vektorterét (a $\Lambda^2 V := (\Lambda^2 V^*)^*$ interpretációval).

(1) Értelmezzük egy $u \wedge v$ és egy $w \wedge z$ bivektor (változatlanul jelölt) skaláris szorzatát az

$$\langle u \wedge v, w \wedge z \rangle := \langle u, w\rangle \langle v, z\rangle - \langle u, z\rangle\langle v, w\rangle = \begin{vmatrix} \langle u,w\rangle & \langle u,z\rangle \\ \langle v,w\rangle & \langle v,z\rangle \end{vmatrix}$$

előírással, s terjesszük ezt ki lineárisan $\Lambda^2 V$-re. $\Lambda^2 V$ így euklideszi vektortérré válik. Egy $u \wedge v$ bivektor normanégyzete ekkor

$$\| u \wedge v \|^2 = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{vmatrix} = G(u,v),$$

következésképpen (u,v) lineáris függetlensége esetén $\| u \wedge v \|$ az u és v által kifeszített

$$\{ su + tv \in V \mid (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \}$$

paralelogramma területe:

$$\| u \wedge v \| = V(u,v)$$

(ld. A.7.2.).

(2) A bivektorok skaláris szorzatával kapcsolatban érvényes az

$$\langle u \wedge v, w \wedge z\rangle + \langle v \wedge w, u \wedge z\rangle + \langle w \wedge u, v \wedge z\rangle = 0$$

$(u, v, w, z \in V)$ „Jacobi – Bianchi azonosság".

(3) Interpretáljuk az $u \wedge v \in \Lambda^2 V$ bivektorokat $V \to V$ transzformációként az

$$u \wedge v\,(w) := \langle v, w\rangle u - \langle w, u\rangle v$$

előírással. Ekkor $u \wedge v$ (a skaláris szorzatra nézve) ferdeszimmetrikus lineáris transzformáció, azaz

$$\langle u \wedge v(z), w\rangle + \langle z, u \wedge v(w)\rangle = 0,$$

és a Jacobi–Bianchi azonosság az

$$u \wedge v\,(z) + v \wedge z\,(u) + z \wedge u\,(v) = 0$$

alakot ölti.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $\langle w \wedge z, u \wedge v\rangle := \langle w, u\rangle\langle z, v\rangle - \langle w, v\rangle\langle z, u\rangle$

$= \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \langle u, z\rangle\langle v, w\rangle =: \langle u \wedge v, w \wedge z\rangle$,

tehát a bevezetett skaláris szorzat szimmetrikus.

Teljesül a pozitív definitség is, mivel $u \wedge v \neq 0$ esetén az (u, v) vektorpár lineárisan független, és így $\langle u \wedge v, u \wedge v\rangle = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle > 0$ a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alapján.

(2) Közvetlenül kapjuk a definíció alkalmazásával, hogy

$$\langle u \wedge v, w \wedge z\rangle + \langle v \wedge w, u \wedge z\rangle + \langle w \wedge u, v \wedge z\rangle =$$

$$= \langle u, w\rangle\langle v, z\rangle - \underline{\langle u, z\rangle\langle v, w\rangle} + \langle v, u\rangle\langle w, z\rangle - \underline{\langle v, z\rangle\langle w, u\rangle}$$

$$+ \underline{\langle w, v\rangle\langle u, z\rangle} - \langle w, z\rangle\langle u, v\rangle = 0.$$

(3) $\langle u \wedge v(z), w\rangle + \langle z, u \wedge v(w)\rangle = \langle \langle v, z\rangle u - \langle z, u\rangle v, w\rangle$

$+ \langle z, \langle v, w\rangle u - \langle w, u\rangle v\rangle = \langle v, z\rangle\langle u, w\rangle - \langle z, u\rangle\langle v, w\rangle$

$+ \langle v, w\rangle\langle z, u\rangle - \langle w, u\rangle\langle z, v\rangle = 0.$ □