Differenciálgeometria:
fogalomtár és képletgyűjtemény

1. Görbeelmélet

1.1. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Egy

$$c = (c^1, c^2, c^3) \colon I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto c(t) := (c^1(t), c^2(t), c^3(t))$$

sima leképezést *parametrizált görbének* mondunk. Ennek *sebességvektormező*je

$$c' = ((c^1)', (c^2)', (c^3)') \colon t \in I \mapsto c'(t) = ((c^1)'(t), (c^2)'(t), (c^3)'(t)) \in \mathbb{R}^3;$$

*gyorsulásvektormező*je

$$c'' = ((c^1)'', (c^2)'', (c^3)'') \colon t \in I \mapsto c''(t) = ((c^1)''(t), (c^2)''(t), (c^3)''(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

A

$$\nu := \|c'\| \colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \nu(t) := \|c'\|(t) := \|c'(t)\|$$

függvény c *pályasebesség-függvénye* vagy *pályasebessége*. Ha $\nu = \mathbf{1}$ (azaz $\nu(t) = \|c'(t)\| = 1$ minden $t \in I$-re), akkor c *egységpályasebességű*. c *ívhossza* $[a, b] \subset I$ fölött

$$L_a^b(c) := \int_a^b \|c'\|.$$

A $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe

reguláris, ha $\forall t \in I$: $c'(t) \neq 0$;

bireguláris, ha $\forall t \in I$: $c'(t)$ és $c''(t)$ lineárisan független ($\Leftrightarrow c'(t) \times c''(t) \neq 0$).

1.2. Tegyük fel, hogy $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ *reguláris* görbe.

$T := \frac{1}{\|c'\|} c' = \frac{1}{\nu} c'$ – *c érintő-egységvektormezője*,

$\kappa := \frac{1}{\|c'\|} \|T'\| = \frac{1}{\nu} \|T'\|$ – *c görbületfüggvénye.*

1.3. Tegyük fel, hogy $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ *bireguláris* görbe.

$F := \frac{1}{\|T'\|} T' = \frac{1}{\nu\kappa} T'$ – *c főnormális vektormezője*,

$B := T \times F$ – *c binormális vektormezője*,

(T, F, B) – *c Frenet-féle háromélmezője*,

$\tau := -\frac{1}{\nu} \langle B', F \rangle$ – *c torziófüggvénye.*

Frenet-formulák

általános esetben	*egységpályasebesség esetén*
$T' = \nu\kappa F$	$T' = \kappa F$
$F' = -\nu\kappa T + \nu\tau B$	$F' = -\kappa T + \tau B$
$B' = -\nu\tau F$	$B' = -\tau F$

Kiszámítási formulák

általános esetben	*egységpályasebesség esetén*
$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \frac{\|c' \times c''\|}{\nu^3}$	$\kappa = \|c''\|$
$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$	$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c''\|^2} = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\kappa^2}$

$$B = \frac{1}{\|c' \times c''\|} c' \times c'', \quad F = \frac{1}{\|(c' \times c'') \times c'\|} (c' \times c'') \times c'$$

A gyorsulásvektormező felbontása:

$$c'' = \underbrace{\nu' T}_{\text{pályamenti}} + \underbrace{\nu^2 \kappa F}_{\text{centripetális}} \quad \text{gyorsulás}$$

2. Felületelmélet

2.1. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Egy

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$$

sima leképezést ($\mathbb{R}^3$-beli) *parametrizált felület*nek mondunk. f *reguláris*, ha

$$\forall q \in \mathcal{U}: \quad D_1 f(q) = \begin{pmatrix} D_1 f^1(q) \\ D_1 f^2(q) \\ D_1 f^3(q) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad D_2 f(q) = \begin{pmatrix} D_2 f^1(q) \\ D_2 f^2(q) \\ D_2 f^3(q) \end{pmatrix}$$

lineárisan független, azaz a $J_f(q)$ Jacobi-mátrix 2-rangú. Ekvivalens módon: az $f'(q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ derivált minden $q \in \mathcal{U}$ esetén *injektív* lineáris leképezés.

2.2. Ha $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *reguláris* parametrizált felület, akkor

$$N := \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} D_1 f \times D_2 f \colon \mathcal{U} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

(ahol $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$ az $\mathbb{R}^3$-beli egységszféra) az f-hez tartozó *Gauss-leképezés*, a $(D_1 f, D_2 f, N)$ hármas f *Gauss-féle háromélmezője.*

2.3. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $h \in C^\infty(\mathcal{U})$. Az

$$f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto f(s,t) := (s,t,h(s,t))$$

leképezés reguláris parametrizált felület, sőt *beágyazás*: f injektív és az $f^{-1}\colon f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ inverz folytonos. Azt mondjuk ekkor, hogy f *Monge-beágyazás*, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{graf}(h)$ pedig *Monge-felület* (vagy *Euler–Monge-felület*) $\mathbb{R}^3$-ban.

2.4. Tegyük fel, hogy $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz és $F\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ha $\lambda \in \mathrm{Im}(F)$ *reguláris értéke* F-nek, azaz

$$\forall p \in F^{-1}(\lambda): \quad \mathrm{grad}\, F(p) = (D_1 F(p), D_2 F(p), D_3 F(p)) \neq 0,$$

akkor $M := F^{-1}(\lambda)$ (λ-magasságú) *szintfelület* vagy $F(x,y,z) = \lambda$ *egyenletű, implicit megadású felület.*

2.5. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2)\colon I \to \mathcal{U}(\subset \mathbb{R}^2)$ parametrizált görbe. Ekkor $c := f \circ \gamma\colon I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ *felületi görbe*, melynek egy $t \in I$-beli érintővektora a

$$c'(t) = (\gamma^1)'(t) D_1 f(\gamma(t)) + (\gamma^2)'(t) D_2 f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{2} (\gamma^i)'(t) D_i f(\gamma(t))$$

alakban állítható elő. Ha f *reguláris* parametrizált felület, akkor ennek $q \in \mathcal{U}$-beli **érintősík**ja a

$$T_q f := f(q) + \mathrm{span}(D_1 f(q), D_2 f(q)) \subset \mathbb{R}^3$$

kétdimenziós lineáris sokaság.

2.6. Egy $M = F^{-1}(\lambda)$ szintfelület $p \in M$ pontbeli érintősíkja a p-re illeszkedő, $\mathrm{grad}\, F(p)$ normálvektorú sík.

2.7. Jelölések

$L^2(\mathbb{R}^2) := \{B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid B \text{ bilineáris}\}$,

$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2) := \{B \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid B \text{ szimmetrikus: } \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : B(u,v) = B(v,u)\}$,

$$\mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2) := \{B \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2) \mid B \text{ pozitív definit: } B(v,v) > 0, \text{ ha } v \neq 0\}.$$

2.8. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. Ha tetszőleges $a \in \mathcal{U}$; $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$g_a(v,w) := \langle f'(a)(v), f'(a)(w)\rangle,$$

akkor $g_a \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2)$; a

$$g\colon \mathcal{U} \to \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2), \quad a \mapsto g_a$$

leképezés f **metrikus tenzor**a vagy **1. alapformá**ja. f **1. alapmennyiségei** a

$$g_{ij}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto g_{ij}(a) := g_a(e_i, e_j) = \langle f'(a)(e_i), f'(a)(e_j)\rangle = \langle D_i f, D_j f\rangle(a)$$

(sima) függvények ($i, j \in \{1,2\}$).

$$\forall a \in \mathcal{U}: \quad \det(g_{ij}(a)) = \begin{vmatrix} g_{11}(a) & g_{12}(a) \\ g_{21}(a) & g_{22}(a) \end{vmatrix} = \|D_1 f(a) \times D_2 f(a)\|^2.$$

2.9. $f\colon \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület.

(a) Ha $c = f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2)\colon [\alpha, \beta] \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ felületi görbe, akkor ívhossza az 1. alapmennyiségek segítségével az

$$L_\alpha^\beta(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} (g_{ij} \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)'}$$

alakban fejezhető ki.

(b) Ha $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ Jordan-mérhető, akkor f $\mathcal{V}$ **fölötti felszíne**

$$A(f) := \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(g_{ij})} = \int_{\mathcal{V}} \|D_1 f \times D_2 f\|.$$

2.10. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $N\colon \mathcal{U} \to S^2$ Gauss-leképezéssel. Ha tetszőleges $q \in \mathcal{U}$; $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$b_q(v,w) := -\langle N'(q)(v), f'(q)(w)\rangle,$$

akkor $b_q \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2)$; a

$$b\colon \mathcal{U} \to L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2), \quad q \mapsto b_q$$

leképezés f **2. alapformá**ja. f **2. alapmennyiségei** a

$$b_{ij}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto b_{ij}(q) := b_q(e_i, e_j) = -\langle D_i N, D_j f\rangle(q)$$

függvények ($i, j \in \{1,2\}$). Kiszámítási formula: $b_{ij} = \langle D_i D_j f, N\rangle$.

2.11. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület,

$$g\colon \mathcal{U} \to \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2), \quad \text{ill.} \quad b\colon \mathcal{U} \to L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^2)$$

1., ill. 2. alapformával. Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén létezik egy és csak egy olyan $W_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, hogy

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2: \quad g_q(W_q(v), w) = b_q(v,w).$$

A W_q lineáris transzformáció f *q-beli Weingarten operátor*a vagy *formaoperátor*a; a

$$W\colon \mathcal{U} \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) := L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad q \mapsto W_q$$

leképezés f *Weingarten tenzor*a vagy *formatenzor*a. Explicite:

$$W_q = -(f'(q))^{-1} \circ N'(q),$$

felhasználva, hogy érvényes a következő **kulcslemma**:

$$\forall q \in \mathcal{U}: \quad \operatorname{Im}(N'(q)) \subset \operatorname{Im}(f'(q)).$$

A W_q lineáris transzformáció *önadjungált* a $g_q \in \operatorname{Euc}(\mathbb{R}^2)$ pozitív definit skaláris szorzatra nézve:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2: \quad g_q(W_q(v), w) = g_q(v, W_q(w));$$

a mátrixa az $\mathbb{R}^2$ valós vektortér (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan a

$$(b^i_j(q)) := \left(\sum_{i=1}^{2} g^{ik}(q) b_{kj}(q) \right) \in M_2(\mathbb{R})$$

mátrix (itt $(g^{ij}(q)) := (g_{ij}(q))^{-1}$).

$$K(q) := \det(W_q) = \det(b^i_j(q)) = \frac{\det(b_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))} \quad - f\ q\text{-beli } \textbf{Gauss-görbülete};$$

$$H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W_q) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} b^i_i(q)\right) \quad - f\ q\text{-beli Minkowski-görbülete.}$$

A $K\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto K(q)$, ill. a $H\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto H(q)$ *függvény* f Gauss-, ill. Minkowski-görbülete.

f q-beli *főirány*ai W_q sajátvektorai; $k_1(q) \le k_2(q)$ q-beli *főgörbület*ei a megfelelő sajátértékek,

$$k_i\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto k_i(q); \quad i \in \{1, 2\}$$

a *főgörbület-függvények*. A Gauss-görbület megkapható a főgörbületek szorzataként, a Minkowski-görbület pedig a számtani közepeként:

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

A Gauss- és a Minkowski-görbület ismeretében a főgörbület-függvények a

$$k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}, \quad \text{ill. a} \quad k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

formula alapján nyerhetők.

2.12. Feltesszük, hogy $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ továbbra is reguláris parametrizált felület, és alkalmazzuk a bevezetett jelöléseket. Rögzítve egy $q \in \mathcal{U}$ pontot, a

$$k_q\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto k_q(v) := \frac{b_q(v, v)}{g_q(v, v)} = \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v, v)}$$

függvény f *q-beli normálgörbület-függvénye.* Egy $c := f \circ \gamma\colon I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris *felületi görbe normálgörbület-függvénye* a

$$\kappa_n\colon I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \kappa_n(t) := k_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

függvény.

Tények. (1) Ha $c = f \circ \gamma$ bireguláris felületi görbe, akkor c normálgörbület-függvénye és görbületfüggvénye között a

$$\kappa_n(t) = \kappa(t)\langle F(t), N(\gamma(t))\rangle, \quad t \in I$$

kapcsolat áll fenn (*Meusnier tétele*).

(2) Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén a $k_1(q) \le k_2(q)$ főgörbületek léteznek és a k_q normálgörbület-függvény szélsőértékei, a szélsőértékhelyek q-beli főirányok.

(3) Ha (v_1, v_2) q-beli főirányok által alkotott g_q-ortonormált bázisa $\mathbb{R}^2$-nek és

$$v = (\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2,$$

akkor

$$k_q(v) = k_1(q)\cos^2\alpha + k_2(q)\sin^2\alpha$$

(a *normálgörbületre vonatkozó Euler-formula*).

2.13. Egy parametrizált felület *belső geometriai adatai* azok a geometriai (tehát paramétertranszformációval szemben invariáns) adatok, amelyeket teljesen meghatároz a metrikus tenzor, vagyis amelyek kifejezhetők az 1. alapmennyiségek és azok parciális deriváltjai segítségével.

2.14. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. Tetszőleges $i, j \in \{1, 2\}$ indexekre

$$D_i D_j f = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k D_k f + b_{ij} N,$$

ahol a b_{ij} függvények f 2. alapmennyiségei és

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} (D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij}), \quad k \in \{1, 2\}.$$

A Γ_{ij}^k függvényeket nevezzük f *Christoffel-szimbólumai*nak. Ezek belső geometriai adatok. Legyen

$$R_{ijk}^m := D_i \Gamma_{jk}^m - D_j \Gamma_{ik}^m + \sum_{r=1}^{2} (\Gamma_{ir}^m \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{jr}^m \Gamma_{ik}^r),$$

$$R_{ijkl} := \sum_{m=1}^{2} R_{ijk}^m g_{ml}; \quad i, j, k, l \in \{1, 2\}.$$

Ekkor

$$R_{ijkl} = b_{jk} b_{il} - b_{ik} b_{jl},$$

speciálisan

$$R_{1221} = -R_{1212} = R_{2112} = -R_{2121} = \det(b_{ij}).$$

Így f Gauss-görbülete megadható a

$$K = \frac{R_{1221}}{\det(g_{ij})}$$

formulával, következésképpen **belső geometriai adat**. Ez a **Gauss-féle theorema egregium** (kiemelkedő tétel).

2.15. Egy reguláris parametrizált felület **geodetikus**án olyan reguláris felületi görbét értünk, amelynek tetszőleges pontbeli gyorsulásvektora merőleges a felület illető pontbeli érintősíkjára.

Ha $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület és $c = f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2)\colon I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje f-nek, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(1) c geodetikusa f-nek;

(2) $c'' - \langle c'', N \circ \gamma \rangle N \circ \gamma = 0$;

(3) $(\gamma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0, \quad k \in \{1, 2\}$.

Az (1) $\Leftrightarrow$ (3) ekvivalencia alapján az a tulajdonság, hogy egy reguláris felületi görbe geodetikus, belső geometriai tulajdonság.

2.16. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $c := f \circ \gamma\colon I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ pedig egységpályasebességű, bireguláris geodetikusa f-nek. Ekkor

$$\forall t \in I: \quad f'(\gamma(t)) \circ W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \pm(\kappa T - \tau B)(t).$$