Differenciálgeometria:

ellenőrző kérdések és feladatok

2013-14. őszi félév

Figyelmeztetés Az alábbiak csupán mintául szolgálnak a vizsgán várható fontosabb kérdésekre és típusfeladatokra. A tényleges vizsgakérdések ezektől megfogalmazásukban értelemszerűen különbözhetnek, és nem kizárólag a leírtak közül kerülnek kiválasztásra. Fokozottan vonatkozik ez a feladatokra, amelyek merítési köre lényegesen bővebb lesz – ezzel kapcsolatban a gyakorlatok anyaga az irányadó. A jobb jegy (jó - jeles) eléréséhez elvárás, hogy a sablontól kicsit különböző kérdéseket és feladatokat is tudják kezelni.

1. Definiálja az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren a kanonikus skaláris szorzatot és sorolja fel ennek alapvető tulajdonságait! Vezesse be az ebből származó euklideszi normát és távolságot; definiálja két vektor szögét. Mi biztosítja, hogy az utóbbi definíció értelmes?

2. Mit értünk $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbén? Definiálja egy parametrizált görbe sebességvektormezőjét, pályasebességét, regularitását, biregularitását, ívhosszát, ívhosszfüggvényét! Indokolja: minden bireguláris parametrizált görbe reguláris.

3. Bizonyítsa be: minden reguláris parametrizált görbe átparaméterezhető egységpályasebességűvé irányítástartó paramétertranszformációval.

4. Definiálja egy reguláris parametrizált görbe görbületfüggvényét és *vezessen le* rá kiszámítási formulát!

5. Fogalmazzon meg és igazoljon egy parametrizált görbe biregularitásával ekvivalens feltételt!

6. Számítsa ki a $c\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto c(t) := (t^2, t^3)$ görbe ívhosszát!

7. Adja meg a $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto c(t) := e^t(\sin t, \cos t, 1)$ parametrizált görbe egységpályasebességű átparaméterezését!

8. Számítsa ki a $c(t) := \left(\cos^2 t, \frac{1}{2}\sin 2t, \cos t\right)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel megadott görbe 0 paraméterű pontjához tartozó simulósík távolságát a $\underline{0} \in \mathbb{R}^3$ origótól.

9. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés $(n \geq 2)$. Igazolja, hogy ha f normafüggvénye konstans, akkor $f'(t)$ minden $t \in I$ esetén ortogonális $f(t)$-re.

10. Számítsa ki az $y^2 = 2px$, $z = 0$ egyenletekkel adott parabola görbületét a csúcspontjában!

11. Jellemezze a zérus görbületfüggvényű parametrizált görbéket!

12. Fogalmazza meg a körvonalak differenciálgeometriai jellemzését!

13. Legyen $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe!

1. Definiálja c Frenet-féle háromélmezőjének tagjait!

2. Értelmezze c torziófüggvényét!

3. Vezesse le a Frenet-formulákat!

14. Bizonyítsa be, hogy a síkgörbék torziófüggvénye eltűnik. Igaz-e a megfordítás?

15. Vezesse le egy bireguláris parametrizált görbe gyorsulásvektormezőjének pályamenti és centripetális gyorsulásra való felbontását!

16.

1. Mit értünk az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér egy affin transzformációján? Mikor mondunk egy affin transzformációt irányítástartónak, ill. irányításváltónak?

2. Mit értünk $\mathbb{R}^3$ izometriáin?

3. Hogyan jellemezhetők $\mathbb{R}^3$ izometriái?

4. Mikor mondunk két $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbét kongruensnek?

17. Fogalmazza meg a görbeelmélet unicitás-tételét és egzisztencia-tételét!

18. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, p egy pontja $\mathcal{U}$-nak, és legyen adva egy $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ leképezés.

1. Mit értünk f p-beli, $v \in \mathbb{R}^n$ szerinti iránymenti deriváltján, ill. f p-beli parciális deriváltjain?

2. Mikor mondjuk, hogy f differenciálható a p pontban? Mit mondhatunk ekkor f p-beli iránymenti deriváltjairól?

19. Mit értünk parametrizált felületen?

20. Mikor mondjuk, hogy egy parametrizált felület reguláris egy q pontban? Fogalmazzon meg a q-beli regularitással ekvivalens feltételeket! Regularitás esetén mivel egyenlő az $f'(q)$ derivált nullterének dimenziója?

21. Mit értünk két parametrizált felület közötti (megengedett) paramétertranszformáción?

22. Mikor nevezünk egy parametrizált felületet beágyazásnak? Definiálja az $\mathbb{R}^3$-beli felület fogalmát!

23. Adjon meg egy Monge-beágyazást! Igazolja, hogy egy Monge-beágyazás képhalmaza felület!

24. Legyen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, $F\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Definiálja F gradiensét és fejezze ezt ki a parciális deriváltak segítségével! Mit értünk F reguláris értékén?

25. Vezesse be az implicit megadású felület fogalmát!

26. Felület-e $\mathbb{R}^3$-ban az

$$M := \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \mid st^2 + u^3 - 12 = 0\}$$

ponthalmaz?

27. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nemüres nyílt halmaz).

1. Mit jelent a regularitás feltétele?
2. Definiálja f egy $q \in \mathcal{U}$ ponthoz tartozó érintősíkját!
3. Definiálja f Gauss-féle háromélmezőjét!

28. Mit értünk egy $M \subset \mathbb{R}^3$ *felület* egy $p \in M$ pontbeli érintővektorán?

29. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület.

1. Definiálja f metrikus tenzorát és 1. alapmennyiségeit!
2. Sorolja fel a metrikus tenzor alapvető tulajdonságait!
3. Fejezze ki a metrikus tenzor segítségével f egy felületi görbéjének ívhosszát!
4. Definiálja f felszínét!

30. Számítsa ki az

$$f\colon [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3,\ (s, t) \mapsto f(s, t) := \begin{pmatrix} \cos s - t \sin s \\ \sin s + t \cos s \\ s + t \end{pmatrix}$$

parametrizált felület felszínét!

31. Egy henger vezérvonalának egyenletrendszere $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$; alkotóinak közös irányvektora $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Határozza meg a henger egy paraméteres előállítását és az implicit egyenletét!

32. Írja fel az

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s, t) \mapsto f(s, t) := (s \cos t, s \sin t, 2t)$$

parametrizált felület $q = \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$-beli érintősíkjának egyenletét! Határozza meg f első alapmennyiségeit ebben a pontban!

33. Definiálja egy reguláris parametrizált felület 2. alapformáját és 2. alapmennyiségeit! Igazolja, hogy a 2. alapmennyiségek kiszámíthatók a

$$b_{ij} = \langle D_i D_j f, N \rangle; \quad i, j \in \{1, 2\}$$

formula alapján!

34. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $N\colon \mathcal{U} \to S^2$ a hozzá tartozó Gauss-leképezés. (Mit jelöl itt S^2?) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén

$$\operatorname{Im}(N'(q)) \subset \operatorname{Im}(f'(q)).$$

35. Legyen $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $q \in \mathcal{U}$. Definiálja f q-beli Weingarten-operátorát és igazolja a létezését! Sorolja fel a q-beli Weingarten-operátor alapvető tulajdonságait!

36. $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. Vezesse le egy $q \in \mathcal{U}$ pontbeli Weingarten operátornak az $\mathbb{R}^2$ tér (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozó mátrixát!

37. Írja le a formatenzor hatását (parametrizált) síkfelület, gömbfelület és egyenes körhenger esetén!

38. Határozza meg a Weingarten-operátor egy mátrixreprezentánsát az

$$x^2 - 4y^2 - 8z = 0$$

egyenletű felület $(4, 2, 0)$ pontjában!

39. α, β rögzített pozitív valós számok.

1. Igazolja, hogy $\frac{x^2}{(\alpha)^2} + \frac{y^2}{(\beta)^2} = 2z$ egyenlettel megadott $\mathbb{R}^3$-beli ponthalmaz felület!
2. Határozza meg a felület $P = (0, 0, 0)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!
3. Határozza meg a $P = (0, 0, 0)$ ponthoz tartozó Weingarten-operátor egy mátrixreprezentánsát, valamint az itteni főgörbületeket és főirányokat!

40. Határozza meg az

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3,\ (s, t) \mapsto f(s, t) := (t^3, s^2, s + t)$$

parametrizált felület parabolikus pontjait!

41. Adott az $f : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(s, t) := (s, t, s^2 + t^2) \in \mathbb{R}^3$ parametrizált felületen a

$$c := f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \ \gamma(t) := (t, t^3)$$

felületi görbe. Számítsa ki c normálgörbületét a $t := 1$ paraméterű pontjában!

42. Adott az $f : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(s, t) := (s \cos t, s \sin t, 3t) \in \mathbb{R}^3$ parametrizált felület.

1. Döntse el, hogy vannak-e f-nek szinguláris pontjai.
2. Ellenőrizze, hogy a $P = \left(0, 2, \frac{3\pi}{2}\right)$ pont rajta van a felületen, és határozza meg ebben a pontban az érintősík egyenletét!
3. Számítsa ki f $q = (1, 1)$-beli, $v = (2, 1)$ irányú normálgörbületét!

43. Legyen $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. Mutassa meg, hogy a $D_i D_j f$ második parciális deriváltak ($i, j \in \{1, 2\}$) egyértelműen előállíthatók a

$$D_i D_j f = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k D_k f + b_{ij} N$$

alakban, ahol a Γ_{ij}^k függvények kifejezhetők az 1. alapmennyiségek és parciális deriváltjaik segítségével. Alkalmazva a Christoffel-eljárást, vezesse le ezt a kifejezést!

44. Fogalmazza meg a *theorema egregium*ot!

45. Definiálja egy reguláris parametrizált felület geodetikusait, és igazolja, hogy a geodetikusok pályasebessége konstans! Írja fel a geodetikusok egy olyan egyenletét, amelyből kiderül, hogy a geodetikusok a parametrizált felületek belső geometriájához tartoznak!

46. Határozza meg a reguláris paraméterezésű síkfelületek, gömbfelületek és egyenes körhengerek geodetikusait!