Hiperbolikus geometria összefoglaló

Kertész Dávid és Nagy Ábris

2010. december 17.

1. A hiperbolikus sík

1. Definíció. *A $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ nem üres halmazokból alkotott $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ párt* illeszkedési struktúrá*nak nevezzük, ha $\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}$ részhalmazaiból áll.*

$\mathcal{P}$ elemeit *pont*oknak, $\mathcal{L}$ elemeit *egyenes*eknek hívjuk. Egy $P \in \mathcal{P}$ pont *illeszkedik* az $l \in \mathcal{L}$ egyenesre, ha $P \in l$. Pontok egy halmazát *kollineáris*nak mondjuk, ha létezik olyan egyenes, amelyre a pontok mindegyike illeszkedik.

2. Definíció. *Egy illeszkedési struktúra* Hilbert-féle*, ha eleget tesz a következő axiómáknak:*

(I1) Bármely két pontra illeszkedik egyetlenegy egyenes.

(I2) Minden egyenesre illeszkedik legalább két pont.

(I3) Létezik legalább három nem kollineáris pont.

3. Definíció. *Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$ hármas* rendezett illeszkedési *sík, ha $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra, $\mathbb{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ pedig egy* geometriai rendezés*nek nevezett ternér reláció, amely az $(A, B, C) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A - B - C$ jelöléssel eleget tesz az alábbi axiómáknak:*

(R1) Ha $A - B - C$, akkor A, B és C különböző kollineáris pontok, és $C - B - A$ is fennáll.

(R2) Három kollineáris pont közül legfeljebb egy van a másik kettő között.

(R3) Ha A és B különböző pontok, akkor van olyan C pont, amelyre A-B-C teljesül.

(R4) Ha A, B, C nem kollineáris pontok, l pedig olyan egyenes, amely nem megy át e pontok egyikén sem, de illeszkedik egy olyan pontra, amely A és B között van, akkor l átmegy egy olyan ponton is, amely B és C vagy C és A között van.

Rendezett illeszkedési síkban bevezethetőek az alábbi fogalmak:

(1) Ha A és B különböző pontok, az

$$\overline{AB} := \{P \in \mathcal{P} | A - P - B\} \cup \{A, B\}$$

halmaz A és B végpontú *szakasz*. Az

$$\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{P \in \mathcal{P} | A - B - P\}$$

halmaz A kezdőpontú, B-t tartalmazó *félegyenes*.

(2) $\mathcal{P}$ egy részhalmaza *konvex*, ha bármely két A, B pontjával együtt az $\overline{AB}$ szakaszt is tartalmazza.

(3) Ha A, B, C nem kollineáris pontok, akkor

$$ABC\sphericalangle := \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$$

B csúcsú, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ szárakkal rendelkező *szög*. Egy $CBD\sphericalangle$ ennek *mellékszög*e, ha $A - B - D$.

(4) Az $ABC\Delta := (A, B, C)$ rendezett ponthármas *háromszög*, amelynek *oldalai* az $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ szakaszok, ezekkel szemközti *szögei* pedig rendre

$$C\sphericalangle := BCA\sphericalangle, \quad A\sphericalangle := CAB\sphericalangle, \quad B\sphericalangle := ABC\sphericalangle.$$

(5) Legyen l egyenes. Megmutatható, hogy léteznek H_1 és H_2 diszjunkt, konvex halmazok, melyekre $P \setminus l = H_1 \cup H_2$, és $A \in H_1, B \in H_2$ esetén $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$. Ezeket a H_1, H_2 halmazokat az l határegyenesű *nyílt félsík*oknak nevezzük.

(6) Egy $ABC\sphericalangle$ *belseje* az $\overleftrightarrow{AB}$ határegyenesű, C-t tartalmazó nyílt félsík és a $\overleftrightarrow{BC}$ határegyenesű, A-t tartalmazó nyílt félsík metszete.

4. Definíció. *Egy* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathbb{R}, \cong)$ *négyes* Hilbert-sík*, ha* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathbb{R})$ *rendezett illeszkedési sík,* $\cong$ *egy reláció a szakaszok halmazában és a szögek halmazában, amelyet* egybevágóság*nak vagy* kongruenciá*nak nevezünk, és teljesülnek a következő axiómák:*

(C1) Megadva egy $\overline{AB}$ *szakaszt és egy* $\overrightarrow{OQ}$ *félegyenest, létezik egy és csak egy olyan* $P \in \overrightarrow{OQ}$ *pont, hogy* $\overline{AB} \cong \overline{OP}$.

(C2) Minden szakasz egybevágó önmagával. Ha $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ *és* $\overline{AB} \cong \overline{EF}$*, akkor* $\overline{CD} \cong \overline{EF}$.

(C3) Ha az A, B, C *és az* A', B', C' *pontokra teljesül, hogy*

$$A - B - C, \quad A' - B' - C', \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'},$$

akkor $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

(C4) *Megadva egy $ABC\sphericalangle$-et, kijelölve egy félsíkot és a félsík határegyenesén egy $\overrightarrow{B'A'}$ félegyenest, a kijelölt félsíkban létezik egy és csak egy olyan $\overrightarrow{B'C'}$ félegyenes, hogy $ABC\sphericalangle \cong A'B'C'\sphericalangle$.*

(C5) *Minden szög egybevágó önmagával. Ha az α, β, γ szögekre $\alpha \cong \beta$ és $\alpha \cong \gamma$ teljesül, akkor $\beta \cong \gamma$.*

(C6) *Ha egy $ABC\Delta$-re és egy $DEF\Delta$-re*

$$\overline{CA} \cong \overline{FD}, \quad CAB\sphericalangle \cong FDE\sphericalangle, \quad \overline{AB} \cong \overline{DE}$$

teljesül, akkor $ABC\sphericalangle \cong DEF\sphericalangle$.

Egy szöget *derékszög*nek nevezünk, ha egybevágó valamelyik mellékszögével. Ekkor a szög szárait egymásra *merőleges*eknek mondjuk. Egy egyenest akkor nevezünk egy másik egyenesre merőlegesnek, ha az uniójuk tartalmaz derékszöget. Megmutatható, hogy megadva egy P pontot és egy l egyenest, létezik egy és csak egy olyan egyenes, amely illeszkedik P-re, és merőleges l-re. (*A merőleges egyenes tétele*)

5. Definíció. *Egy Hilbert-sík két nem metsző egyenesét* párhuzamos*nak nevezzük. Megállapodunk abban, hogy minden egyenes párhuzamos önmagával.*

1. Tétel. *Megadva Hilbert-síkban egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot, létezik olyan egyenes, amely átmegy a ponton és párhuzamos az adott egyenessel.*

Egy Hilbert síkot **nemeuklideszi sík**nak mondunk, ha eleget tesz az alábbi axiómának:

¬(EP) Létezik olyan egyenes és olyan, az egyenesre nem illeszkedő pont, hogy a pontra legalább két, az egyenessel párhuzamos egyenes illeszkedik.

Ez az axióma az elemi geometriából ismert euklideszi párhuzamossági axióma tagadása – innen a kód.

2. Tétel (¬(EP) univerzalitása). *Ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor* ***bármely*** *egyenesre és* ***bármely****, az egyenesre nem illeszkedő pontra teljesül a ¬(EP) tulajdonság.*

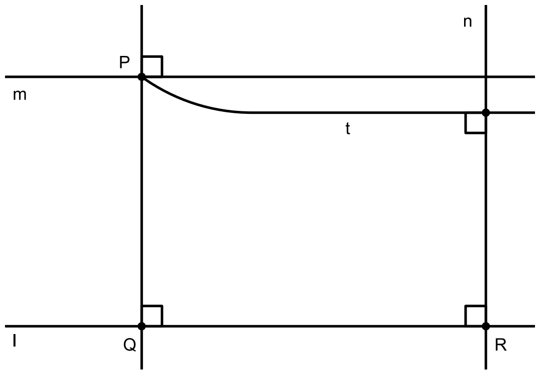
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathbb{R}, \cong)$ Hilbert-síkban nem létezik téglalap. Tekintsük a sík egy tetszőleges l egyenesét és $P \notin l$ pontját. A merőleges egyenes tétele miatt egyértelműen létezik olyan $Q \in l$ pont, hogy $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$. Ugyanilyen okból, létezik egy és csak egy P-n átmenő, $\overleftrightarrow{PQ}$-ra merőleges m egyenes. Jelöljünk ki tetszőlegesen egy $R \in l \setminus \{Q\}$ pontot, és legyen n az R-re illeszkedő, l-re merőleges egyenes. Tekintsük végül azt az egyetlen, P-n átmenő t egyenest, amely merőleges n-re. Ekkor

– $m \,||\, l$ (mert $\overleftrightarrow{PQ}$ közös merőlegesük) és $P \in m$;

– $t \,||\, l$ (mert n közös merőlegesük) és $P \in t$;

$m \neq t$ ellenkező esetben ugyanis létezne téglalap.

Beláttuk így, hogy a P pontra legalább két l-el párhuzamos egyenes illeszkedik. □



6. Definíció. *Legyen adva Hilbert-síkban egy l egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont. A P-re illeszkedő l-re merőleges egyenes l-el való metszéspontját jelölje Q. Azt mondjuk, hogy egy $\overrightarrow{PX}$ félegyenes a P-ből induló, l-el* határpárhuzamos félegyenes, *ha nem metszi l-et, de minden olyan $\overrightarrow{PY}$ félegyenes metszi l-et, ahol Y az $XPQ\sphericalangle$ belsejében van.*

7. Definíció. *Egy Hilbert-síkot* hiperbolikus sík*nak nevezünk, ha eleget tesz a következő,* Hilbert-féle hiperbolikus párhuzamossági axiómá*nak:*

Bármely l egyeneshez és $P \notin l$ ponthoz létezik olyan l-el határpárhuzamos $\overrightarrow{PX}$ félegyenes, amely nem merőleges a P-re illeszkedő, l-re merőleges egyenesre.

8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy hiperbolikus sík két egyenese*

(1) ***határpárhuzamos****, ha egyikük tartalmaz olyan félegyenest, amely határpárhuzamos a másikkal.*

(2) ***széttartóan párhuzamos****, ha van közös merőlegesük.*

Megjegyzés. Világos, hogy mind a határpárhuzamos, mind a széttartóan párhuzamos egyenesek párhuzamosak.

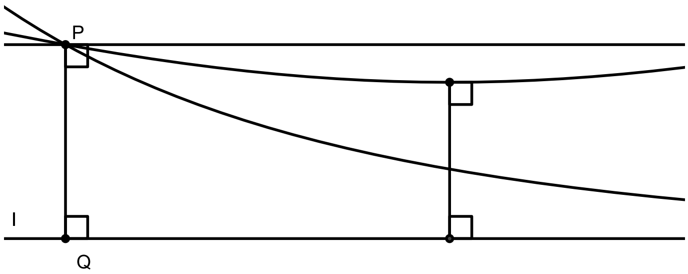
3. Tétel. *Ha egy hiperbolikus sík két egyenese párhuzamos, de nem határpárhuzamos, akkor széttartóan párhuzamos, és egyetlen közös merőlegesük van.*

Következmény (a párhuzamosok osztályozása hiperbolikus síkon). *Egy hiperbolikus sík két egyenesére a következő három lehetőség közül egy és csak egy teljesül:*

(1) az egyenesek metszők*;*

(2) az egyenesek határpárhuzamosak*;*

(3) az egyenesek széttartóan párhuzamosak.



1. ábra. Az l egyenessel határpárhuzamos, és széttartóan párhuzamos egyenesek szemléltetése

2. A Riemann-gömb. Möbius-transzformációk

Legyen $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ahol $\infty \notin \mathbb{C}$ egy szimbólum. Az utóbbival való számolást illetően állapodjunk meg a következőkben:

(i) tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ estén $z + \infty = z - \infty := \infty$, $\quad \frac{z}{\infty} := 0$;

(ii) ha $z \in \mathbb{C}^*$, akkor $z \cdot \infty = \infty$, $\quad \frac{z}{0} = \infty$;

(iii) $\infty + \infty = \infty \cdot \infty := \infty$.

9. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{C}$, és legyen r pozitív valós szám. A*

$$D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \big| |z - a| < r\},$$

illetve

$$D(\infty, r) := \{z \in \mathbb{C} \big| |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

jelölésekkel egy $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ halmazt nyílt*nak mondunk, ha minden $a \in U$ esetén létezik $r \in \mathbb{R}^*_+$, oly módon, hogy $D(a, r) \subset U$.*

Belátható, hogy az így definiált nyílt halmazok topológiát alkotnak $\overline{\mathbb{C}}$-ban. Az ezen topológiával ellátott $\overline{\mathbb{C}}$ halmazt *Riemann-gömb*nek nevezzük.

Megjegyzés. $\overline{\mathbb{C}}$ homeomorf az $\mathbb{R}^3$ euklideszi vektortér

$$S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \big| \|p\| = 1\}$$

egységgömbjével, homeomorfizmust ad közöttük az a $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ leképezés, amelynél

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \left(\frac{2\mathrm{re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\mathrm{im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right), \\ \varphi(\infty) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

φ inverzét sztereografikus projekciónak nevezzük.

10. Definíció. *Legyenek a, b, c, d komplex számok, melyekre $ad - bc \neq 0$. Az*

$$f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \longmapsto f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

transzformációt Möbius-transzformáció*nak nevezzük, megállapodva abban, hogy $f(\infty) = \frac{a}{c}$.*

1. Lemma. *A Möbius-transzformációk csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ha $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, akkor az*

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \quad f(\infty) := \frac{a}{c},$$

képlettel adott f Möbius-transzformáció inverze az

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}, \quad f^{-1}(\infty) := -\frac{d}{c}$$

formulával adható meg.

Megjegyzés. Alkalmazni fogjuk a következő jelöléseket:

1. $M_n(\mathbb{C})$ az $n \times n$-es komplex elemű mátrixok gyűrűje; $I_n \in M_n(\mathbb{C})$ az egységmátrix;
2. $GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \big| \det A \neq 0\}$ a komplex általános lineáris csoport;
3. $SL_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \big| \det A = 1\}$ a komplex speciális lineáris csoport;

4. $PGL_n(\mathbb{C}) := GL_n(\mathbb{C})/\{\alpha I_n \in GL_n(\mathbb{C}) \big| \alpha \in \mathbb{C}^*\}$ az általános komplex projektív lineáris csoport;

5. $PSL_n(\mathbb{C}) := SL_n(\mathbb{C})/\{\pm I_n\}$ a speciális komplex projektív lineáris csoport;

6. $\text{Möb}^+(\overline{\mathbb{C}})$ a Möbius-transzformációk csoportja.

4. Tétel. *A*

$$\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow Möb^+(\overline{\mathbb{C}}), \quad A \longmapsto \Phi(A) := f_A,$$

$$f_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \ ha \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

leképezés szürjektív csoporthomomorfizmus, melynek magja

$$\mathcal{K} := \text{Ker}(\Phi) = \{\alpha I_n \in GL_2(\mathbb{C}) \big| \alpha \in \mathbb{C}^*\},$$

tehát

$$Möb^+(\overline{\mathbb{C}}) \cong GL_2(\mathbb{C})/\mathcal{K} = PGL_2(\mathbb{C}).$$

Megjegyzés. Mivel tetszőleges $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-transzformáció esetén alkalmas skalárszorzóval elérhető, hogy $ad - bc = 1$ legyen, a Φ leképezés $SL_2(\mathbb{C})$-re való megszorítása szintén csoporthomomorfizmus $\text{Möb}^+(\overline{\mathbb{C}})$-ra, melynek magja

$$\mathcal{K}_0 := \mathcal{K} \cap SL_2(\mathbb{C}) = \{-I_2, I_2\},$$

következésképpen

$$\text{Möb}^+(\overline{\mathbb{C}}) \cong SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} = PSL_2(\mathbb{C}).$$

5. Tétel (A Möbius-transzformációk alaptétele). *A Riemann-gömb bármely két, nem feltétlenül különböző, de különböző pontok alkotta rendezett ponthármasához létezik egy és csak egy olyan Möbius-transzformáció, amely az első ponthármas tagjait a második ponthármas megfelelő tagjaiba viszi át.*

Megjegyzés. A tételből következik, hogy ha egy Möbius-transzformációnak van három fixpontja, akkor az az identikus transzformáció.

11. Definíció. *A $\overline{\mathbb{C}}$-beli körön $\mathbb{C}$-beli euklideszi kört, vagy olyan $l \cup \{\infty\}$ alakú halmazt értünk, ahol $l \subset \mathbb{C}$ euklideszi egyenes.*

12. Definíció. *A komplex számsík egy különböző pontok által alkotott (z_1, z_2, z_3, z_4) rendezett pontnégyesének* kettősviszony*án a*

$$\text{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

komplex számot értjük.

6. Tétel. *A Möbius-transzformációk körtartók, és megőrzik a kettősviszonyt.*

Megjegyzés. Jelölje C a komplex konjugálást, $C(\infty) := \infty$ megállapodással kiterjesztve $\overline{\mathbb{C}}$-ra. C nem Möbius-transzformáció, ugyanis $\mathbb{R}$ minden eleme fixpontja C-nek.

13. Definíció. *A* $\text{Möb}^+(\overline{\mathbb{C}})$ *csoport és a* C *transzformáció által generált csoportot az* általános Möbius-csoport*nak nevezzük, és* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$*-sal jelöljük.*

2. Lemma. *A* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{C}})$ *csoport tetszőleges eleme*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ vagy } z \longmapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

alakú transzformáció, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *és* $ad - bd \neq 0$

7. Tétel. *Ha* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) := \{m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}}) \big| m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}$*, akkor* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ *bármely eleme*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ vagy } z \longmapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

alakú, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *és* $ad - bc = 1$*, azaz* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

3. A Poincaré-féle felső félsík

14. Definíció. *A komplex számsík pozitív képzetes részű pontjainak halmazát a* Poincaré-féle (felső) félsík*nak nevezzük és* $\mathbb{H}^2$*-vel jelöljük.* Hiperbolikus egyenes*eken az olyan* $\overline{\mathbb{C}}$*-beli körök* $\mathbb{H}^2$*-val való metszetét értjük, amelyek merőlegesen metszik a valós tengelyt. Ezek összességét* $\mathcal{L}_H$*-val jelöljük.*

3. Lemma. *Tekintsük az*

$$\alpha|x|^2 + 2\beta\text{re}(x) + \gamma = 0$$

egyenletet, ahol α, β, γ *valós számok,* x *pedig szimbólum. Ha ennek az egyenletnek van megoldása* $\mathbb{H}^2$*-ban, akkor a megoldáshalmaza eleme* $\mathcal{L}_H$*-nak.*

Bizonyítás: Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\alpha = 0$. Ekkor az egyenlet

$$\beta\text{re}(x) + \gamma = 0$$

alakra módosul. Ennek megoldásai azok a pontok, melyek valós része $-\gamma$, tehát ezek halmaza egy a valós tengelyt merőlegesen metsző euklideszi egyenes. Most tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Ebben az esetben elvégezhetők az alábbi átalakítások:

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha|x|^2 + 2\beta\mathrm{re}(x) + \gamma \;\Leftrightarrow \\
0 &= \alpha\left(x\overline{x} + \frac{\beta}{\alpha}(x+\overline{x})\right) + \gamma \;\Leftrightarrow \\
0 &= \alpha\left(\left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right|^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) + \gamma \;\Leftrightarrow \\
0 &= \alpha\left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right|^2 - \frac{\beta^2}{\alpha} + \gamma \;\Leftrightarrow \\
\beta^2 - \alpha\gamma &= \alpha^2\left|x + \frac{\beta}{\alpha}\right|^2.
\end{aligned}$$

Ha $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, akkor az egyenlet egyetlen megoldása $z = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$, de így z nem eleme $\mathbb{H}^2$-nek. Ha $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, akkor a megoldások halmaza egy $-\frac{\beta}{\alpha}$ középpontú $\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$ sugarú kör, amely elemi geometriai megfontolások miatt merőlegesen metszi a valós tengelyt. $\square$

8. Tétel. $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H)$ *Hilbert-féle illeszkedési sík.*

Bizonyítás: Az (I2) és (I3) axiómák teljesülése nyilvánvaló. (I1) igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges különböző z_1 és z_2 $\mathbb{H}^2$-beli pont esetén létezik egyetlen egy $\mathcal{L}_H$-beli egyenes, amely merőlegesen metszi a valós tengelyt. Tekintsük az α, β, γ együtthatókra az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\alpha|z_1|^2 + 2\beta\mathrm{re}(z_1) + \gamma = 0 \\
\alpha|z_2|^2 + 2\beta\mathrm{re}(z_2) + \gamma = 0
\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{vmatrix} |z_1|^2 & 1 \\ |z_2|^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ és } \begin{vmatrix} 2\mathrm{re}(z_1) & 1 \\ 2\mathrm{re}(z_2) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyszerre nem teljesülhet, hiszen ellenkező esetben $|z_1|^2 = |z_2|^2$ és $\mathrm{re}(z_1) = \mathrm{re}(z_2)$ adódna, amiből $\mathrm{im}(z_1) > 0, \mathrm{im}(z_2) > 0$ figyelembevételével azt kapnánk, hogy $z_1 = z_2$. Így az egyenlet mátrixa 2 rangú, következésképp van nemtriviális megoldása $\mathbb{R}^3$-ban, és az nemzérus skalárszorzótól eltekintve egyértelmű.

Tehát a z_1 és z_2 pontok meghatároztak egy α, β, γ számhármast, úgy, hogy z_1 és z_2 megoldása az

$$\alpha|x|^2 + 2\beta\mathrm{re}(x) + \gamma = 0$$

egyenletnek. Az előző lemma szerint az egyenlet összes megoldásának halmaza egy $\mathcal{L}_H$-beli egyenes, amelyre így z_1 és z_2 nyilvánvalóan illeszkedik.

Ez az egyenes egyértelmű is, hiszen ha az egyenletben az α, β, γ számok egy nemzérus skalárszorosát vesszük, az a megoldásokat nem befolyásolja $\square$

Az eddigiek alapján a Möb($\overline{\mathbb{C}}$) a $\mathbb{H}^2$ Poincaré-félsíkot invariánsan hagyó transzformációi

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}), \text{ vagy}$$

$$z \longmapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}), \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -1$$

alakúak, az ezek által alkotott csoportot Möb($\mathbb{H}^2$)-vel jelöljük.

$$\text{Möb}^+(\mathbb{H}^2) = \{f_A \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{C}}) \big| A \in SL_2(\mathbb{R})\}$$

részcsoportja Möb($\mathbb{H}^2$)-nek, és a

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto -\overline{z}, \infty \longmapsto \infty$$

speciális tükrözéssel együtt generálja Möb($\mathbb{H}^2$)-t. A Möb$^+$($\mathbb{H}^2$) csoport így 2 indexű részcsoportja Möb($\mathbb{H}^2$)-nek; a $z \mapsto -\overline{z}$ transzformációt tartalmazó mellékosztályát Möb$^-$($\mathbb{H}^2$)-vel jelöljük.

15. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $f_A \in$ Möb$^+(\mathbb{H}^2)$ Möbius-transzformáció*

1. *speciális transzláció, ha* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$
2. *speciális inverzió, ha* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. *speciális forgás, ha* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$

9. Tétel. *Egy Möb$^+(\mathbb{H}^2)$-beli transzformáció vagy speciális transzláció, vagy pedig előállítható $\tau_2 \circ \sigma \circ \tau_1$ alakban, ahol τ_1, τ_2 speciális transzlációk, σ pedig speciális inverzió.*

16. Definíció. *$\mathcal{L}_H$ egy elemét* 1. típusú*nak vagy* függőleges*nek, illetve* 2. típusú*nak vagy* nem függőleges*nek mondjuk aszerint, amint euklideszi egyenes, illetve kör származtatja.*

Megjegyzés. A függőleges egyenesek

$$l_\lambda := \{(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 \big| t > 0\},$$

a nem függőleges egyenesek

$$l_{\gamma,r} := \{(s,t) \in \mathbb{H}^2 \big| (s-\gamma)^2 + t^2 = r^2\},$$

alakban is megadhatók. Ekkor az l_λ egyenes *végei*n a $(\lambda, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{H}^2$ és $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ pontokat, $l_{\gamma,r}$ végein pedig a $(\gamma - r, 0), (\gamma + r, 0) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{H}^2$ pontokat értjük.

10. Tétel. *Az* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *csatolt mátrixszal rendelkező* τ *speciális transzlációra*

$$\tau(l_\lambda) = l_{\alpha\lambda+\beta}, \quad \tau(l_{\gamma,r}) = l_{\alpha\gamma+\beta,\alpha r},$$

az $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *csatolt mátrixú* σ *speciális inverzióra pedig*

$$\begin{aligned} \sigma(l_0) &= l_0; \\ \sigma(l_\lambda) &= l_{\gamma,r}, \quad \gamma = -\frac{1}{2\lambda}, r = |\gamma|, \ \textit{ha } \lambda \neq 0; \\ \sigma(\gamma, r) &= l_{\widetilde{\gamma},\widetilde{r}}, \quad \widetilde{\gamma} = \frac{\gamma}{r^2 - \gamma^2}, \widetilde{r} = |\widetilde{\gamma}|, \ \textit{ha } \gamma \notin \{-r, r\}; \\ \sigma(l_{\pm r,r}) &= l_{\pm\lambda}, \quad \lambda = -\frac{1}{2r} \end{aligned}$$

teljesül.

Következmény *Möb*$^+(\mathbb{H}^2)$ *minden eleme kollineációja* $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H)$*-nak.*

Megjegyzés. Akkor mondjuk, hogy egy β valós szám α és γ között van, ha $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) > 0$. Ilyenkor az $\alpha * \beta * \gamma$ jelölést használjuk.

17. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* $\mathbb{H}^2$ z_2 *pontja* z_1 *és* z_3 között van*, ha a pontok kollineárisak, és*

$$\operatorname{im}(z_1) * \operatorname{im}(z_2) * \operatorname{im}(z_3), \ \textit{ha } z_1, z_2 \textit{ és } z_3 \textit{ függőleges egyenesre illeszkedik;}$$

$$\operatorname{re}(z_1) * \operatorname{re}(z_2) * \operatorname{re}(z_3), \ \textit{ha } z_1, z_2 \textit{ és } z_3 \textit{ nem függőleges egyenes pontjai.}$$

11. Tétel. *Az* $\mathbb{R} \subset (\mathbb{H}^2)^3$, $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 * z_2 * z_3$ *reláció geometriai rendezés: eleget tesz az* $(R1) - (R4)$ *axiómáknak.*

18. Definíció. *Tekintsük* $\mathbb{H}^2$*-t, ellátva a bevezetett rendezéssel. Azt mondjuk, hogy* $\mathbb{H}^2$ $\overline{z_1 z_2}$ *és* $\overline{w_1 w_2}$ *szakasza, illetve* $uzv\sphericalangle$ *és* $u'z'v'\sphericalangle$ *szöge* egybevágó, *ha van olyan* $f \in$ *Möb*$(\mathbb{H}^2)$ *transzformáció, hogy* $f(\overline{z_1 z_2}) = \overline{w_1 w_2}$*, illetve* $f(\overrightarrow{zu}) = \overrightarrow{z'u'}$*,* $f(\overrightarrow{zv}) = \overrightarrow{z'v'}$*. Ezt az egybevágóságot a* $\cong$ *szimbólummal jelöljük.*

12. Tétel. $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H, \mathbb{R}, \cong)$ *Hilbert-sík, azaz a szakaszok és szögek egybevágóságára teljesülnek a* $(C1) - (C6)$ *axiómák.*

4. A hiperbolikus távolságfüggvény

19. Definíció. *A* $d_H : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a,b) \longmapsto d_H(a,b) := \begin{cases} |\ln cr(a,b,u,v)| & ha\ a \neq b \\ 0 & ha\ a = b. \end{cases}$$

függvényt, ahol u és v az $\overleftrightarrow{ab}$ hiperbolikus egyenes végei, hiperbolikus távolságfüggvény*nek, a $d_H(a,b)$ valós számot pedig az a és b pontok* hiperbolikus távolságá*nak nevezzük.*

Megmutatható, hogy ha a és b egy hiperbolikus egyenes pontjai, amelynek végei u és v, akkor $cr(a,b,u,v)$ pozitív valós szám. Így a hiperbolikus távolságfüggvény jól definiált. Igaz továbbá a következő állítás:

13. Tétel. *A d_H hiperbolikus távolságfüggvény metrika $\mathbb{H}^2$-n, azaz tetszőleges a,b,c $\mathbb{H}^2$-beli pontokra teljesülnek a következők:*

1. $d_H(a,b) \geq 0$,
2. $d_H(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$,
3. $d_H(a,b) = d_H(b,a)$,
4. $d_H(a,c) \leq d_H(a,b) + d_H(b,c)$.

Tehát $\left(\mathbb{H}^2, d_H\right)$ metrikus tér. Fontos kérdés, hogy a d_H metrika hogyan kapcsolódik $\mathbb{H}^2$ rendezési struktúrájához. Az alábbi eredmények erre válaszolnak.

14. Tétel. *A d_H hiperbolikus távolságfüggvény additív a hiperbolikus egyenesek mentén, azaz ha az $a,b,c \in \mathbb{H}^2$ pontokra $a * b * c$ teljesül, akkor*

$$d_H(a,c) = d_H(a,b) + d_H(b,c).$$

15. Tétel. *Ha $\overline{ab}$ és $\overline{pq}$ $\mathbb{H}^2$ szakaszai, akkor*

$$\overline{ab} < \overline{pq} \Longleftrightarrow d_H(a,b) < d_H(p,q).$$

16. Tétel. *A $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H, *, \cong)$ Hilbert-síkban érvényes a* Dedekind-féle folytonossági axióma*: ha egy $l \in \mathcal{L}_H$ egyenes előáll az l_1, l_2 nem üres diszjunkt halmazok uniójaként, úgy, hogy egyetlen l_1-beli pont sincs két l_2-beli pont között, és egyetlen l_2-beli pont sincs két l_1 beli pont között, akkor létezik egy és csak olyan $P \in l$ pont, hogy bármely $A \in l_1$ és $B \in l_2$ pont esetén*

$$A = P \text{ vagy } B = P \text{ vagy } A - P - B$$

teljesül.

Megállapíthatjuk ezek alapján, hogy $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H, *, \cong)$ **valós hiperbolikus sík**.

A hiperbolikus távolság kiszámításához hasznos a következő észrevétel.

17. Tétel. *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{H}^2$ pontok esetén*

$$\mathrm{ch}^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \frac{|a-b|^2}{4\mathrm{im}(a)\mathrm{im}(b)},$$

$$\mathrm{sh}^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \frac{\left|a-\bar{b}\right|^2}{4\mathrm{im}(a)\mathrm{im}(b)}.$$

5. Izometriák

20. Definíció. *Legyenek (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus terek. Ekkor egy $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ leképezést* izometriá*nak nevezünk, ha távolságtartó, azaz bármely $p, g \in M_1$ esetén*

$$d_2\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) = d_1(x_1, x_2),$$

és szürjektív.

18. Tétel. *Egy metrikusú tér önmagára való izometriái csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve.*

Jelölje $iso(\mathbb{H}^2)$ a $\left(\mathbb{H}^2, d_H\right)$ hiperbolikus sík (mint metrikus tér) önmagára való izometriáinak csoportját. Ekkor a következő eredmény fogalmazható meg:

19. Tétel.

$$\boxed{iso(\mathbb{H}^2) = M\ddot{o}b(\mathbb{H}^2)}.$$

6. Görbék ívhossza

21. Definíció. *Legyen (M, d) metrikus tér. Ekkor M-beli* görbé*n vagy* pá-lyá*n olyan $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ folytonos leképezést értünk, ahol $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum. $\gamma(a)$-t a görbe kezdő-, $\gamma(b)$-t a görbe* végpont*jának nevezzük, és azt mondjuk, hogy γ* összeköti *ezeket a pontokat. γ zárt, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Emlékeztetünk rá, hogy egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum felosztásán olyan $\mathcal{P} = (t_i)_{i=0}^n$ véges sorozatot értünk, ahol $t_0 = a$, $t_n = b$ és $t_{i-1} < t_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots n\})$.

22. Definíció. *Legyen* (M, d) *egy metrikus tér. Egy* $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ *görbe* ívhosszá*n az*

$$L(\gamma) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} d\left(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)\right)$$

bővített valós számot értjük, ahol a supremumot az $[a, b]$ *zárt intervallum összes* $\mathcal{P} = (t_i)_{i=0}^{n}$ *felosztásaira vesszük. Ha a hossz véges, akkor a görbét* rektifikálható*nak mondjuk.*

A fenti definíció még nem igazán alkalmas egy adott görbe ívhosszának kiszámítására, azonban a görbére tett alkalmas megszorítás után már eljuthatunk az ismerős és praktikus ívhosszképlethez.

4. Lemma. *Legyen* (M, d) *metrikus tér és tekintsünk egy* $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ *rektifikálható görbét. Ekkor a*

$$\sigma : [a, b] \longrightarrow [0, L(\gamma)], \quad t \longmapsto \sigma(t) = L\left(\gamma \wr [a, t]\right)$$

ívhosszfüggvény monoton növekvő, folytonos szürjekció. Ha minden $t \in [a, b]$ *esetén létezik a*

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d\left(\gamma(t+h), \gamma(t)\right)}{|h|}$$

határérték és a $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto v(t)$ *ún.* pályasebesség-függvény *folytonos, akkor a*

$$\sigma(t) := \int_a^t v, \quad t \in [a, b]$$

előírással értelmezett σ *függvény folytonosan differenciálható és* $\sigma' = v$. γ *ívhossza ekkor megkapható a pályasebesség* $[a, b]$ *fölötti integráljaként:*

$$L(\gamma) = \sigma(b) = \int_a^b v.$$

E lemma birtokában már könnyen meghatározhatjuk a $\mathbb{H}^2$-beli C^1-osztályú görbék ívhosszát.

20. Tétel. *Egy* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}^2$ C^1*-osztályú görbe (hiperbolikus) ívhossza*

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'|}{\operatorname{im} \circ \gamma}$$

23. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy* (M, d) *metrikus tér* belső metrikus tér *vagy* hossz-tér*, ha tetszőleges* $p, q \in M$ *esetén*

$$d(p, q) = \inf\left\{L(\gamma) \in \mathbb{R} \,|\, \gamma \in \Gamma(p, q)\right\},$$

ahol $\Gamma(p, q)$ *jelöli a* p *és* q *pontokat összekötő összes* M*-beli görbék halmazát.*

A definícióból adódóan minden hossz-tér ívszerűen összefüggő, azaz bármely $(p,q) \in M \times M$ pontpár esetén $\Gamma(p,q) \neq \emptyset$. Sőt M bármely két pontja összeköthető rektifikálható görbével. Ha (M,d) hossz-tér, akkor a d távolságfüggvényt *hossz-metriká*nak, vagy *belső metriká*nak nevezzük.

24. Definíció. *Legyen (M,d) metrikus tér. Ekkor egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ pályát* geodetikus pályá*nak, vagy röviden* geodetikus*nak nevezünk, ha távolságtartó, azaz tetszőleges $t_1, t_2 \in [a,b]$ esetén*

$$d\left(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\right) = \left|t_1 - t_2\right|.$$

Az (M,d) metrikus teret geodetikus tér*nek mondjuk, ha bármely két pontja összeköthető geodetikus pályával.*

21. Tétel. *Minden geodetikus tér hossz-tér.*

Nem nehéz példát mutatni olyan metrikus térre, amely hossz-tér, de nem geodetikus tér, így a fenti állítás megfordítása általában nem igaz. Érvényes azonban a következő:

22. Tétel. *Egy (M,d) hossz-tér pontosan akkor geodetikus tér, ha teljes és lokálisan kompakt.*

23. Tétel. $\left(\mathbb{H}^2, d_H\right)$ *geodetikus tér, és így lokálisan kompakt, teljes metrikus tér.*

7. Konvexitás, terület, trigonometria

Mivel a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík rendezett illeszkedési sík, a szokásos módon szólhatunk $\mathbb{H}^2$-ben konvexségről. Rögtön adódik, hogy a hiperbolikus egyenesek, félegyenesek és szakaszok, valamint a nyílt és zárt félsíkok konvex halmazok.

24. Tétel. $\mathbb{H}^2$ *izometriái megőrzik a konvexitást, azaz ha $K \subset \mathbb{H}^2$ konvex halmaz és $\varphi \in iso(\mathbb{H}^2)$, akkor $\varphi(K)$ szintén konvex halmaz.*

Fontos a zárt konvex halmazok következő jellemzése.

25. Tétel. *A $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík egy zárt részhalmaza pontosan akkor konvex, ha előáll zárt félsíkok metszeteként.*

25. Definíció. *Legyen K a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus sík részhalmaza, és tekintsük az alábbi integrált:*

$$a_H(K) := \int_K \frac{1}{\mathrm{im}^2},$$

vagy – hagyományos írásmóddal –

$$a_H(K) := \int\limits_K \frac{1}{\mathrm{im}(z)^2}\, dxdy = \int\limits_K \frac{1}{y^2}\, dxdy \quad (z = x + iy).$$

Amennyiben ez létezik, K területének mondjuk.

26. Tétel. *$\mathbb{H}^2$ izometriái megőrzik a területet, azaz ha K részhalmaza $\mathbb{H}^2$-nak és $\varphi \in iso(\mathbb{H}^2)$, akkor*

$$a_H\left(\varphi(K)\right) = a_H(K).$$

Megemlítjük, hogy a hiperbolikus területet invariánsan hagyó $\mathbb{H}^2$-beli transzformációk halmaza sokkal bővebb, mint $Möb(\mathbb{H}^2)$, de ezekkel most nem foglalkozunk.

27. Tétel (Gauss-Bonnet formula). *A $\mathbb{H}^2$-beli α, β, γ euklideszi mértékű szögekkel rendelkező P háromszög hiperbolikus területe*

$$a_H(P) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

28. Tétel (hiperbolikus Pythagoras-tétel). *Legyen adva $\mathbb{H}^2$-ben egy a, b, c hiperbolikus oldalhosszakkal rendelkező háromszög, amelyben az a és b hosszúságú oldalak merőlegesek. Ekkor*

$$\mathrm{ch}(c) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b).$$

29. Tétel. *Legyen adva $\mathbb{H}^2$-ben egy (A, B, C) háromszög, és legyenek $a := d_H(B, C)$, $b := d_H(A, C)$, $c := d_H(A, B)$. Jelölje α, β, γ rendre az $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ és $C\sphericalangle$ euklideszi mértékét. Ekkor érvényesek a következő állítások:*

1. *Szinusz-tétel*
$$\frac{\mathrm{sh}(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\mathrm{sh}(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\mathrm{sh}(c)}{\sin(\gamma)}.$$

2. *I. Koszinusz-tétel*
$$\mathrm{ch}(c) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)\cos(\gamma).$$

3. *II. Koszinusz-tétel*
$$\mathrm{ch}(c) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}.$$

8. A Poincaré-féle körmodell

26. Definíció. *Legyen* $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. *Ekkor az*

$$f_C : z \in \mathbb{H}^2 \longmapsto f_C(z) = \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{C}$$

leképezést Cayley-leképezés*nek nevezzük.*

30. Tétel. *Az* f_C *Cayley-leképezés analitikus izomorfizmusa* $\mathbb{H}^2$*-nek a* $\mathbb{D}$ *egységkörlapra. Inverze az*

$$f_C^{-1} = f_{C^{-1}} : z \in \mathbb{D} \longmapsto i\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H}^2$$

leképezés.

27. Definíció. *Jelölje* f_C *a Cayley-leképezést és legyen*

$$Möb(\mathbb{D}) = \left\{ f_C \circ g \circ f_C^{-1} \in Möb(\overline{\mathbb{C}}) \,\middle|\, g \in Möb(\mathbb{H}^2) \right\}$$

1. *Az*
$$\mathcal{L}_{\mathbb{D}} := \{ f_C(l) \subset \mathbb{D} \,|\, l \in \mathcal{L}_H \}$$
halmaz elemeit $\mathbb{D}$*-beli egyeneseknek nevezzük.*

2. *Ha* $A, B, C \in \mathbb{D}$ *különböző, kollineáris pontok, akkor* $A * B * C$ *jelentse azt, hogy* $f_C^{-1}(A) * f_C^{-1}(B) * f_C^{-1}(C)$ *teljesül.*

3. *Két* $\mathbb{D}$*-beli (nem feltétlenül különböző) szakaszt, illetve szöget egybevágónak nevezünk, ha az egyik* Möb($\mathbb{D}$)*-beli transzformációval átvihető a másikba. Ezt a relációt jelölje* $\cong$.

31. Tétel. $(\mathbb{D}, \mathcal{L}_{\mathbb{D}}, *, \cong)$ *eleget tesz a valós hiperbolikus sík axiómáinak.*

28. Definíció. *A* $(\mathbb{D}, \mathcal{L}_{\mathbb{D}}, *, \cong)$ *valós hiperbolikus síkot Poincaré-féle körmodellnek nevezünk.*

A Poincaré-féle felső félsík modell és a körmodell izomorf, mivel a Cayley-leképezés izomorfizmust ad meg köztük .

29. Definíció. *A* $d_D : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \longmapsto d_D(a, b) := d_H\left(f_C^{-1}(a), f_C^{-1}(b)\right)$$

leképezést $\mathbb{D}$*-beli* hiperbolikus távolságfüggvény*nek nevezzük.*

32. Tétel. *A* d_D *leképezés távolságfüggvény* $\mathbb{D}$*-n, amelyre nézve a Cayley-leképezés távolságtartó.*

Mivel a Cayley-leképezés megtartja a $\overline{\mathbb{C}}$-beli köröket és szögtartó, következik, hogy $\mathbb{D}$ hiperbolikus egyenesei a $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ egységkörvonalat merőlegesen metsző $\overline{\mathbb{C}}$-beli köröknek a $\mathbb{D}$-vel való metszetei. Más szóval: $\mathbb{D}$ egyenesei a $\mathbb{T}$-t merőlegesen metsző euklideszi körök és az origón átmenő euklideszi egyenesek $\mathbb{D}$-vel való metszetei.

Legyenek $l \in \mathcal{L}_H$ végei p és q. Ekkor $f_C(l) \in \mathcal{L}_{\mathbb{D}}$ végei $f(p)$ és $f(q)$. Ezután ha a és b $\mathbb{D}$ különböző pontjai és a rájuk illeszkedő $\mathbb{D}$-beli hiperbolikus egyenes végei u és v, akkor

$$d_D(a,b) = \left|\ln cr(a,b,u,v)\right|.$$

33. Tétel. *Egy $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{D}$ C^1-osztályú görbe (hiperbolikus) ívhossza*

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{2\,|\gamma'|}{1-|\gamma|^2}.$$