Hiperbolikus geometria feladatok

Kertész Dávid Csaba

2010. január 22.

1. Feladat: *$\varrho \subset S \times S$ reflexív reláció az S halmazon, amelyre teljesül, hogy*

$$(a\varrho b \text{ és } a\varrho c) \Rightarrow b\varrho c \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy ϱ ekvivalenciareláció!

Megoldás: $a = c$ választással

$$(a\varrho b \text{ és } a\varrho a) \Rightarrow b\varrho a,$$

a reflexivitás miatt $a\varrho a$ mindig teljesül, így elhagyható:

$$a\varrho c \Rightarrow b\varrho a,$$

így a reláció szimmetrikus. Ezt felhasználva (1) átírható

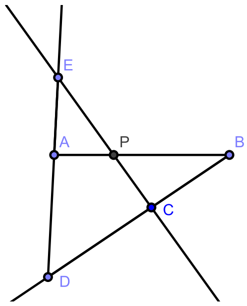
$$(b\varrho a \text{ és } a\varrho c) \Rightarrow b\varrho c$$

alakra, így a reláció tranzitív is. □

2. Feladat: *Igazoljuk, hogy affin sík minden egyenesére illeszkedik legalább két pont.*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy tetszőleges P pontra legalább három egyenes illeszkedik. $(A3)$ garantálja, hogy felvehetünk A, B pontokat úgy, hogy A, B, P nem kollineárisak. Ekkor $\overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{PB}$ különböző P-re illeszkedő egyenesek. $(A2)$ miatt egyértelműen létezik a P-re illeszkedő e egyenes, ami párhuzamos $\overleftrightarrow{AB}$-vel. Mivel e nem metszheti $\overleftrightarrow{AB}$-t, nem eshet egybe $\overleftrightarrow{PA}$ vagy $\overleftrightarrow{PB}$-vel, tehát három különböző egyenest kaptunk.

Most vegyünk fel egy tetszőleges l egyenest. $(A3)$ miatt felvehetünk egy rá nem illeszkedő P pontot. Előbbi állításunk szerint erre illeszkedik legalább három egyenes, és $(A2)$ szerint ezek közül legfeljebb egy lehet párhuzamos l-el. Így a másik kettő biztosan metszi l-t két különböző pontban. □



3. Feladat: *Igazoljuk, hogy rendezett illeszkedési síkban bármely két pont között van pont.*

Megoldás:

Tekintsük az A, B pontokat. $(I3)$ miatt létezik C pont úgy, hogy A, B, C kollineárisak.

$(R3)$ alapján felvehetünk egy D pontot, melyre $D - C - B$ teljesül, így A, B, D sem kollineárisak. Felvehetünk továbbá egy E pontot, amire $D - A - E$.

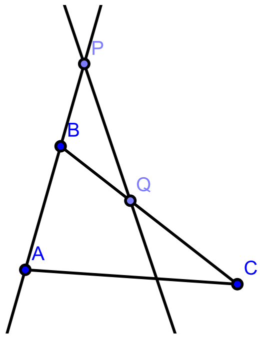
Megmutatjuk, hogy a $\overleftrightarrow{CE}$ az A, B, D pontok egyikére sem illeszkedik. Ha $A \in \overleftrightarrow{CE}$ vagy $D \in \overleftrightarrow{CE}$, akkor $D - A - E$ és $(I1), (R1)$ miatt $C \in \overleftrightarrow{DA}$. $D - C - B$-ből hasonlóan $B \in \overleftrightarrow{DA}$ adódik, azonban A, B, D nem lehet kollineáris. $B \in \overleftrightarrow{CE}$ esetén hasonló úton ellentmondásra jutunk.

Ekkor az ABD háromszögre és $\overleftrightarrow{CE}$-re alkalmazhatjuk $(R4)$-et, miszerint létezik egy $P \in \overleftrightarrow{CE}$ pont, melyre $D - P - A$ vagy $A - P - B$ teljesül. Azonban $D - P - A$ esetén az $\overleftrightarrow{EC}$-nek és $\overleftrightarrow{DA}$-nek E és P egyaránt közös pontja lenne, így $(I1)$ miatt az E, A, P, C, D pontok kollineárisak lennének, sőt $D - C - B$ miatt a B pont is erre a közös egyenesre esne, azonban a feltételeink miatt A, B, C nem lehet kollineáris.

Tehát $A - P - B$-nek kell teljesülnie, ami igazolja állításunkat. $\square$

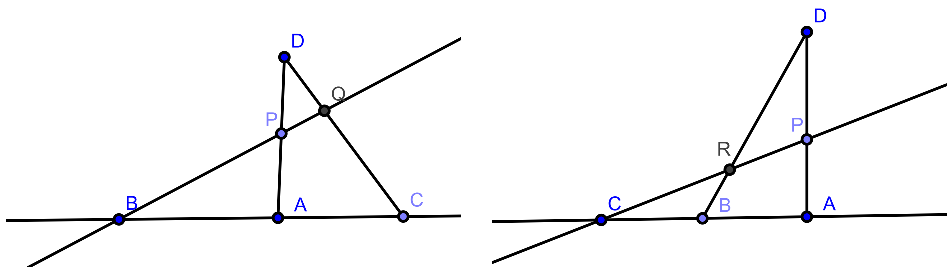
4. Feladat: *Igazoljuk, hogy ha rendezett illeszkedési síkban egy egyenes egy háromszög egyik oldalát belső pontban, egy másik oldalát pedig külső pontban metszi, akkor a háromszög harmadik oldalát is metszi, mégpedig belső pontban. Adjunk bizonyítást ennek felhasználásával a 3. feladatra-ra!*

Megoldás: Legyen adva az ABC háromszög. P az $\overline{AB}$ külső pontja, Q a $\overline{BC}$ belső pontja. Ekkor $B - Q - C$ teljesül. A $\overleftrightarrow{PQ}$ a háromszög egyik csúcsát sem haladhat át, így alkalmazhatjuk $(R4)$-et. Eszerint létezik egy $R \in \overleftrightarrow{PQ}$, melyre $A - R - C$ vagy $A - R - B$ teljesül. Azonban R nem lehet az $\overleftrightarrow{AB}$-n, hiszen annak $\overleftrightarrow{PQ}$-val csak egy közös pontja lehet, ami P. Így $A - R - C$ adódik, vagyis $R \in \overline{AC}$, tehát állításunkat igazoltuk.



A 3. feladat állítása ebből közvetlenül adódik a korábbival azonos konstrukcióban a DAB háromszögre, a $\overline{DA}$ E külső pontjára és $\overline{BD}$ C belső pontjára. $\square$

5. Feladat: *Mutassuk meg: ha A, B, C egy rendezett illeszkedési sík különböző, kollineáris pontjai, akkor az $A - B - C$, $B - C - A$, $C - A - B$ közül legalább az egyik teljesül.*

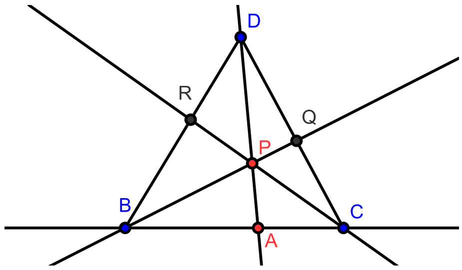


Megoldás: Legyen D olyan pont, ami nem illeszkedik az A, B, C pontok közös egyenesére. Legyen P olyan pont, amire $A - P - D$. Tegyük fel, hogy $A - B - C$ és $B - C - A$ nem teljesül. Vagyis B az $\overline{AC}$, C pedig a $\overline{BC}$ külső pontja. Ekkor 4. feladat állítása szerint létezik $Q \in \overleftrightarrow{BP} \bigcap \overline{CD}$ illetve $R \in \overleftrightarrow{CP} \bigcap \overline{BD}$ pontok.

Vizsgáljuk meg a BCD háromszöget. Alkalmazzuk a 4. feladat eredményét az RDC háromszögre, és $\overleftrightarrow{BQ}$ egyenesre. Ekkor $\overleftrightarrow{BQ}$ metszi $\overline{CR}$ belsejét, a metszéspont pedig szükségszerűen P. Most a BRC háromszögre és $\overleftrightarrow{DP}$-re alkalmazzuk az eredményt. Ekkor $\overleftrightarrow{DP}$ metszi $\overline{BC}$ belsejét, a metszéspont pedig csak is A lehet. Így $C - A - B$ teljesül. Tehát $A - B - C$ és $B - C - A$ kizárásából $C - A - B$ következik, így valamelyiknek mindenképp teljesülnie kell. $\square$

6. Feladat: *Hilbert síkot alapul véve igazoljuk a következőket:*

(1) Létezik Lambert-négyszög.



(2) *Létezik Saccheri-négyszög.*

(3) *A Saccheri-négyszögek felső alapszögei egybevágóak, a középvonaluk pedig merőleges mindkét alapra.*

(4) *Ha egy $ABCD$ négyszögben az $A\sphericalangle$ és a $B\sphericalangle$ derékszög, akkor $C\sphericalangle > D\sphericalangle$ és $\overline{AD} > \overline{BC}$ ekvivalens.*

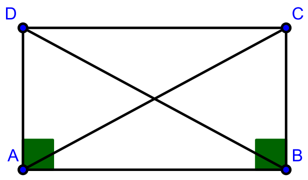
(5) *Ha egy $ABC\sphericalangle$ hegyesszög $\overrightarrow{BC}$ szárára illeszkedő P, P' pontokra $B-P-P'$ teljesül, és Q, illetve Q' a P-ből, illetve P'-ből $\overrightarrow{AB}$-re bocsátott merőleges talppontja, akkor $\overline{PQ} < \overline{P'Q'}$.*

Megoldás:

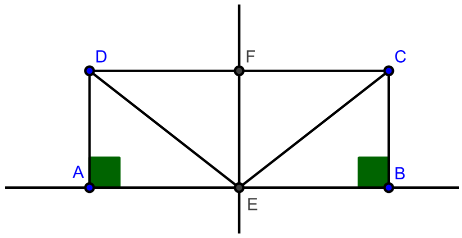
(1) Vegyünk egy EBF derékszöget, és belsejében egy D pontot. Ebből a pontból bocsássunk merőlegeseket $\overleftrightarrow{BE}$-ra és $\overleftrightarrow{BF}$-re, talppontjaik legyenek rendre A és C. A síkfelbontási tétel miatt ezek a talppontok a $EBF\sphericalangle$ megfelelő száraira esnek. Az így kapott $ABCD$ pontnégyes tehát négyszöget alkot, melynek A, B, C csúcsában derékszög van, tehát Lambert-négyszög.

(2) Vegyünk egy H félsíkot, és annak $\overleftrightarrow{AB}$ határegyenesét. Erre az egyenesre állítsunk $DAB\sphericalangle$-t és $CBA\sphericalangle$-t úgy, hogy derékszögek legyenek, és C, D benne legyen H-ban. A szakaszfelmérési axióma szerint C-t úgy is megválaszthatjuk, hogy $\overline{AD}$ kongruens legyen $\overline{BC}$-vel. Ekkor a $\overline{CD}$ a síkfelbontási tétel miatt nem metszheti $\overleftrightarrow{AB}$-t, így $\overline{AB}$-t sem. Tehát $ABCD$ négyszöget alkot, ami a konstrukció szerint Saccheri-négyszög.

(3) Legyen $ABCD$ Saccheri-négyszög, A és B csúcsában derékszögekkel. Ekkor a SAS egybevágósági tétel szerint $DAB\Delta \cong CBA\Delta$, amiből $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Így a $BCD\Delta$ és $ADC\Delta$ megfelelő oldalai kongruensek, tehát az SSS egybevágósági tétel alapján
$BCD\sphericalangle \cong ADC\sphericalangle$.



A második állítás belátásához jelöljük az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ felezőpontját E és F-fel. Ekkor az SAS egybevágósági tétel miatt $DAE\Delta \cong CBE\Delta$, így $\overline{DE} \cong \overline{CE}$. Tehát az SSS egybevágósági tétel szerint $DFE\Delta \cong CFE\Delta$, így $DFE\sphericalangle \cong CFE\sphericalangle$. Ezek egymás mellékszögei, így szükségszerűen derékszögek. Tehát az $\overleftrightarrow{EF}$ középvonal merőleges a Saccheri-négyszög felső alapjára. Felhasználva a felső szögek kongruenciájára vonatkozó előző állításunkat, ezzel azonos úton adódik, hogy a középvonal az alsó alapra is merőleges.

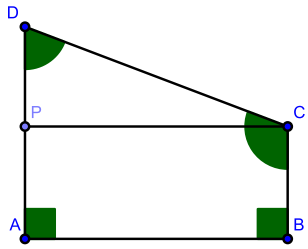


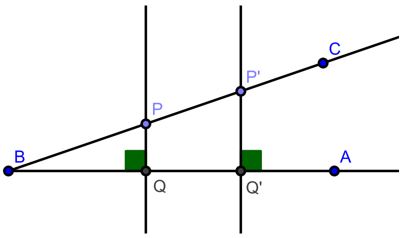
(4) Először megmutatjuk, hogy $C\sphericalangle > D\sphericalangle \Leftarrow \overline{AD} > \overline{BC}$. Ha $\overline{AD} > \overline{BC}$ akkor létezik olyan $P \in \overline{AD}$ melyre $\overline{AP} \cong \overline{BC}$ teljesül. Ekkor $ABCP$ Saccheri-négyszög, tehát a felső alapszögei kongruensek, azaz $APC\sphericalangle \cong BCP\sphericalangle$.

A külsőszög-egyenlőtlenség miatt $APC\sphericalangle > D\sphericalangle$. A P pont a $C\sphericalangle$ belsejében van, ezért $C\sphericalangle > BCP\sphericalangle$. Így felhasználva a szögek közötti $<$ reláció tranzitivitását $C\sphericalangle > D\sphericalangle$ adódik.

A $\Rightarrow$ irány kontrapozíciója: $\overline{AD} \leq \overline{BC} \Rightarrow C\sphericalangle \leq Dg$. Ha $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, akkor $ABCD$ Saccheri négyszög, tehát $C\sphericalangle \cong D\sphericalangle$. Ha $\overline{AD} < \overline{BC}$, akkor a bizonyítás első fele alapján $C\sphericalangle < Dg$.

(5) A külsőszög-egyenlőtlenség alapján látható, hogy $QPP'\sphericalangle > PQB\sphericalangle$, továbbá $AQ'P'\sphericalangle > PP'Q\sphericalangle$. De $PQB\sphericalangle \cong AQ'P'\sphericalangle$, mivel mindkettő derékszög. Így $QPP'\sphericalangle > PP'Q'\sphericalangle$, tehát az előző állítás alapján $\overline{Q'P'} > \overline{QP}$





□

7. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy Hilbert-síkban a következő állítások ekvivalensek:*

(1) (EP)

(2) Ha egy egyenes metszi két párhuzamos egyenes egyikét, akkor metszi a másikat is.

(3) A párhuzamosság tranzitív reláció az egyenesek halmazában.

Megoldás:

(1) ⇒ (2): Legyenek a és b párhuzamos egyenesek, c pedig olyan egyenes, ami P-ben metszi b-t, de a-t nem metszi. Ekkor a és c párhuzamosak, így P-re két olyan egyenes illeszkedik, ami párhuzamos a-val, ami ellentmond (1)-nek. Tehát ilyen c nem létezhet.

(2) ⇒ (3): Tegyük fel, hogy $a||b$ és $b||c$. Ekkor c nem metszheti a-t hiszen ekkor $a||b$ miatt (2) megkövetelné, hogy c-nek b-vel is legyen közös pontja. Tehát $a||c$.

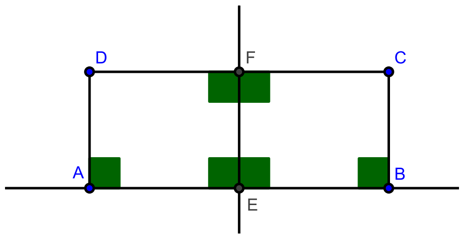
(3) ⇒ (1): Mivel a párhuzamosság szimmetrikus reláció, (3) így is felírható: $(b||a$ és $b||c) \Rightarrow a||c$. Vegyük most a b egyenest, és egy rá nem illeszkedő P pontot. Ha a és c illeszkedik P-re, és párhuzamosak b-vel, akkor (3) miatt $a||c$, de mivel metszik is egymást, szükségszerűen egybeesnek. Tehát csak egy P-re illeszkedő b-vel párhuzamos egyenes létezhet. □

8. Feladat: *Igazoljuk, hogy ha egy Hilbert-síkban teljesül az euklideszi párhuzamossági axióma, akkor a sík szemieuklideszi.*

Megoldás: Először a következő állítást bizonyítjuk: Hilbert síkban (EP) teljesülése esetén ha $a||b$, és egy c egyenes a-t derékszögben metszi, akkor b-t is.

Legyen b és c metszéspontja P. Állítsunk egy d merőlegest c-re P-n keresztül. Ismeretes, hogy ekkor $a||d$. Azonban (EP) miatt $b = d$, tehát b és c merőleges, így állításunkat beláttuk.

Most vegyünk egy $ABCD$ Lambert-négyszöget, aminek A, B, D csúcsaiban derékszög van. Ekkor $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DA}$, és $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{CD}$, tehát $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}$. Továbbá $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, így az állításunk alapján $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Tehát $ABCD$ téglalap.



Legyen most $ABCD$ Saccheri-négyszög. Tudjuk, hogy az $\overleftrightarrow{EF}$ középvonal mindkét alapra merőleges. Így $EADF$ és $EBCF$ Lambert-négyszögek, vagyis téglalapok is, tehát $D\sphericalangle$ és $C\sphericalangle$ derékszög. Ezért $ABCD$ téglalap. □

9. Feladat: *Mutassuk meg: ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor minden pontra legalább két olyan egyenes illeszkedik, amely párhuzamos egy, a pontra nem illeszkedő adott egyenessel.*

Megoldás: Ha egy Hilbert-síkon nincsenek téglalapok, akkor a Lambert- és Saccheri-négyszögek sem azok. Továbbá Hilbert-síkban egy pontra illeszkedő, adott egyenessel párhuzamos egyenes mindig szerkeszthető. Ha legalább két ilyen egyenes létezik, az így pontosan (EP) tagadása. Tehát a feladat állítása lényegében a 8. feladat állításának kontrapozíciója. □

10. Feladat: *Igazoljuk az uniformitás tételének következményeit.*

1. Ha egy Hilbert-síkban van olyan Lambert-négyszög, amelynek negyedik szöge hegyesszög (illetve derékszög vagy tompaszög), akkor a sík minden Lambert-négyszöge ilyen tulajdonságú, teljesül továbbá, hogy a Saccheri-négyszögek felső alapszögeinek típusa megegyezik a Lambert-négyszögek negyedik szögének típusával.

Megoldás: Ha egy Hilbert-síkban létezik olyan Lambert-négyszög, melynek negyedik szöge hegyesszög, akkor megfelelő tükrözéssel Saccheri-négyszög is előállítható, melynek felső alapszögei hegyesszögek. Ekkor az uniformitás tétele szerint minden Saccheri-négyszög ilyen tulajdonságú. A felhasznált megfeleltetés minden Lambert-négyszögre alkalmazható, így mindegyik örökli Saccheri-négyszögek tulajdonságait. Ez egyben igazolja a második állítást is. □

2. Ha egy Hilbert-síkban létezik téglalap, akkor a sík szemieuklideszi. A téglalapok szemközti oldalai egybevágók.

   Megoldás: Vegyük a feltételben megadott téglalapot. Ez természetesen Lambert-négyszög is, így az előző állításból adódik, hogy minden Lambert- és Saccheri-négyszög téglalap, tehát a sík szemieuklideszi.

   A második állítás a $(T22)$-es tételből látható, ugyanis eszerint ha a szemközti oldalak közül valamelyik nagyobb lenne a másiknál, akkor a szögek sem lehetnének egyenlőek, de téglalap esetében ez nem lehetséges. □

3. Ha egy Hilbert-sík eleget tesz a hegyesszög- (illetve tompaszög-) hipotézisnek, akkor a Lambert-négyszögek a hegyesszöghöz (ill. a tompaszöghöz) tartozó oldalai nagyobbak (ill.kisebbek), min a velük szemközti oldalak.

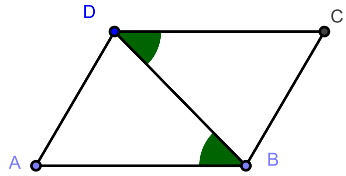
   Megoldás: A hegyesszög hipotézis esetén a Lambert-négyszögek negyedik szöge hegyesszög, tehát kisebb a vele szomszédos derékszögeknél, így $(T22)$ igazolja az állítást. □

4. Ha egy Hilbert-sík eleget tesz a hegyesszög- (illetve tompaszög-) hipotézisnek, akkor a Saccheri-négyszögek felső alapja nagyobb (illetve kisebb) mint az alsó alap. A Saccheri-négyszögek középvonala az egyetlen olyan egyenes mind a hegyes- mind a tompaszög-hipotézis teljesülése esetén, amely közös merőlegese az alsó és felső alap egyenesének.

   Megoldás: Ha egy Saccheri-négyszög "felezéséből" kapott Lambert-négyszögekre alkalmazzuk az előző állítást, akkor az első állítást kapjuk. A második állítás a hegyesszög- (tompaszög-) hipotézisekből következik, hiszen ha egy Saccheri-négyszög alsó és felső alap egyenesének két közös merőlegese lenne, akkor téglalapot kapnánk. □

12. Feladat: *Igazoljuk, hogy ha egy Hilbert-síkban egy $ABCD\square$-re $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ és $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ teljesül, akkor $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$ és $\overleftrightarrow{AD} || \overleftrightarrow{BC}$.*

Megoldás: A feltételekből adódik, hogy $ABD\Delta \cong CDB\Delta$, így egyúttal $ABD\sphericalangle \cong CDB\sphericalangle$. Ekkor $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$, mivel ha metszenék egymást egy P



pontban, akkor a $PBD\Delta$ egy külső szöge kongruens lenne egy nem mellette fekvő belső szöggel, ami ellentmond a külsőszög-egyenlőtlenségnek. $\overleftrightarrow{AD}||\overleftrightarrow{BC}$ hasonlóan látható. $\square$

13. Feladat: *Legyen adva Hilbert-síkban egy legalább kételemű* $\{A_1,\dots,A_n\}$ *véges ponthalmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amelynek egyik oldalán van a ponthalmaz összes pontja!*

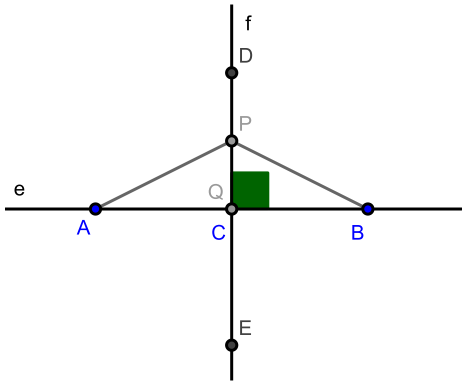
Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk. $n=2$ esetén tetszőleges $\overleftrightarrow{A_1A_2}$-vel párhuzamos egyenesre teljesülnek a feltételek. Vegyünk most $n=k$ pontot, és tegyük fel, hogy létezik l egyenes melynek $\{A_1,\dots,A_{k-1}\}$ ugyanazon H_1 oldalán van. $A_k\in H_1$ esetben készen vagyunk. Ellenkező esetben tekintsük az $\overline{A_1A_k}$-t. Ennek a szakasznak lesz közös pontja l-el. Vegyünk egy $P\in\overleftrightarrow{A_1A_k}$ pontot, amire A_1-A_k-P. Standard szerkesztéssel felvehető egy P-re illeszkedő l-el párhuzamos m egyenes. Ekkor $P\in m\subset H_2$, ahol H_2 az a halmaz, amire $H_1\cup l\cup H_2$ az egész sík, a síkfelbontási tétel értelmében.

Nevezzük K-nak azt az m által meghatározott félsíkot, amire $l\subset K$. Ekkor $H_1\subset K$, mivel ha egy $A\in H_1$ nem eleme K-nak, akkor létezik $B\in l$, amire $\overline{AB}$ metszi m-et, ami $m\subset H_2$ miatt lehetetlen. Így $\{A_1,\dots,A_{k-1}\}\subset K$ továbbá A_1-A_k-P miatt $A_k\in K$, ezért m-nek mind az n pont ugyanazon oldalán van. $\square$

15. Feladat: *Igazoljuk, hogy Hilbert-síkban minden körnek egy középpontja van.*

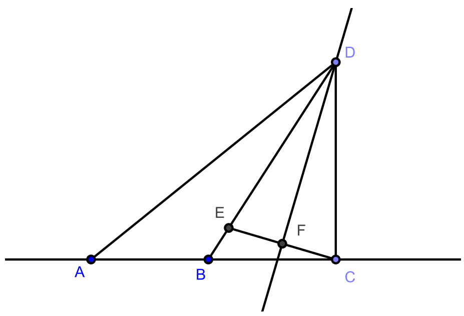
Megoldás: Vegyünk egy kört C középponttal, és $\overline{AC}$ sugárral. Az $e=\overleftrightarrow{AC}$-n felvehetünk egy további B pontot, ami biztosan rajta van a körön. Ha C pontban merőleges állítunk e-re, akkor az így kapott f egyenesen szintén felvehetünk D,E pontokat, amik rajta lesznek a körön.

Először megmutatjuk, hogy az A-tól és B-től egyenlő távolságra lévő pontok f-re illeszkednek. Vegyünk egy P pontot, amire $\overline{AP}\cong\overline{BP}$. Vehetjük $APB\sphericalangle$ belső szögfelezőjét, ami metszeni fogja $\overline{AB}$-t Q pontban. Ekkor $APQ\Delta\cong BPQ\Delta$, így Q a $\overline{AB}$ felezőpontja, továbbá $AQP\sphericalangle, BQP\sphericalangle$ egyaránt derékszögek, ezért $C=Q$ és $f=\overleftrightarrow{PQ}$. Ugyan így látható, hogy a D-től és E-től egyenlő távolságra lévő pontok e-re esnek, így egy olyan körnek a középpontja, ami illeszkedik az A, B, D, E pontokra, csak e és f metszetében lehet. $\square$



17. Feladat: *Legyenek A, B, C egy Hilbert-sík kollineáris pontjai az $A - B - C$ elrendezéssel, és legyen $D \notin \overleftrightarrow{AB}$ olyan pont, amelyre $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ teljesül. Igazoljuk, hogy $\overline{AC} > \overline{BD} > \overline{CD}$*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy $\overline{BD} > \overline{CD}$. Vegyünk fel $\overrightarrow{BD}$-n E pontot úgy, hogy $\overline{CD} \cong \overline{ED}$. Legyen F a $\overline{CE}$ felezőpontja. SSS alapján ekkor $EFD\Delta \cong CFD\Delta$, tehát $EFD\sphericalangle$ derékszög, és a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $EFD\sphericalangle > FCD\sphericalangle$. Mivel $BCD\sphericalangle$ szintén derékszög, a $\overrightarrow{CF}$ a belsejében halad, tehát $E \in \overline{BD}$, amiből $\overline{BD} > \overline{CD}$ következik.



$\overline{AD} > \overline{BD}$ ugyan ezzel a konstrukcióval látható, ugyanis $ABD\sphericalangle$ derékszögnél nagyobb, mivel $BCD\Delta$ külső szöge. $\square$

18.. Feladat: *Legyen adva egy Hilbert-síkban egy $DAC\Delta$. Igazoljuk, hogy ha B A és C közötti pont, akkor $\overline{DB} < \overline{DA}$ vagy $\overline{DB} < \overline{DC}$*

Megoldás: Legyen P a D-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re állított merőleges talppontja. Ekkor vagy P és B egybeesik, vagy $P-B-A$ vagy $P-B-C$ teljesül. Mindhárom esetben alkalmazzuk az előző eredményt. Ha $P = B$, akkor $\overline{DB} < \overline{DA}$ és $\overline{DB} < \overline{DC}$ egyaránt teljesül, $P-B-A$ esetén $\overline{DB} < \overline{DA}$, $P-B-C$ esetén pedig $\overline{DB} < \overline{DC}$ lesz igaz. $\square$

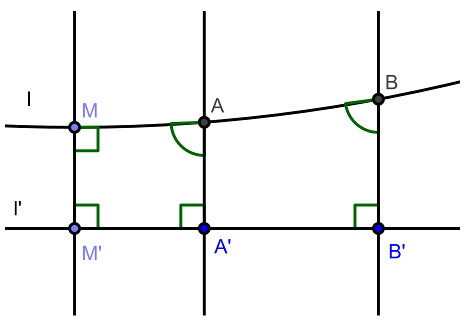
19. Feladat: *l és m egy Hilbert-sík különböző, párhuzamos egyenesei, A és B olyan pontok, amelyek m l-et nem tartalmazó oldalán vannak. Indokoljuk: A és B l ugyanazon oldalán vannak.*

Megoldás: Indirekt bizonyítunk. Legyen H m-nek az A-t és B-t tartalmazó oldala. Tegyük fel, hogy A és B pontok az l két különböző oldalán vannak. Ekkor $\overline{AB} \cap l$ nem üres, legyen a metszéspont P. Mivel M konvex, $P \in M$ de M nem tartalmazza l egy pontját sem, így ellentmondásra jutottunk. $\square$

20. Feladat: *Tegyük fel, hogy l és l' egy hiperbolikus sík széttartóan párhuzamos egyenesei, és tekintsük azt a $(M, M') \in l \times l'$ pontpárt, amelyre teljesül, hogy $\overleftrightarrow{MM'}$ közös merőlegese l-nek és l'-nek. Igazoljuk, hogy $\overline{MM'}$ kisebb minden tőle különböző, l-beli pontot l'-beli ponttal összekötő szakasztól!*

Megoldás: Hegyesszög-hipotézis teljesülése esetén bizonyítunk. A 17. feladat alapján látható, hogy tetszőleges $(A, B) \in l \times l'$ esetén $\overline{AB} \geq \overline{AA'}$ ahol A' az A pont l'-re való merőleges vetülete, így elegendő megmutatni, hogy $\overline{AA'} > \overline{MM'}$. Mivel $\overleftrightarrow{AA'} \perp l'$, $M'A'AM$ Lambert-négyszöget alkot, így $A'AM\sphericalangle$ hegyesszög. Ekkor $(T22)$ alapján $\overline{AA'} > \overline{MM'}$ adódik. $\square$

21. Feladat: *Megtartva az előző feladat jelöléseit, legyenek $A, B \in l$ olyan pontok, melyek $M-A-B$, és jelölje l'-re való merőleges vetületüket A', illetve B'. Igazoljuk, hogy $\overline{AA'} < \overline{BB'}$!*

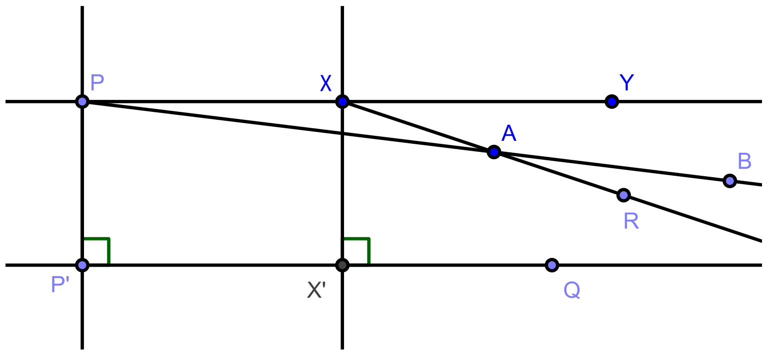


Megoldás: A 20. feladat alapján $A'AM\sphericalangle$ és $B'BM\sphericalangle = B'BA\sphericalangle$ hegyesszögek. Előbbinek $A'AB\sphericalangle$ mellékszöge, így tompaszög. Tehát $A'AB\sphericalangle > B'BA\sphericalangle$, amiből $(T22)$ alapján $\overline{B'B} > \overline{A'A}$ adódik. $\square$

22. Feladat: *Legyen l egy egyenese, $P \notin l$ egy pontja egy hiperbolikus síknak. Mutassuk meg, hogy ha $\overrightarrow{PY}$ az egyik P-ből induló, l-el határpárhuzamos félegyenes és egy X pontra $P - X - Y$ teljesül, akkor $\overrightarrow{XY}$ az X-ből induló, l-el határpárhuzamos félegyenes.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{XY}$ nem határpárhuzamos $\overrightarrow{X'Q}$-val. Legyen $\overrightarrow{XR}$ az X-ből induló határpárhuzamos. Mivel $\overrightarrow{XY}$ nem metszi $\overrightarrow{X'Q}$-t, R az $X'XY\sphericalangle$ belsejében van, $\overrightarrow{XR}$ határpárhuzamos volta miatt pedig $QX'X\sphericalangle$ belsejében is, továbbá mindkét megállapítás igaz $\overrightarrow{XR}$ minden belső pontjára is.

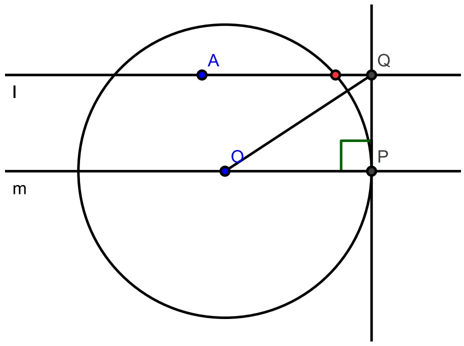
Vegyünk egy A pontot, amire $X - A - R$, vegyünk fel egy B-t amire $P - A - B$, és vizsgáljuk a $\overrightarrow{PA}$-t. Ezt a félegyenest $\overleftrightarrow{XR}$ egy $\overline{PA}$-ra és egy $\overrightarrow{AB}$-re osztja. $\overline{PA}$ természetesen az $\overleftrightarrow{XR}$ P-t tartalmazó oldalán van, így $\overrightarrow{AB}$ az Y-t tartalmazó oldalon $P - X - Y$ miatt. A $\overleftrightarrow{XR}$-re és $\overleftrightarrow{X'Q}$-ra alkalmazva a 19. feladatot látható, hogy $\overrightarrow{AB}$ nem metszheti $X'Q$-t. Továbbá A helyzetéből adódóan $\overline{PA}$ sem metszheti $\overrightarrow{P'Q}$-t, így $\overrightarrow{PA}$ nem metszi $P'Q$-t. Azonban ez nem lehetséges, mivel $\overrightarrow{PY}$ határpárhuzamos volt $P'Q$-val, és a konstrukció szerint A benne van $P'PY\sphericalangle$ belsejében. □



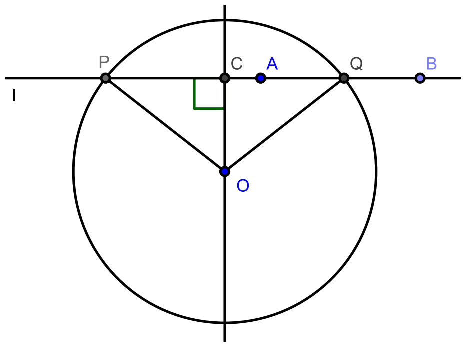
23. Feladat: *Mutassuk meg, hogy szakasz-kör és az egyenes-kör folytonossági elv ekvivalens!*

Megoldás:

$(SC) \Rightarrow (LC)$: Vegyünk egy O középpontú kört, tetszőleges sugárral, és belsejében egy A pontot. Legyen l egy A-ra illeszkedő egyenes. Ha l illeszkedik O-ra akkor biztosan metszi a kört. Ha nem, akkor vegyünk egy l-el párhuzamos, O-ra illeszkedő m egyenest. Legyen P az m metszéspontja a körrel, és állítsunk merőlegest P-ről l-re, a talppont legyen Q. Ekkor Q a kör külső pontja, ugyanis a 17. feladat szerint $\overline{OQ} > \overline{OP}$ Ekkor (SC) szerint $\overline{AQ}$ metszi a kört, így az l is.



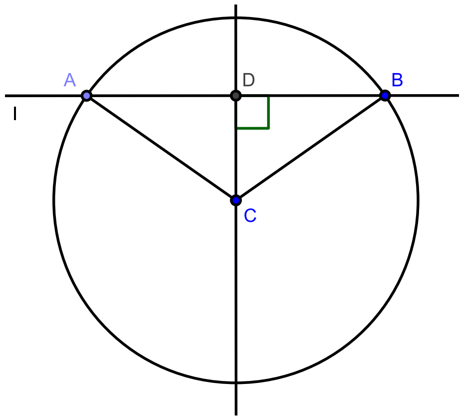
$(LC) \Rightarrow (SC)$: Ismét vegyünk egy O középpontú kört, melynek A belső, B külső pontja. (LC) szerint $l = \overleftrightarrow{AB}$ metszi a kört P-ben. $A - P - B$ esetén készen vagyunk. Megmutatjuk, hogy $A - B - P$ nem lehetséges. Bocsássunk merőlegest O-ból l-re, a talppont legyen C. Ekkor a 17. feladat szerint $\overline{OC} < \overline{OA}$, tehát C a kör belső pontja. Ugyan így $A - B - P$ esetén $\overline{OB} < \overline{OP}$, tehát P csak külső pontja lehetne a körnek.



Így feltehetjük, hogy $P - A - B$. Könnyen látható, hogy l-nek minden olyan pontja, ami a kör belsejében van, P és B között van, így C is. Vegyük $\overrightarrow{CB}$-n azt a Q pontot, amire $\overline{CQ} \cong \overline{CP}$. Ekkor (SAS) alapján $OCP\Delta \cong OCQ\Delta$, tehát Q a kör és l egy metszéspontja, továbbá $P - C - B$ miatt P-től különböző. $P - Q - B$ is teljesül, mert ellenkező esetben Q a kör külső pontja lenne.

P és Q ismeretében tovább finomíthatjuk l pontjainak leírását. l-nek minden olyan pontja, ami a kör belsejében van, P és Q között van, következésképpen $P - A - Q$. Mivel $P - Q - B$, következik $A - Q - B$, tehát $\overline{AB}$ metszi a kört. □

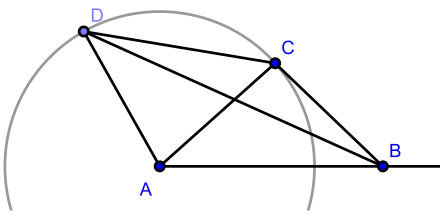
24. Feladat: *Igazoljuk, hogy az $(LC), (CC)$ folytonossági elvek teljesülése esetén a metszéspontok száma kettő!*



Megoldás: Először megmutatjuk, hogy (LC) teljesülése esetén létezik második metszéspont. Vegyünk egy kört C középponttal, és egye l egyenest, melynek van a kör belsejében lévő pontja. Ekkor (LC) szerint létezik $A \in l$ pont, ami rajta van a körön. Ha C rajta van l-en, akkor felmérhetünk l-en egy $\overline{AC}$-vel kongruens szakaszt a C-ből induló A-t nem tartalmazó félegyenesre, így egy újabb közös pontját kapjuk l-nek és a körnek.

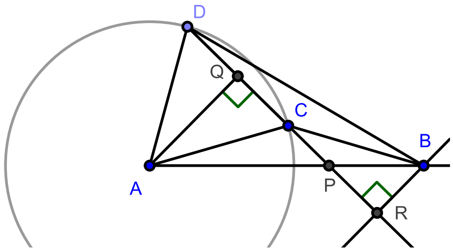
Ha C nincs rajta l-en, akkor állíthatunk C-re illeszkedő l-el merőleges egyenest, ami D-ben metszi l-t. Ezután az előbbi esethez hasonlóan "tükrözzük" A-t D-re, legyen az új pont B. Ekkor (SAS) alapján $CDA\Delta \cong CDB\Delta$, tehát $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, így B rajta van a körön. $B \neq A$ mivel l-nek van pontja a kör belsejében, amiről látható, hogy csak A és B között lehet.

Beláttuk, hogy l-nek van két metszéspontja a körrel. A 18. feladat alapján könnyen látható, minden $A-P-B$-t teljesítő P pont belső pontja a körnek, a 17. feladat szerint pedig $D-B-P$ illetve $D-A-P$ esetén P külső pont, így l-nek nem lehet további metszéspontja a körrel.



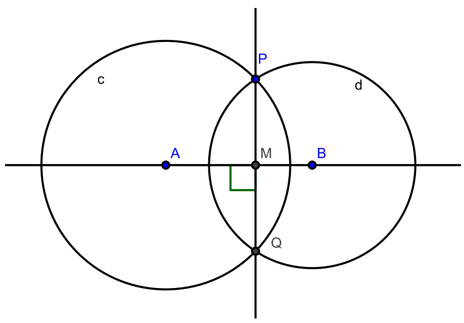
A második állítás igazolásához először a következő segédtételt bizonyítjuk. Adott $\overrightarrow{AB}$ és ennek egyazon oldalán C, D pontok, melyekre $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Ekkor $BAC\sphericalangle < BAD\sphericalangle \Rightarrow \overline{BC} < \overline{BD}$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\overline{AC}$ metszi $\overline{BD}$-t. Ekkor A a $BCD\sphericalangle$ belsejében van, tehát $BCD\sphericalangle > ACD\sphericalangle$.

Hasonlóan B az $ADC\sphericalangle$ belsejében van, tehát $ADC\sphericalangle > BDC\sphericalangle$. Azonban $ADC\sphericalangle \cong ACD\sphericalangle$, tehát $BCD\sphericalangle > BDC\sphericalangle$. Ebből $(T17)$ alapján $\overline{BD} > \overline{BC}$ következik.



Most tegyük fel, hogy $\overline{AC}$ nem metszi $\overline{BD}$-t. Egyrészt tudjuk, hogy C a $BAD\sphericalangle$ belsejében van, továbbá $ADB\sphericalangle$ belsejében is. Következésképpen $\overrightarrow{DC}$ metszi $\overline{AB}$-t, egy P pontban, amire $D - C - P$. Most állítsunk merőlegest A-ból $\overleftrightarrow{DC}$-re. Mivel $ADC\Delta$ egyenlőszárú háromszög, ennek Q talppontja D és C között lesz. Ekkor $BPC\sphericalangle$ tompaszög, mivel $APQ\Delta$ külső szöge. Így $PCB\sphericalangle$ és $PDB\sphericalangle$ hegyesszögek. Ebből az következik, hogy a $\overleftrightarrow{DC}$-re B-ből bocsátott merőleges R talppontjára $D - C - R$ teljesül, különben nem teljesülne a külsőszög-egyenlőtlenség. Így a 17. feladat szerint $\overline{BD} > \overline{BC}$ adódik. Megjegyezzük, hogy a háromszög egyenlőtlenség segítségével az állítás kiterjeszthető a null- és egyenesszögekre is.

Most pedig legyen c és d két kör, A és B középpontokkal úgy, hogy d-nek van c belsejében és külsejében is pontja. Ekkor (CC) szerint a két kör metszi egymást egy P pontban. Megmutatjuk, hogy $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Ha $P \in \overleftrightarrow{AB}$, akkor $ABP\sphericalangle$ vagy nullszög, vagy egyenesszög. Használjuk a segédtételt $\overrightarrow{BA}$-ra. Nullszög esetén minden $S \in d\backslash\{P\}$-re $\overline{AS} > \overline{AP}$ teljesülne, tehát d minden pontja c külsejében lenne. Egyenesszög esetén pedig $\overline{AS} < \overline{AP}$ lenne igaz, tehát d minden pontja c belsejében lenne. Mindkét eset ellentmond a feltételeknek.



Állítsunk P-ből merőlegest $\overleftrightarrow{AB}$-re, a talppont legyen M, majd a merőleges M-ből induló P nem tartalmazó félegyenesén jelöljünk ki egy Q pontot, amire $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$. Ekkor (SAS) többszöri alkalmazásából adódik, hogy Q is rajta van c-n és d-n. $\overrightarrow{AB}$-re és az $\overleftrightarrow{AB}$ által meghatározott két félsíkra külön-külön alkalmazva a segédtételt látható, hogy c minden P-től illetve Q-tól különböző pontja külső vagy belső pontja lesz d-nek, tehát pontosan két metszéspontja van c-nek és d-nek. $\square$

25. Feladat: *Mutassuk meg, hogy* $(CC) \Rightarrow (LC)$.

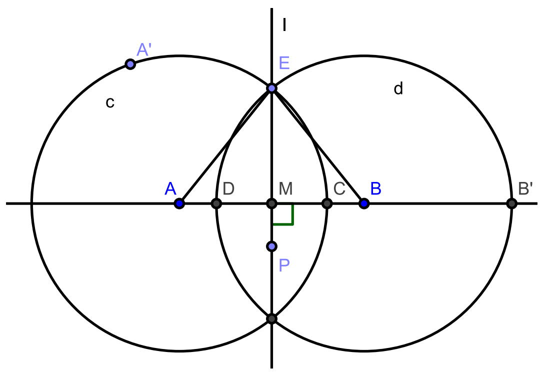
Megoldás: Legyen c egy kör A középponttal, $\overline{AA'}$ sugárral, és l egy egyenes, melynek P pontja c belsejében van. $A \in l$ esetén l biztosan metszi a kört. Ellenkező esetben állítsunk merőlegest A-ből l-re, a talppont legyen M. Ekkor a 17. feladat szerint M c belsejében van, tehát $\overline{AM} < \overline{AA'}$. Legyen B az a pont $\overrightarrow{AM}$-en, amire $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, d pedig egy B középpontú kör, aminek sugara kongruens $\overline{AA'}$-vel. Ekkor d metszi $\overrightarrow{BA}$-t egy D pontban, c pedig metszi $\overrightarrow{AB}$-t egy C pontban. A következőket állapíthatjuk meg:

1, $D \in \overrightarrow{MA}$ mert $\overline{BM} < \overline{BD}$,

2, $C \in \overrightarrow{MB}$ mert $\overline{AM} < \overline{AC}$,

3, $\overline{DM} \cong \overline{CM}$ mivel $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ és $\overline{BM} \cong \overline{AM}$,

így $\overrightarrow{MA}$-ra és $AMD\sphericalangle$, $AMC\sphericalangle$ elfajult szögekre alkalmazva a segédtételt $\overline{AD} < \overline{AC}$ adódik, tehát c-nek D belső pontja.



Tekintsük most $\overleftrightarrow{AB}$-nek azt a B' metszéspontját d-vel, amire $A - B - B'$. Mivel $\overline{BB'} \cong \overline{AA'}$, B' külső pontja c-nek. Tehát d tartalmazza c-nek egy külső és egy belső pontját is, így (CC) szerint metszik egymást egy E pontban. A 15. feladat bizonyításában láttuk, hogy E-nek rajta kell lennie $\overline{AB}$

felezőmerőlegesén, ami a konstrukció szerint éppen l, tehát E közös pontja c-nek és l-nek, vagyis (LC) teljesül. $\square$

26. Feladat:

(1) Mutassuk meg, hogy $GL_n(\mathbb{K})$ nyílt halmaza $M_n(\mathbb{K})$-nak.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy $S = M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K})$ zárt. Legyen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ mátrixok konvergens sorozata, $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Ekkor $|A_n| = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A determináns folytonos funkcionál $M_n(\mathbb{K})$-n, tehát

$$|A| = \left|\lim_{n\to\infty} A_n\right| = \lim_{n\to\infty} |A_n| = 0,$$

azaz $A \in S$, így S zárt. $\square$

(2) Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ esetén

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy tetszőleges $v \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$.

$$\|Av\| = \frac{\|Av\|}{\|v\|}\|v\| = \|A\frac{v}{\|v\|}\|\|v\| \leq \|A\|\|v\|.$$

Így ha $\|v\| \leq 1$:

$$\|ABv\| \leq \|A\|\|Bv\| \leq \|A\|\|B\|\|v\| \leq \|A\|\|B\|,$$

tehát $\|A\|\|B\|$ felső korlátja $\|ABv\|$-nek, amiből az állítás adódik. $\square$

(3) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A \in M_n(\mathbb{K})$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ sor abszolút konvergens (azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A^n\|$ sor konvergens), és így az

$$\exp : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}), \quad A \mapsto \exp(A) =: e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

exponenciális leképezés jól definiált. Igazoljuk, hogy

$$\forall \in M_n(\mathbb{K}) : \quad \|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

Megoldás: Az előző feladat alapján $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A\|^n$ sor éppen a valós exponenciális függvény az $\|A\|$ helyen, tehát konvergens, így a majoráns kritérium alapján mindkét állítás adódik. $\square$

(4) Mutassuk meg, hogy ha $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ és $AB = BA$, akkor

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Megoldás: Számítsuk ki $\exp(A+B)$-t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{(n-k)!} B^{n-k}$$

Amit kaptunk, az éppen a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} A^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} B^n$ sorok Cauchy-szorzata, így Mertens tétele szerint összege megegyezik a két sor összegének szorzatával, ami $\exp(A)\exp(B)$. $\square$

(5) Igazoljuk, hogy tetszőleges $A \in M_n(\mathbb{K})$ esetén

$$\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \text{és} \quad (\exp(A))^{-1} = \exp(-A).$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a $0 \in M_n(\mathbb{K})$ csupa nulla mátrix esetén $\exp(0) = \mathrm{E}$. Ezt felhasználva:

$$\mathrm{E} = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A)\exp(-A).$$

Ebből a determináns szorzástétele miatt következik, hogy $|\exp(A)| \neq 0$, és $\exp(A)$ inverze nyilván $\exp(-A)$. $\square$

(6) Mutassuk meg, hogy ha $B \in GL_n(\mathbb{K})$, akkor tetszőleges $A \in M_n(\mathbb{K})$ esetén

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$$

Megoldás: Könnyen látható, hogy $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$, így a

$$\exp(B^{-1}AB) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(B^{-1}AB)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^{-1}A^nB =$$

$$= B^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\right) B = B^{-1}\exp(A)B$$

számolás alapján az állítás adódik. $\square$

(7) Ellenőrizzük, hogy ha

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \text{ akkor}$$

$$\exp(A) = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Diagonalizáljuk A-t a sajátvektoraiból alkotott ortogonális mátrix segítségével:

$$A = QDQ^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Mivel $Q \in GL_2(\mathbb{K})$, az előző feladat szerint

$$\exp(A) = Q \exp(D) Q^{-1}.$$

Diagonális mátrix hatványozása megfelel a főátló elemeinek hatványozásával, így könnyen látható, hogy

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\alpha+i\beta} & 0 \\ 0 & e^{\alpha-i\beta} \end{pmatrix} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva:

$$\exp(A) = Q\exp(D)Q^{-1} = \frac{e^{\alpha}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{2} \begin{pmatrix} e^{i\beta} + e^{-i\beta} & ie^{i\beta} - ie^{-i\beta} \\ -ie^{i\beta} + ie^{-i\beta} & e^{i\beta} + e^{-i\beta} \end{pmatrix} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

□

27. Feladat: *Részletezzük a 3.5. állítás bizonyításában az*

$$|(F_1(i)| = |i| \Rightarrow F_1(i) \in \{i, -i\} \text{ lépést.}$$

Megoldás: A feltett állítás az alábbit jelenti:

$$(\mathrm{re}F_1(i))^2 + (\mathrm{im}F_1(i))^2 = 1.$$

Mivel F_1 izometria, $|F_1(i) - F_1(1)|^2 = |i-1|^2 = 2$, azaz

$$(\mathrm{re}F_1(i) - 1)^2 + (\mathrm{im}F_1(i))^2 = 2.$$

A két egyenlet különbségéből

$$\mathrm{re}F_1(i) = 0$$

adódik, ezt visszahelyettesítve pedig

$$(\mathrm{im}F_1(i))^2 = 1,$$

tehát $F_1(i)$ valós része 0, képzetes része pedig ± 1. $\square$

28. Feladat: *Mutassuk meg, hogy* $\mathrm{Rot}_0(\mathbb{C})$ *kommutatív csoport a kompozíció műveletére. Igazoljuk, hogy* $a \neq 0$ *esetén* ϱ_a *egyetlen fixpontja a* 0.

Megoldás: Legyen $a, b \in \mathbb{T}$ és $\varrho_a, \varrho_b \in \mathrm{Rot}_0(\mathbb{C})$. Ekkor

$$\varrho_b \circ \varrho_a(z) = baz = \varrho_{ba}(z),$$

továbbá mivel $\mathbb{T}$ csoport, így $ba \in \mathbb{T}$ és $\varrho_{ba} \in \mathrm{Rot}_0(\mathbb{C})$, tehát a művelet jól definiált. Az asszociativitás és kommutativitás értelemszerűen öröklődik $\mathbb{T}$-ből. ϱ_1 egységelem, ugyanis

$$\varrho_1 \circ \varrho_a(z) = 1az = az = \varrho_a,$$

továbbá $\varrho_a \in \mathrm{Rot}_0(\mathbb{C})$ inverze ϱ_a^{-1}, mert

$$\varrho_a^{-1} \circ \varrho_a(z) = a^{-1}az = z = \varrho_1(z).$$

Ha z fixpontja ϱ_a-nak, akkor teljesíti az alábbi egyenletet:

$$z = \varrho_0(z) = az.$$

Ebből

$$0 = (a-1)z,$$

tehát $z = 0$, mivel a feltétel szerint $a - 1 \neq 0$. $\square$

30. Feladat: *Igazoljuk, hogy* $\mathbb{C}$ *minden nemidentikus transzlációja és forgása két tengelyes tükrözés kompozíciója, az első esetben a tengelyek párhuzamosak, a másodikban nem.*

Megoldás: Legyen τ_b transzláció, ahol $b \in \mathbb{C}^*$. Keressük az $f(z) = c\overline{z} + d$, $g(z) = a\overline{z}$ alakban megadott tengelyes tükrözéseket, melyekre $\tau_b = f \circ g$,

$$\tau_b(z) = z + b = c\overline{a\overline{z}} + d = f \circ g(z).$$

Legyen $d = b$, és határozzuk meg c-t úgy, hogy f tengelyes tükrözés legyen:

$$c\overline{b} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b\overline{b}^{-1}.$$

$a = c$ választással $c\overline{a} = 1$ teljesül, tehát $g = -b\overline{b}^{-1}\overline{z}$, $f = -b\overline{b}^{-1}\overline{z}+b$ teljesíti a feltételeket. Továbbá f és g csak a b-vel való eltolásban különbözik egymástól, így tengelyük párhuzamos.

Legyen most ϱ_a forgás, ahol $a \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Ekkor a $g(z) = \overline{z}$, és $f(z) = a\overline{z}$ tengelyes tükrözésekre teljesül $\varrho_a = f \circ g$, és mivel $a \neq 1$, a tengelyeik nem lehetnek párhuzamosak. □

31. Feladat: *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$. Határozzuk meg az*

$$f_1 : z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} + a \in \mathbb{C} \text{ és az } f_2 : z \in \mathbb{C} \longmapsto -z + ia \in \mathbb{C}$$

izometriák típusát, és az invariáns, illetve pontonként fix invariáns egyeneseit.

Megoldás: f_1 csúsztatva tükrözés, mivel $1\overline{a} + a = 2a \neq 0$, tehát nincs fixpontja. Invariáns egyeneseit $l = \{tc + b\}$ alakban keressük, ahol $c \in \mathbb{T}$, $b \in \mathbb{C}$ rögzített, t pedig tetszőleges valós szám. Ha l invariáns egyenese f_1-nek, akkor bármely $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén létezik $t \in \mathbb{R}$, melyre

$$tc + b = t_0\overline{c} + \overline{b} + a. \tag{2}$$

Mindkét oldalt konjugálva

$$t\overline{c} + \overline{b} = t_0c + b + a$$

majd a két egyenletet összeadva

$$(t - t_0)(c + \overline{c}) = 2a \tag{3}$$

adódik. Fejezzük ki t-t, és írjuk vissza (2)-be:

$$\frac{2ac}{c + \overline{c}} + t_0c + b = t_0\overline{c} + \overline{b} + a.$$

Átrendezve:

$$a(c - \overline{c}) + t_0(c - \overline{c})(c + \overline{c}) + (b - \overline{b})(c + \overline{c}) = 0.$$

Ennek minden valós t_0-ra teljesülnie kell, speciálisan $t_0 = -\frac{a}{c+\overline{c}}$-re is. Ekkor

$$(b - \overline{b})(c + \overline{c}) = 0$$

adódik, és (3) miatt $c + \overline{c} \neq 0$, így $b - \overline{b} = 0$, azaz b valós. Ekkor $a(c - \overline{c}) = 0$ is teljesül, tehát c is valós. f_1-nek tehát egyetlen invariáns egyenese van, a valós tengely.

f_2 valódi forgás, így csak egyetlen fixpontja van, tehát nincs pontonként invariáns egyenese. Invariáns egyeneseit $l = \{tc + i\alpha c\}$ alakban keressük, ahol $c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ rögzített, és $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha l invariáns egyenese f_2-nek akkor minden $t_0 \in \mathbb{R}$-hez létezik $t \in \mathbb{R}$, hogy

$$tc + i\alpha c = -t_0 c - i\alpha c + ia,$$

azaz

$$c(t + t_0 + 2i\alpha) = ia. \tag{4}$$

Mindkét oldalt konjugálva

$$\overline{c}(t + t_0 - 2i\alpha) = -ia,$$

majd a két egyenletet összeadva

$$(c + \overline{c})(t + t_0) = 0$$

adódik. Először tegyük fel, hogy $c + \overline{c} \neq 0$. Ekkor $t = -t_0$, tehát (4) így alakul:

$$2\alpha c = a.$$

α és a valós, tehát c is, ezért $c = \pm 1$, $\alpha = \pm\frac{a}{2}$ lehet, így $l = \{t + i\frac{a}{2} | t \in \mathbb{R}\}$.

Most tekintsük a $c + \overline{c} = 0$ esetet. Ekkor c valós része nulla, tehát $c = \pm i$. Tekintsük a $c = i$ esetet. Ekkor (4)

$$t + t_0 + 2i\alpha = a$$

alakra módosul. Mivel t, t_0, a valós számok, $\alpha = 0$, tehát $l = \{it | t \in \mathbb{R}\}$. □

32. Feladat: *Adjuk meg* $z \in \mathbb{C} \longmapsto az + b \in \mathbb{C}$ *vagy* $z \in \mathbb{C} \longmapsto a\overline{z} + b \in \mathbb{C}$ *alakban azt a transzformációt, amely*

(1) tükrözés $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ $x_1 = x_2$ *egyenletű egyenesére*

(2) az előbbi tükrözés és az $1 + i$ *eltolásvektorú transzláció kompozíciója.*

Megoldás:

(1) Megmutatjuk, hogy az $f(z) = i\overline{z}$ megfelel a feltételnek. Az $x_1 = x_2$ egyenletet kielégítő $\mathbb{R}$-beli pontok $\mathbb{C}$-beli alakja $a + ia$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Mivel

$$f(a + ia) = i(\overline{a + ia}) = i(a - ia) = a + ia,$$

a kívánt egyenes minden pontja fixpontja az f tengelyes tükrözésnek, így csak ez lehet a tükörtengelye.

(2) Az $1+i$ vektorral való eltolás a $g(z) = z + 1 + i$ alakú izometria. A megoldás így
$$g \circ f(z) = iz + 1 + i.$$

□

33. Feladat: *Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ csúsztatva tükrözés, akkor egyetlenegy olyan $l \subset \mathbb{C}$ egyenes van, amelyre $f(l) = l$ teljesül. Igazoljuk, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén $\frac{1}{2}(z + f(z)) \in l$.*

Megoldás: Legyen f megadva $f(z) = a\overline{z} + b$ alakban. Megmutatjuk, hogy a $\frac{b}{2}$ ponton áthaladó $a\overline{b}+b$ irányvektorú l egyenesre $f(l) = l$. Ha $v = t(a\overline{b}+b)+\frac{b}{2}$ ahol $t \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(v) = a(\overline{t(a\overline{b} + b)} + \frac{\overline{b}}{2}) + b = t(a\overline{b} + b) + a\frac{\overline{b}}{2} + b = (t + \frac{1}{2})(a\overline{b} + b) + \frac{b}{2} \in l,$$

tehát $f(l) = l$. Keressünk további m egyenest, melyre $f(m) = m$. m nem metszheti l-t, hiszen a metszéspont f általi képének mind a két egyenesen rajta kellene lennie, így fixpontot kapnánk, ami nem lehet, mivel f csúsztatva tükrözés. Tehát elegendő az $m \parallel l$ esetet vizsgálni. Egy ilyen m egyenes egy z pontjára fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\langle z - f(z), i(a\overline{b} + b)\rangle = 0,$$

azaz
$$-(z - a\overline{z} - b)(\overline{a}b + \overline{b}) + (\overline{z} - \overline{a}z - \overline{b})(a\overline{b} + b) = 0,$$

összevonva

$$-2z(\overline{a}b + \overline{b}) + 2\overline{z}(a\overline{b} + b) + b(\overline{a}b + \overline{b}) - \overline{b}(a\overline{b} + b) = 0,$$

$$(2z - b)(\overline{a}b + \overline{b}) - (2\overline{z} - \overline{b})(a\overline{b} + b) = 0,$$
$$\mathrm{im}(2z - b)(\overline{a}b + \overline{b}) = 0.$$

Tehát $(2z - b)(\overline{a}b + \overline{b})$ egyenlő egy α valós számmal. $s = |\overline{a}b + \overline{b}|^2$ jelöléssel:

$$2z - b = \frac{\alpha}{s}(a\overline{b} + b),$$

azaz
$$z = \frac{\alpha}{2s}(a\overline{b} + b) + \frac{b}{2},$$

így $z \in l$, tehát $l = m$.

A második állítást az alábbi számolás igazolja:

$$f\left(\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}f(z)\right)=\frac{1}{2}a\overline{z}+\frac{1}{2}a(\overline{a\overline{z}+b})+b=\frac{1}{2}a\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a\overline{b}+2\frac{1}{2}b=$$

$$=\frac{1}{2}(z+b)+\frac{1}{2}a(\overline{z+b})+\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}(z+b)+\frac{1}{2}f(z+b).$$

□

34. Feladat: *Mutassuk meg, hogy azok a $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ alakú Möbius-transzformációk, ahol $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, részcsoportját alkotják $Möb^+(\overline{\mathbb{C}})$-nak.*
(Ez az $SL_2(\mathbb{Z})$-vel jelölt úgynevezett moduláris csoport.)

Megoldás: Legyenek $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C}$ és $g : z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \in \mathbb{C}$ Möbius-transzformációk, ahol $a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{Z}$. Az alábbi egyenlet megoldásával határozzuk meg f inverzét.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$cwz+dw=az+b$$

$$(cw-a)z=-dw+b$$

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}$$

Az $f^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$ függvény Möbius-transzformáció, és $-d,b,c,-a \in \mathbb{Z}$ is teljesül. Most pedig határozzuk meg $f \circ g$-t.

$$f\circ g(z)=\frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}=\frac{a(\alpha z+\beta)+b(\gamma z+\delta)}{c(\alpha z+\beta)+d(\gamma z+\delta)}=\frac{(a\alpha+b\gamma)z+a\beta+b\delta}{(c\alpha+d\gamma)z+c\beta+d\delta}$$

$f \circ g$ Möbius-transzformáció, továbbá $a\alpha+b\gamma, a\beta+b\delta, c\alpha+d\gamma, c\beta+d\delta \in \mathbb{Z}$, tehát a Möbius-transzformációk vizsgált részhalmazából nem vezet ki a kompozíció képzés, és tartalmazza minden eleme inverzét, ezért a halmaz részcsoport. □

35. Feladat: *Legyen $f \in Möb^+(\overline{\mathbb{C}})$ mátrixa $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Igazoljuk, hogy*

$$(f^2=1_{\overline{\mathbb{C}}},\ de\ f\neq 1_{\overline{\mathbb{C}}}) \quad \Leftrightarrow \quad a+d=0$$

Megoldás: Az előző feladatban láthattuk, hogy Möbius-transzformációk kompozíciója megfelel a mátrixuk szorzásának. Legyen f mátrixa A. Ekkor

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$f^2 = 1_{\overline{\mathbb{C}}}$ pontosan akkor teljesül, ha $ab+bd=0$, $ac+cd=0$ és $a^2+bc = bc+d^2$ de $a^2+bc \neq 0$. A harmadik egyenlet alapján $a = \pm d$. Ha $a = d$, akkor az első két egyenletből $b = 0, c = 0$ következne. Azonban ekkor

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{a} = z,$$

azaz $f = 1_{\overline{\mathbb{C}}}$, tehát ezt az esetet kizárhatjuk, így $a + d = 0$.

Megfordítva, ha $a + d = 0$, akkor $f \neq 1_{\overline{\mathbb{C}}}$ hiszen $a = d$ és $a \neq 0$ egyszerre nem teljesülhet. Továbbá

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix},$$

és $a^2 + bc \neq 0$, hiszen f Möbius-transzformáció, így $f^2 = 1_{\overline{\mathbb{C}}}$. □

36. Feladat: *Legyen $f(z) := \frac{2z+1}{3z+4}$. Állítsuk elő f-et transzlációk, forgatva nyújtás és (komplex) inverzió kompozíciójaként.*

Megoldás: Próbáljuk meg f-t előállítani $\tau_d \circ \sigma_a \circ \mathcal{I} \circ \tau_b$ alakban. Azaz keressük $a, b, d \in \mathbb{C}$ számokat, melyekre

$$\frac{2z+1}{3z+4} = a\frac{1}{z+b} + d$$

teljesül. Rendezve:

$$\frac{2z+1}{3z+4} = \frac{a+dz+bd}{z+b},$$

$$2z^2 + (2b+1)z + b = 3dz^2 + (4d+3a+3bd)z + 4bd + 4a,$$

adódik. Különválasztva z^2, z együtthatóit és a konstansokat, a

$$3d - 2 = 0 \tag{5}$$

$$3bd + 3a + 4d - 2b - 1 = 0 \tag{6}$$

$$4bd + 4a - b = 0 \tag{7}$$

egyenletrendszert kapjuk. (5)-ből $d = \frac{2}{3}$ adódik, így (7) alapján $a = -\frac{5}{12}b$. Tehát (6)-ből

$$2b - \frac{5}{4}b + \frac{8}{3} - 2b - 1 = 0,$$

$$b = \frac{4}{3},$$

eredményt kapjuk, továbbá $c = -\frac{5}{9}$. A megoldás tehát:

$$f = \tau_{\frac{2}{3}} \circ \sigma_{-\frac{5}{9}} \circ \mathcal{I} \circ \tau_{\frac{4}{3}}.$$

□ **Megjegyzés.** Ezt a megoldást az alábbi számolással is megkaphatjuk:

$$\frac{2z+1}{3z+4} = \frac{1}{3}\frac{6z+8-5}{3z+4} = \frac{1}{3}\frac{-5}{3z+4} + \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}\frac{1}{z+\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}.$$

37. Feladat: *Határozzuk meg azokat a Möbius-transzformációkat, amelyek a megadott ponthármasokon az adott módon hatnak:*

(3) $(-1, -i, 1) \rightsquigarrow (-1, 0, 1)$

(8) $(0, 1, \infty) \rightsquigarrow (-1, 0, 1)$

Megoldás: Mindkét esetben $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius-transzformációt keressük. A (3) feladat feltételeinek megfelelő egyenletrendszer:

$$-1(-c+d) = -a+b \tag{8}$$

$$0 = -ia+b \tag{9}$$

$$c+d = a+b \tag{10}$$

(9) szerint $b = ia$. Összeadva (8) és (10) egyenleteket $c = ia$, kivonva őket pedig $d = a$ adódik. Tehát $f(z) = \frac{az+ia}{iaz+a}$. Azonban $a^2 + (ia)^2 = 0$, tehát f nem lehet Möbius-transzformáció.

A (8) feladat egyenletrendszere a következő:

$$-d = b \tag{11}$$

$$0 = a+b \tag{12}$$

$$c = a \tag{13}$$

Tehát $f(z) = \frac{az-a}{az+a} = \frac{z-1}{z+1}$. $1^2 + 1^2 \neq 0$, tehát f Möbius-transzformáció. □

38. Feladat: *Határozzuk meg az* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *kör képét az* $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$ *képlettel adott Möbius-transzformációnál.*

Megoldás: Legyen $w = \frac{z-i}{z+i}$, ahol $z \in \mathbb{R}$. Ekkor $\overline{w} = \frac{z+i}{z-i}$, így $w\overline{w} = 1$, tehát f értékkészlete a komplex egységkörön van, figyelembe véve, hogy $f(\infty) = 1$. Megmutatjuk, hogy f a komplex egységkör minden $w = e^{it}$ elemét felveszi. Oldjuk meg az alábbi egyenletet z-re:

$$w = e^{it} = \frac{z-i}{z+i},$$

$$(z+i)e^{it} = z - i,$$
$$z(e^{it}-1) = -i(1+e^{it}).$$

ha $e^{it} = 1$, akkor $z = \infty$ megoldása az egyenletnek. Minden más esetben:

$$z = i\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}} = i\frac{(1+e^{it})(1-e^{-it})}{|1-e^{it}|^2} = i\frac{e^{it}-e^{-it}}{|1-e^{it}|^2} = \frac{-2\sin t}{|1-e^{it}|^2},$$

tehát $z \in \mathbb{R}$. □

39. Feladat: *Mi lesz a képe az előbbi transzformációnál a következő ponthalmazoknak?*

(1) $\{it \in \mathbb{C} | t \in \mathbb{R}_+^*\}$*;*

(2) az 1 *középpontú, 1 sugarú kör;*

(3) $\{i + t \in \mathbb{C} | t \in \mathbb{R}\}$*;*

(4) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{re}(z) = 1, \mathrm{im}(z) \geq 0\}$.

Megoldás: Legyen a körök és egyenesek általános egyenlete a komplex síkon

$$\alpha z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} = \beta, \tag{14}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$. Tegyük fel, hogy z teljesíti ezt az egyenletet, és keressük meg a $w := f(z)$ pontok egyenletét. Mivel

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-iw-i}{w-1}$$

z pontosan akkor gyöke (14)-nek, ha w gyöke a

$$\alpha\frac{-iw-i}{w-1}\overline{\left(\frac{-iw-i}{w-1}\right)} + \overline{a}\frac{-iw-i}{w-1} + a\overline{\left(\frac{-iw-i}{w-1}\right)} = \beta$$

egyenletnek. Átalakítva:

$$\alpha\frac{w+1}{w-1}\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1} - i\overline{a}\frac{w+1}{w-1} + ia\frac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1} = \beta,$$

$$\alpha(w+1)(\overline{w}+1) - i\overline{a}(w+1)(\overline{w}-1) + ia(\overline{w}+1)(w-1) = \beta(w-1)(\overline{w}-1),$$

$$(\alpha - i\overline{a} + ia - \beta)w\overline{w} + (\alpha + i\overline{a} + ia + \beta)w + (\alpha - i\overline{a} - ia + \beta)\overline{w} = -\alpha - i\overline{a} + ia + \beta.$$

(1) Az egyenes egyenlete $z + \overline{z} = 0$, tehát $\alpha = 0, a = 1, \beta = 0$. A képe tehát az $2iw - 2i\overline{w} = 0$ egyenletű egyenes, azaz a valós számegyenes. Továbbá

$$w = \frac{it - i}{it + i} = \frac{t - 1}{t + 1} = \frac{t^2}{t + 1} - 1,$$

tehát $w > -1$.

(2) A kör egyenlete $(z - 1)\overline{(z - 1)} = 1$, azaz

$$z\overline{z} - z - \overline{z} = 0,$$

tehát $\alpha = 1, a = -1, \beta = 0$. A kör képének egyenlete tehát

$$w\overline{w} + (1 - 2i)w + (1 + 2i)\overline{w} = -1,$$

$$(w + 1 + 2i)\overline{(w + 1 + 2i)} = 4,$$

vagyis a $-1 - 2i$ középpontú 2 sugarú kör.

(3) Az egyenes egyenlete $\langle z, i\rangle = 1$, azaz

$$-iz + i\overline{z} = 2,$$

tehát $\alpha = 0, a = i, \beta = 2$. Az egyenes képének egyenlete

$$-4w\overline{w} + 2w + 2\overline{w} = 0,$$

$$(w - \frac{1}{2})\overline{(w - \frac{1}{2})} = \frac{1}{4},$$

tehát az egyenes képe az $\frac{1}{2}$ középpontú és $\frac{1}{2}$ sugarú kör.

(4) Az egyenes egyenlete $z + \overline{z} = 2$, tehát $\alpha = 0, a = 1, \beta = 2$. Képének egyenlete tehát

$$-2w\overline{w} + (2 + 2i)w + (2 - 2i)\overline{w} = 2,$$

$$w\overline{w} - (1 + i)w - (1 - i)\overline{w} = -1,$$

$$(w - (1 - i))\overline{(w - (1 - i))} = 1,$$

így az egyenes képe az $1 - i$ középpontú 1 sugarú kör. Az ilyen pontok előállnak $w = 1 - i + e^{it}$ alakban. Ekkor

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-1 - 2i - ie^{it}}{-i + e^{it}} = \frac{(-1 - 2i - ie^{it})(i + e^{-it})}{|-i + e^{it}|^2} =$$

$$= \frac{2 - 2i - e^{-it} + e^{it} - 2ie^{-it}}{|-i + e^{it}|^2}.$$

Tehát z képzetes része:

$$\mathrm{im}(z) = \frac{-2 - i(e^{it} - e^{-it}) - 2\mathrm{re}(e^{-it})}{|-i + e^{it}|^2} = \frac{-2 + 2\sin t - 2\cos t}{|-i + e^{it}|^2},$$

tehát $\mathrm{im} z \geq 0$, pontosan akkor ha

$$\sin t - \cos t \geq 1.$$

Négyzetre emelve

$$-sin2t \geq 0,$$

ami akkor teljesül, ha $2t + 2k\pi \in [\pi, 2\pi]$, azaz $t \in [\pi/2, \pi]$, vagy $t \in [3/2\pi, 2\pi]$. Azonban a második esetben az eredeti egyenlőtlenség nem teljesül, tehát a vizsgált félegyenes f általi képe az alábbi halmaz:

$$\{1 - i + e^{it} | t \in [\pi/2, \pi]\}.$$

□

40. Feladat: *Koinciklikusak-e a* $-2i, 2+3i, 1-i, 4 \in \mathbb{C}$ *pontok?*

Megoldás: A 4.8. Állítás szerint négy pont pontosan akkor koinciklikus, ha kettősviszonyuk valós szám. Határozzuk meg a kettősviszony értékét.

$$\mathrm{cr}(-2i, 2+3i, 1-i, 4) = \frac{-2i - (1-i)}{-2i - 4} \frac{2 + 3i - 4}{2 + 3i - (1-i)} =$$

$$= \frac{1+i}{4+2i} \frac{-2+3i}{1+2i} = \frac{-5+i}{10i} = \frac{1+5i}{10}$$

Az eredmény nem valós szám, tehát a 4 pont nem koinciklikus. □

41. Feladat: *Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekre* $2+3i, -2i, 1-i, z \in \mathbb{C}$ *pontok koinciklikusak!*

Megoldás: Határozzuk meg azt a $f : z \in \overline{\mathbb{C}} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \overline{\mathbb{C}}$ Möbiusz-transzformációt, ami a $2+3i, -2i, 1-i$ pontokat rendre a $1, 0, \infty$ pontokba viszi. Ez az alábbi egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$a(2+3i) + b = 0$$
$$2ia - b = 2ic - d$$
$$c(1-i) + d = 0$$

$d = -c + ic$, $b = -2a - 3ia$, d-t és b-t a második egyenletbe helyettesítve:

$$2ia + 3ia + 2a = 2ic - ic + c,$$

$$a(2 + 5i) = c(1 + i),$$

tehát $a(1+i)$, $c = 2 + 5i$ választással $b = 1 - 5i$ és $d = -7 - 3i$. Tehát az f transzformáció az alábbi alakban áll elő:

$$f(z) = \frac{(1+i)z + 1 - 5i}{(2+5i)z - 7 - 3i},$$

f inverze pedig

$$f^{-1}(z) = \frac{(7+3i)z + 1 - 5i}{(2+5i)z - 1 - i}.$$

A Möbiusz-transzformációk körtartóak, tehát a $2 + 3i, -2i, 1 - i$ pontokra illeszkedő kör f általi képe a valós tengely. Így $f^{-1}(\mathbb{R})$ éppen a három megadott pontra illeszkedő kört futja be, tehát ezen kör pontjai

$$\frac{(7+3i)t + 1 - 5i}{(2+5i)t - 1 - i}$$

alakúak, ahol $t \in \mathbb{R}$. □

42. Feladat: *Legyen* $f(z) = \frac{z-i}{iz-1}, z \in \mathbb{C}$. *Igazoljuk, hogy* f *a* $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{im}(z) > 0\}$ *felső félsíkot a nyílt egykörlapra képezi le.*

Megoldás: Legyen $w = f(z)$. Ekkor

$$|w|^2 = w\overline{w} = \frac{z-i}{i(z+i)} \frac{\overline{z}+i}{-i(\overline{z}-i)} = \frac{z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1}{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1} =$$

$$= 1 - \frac{2i(\overline{z} - z)}{z\overline{z} + i(\overline{z} - z) + 1} = 1 - \frac{4\mathrm{im}z}{z\overline{z} + 2\mathrm{im}z + 1} < 1.$$

Megfordítva, ha $w = \alpha e$, ahol $0 \leq \alpha < 1$ valós, $e \in \mathbb{T}$, és $f(z) = w$ akkor

$$z = f^{-1}(w) = \frac{w - i}{iw - 1} = \frac{\alpha e - i}{i\alpha e - 1} = \frac{(\alpha e - i)(-i\alpha e^{-1} - 1)}{|i\alpha e - 1|^2} =$$

$$= \frac{-i\alpha^2 + i - \alpha(e + e^{-1})}{|i\alpha e - 1|^2},$$

tehát

$$\mathrm{im}z = \frac{1 - \alpha^2}{|i\alpha e - 1|^2} > 0,$$

tehát minden w előáll a felső félsík egy pontjának f általi képeként. □

44. Feladat: *Ellenőrizzük, hogy ha $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ különböző pontjai, akkor* $\mathrm{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) \notin \{0, 1, \infty\}$.

Megoldás: Legyen f az a Möbiusz-transzformációt, amire $f(z_1) = 1$, $f(z_3) = \infty$, $f(z_4) = 0$. Ekkor

$$\mathrm{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{cr}(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = \mathrm{cr}(1, f(z_2), \infty, 0) = f(z_2)$$

Ekkor ha $f(z_2) \in \{0, 1, \infty\}$, akkor $f(z_2) \in \{f(z_1), f(z_3), f(z_4)\}$, amiből f injektivitása miatt $z_2 \in \{z_1, z_3, z_4\}$, ami ellentmond annak, hogy a négy pont különböző. □

45. Feladat: *Igazoljuk a 4.9. lemmát! Írjuk fel az M_0 csoport műveletttábláját!*

Megoldás: A $\{0, 1, \infty\}$ halmazt önmagára képező Möbius-transzformációk száma legfeljebb 3! lehet, mivel egy Möbius-transzformációt már egyértelműen meghatároz három pont és a képük. Megmutatjuk hogy M_0 csoport a kompozíció műveletére, amit az $f_2 = \mathcal{I}$, és $f_4 = z \longmapsto \frac{1}{1-z}$ generál.

Nyilvánvaló, hogy $f_2 \circ f_2 = 1_{\mathbb{C}} = f_1$, tehát f_2 rendje 2. Továbbá

$$(f_4 \circ f_4)(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-z}} = \frac{1-z}{1-z-1} = \frac{z-1}{z} = f_5(z),$$

$$(f_4 \circ f_4 \circ f_4)(z) = (f_4 \circ f_5)(z) = \frac{1}{1 - \frac{z-1}{z}} = \frac{z}{z-z+1} = z = f_1(z),$$

tehát $f_4^2 = f_5$ és f_4 rendje 3. Keressük meg a csoport többi elemét.

$$(f_4 \circ f_2)(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} = f_6(z),$$

$$(f_4^2 \circ f_2)(z) = (f_5 \circ f_2)(z) = \frac{z^{-1} - 1}{z^{-1}} = 1 - z = f_3(z).$$

Tehát ha $a = f_4$ és $b = f_2$, akkor $M_0 = \{1_{\mathbb{C}}, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Mivel

$$(f_2 \circ f_4)(z) = \frac{1}{\frac{1}{1-z}} = 1 - z = f_4(z),$$

így $ba = a^2b$, tehát $M_0 =< a, b | a^3 = 1_{\mathbb{C}}, b^2 = 1_{\mathbb{C}}, ba = a^2b >\cong S_3$. □

46. Feladat: *Ellenőrizzük, hogy ha* $(13), (24), (14), (23) \in S_4$, *akkor*

$$f_{(13)} = f_{(24)} = f_6 \in M_0; \quad f_{(14)} = f_{(23)} = f_3 \in M_0.$$

Megoldás: Legyen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, és $\lambda = \mathrm{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Legyen g az a Möbius-transzformáció, amire $g(z_1) = 1, g(z_3) = \infty, g(z_4) = 0$. Ekkor

$$\lambda = \mathrm{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{cr}(1, g(z_2), \infty, 0) = g(z_2).$$

Ezt felhasználva

$$f_{(13)}(\lambda) = \mathrm{cr}(z_3, z_2, z_1, z_4) = \mathrm{cr}(\infty, g(z_2), 1, 0) = \frac{g(z_2) - 0}{g(z_2) - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = f_6(\lambda),$$

$$f_{(24)}(\lambda) = \mathrm{cr}(z_1, z_4, z_3, z_2) = \mathrm{cr}(1, 0, \infty, g(z_2)) = \frac{0 - g(z_2)}{1 - g(z_2)} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = f_6(\lambda),$$

$$f_{(14)}(\lambda) = \mathrm{cr}(z_4, z_2, z_3, z_1) = \mathrm{cr}(0, g(z_2), \infty, 1) = \frac{g(z_2) - 1}{0 - 1} = 1 - \lambda = f_3(\lambda),$$

$$f_{(23)}(\lambda) = \mathrm{cr}(z_1, z_3, z_2, z_4) = \mathrm{cr}(1, \infty, g(z_2), 0) = \frac{1 - g(z_2)}{1 - 0} = 1 - \lambda = f_3(\lambda).$$

□

47. Feladat: *Határozzuk megy a f_σ függvényt, ha $\sigma = (123) \in S_4$.*

Megoldás: Használjuk az előző feladat megoldásában megadott z_1, z_2, z_3, z_4 számokat és g függvényt, és most is legyen $\lambda = \mathrm{cr}(z_1, z_2, z_3, z_4) = g(z_2)$. Ekkor

$$f_\sigma(\lambda) = \mathrm{cr}(z_2, z_3, z_1, z_4) = \mathrm{cr}(g(z_2), \infty, 1, 0) = \frac{g(z_2) - 1}{g(z_2) - 0} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = f_5(\lambda).$$

□

48. Feladat: *Ellenőrizzük, hogy minden olyan $\sigma \in S_4$ permutáció esetén, amelyre $\sigma(4) = 4$, $f_\sigma \in M_0$.*

Megoldás: Azon S_4-beli σ permutációk, melyekre $\sigma(4) = 4$, részcsoportot alkotnak S_4-ben, és ez a részcsoport S_3-al izomorf. S_3-at generálják az (123), (23) permutációk. A korábbi feladatokban láttuk, hogy $f_{(123)} = f_5 \in M_0$ illetve $f_{(23)} = f_3 \in M_0$, és a 4.10 Tétel alapján minden $\sigma, \varrho \in S_4$ esetén $f_{\sigma \circ \varrho} = f_\sigma \circ f_\varrho$, tehát mivel minden $\sigma \in S_3$ előáll (123) és (23) megfelelő kompozíciójaként, $f_\sigma \in M_0$. □

52. Feladat: *Mutassuk meg, hogy az $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_\mathcal{H})$ illeszkedési struktúrában, a $\mathrm{cr}(a, c, b, \overline{b}) < 0 \Leftrightarrow a * b * c$ a 7.1 definícióban megadott rendezési reláció szerint.*

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy az l_0 egyenesen igaz az állítás. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*_+$, így $i\alpha, i\beta, i\gamma \in l_0$. Ekkor

$$\lambda = \mathrm{cr}(i\alpha, i\gamma, i\beta, -i\beta) = \frac{(\alpha - \beta)(\gamma + \beta)}{(\alpha + \beta)(\gamma - \beta)},$$

mivel $\alpha+\beta, \gamma+\beta > 0$, ezért $\lambda < 0$ pontosan akkor, amikor $(\alpha-\beta)(\gamma-\beta) < 0$, tehát ebben az esetben a két rendezés valóban ekvivalens. Ebből adódik, hogy minden 1. típusú egyenesen is igaz az állítás, ugyanis a l_δ egyenest a $\tau_{-\delta}(z) = z - \delta$ speciális transzláció l_0-ba viszi, és fixen hagyja az egyenes pontjainak képzetes részét, továbbá felcserélhető a konjugálással.

Most tekintsük az $l_{\gamma,r}$ 2. típusú egyenest. Az $f(z) = \frac{z-\gamma}{r}$ Möbius-transzformáció az egyenest a komplex egységkörre viszi, ahol a képe az $l_{0,1}$ egyenes lesz. f felcserélhető a konjugálással, tehát ha $a, b, c \in l_{\gamma,r}$, akkor

$$\mathrm{cr}(a, c, b, \bar{b}) = \mathrm{cr}(f(a), f(c), f(b), f(\bar{b})) = \mathrm{cr}(f(a), f(c), f(b), \overline{f(b)}),$$

továbbá $\mathrm{re}(f(z)) = f(\mathrm{re}(z))$, ebből adódóan elegendő az állítást az $l_{0,1}$ egyenesre ellenőrizni.

Az $l_{0,1}$ egyenes pontjai előállnak e^{it} alakban, ahol $t \in]0, \pi[$. Ekkor $\mathrm{re}(e^{it}) = \cos(t)$. Legyen $a = e^{i\alpha}, b = e^{i\beta}, c = e^{i\gamma}$ az $l_{0,1}$ három különböző pontja. A cos függvény $]0, \pi[$-n szigorú monoton, ezért

$$(\mathrm{re}(a) - \mathrm{re}(b))(\mathrm{re}(c) - \mathrm{re}(b)) < 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\gamma - \beta) < 0.$$

Megmutatjuk, hogy $(\alpha - \beta)(\gamma - \beta) < 0$ pontosan akkor teljesül, amikor $\mathrm{cr}(a, c, b, \bar{b}) < 0$. Legyen $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$, ekkor g felcserélhető a konjugálással, és $g(l_{0,1}) = l_0$:

$$g(e^{it}) = \frac{e^{it} - 1}{e^{it} + 1} = \frac{(e^{it} - 1)(e^{-it} + 1)}{(e^{it} + 1)(e^{-it} + 1)} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2 + e^{it} - e^{-it}} = \frac{i\sin(t)}{1 + \cos(t)}.$$

Legyen $h(t) = -ig(e^{it})$, így a h valós függvény páratlan, és szigorú monoton:

$$(h(t))' = \left(\frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)}\right)' = \frac{\cos(t)(1 + \cos(t)) + \sin^2(t)}{(1 + \cos(t))^2} = \frac{1}{1 + \cos(t)} > 0.$$

Mindezt felhasználva elvégezhetjük az alábbi számolást:

$$\mathrm{cr}(a, c, b, \bar{b}) = \mathrm{cr}(g(a), g(c), g(b), g(\bar{b})) = \mathrm{cr}(g(e^{i\alpha}), g(e^{i\gamma}), g(e^{i\beta}), g(e^{-i\beta})) =$$

$$= \mathrm{cr}(ih(\alpha), ih(\gamma), ih(\beta), -ih(\beta)) = \lambda$$

A bizonyítás első része szerint $\lambda < 0 \Leftrightarrow (h(\alpha) - h(\beta))(h(\gamma) - h(\beta)) < 0$, és h szigorú monotonitása miatt ezzel $(\alpha - \beta)(\gamma - \beta) < 0$ is ekvivalens. így az állítást beláttuk. $\square$

56. Feladat: *Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a \neq b \in \mathbb{H}^2$ esetén*

$$d_H(a, b) = \ln \frac{|a - \bar{b}| + |a - b|}{|a - \bar{b}| - |a - b|}.$$

Megoldás: Keressük meg az a, b pontokra illeszkedő hiperbolikus egyenes végpontjait. Tekintsük azt az esetet, amikor ez egy 2. típusú egyenes, azaz egy euklideszi kör része. Ennek a körnek a középpontja illeszkedik az $a-b$-re merőleges, $(a+b)/2$ ponton áthaladó egyenesre. Rövid számolás után ennek egyenlete

$$(a-b)\overline{z} + (\overline{a} - \overline{b})z = a\overline{a} - b\overline{b}$$

alakban adódik. A kör középpontja valós, azaz kielégíti a $z - \overline{z} = 0$ egyenletet. A kettőt összevetve a kör középpontja:

$$c = \frac{a\overline{a} - b\overline{b}}{a + \overline{a} - b - \overline{b}}.$$

Határozzuk meg $a - c, b - c$ értékét.

$$a - c = a - \frac{a\overline{a} - b\overline{b}}{a + \overline{a} - b - \overline{b}} = \frac{a^2 + a\overline{a} - ab - a\overline{b} - a\overline{a} + b\overline{b}}{a + \overline{a} - b - \overline{b}} = \frac{(a-b)(a-\overline{b})}{a + \overline{a} - b - \overline{b}},$$

$$b - c = b - \frac{a\overline{a} - b\overline{b}}{a + \overline{a} - b - \overline{b}} = \frac{ab + \overline{a}b - b^2 - b\overline{b} - a\overline{a} + b\overline{b}}{a + \overline{a} - b - \overline{b}} = \frac{(a-b)(b-\overline{a})}{a + \overline{a} - b - \overline{b}},$$

a kör sugara pedig

$$r = |a - c| = \frac{|a-b||a-\overline{b}|}{|a + \overline{a} - b - \overline{b}|},$$

így a kör két végpontja $u = c + r, v = c - r$. Megjegyezzük, hogy mivel u és v szerepe felcserélhető, r nevezőjében elhagyhatjuk az abszolútérték vételét. Vezessük be $z = a - b, w = a - \overline{b}, \alpha = a + \overline{a} - b - \overline{b}$ jelölést. Ekkor

$$a - c = \frac{zw}{\alpha}, \quad b - c = \frac{-z\overline{w}}{\alpha}, \quad r = \frac{|z||w|}{\alpha}$$

$$\mathrm{cr}(a, b, u, v) = \frac{(a-c-r)(b-c+r)}{(a-c+r)(b-c-r)} = \frac{(zw - |z||w|)(-z\overline{w} + |z||w|)}{(zw + |z||w|)(-z\overline{w} - |z||w|)} =$$

$$= \frac{-z^2|w|^2 + z(w+\overline{w})|z||w| - |z|^2|w|^2}{-z^2|w|^2 - z(w+\overline{w})|z||w| - |z|^2|w|^2} = \frac{z|w| - 2\mathrm{re}w|z| + \overline{z}|w|}{z|w| + 2\mathrm{re}w|z| + \overline{z}|w|} =$$

$$= \frac{\mathrm{re}z|w| - \mathrm{re}w|z|}{\mathrm{re}z|w| + \mathrm{re}w|z|},$$

azonban $2\mathrm{re}z = a + \overline{a} - b - \overline{b} = 2\mathrm{re}w$, ezért

$$\lambda := \mathrm{cr}(a, b, u, v) = \frac{|w| - |z|}{|w| + |z|}.$$

$\ln\lambda < 0$, mivel $\lambda \in]0,1[$, tehát

$$d_H(a,b) = |\ln\lambda| = -\ln\lambda = \ln\frac{1}{\lambda} = \ln\frac{|w|+|z|}{|w|-|z|} = \ln\frac{|a-\bar{b}|+|a-b|}{|a-\bar{b}|-|a-b|}.$$

Most tekintsük azt az esetet, mikor a és b első típusú egyenesre illeszkedik. Legyen $a = \lambda + i\alpha$, $b = \lambda + i\beta$, és tegyük fel, hogy $\alpha > \beta$. Ellenkező esetben cseréljük fel a és b szerepét. Az állítás ekkor:

$$d_H(a,b) = \ln\frac{|i\alpha+i\beta|+|i\alpha-i\beta|}{|i\alpha+i\beta|-|i\alpha-i\beta|} = \ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ebben az esetben az egyenes két végpontja $u = \lambda$, és $v = \infty$. A 7.4 Lemma bizonyításában láttuk, hogy ekkor $\mathrm{cr}(a,b,u,v) = \frac{\alpha}{\beta} > 1$. Tehát

$$d_H(a,b) = \left|\ln\frac{\alpha}{\beta}\right| = \ln\frac{\alpha}{\beta},$$

így az állítást beláttuk. □

58. Feladat: *Határozzuk meg az $l_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 | \mathrm{re}(z) = 2\}$ függőleges egyenes i-hez legközelebbi pontját!*

Megoldás: Az l_2 egyenes pontjai előállnak $z = 2 + it$ alakban, ahol $t > 0$. Ekkor

$$f(t) := d_H(z(t), i) = \ln\frac{|2+i(t+1)|+|2+i(t-1)|}{|2+i(t+1)|-|2+i(t-1)|} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{4+(t+1)^2}+\sqrt{4+(t-1)^2}}{\sqrt{4+(t+1)^2}-\sqrt{4+(t-1)^2}} =$$

$$= \ln\left(\sqrt{4+(t+1)^2}+\sqrt{4+(t-1)^2}\right) - \ln\left(\sqrt{4+(t+1)^2}-\sqrt{4+(t-1)^2}\right)$$

$$f'(t) = \frac{\frac{t+1}{\sqrt{4+(t+1)^2}}+\frac{t-1}{\sqrt{4+(t-1)^2}}}{\sqrt{4+(t+1)^2}+\sqrt{4+(t-1)^2}} - \frac{\frac{t+1}{\sqrt{4+(t+1)^2}}-\frac{t-1}{\sqrt{4+(t-1)^2}}}{\sqrt{4+(t+1)^2}-\sqrt{4+(t-1)^2}} =$$

Legyen $a = \sqrt{4+(t+1)^2}$ és $b = \sqrt{4+(t-1)^2}$. Ekkor

$$f'(t) = \frac{\frac{t+1}{a}+\frac{t-1}{b}}{a+b} - \frac{\frac{t+1}{a}-\frac{t-1}{b}}{a-b} = \frac{t(a+b)+b-a}{ab(a+b)} + \frac{t(b-a)+a+b}{ab(b-a)} =$$

$$= \frac{2t(a+b)(b-a)+(b-a)^2+(a+b)^2}{ab(a+b)(b-a)} = \frac{2t(b^2-a^2)+2a^2+2b^2}{ab(b^2-a^2)}$$

Visszahelyettesítés után

$$f'(t) = \frac{2t(-4t) + 2(8 + 2t^2 + 2)}{-4t\sqrt{(4 + (t+1)^2)(4 + (t-1)^2)}} = \frac{t^2 - 5}{t\sqrt{(4 + (t+1)^2)(4 + (t-1)^2)}},$$

Ha $t > \sqrt{5}$, akkor $f'(t) > 0$, ha pedig $0 < t < \sqrt{5}$, akkor $f'(t) < 0$, ezért f-nek $t = \sqrt{5}$-ben a $]0, \infty[$ halmazon globális minimumhelye van. Tehát az l_2 egyenes i-hez legközelebbi pontja a $z = 2 + i\sqrt{5}$. $\square$