Differenciálgeometria: fogalmak, tények, technikák

Szilasi József

Tartalomjegyzék

0. Megállapodások

0.1. Ha $f : S \to T$ egy leképezés, akkor az $s \mapsto f(s)$ írásmódot használjuk f egy $s \in S$ elemen való hatásának jelölésére, időnként azonban kényelmesebbnek és célszerűbbnek bizonyul, ha $f(s)$ helyett azt írjuk, hogy fs vagy f_s. 1_S - vagy ha a szövegkörnyezetből az S halmaz mibenléte világos, egyszerűen 1 - jelöli az S halmaz identikus transzformációját.

0.1.1. Ha $f : A \to S$ és $g : B \to S$ egy-egy leképezés, akkor az

$$A \times_S B : (\{(a, b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}$$

halmazt A és B S fölötti, f-re és g-re vonatkozó *fibrált szorzat*ának hívjuk.

0.1.2. Ha $f : S \to A$ és $g : S \to B$ leképezés, akkor (f, g)-vel jelöljük az

$$S \to A \times B \ , \ s \mapsto (f(s), g(s))$$

leképezést.

0.1.3. Tekintve egy $f_1 : S_1 \to A$ és egy $f_2 : S_2 \to B$ leképezést, $f_1 \times f_2$-vel jelöljük az

$$S_1 \times S_2 \to A \times B \ , \ (s_1, s_2) \mapsto (f(s_1), f(s_2))$$

leképezést.

0.2. Ha K egy test, amelynek a 0 a zéruseleme, akkor $K^* := K \setminus \{0\}$. $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ a valós, ill. a komplex számtest; $\mathbb{R}_+$, ill. $\mathbb{R}_+^*$ a nemnegatív, ill. a pozitív valós számok halmaza; $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a pozitív egészek halmaza. Az $\mathbb{R}$-be, ill. $\mathbb{C}$-be történő leképezéseket rendszerint *függvény*ekként említjük.

0.3. $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ a rendezett valós szám n-esek valós vektortere, ellátva az

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i, \text{ ha } a = (\alpha^i)_{i=1}^n, \ b = (\beta^i)_{i=1}^n$$

*kanonikus skaláris szorzat*tal és az ebből származó struktúrákkal:

norma - $\|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$, $v \in \mathbb{R}^n$;

távolságfüggvény - $d(a, b) := \|a - b\|$; $a, b \in \mathbb{R}^n$;

topológia - $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt*, ha minden $p \in \mathcal{U}$ ponthoz van olyan δ pozitív valós szám, hogy

$$B_\delta(p) := \{q \in \mathbb{R}^n | \ \|p - q\| < \delta\} \subset \mathcal{U}.$$

0.4. $(e_i)_{i=1}^n$; $e_i := (0, \ldots, \overset{i}{\smile}{1}, \ldots, 0)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa; ennek duálisát azok az $e^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris függvények alkotják, melyekre

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = j \\ 0, \text{ ha } i \neq j \end{cases} ; \; i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

$(e^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ *kanonikus koordinátarendszer*e.

Egy $f : S \to \mathbb{R}^n$ leképezés *(euklideszi) koordinátafüggvényei* $f^i := e^i \circ f$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Differenciálás $\mathbb{R}^n$-ben

1.1. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Egy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvény *iránymenti derivált*ja egy $p \in \mathbb{R}^n$ pontban, $v \in \mathbb{R}^n$ irányban a

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

határérték, ha ez létezik. f *folytonosan differenciálható* vagy C^1*-osztályú* $\mathcal{U}$ fölött, ha a

$$D_i f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ , } p \mapsto D_i f(p) := D_{e_i} f(p) \text{ ; } i \in \{1, \ldots, n\}$$

függvények, f *parciális derivált*jai, léteznek és folytonosak. f C^k*-osztályú* $\mathcal{U}$-n ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), ha a $D_1 f, \ldots, D_n f$ parciális deriváltak léteznek és C^{k-1} osztályúak; f C^∞*-osztályú* vagy *sima* $\mathcal{U}$ fölött, ha minden k pozitív egészre C^k-osztályú.

1.2. Egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmazon értelmezett $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ leképezés C^s*-osztályú* ($s \in \mathbb{N}^*$), ill. *sima* ha $F^i := e^i \circ F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvényei ($i \in \{1, \ldots, n\}$) C^s-osztályúak, ill. simák. Amennyiben F C^1-osztályú, úgy a

$$J_F(p) := (D_j F^i(p)) \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$$

mátrix (ahol a felső index sorindex, az alsó oszlopindex) F p-beli *Jacobi-mátrix*a. Ezt azonosítjuk az általa reprezentált $F'(p) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezéssel, F *p-beli derivált*jával.

1.3. Legyen $g = (g^1, \ldots, g^n) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ és $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor az

$$f \circ g : f \circ (g^1, \ldots, g^n) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

függvény i-edik parciális deriváltját a

$$D_i(f \circ g) = \sum_{j=1}^n ((D_j f) \circ g) D_i g^j \text{ , } i \in \{1, \ldots, k\}$$

formula adja (*láncszabály parciális deriváltakra*).

2. Homogén függvények

2.1. Legyen f egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett valósértékű függvény. Azt mondjuk, hogy f *k-adfokú pozitív homogén*, ahol $k \in \mathbb{R}$, ha minden t pozitív valós szám és $v \in \mathcal{U}$ vektor esetén tv $\mathcal{U}$-hoz tartozik, és érvényes az

$$f(tv) = t^k f(v)$$

reláció. Amennyiben k egész szám és a most megfogalmazott feltételek minden $t \in \mathbb{R}^*$ valós számra teljesülnek, úgy f-et *k-adfokú homogén* függvénynek nevezzük.

Megjegyzések. (1) Ha az $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$) függvény pozitív homogén és $v \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$, akkor $\mathcal{U}$ tartalmazza az origó kezdőpontú, v-n átmenő félegyenest; maga az origó hozzá is tartozhat $\mathcal{U}$-hoz meg nem is. Amennyiben f homogén, úgy $\mathcal{U}$ tartalmazza az origóra és v-re illeszkedő teljes egyenest, kivéve esetleg magát az origót.

(2) Nyilvánvaló, hogy minden homogén függvény egyben pozitív-homogén is, a megfordítás azonban nem igaz. Illusztrációként tekintsük az

$$f : v \in \mathbb{R}^n \mapsto f(v) := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

normafüggvényt. Ez elsőfokú pozitív homogén ($f(tv) = tf(v)$, ha t pozitív valós szám), de nem homogén.

2.1.1. Ha $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartalmazza az origót, és $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ nulladfokú pozitív homogén függvény, amely folytonos a $\mathbf{0}$-ban, akkor f konstans függvény.

Bizonyítás. A nulladfokú pozitív homogenitás miatt

$$f(tv) = f(v) \; ; \; v \in \mathcal{U} \; , \; t \in \mathbb{R}^*_+ .$$

Így a $\mathbf{0}$-beli folytonosság azt adja, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{U}$ esetén

$$f(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0^+} f(tv) = \lim_{t \to 0^+} f(v) = f(v);$$

f tehát valóban konstans. □

2.1.2. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ elsőfokú pozitív homogén függvény és a $\mathbf{0}$-ban létezik a deriváltja, akkor f lineáris függvény, mégpedig $f = f'(\mathbf{0})$.

Bizonyítás. Válasszunk tetszőlegesen egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektort. $f'(\mathbf{0})$ létezése folytán f folytonos a $\mathbf{0}$-ban, s így

$$f(\mathbf{0}) = \lim_{t \to 0^+} f(tv) = \lim_{t \to 0^+} tf(v) = f(v) \lim_{t \to 0^+} t = 0,$$

felhasználva f homogenitási tulajdonságát. $f(\mathbf{0}) = 0$ figyelembevételével

$$f'(\mathbf{0})(v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(tv) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t \to 0^+} f(v) = f(v)$$

adódik, és ez volt az állítás. □

2.2. (*Euler tétele a homogén függvényekre.*) Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $tv \in \mathcal{U}$. Egy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor r-edfokú pozitív homogén ($r \in \mathbb{R}$), ha minden $v \in \mathcal{U}$ pontban

$$f'(v)(v) = rf(v)$$

teljesül. $n \geq 2$ esetén ez ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} e^i D_i f = rf.$$

Bizonyítás. Jegyezzük meg először, hogy ha $v = \sum_{i=1}^{n} \nu^i e_i \in \mathcal{U}$, akkor

$$f'(v)(v) = f'(v)\left(\sum_{i=1}^{n} \nu^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \nu^i f'(v)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu^i D_i f(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} e^i D_i f\right)(v),$$

tehát a felírt két reláció valóban ekvivalens.

(1) Megmutatjuk, hogy f r-edfokú pozitív homogenitása esetén $f'(v)(v) = rf$. Rögzített $v \in \mathcal{U}$ mellett tekintsük ebből a célból a

$$\mu_v :]0, \infty[\to \mathbb{R}^n \ , \ t \mapsto \mu_v(t) := tv$$

leképezést. Ez differenciálható, mégpedig $\mu_v'(t) = v$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. Képezzük ezután a

$$h := f \circ \mu_v : \ ]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

függvényt. Ez szintén differenciálható; a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy

$$h'(t) = f'(tv)(v) \ , \ t \in \mathbb{R}_+^*.$$

Így speciálisan $h'(1) = f'(v)(v)$.

Másrészt f r-edfokú pozitív homogenitása alapján

$$h(t) = f(tv) = t^r f(v) \ , \ t \in \mathbb{R}_+^*;$$

így $h'(t) = rt^{r-1}f(v)$, és $h'(1) = rf(v)$. Összevetve a $h'(1)$-re nyert két eredményt, a kívánt relációhoz jutunk.

(2) Tegyük fel megfordítva, hogy egy rögzített r valós számmal minden $v \in \mathcal{U}$-ra

$$f'(v)(v) = rf(v)$$

teljesül. Tetszőlegesen kiválasztott $v \in \mathcal{U}$ mellett képezzük ekkor a

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \ , \ t \mapsto \varphi(t) := f(tv)t^{-r} = (f \circ \mu_v)(t)t^{-r}$$

függvényt. Ez is differenciálható, tetszőleges $t \in \mathbb{R}_+^*$ helyen

$$\varphi'(t) = f'(tv)(v)t^{-r} - rf(tv)t^{-r-1} = \tfrac{1}{t} f'(tv)(tv)t^{-r} - rf(tv)t^{-r-1} \overset{\text{feltétel}}{=} rf(tv)t^{-r-1} - rf(tv)t^{-r-1} = 0.$$

Ebből következően φ konstans függvény, így tetszőleges $v \in \mathcal{U}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$f(v) = \varphi(1) = \varphi(t) = f(tv)t^{-r}, \text{ azaz } f(tv) = t^r f(v).$$

Ezzel beláttuk f r-edfokú pozitív homogenitását. □

2.2.1. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2-osztályú másodfokú pozitív homogén függvény, akkor f kvadratikus forma (és így sima függvény).

Bizonyítás. (1) Azt mutatjuk meg először, hogy f másodfokú pozitív homogenitása a $D_i f$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ parciális deriváltak elsőfokú pozitív homogenitását vonja maga után. Valóban, az Euler-tétel alapján

$$\sum_{j=1}^{n} e^j D_j f = 2f;$$

innen minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re

$$2D_i f = D_i \left(\sum_{j=1}^{n} e^j D_j f \right) = \sum_{j=1}^{n} (\delta_i^j D_j f + e^j D_i D_j f) = D_i f + \sum_{j=1}^{n} e^j D_i D_j f,$$

azaz

$$D_i f = \sum_{j=1}^{n} e^j D_j (D_i f)$$

adódik, ami - ismét csak az Euler-tétel alapján - a $D_i f$ függvények elsőfokú pozitív homogenitását jelenti.

(2) Az (1)-ben mondottak alapján, az ott alkalmazott gondolatmenettel következik, hogy a $D_i D_j f$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$ függvények nulladfokú pozitív homogének, s így - mivel a $\mathbf{0}$-ban f C^2-osztályú volta miatt folytonosak - **2.1.1.** értelmében mindegyikük konstans függvény:

$$D_i D_j f(v) = D_i D_j f(\mathbf{0}) \ ; \ v \in \mathbb{R}^n \ ; \ i, j \in \{1, \dots, n\} \, .$$

Visszatérve az (1)-ben nyert $D_i f = \sum_{j=1}^{n} e^j D_j D_i f = \sum_{j=1}^{n} e^j D_i D_j f$ relációhoz, innen

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^i e^j D_i D_j f = \sum_{i=1}^{n} u^i D_i f \overset{\mathbf{2.2.}}{=} 2f,$$

következésképpen tetszőleges $v \in \sum_{k=1}^{n} \nu^k e_k \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^i(v) e^j(v) D_i D_j f(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \nu^i \nu^j D_i D_j f(\mathbf{0}).$$

Ez azt jelenti, hogy f valóban kvadratikus forma, amelyet $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisára vonatkozóan az $\frac{1}{2}(D_i D_j f(\mathbf{0}))$ $n \times n$-es mátrix reprezentál. □

3. Sokaságok

3.1. Egy S topologikus téren adott *n-dimenziós térkép* $(n \in \mathbb{N}^*)$ olyan $(\mathcal{U}, u)$ pár, ahol $\mathcal{U} \subset S$ nyílt halmaz, u homeomorfizmusa $\mathcal{U}$-nak az $\mathbb{R}^n$ tér egy nyílt halmazára. Az $u^i := e^i \circ u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ függvények a térképhez tartozó *koordinátafüggvények*, $(u^i)_{i=1}^n$ egy *lokális koordinátarendszer* S-en.

Elnevezések. $\mathcal{U}$ az $(\mathcal{U}, u)$ térkép *tartomány*a, u a hozzá tartozó *koordinátaleképezés*. Az $(\mathcal{U}, u)$ térkép p *körüli*, ha $p \in \mathcal{U}$; egy ilyen térkép p *középpontú*, ha $u(p) = \mathbf{0}$.

3.2. Az S topologikus tér $(\mathcal{U}, x)$ és $(\mathcal{V}, y)$ n-dimenziós térképe *C^∞-kompatibilis*, ha az

$$y \circ x^{-1} : x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \to y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \text{ és az}$$
$$x \circ y^{-1} : y(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n \to x(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

átmenetleképezések simák, vagy $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

3.3. Az S topologikus tér egy *n-dimenziós atlasz*a n-dimenziós térképek egy olyan $\mathcal{A}$ családja, amely eleget tesz a következő két feltételnek:

$(\mathrm{AT})_1$ *az $\mathcal{A}$-hoz tartozó térképek tartományai lefedik S-et;*

$(\mathrm{AT})_2$ *$\mathcal{A}$ bármely két térképe C^∞-kompatibilis.*

Az $\mathcal{A}$ atlasz *maximális*, ha tartalmaz minden olyan térképet, amely $\mathcal{A}$ valamennyi tagjával C^∞-kompatibilis.

3.3.1. Egy topologikus tér minden n-dimenziós atlasza benne van egy egyértelműen meghatározott maximális atlaszban.

3.4. Egy *n-dimenziós sima sokaság*, röviden *sokaság*, olyan megszámlálható bázisú Hausdorff-féle topologikus tér, amely el van látva egy n-dimenziós maximális atlasszal; *sokaság térképe* a sokaság-struktúrát definiáló maximális atlasz egy tagja.

3.4.1. Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér n-dimenziós sokaság, az $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n}) = (\mathbb{R}^n, (e^i)_{i=1}^n)$ egytagú atlasz által meghatározott maximális atlasszal ellátva; ez a maximális atlasz $\mathbb{R}^n$ *természetes sima struktúrá*ja.

3.4.2. Legyen V n-dimenziós valós vektortér. Egyértelműen létezik V-n olyan Hausdorff-topológia, amelyre teljesülnek a következők:

(i) a $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$ összeadás és az $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ skalárral való szorzás folytonos a megfelelő szorzattopológiákra nézve;

(ii) valamennyi $V \to \mathbb{R}$ lineáris függvény folytonos.

Ez a topológia a V vektortér *természetes topológiája.* A természetes topológiával ellátott V vektortér és az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér homeomorf, homeomorfizmus közöttük minden lineáris izomorfizmus. Ha tehát $x : V \to \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus, akkor (V, x) egytagú atlasza V-nek, amely egyérteleműen maximális atlasszá bővíthető (**3.3.1.**), s így V n-dimenziós sokasággá válik. Ennek a sokaságnak minden olyan (V, y) pár térképe, ahol $y : V \to \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus, ugyanis az $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és az $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ átmenetleképezések lineáris izomorfizmusok, és ezért sima leképezések.

3.4.3. Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér

$$S^n := \left\{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|a\| = 1\right\}$$

egységgömbfelületét. Ellátva az altér-topológiával, S^n kompakt topologikus tér. Legyen

$$E := (\mathbf{0}, 1) \in S^n \ , \ D := (\mathbf{0}, -1) \in S^n \ ; \ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n;$$
$$U_+ := S^n \setminus \{E\} \ , \ U_- := S^n \setminus \{D\}.$$

S^n $\mathbb{R}^n$-re való, E-ből ill. D-ből történő *sztereografikus projekció*ja a

$$\varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^n, (v, \nu^{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 - \nu^{n+1}} v,$$

ill. a

$$\varphi_- : U_- \to \mathbb{R}^n, (v, \nu^{n+1}) \mapsto \frac{1}{1 + \nu^{n+1}} v$$

leképezés. Mindkét leképezés folytonos és invertálható, az inverzük a

$$(\varphi_\pm)^{-1}(p) = \left(\frac{2p}{\|p\|^2 + 1}, \pm \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1} \right), p \in \mathbb{R}^n$$

formulával adható meg, következésképpen folytonos. (U_+, φ_+) és (U_-, φ_-) ily módon n-dimenziós térképe S^n-nek.

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : (\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})(v) = (\varphi_- \circ \varphi_+^{-1})(v) = \tfrac{1}{\|v\|^2} v,$$

így a térképek közötti átmenetleképezések simák. $((U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-))$ tehát n-dimenziós atlasza S^n-nek, amely **3.3.1.**-nek megfelelően S^n-et n-dimenziós sokasággá teszi.

3.4.4. Legyen M n-dimenziós sima sokaság, $\mathcal{A}$ maximális atlasszal. Tekintsük M-nek egy nemüres $\mathcal{U}$ nyílt részhalmazát, s jelentse $\mathcal{A}_\mathcal{U}$ M mindazon $(\mathcal{V}, x)$ térképeinek halmazát, ahol $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Az $\mathcal{A}_\mathcal{U}$-beli térképek tartományai lefedését alkotják $\mathcal{U}$-nak, ugyanis minden $p \in \mathcal{U}$ ponthoz van olyan $(\mathcal{W}, z) \in \mathcal{A}$ térkép, hogy $p \in \mathcal{W}$, és ha $\mathcal{V} := \mathcal{W} \cap \mathcal{U}$, $x := z \restriction \mathcal{V}$, akkor $(\mathcal{V}, x) \in \mathcal{A}_\mathcal{U}$ és $p \in \mathcal{V}$. $\mathcal{A}_\mathcal{U}$ bármely két térképe C^∞-kompatibilis, $\mathcal{A}_\mathcal{U}$ tehát n-dimenziós atlasza $\mathcal{U}$-nak, amely ezáltal maga is n-dimenziós sokaság.

Az így kapott sokaság az M sokaság egy *nyílt részsokaságá*a; egy sokaság nyílt részhalmazait mindig nyílt részsokaságoknak tekintjük.

3.4.5. Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság, $\mathcal{A}$, ill. $\mathcal{B}$ maximális atlasszal. Egy $(\mathcal{U}, x) \in \mathcal{A}$ és $(\mathcal{V}, y) \in \mathcal{B}$ térképből képzett *szorzattérkép* az az $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, x \times y)$ pár, ahol

$$\forall (p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : x \times y(p, q) := (x(p), y(q)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}.$$

Ellátva az $M \times N$ Descartes-szorzatot a szorzattopológiával, az összes szorzattérképek atlaszt alkotnak $M \times N$-en, amely ezáltal $(m + n)$-dimenziós sokasággá válik. Az így kapott sokaság az M és N sokaság *szorzatsokaságá*a.

Kettőnél több, de véges sok sokaság szorzatsokasága analóg módon konstruálható.
Példa. A

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \ (n \text{ tényező}, \ n \in \mathbb{N}^*)$$

szorzatsokaság az *n-dimenziós tórusz.*

4. Sima leképezések

4.1. Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság. Egy $\varphi : M \to N$ leképezés *C^k-osztályú* ($k \in \mathbb{N}^*$), ha minden $p \in M$ pont esetén megadható olyan p körüli $(\mathcal{U}, x)$ és $\varphi(p)$ körüli $(\mathcal{V}, y)$ térkép, hogy $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ és az

$$y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \to y(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezés C^k-osztályú. φ *sima leképezés*e M-nek N-be, ha minden $k \in \mathbb{N}^*$-ra C^k-osztályú. Egy $\varphi : M \to N$ C^k-osztályú leképezés *C^k-diffeomorfizmus*, ha a $\varphi^{-1} : N \to M$ inverz leképezés létezik és szintén C^k-osztályú. Két (nem föltétlenül különböző) sokaság *diffeomorf*, ha létezik közöttük diffeomorfizmus.

Jelölés.

$$C^k(M, N) := \big\{\varphi : M \to N | \varphi\ C^k\text{-osztályú}\big\},$$
$$C^\infty(M, N) := \{\varphi : M \to N | \varphi \text{ sima}\}.$$

4.1.1. Ha $\varphi : M \to N$ C^k-osztályú leképezés, akkor φ folytonos.

4.1.2. Legyen M és N sokaság, $\mathcal{A} = (\mathcal{U}_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ atlasza M-nek , $\mathcal{B} = (\mathcal{V}_\beta, y_\beta)_{\beta \in B}$ atlasza N-nek. Ha $\varphi : M \to N$ folytonos leképezés, és tetszőleges $(\alpha, \beta) \in A \times B$ esetén $y_\beta \circ \varphi \circ x_\alpha^{-1}$ sima leképezés az értelmezési tartományán, akkor a φ leképezés sima.

4.1.3. Legyen φ az M sokaság N sokaságba való leképezése. Ha minden $p \in M$ pontnak van olyan $\mathcal{U}$ nyílt környezete, hogy a $\varphi \restriction \mathcal{U}$ leképezés sima, akkor φ sima. Megfordítva, ha φ sima leképezés, akkor minden nyílt halmazra való leszűkítése is sima. (*A simaság lokális tulajdonság.*)

4.1.4. Legyen M és N sokaság, $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ nyílt lefedése M-nek. Ha minden $\alpha \in A$-hoz meg van adva egy $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to N$ sima leképezés úgy, hogy

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times A : \varphi_\alpha \restriction \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta = \varphi_\beta \restriction \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta,$$

akkor egyértelműen létezik olyan $\varphi : M \to N$ sima leképezés, hogy $\varphi \restriction \mathcal{U}_\alpha = \varphi_\alpha$, minden $\alpha \in A$ esetén.

4.1.5. Egy sokaság identikus transzformációja sima leképezés, sima leképezések kompozíciója sima leképezés.

4.1.6. *Ha két sokaság között létezik C^1-osztályú diffeomorfizmus, akkor a sokaságok között létezik C^∞-diffeomorfizmus is* (ld. Morris W. Hirsch: *Differential Topology*, GTM33, Springer-Verlag, New-York, 1976). Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban

diffeomorfizmuson sima diffeomorfizmust értünk.

$\mathrm{Diff}(M) := C^\infty(M, M)$ csoport a kompozíció műveletével, az M sokaság *diffeomorfizmus-csoport*ja.

4.1.7. *Vannak olyan sokaságok, amelyek homeomorfak, de nem diffeomorfak*: az $\mathbb{R}^4$ topologikus téren nem megszámlálható sok maximális atlasz adható meg úgy, hogy az előálló sokaságok páronként nem diffeomorfak. Ha $n \neq 4$, akkor az $\mathbb{R}^n$ tér sokaság-struktúrája diffeomorfizmus erejéig egyértelmű. Ha $n \geq 7$, akkor az S^n gömbön véges sok nem-diffeomorf sokaság-struktúra létezik; ezek száma S^7 esetén 28.

4.2. Tetszőleges M sokaság esetén

$$C^k(M) := C^k(M, \mathbb{R}) \ (k \in \mathbb{N}^*) \ , \ C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

A **4.1.**-beli definíció értelmében $f \in C^\infty(M)$ pontosan akkor teljesül, ha minden $p \in M$ pont körül megadható olyan $(\mathcal{U}, x)$ térkép, hogy az $f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ függvény sima ($f(p)$ körüli térkép gyanánt $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ választható).

4.2.1. Tetszőleges M sokaság és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén $C^k(M)$ valós algebra a függvények összeadásának, skalárral való szorzásának és szorzásának szokásos, pontonkénti értelmezése esetén.

4.2.2. Egy $f \in C^\infty(M)$ függvény *tartó*ja azon pontok halmazának lezártja, amelyekben f nem tűnik el:

$$supp(f) := \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}};$$

f zérus halmaza

$$Z(f) := \{p \in M | f(p) = 0\} \,.$$

4.2.3. Legyen M egy sokaság, p egy pontja M-nek, $\mathcal{U}$ pedig tetszőleges környezete p-nek. Létezik olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) $\forall q \in M : 0 \leq f(q) \leq 1$;

(2) f 1-et vesz föl a p pont egy környezetében;

(3) $supp(f) \subset \mathcal{U}$.

f-et ekkor p-beli *dudorfüggvény*nek hívjuk.
A konstrukció vázlata. Legyen ϵ tetszőleges pozitív valós szám.
1. lépés Legyen

$$g(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, \text{ ha } t > 0; \\ 0, \text{ ha } t \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. lépés Képezzük a

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ t \mapsto h(t) := \frac{g(2\epsilon - t)}{g(2\epsilon - t) + g(t - \epsilon)}$$

függvényt. Ekkor $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, és teljesülnek rá a következők:

(i) $h(t) = 1$, ha $t \leq \epsilon$;

(ii) $0 < h(t) < 1$, ha $\epsilon < t < 2\epsilon$;

(iii) $h(t) = 0$, ha $t \geq 2\epsilon$.

3. lépés Jelöljünk ki M-en olyan $(\mathcal{V}, x)$ p-középpontú térképet, amelyre $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Válasszuk meg az ϵ pozitív valós számot úgy, hogy $x(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$ tartalmazza a $B_{3\epsilon}(\mathbf{0})$ gömböt (**0.3.**). Ha

$$N := \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \; (x^i := e^i \circ x, i \in \{1, \ldots, n\}),$$

és

$$f(q) := \begin{cases} h \circ N(q), \text{ ha } q \in \mathcal{V}; \\ 0, \text{ ha } q \in M \backslash \mathcal{V}, \end{cases}$$

akkor $f \in C^\infty(M)$, és f eleget tesz az (1)-(3) feltételeknek.

4.2.4. Egy M sokaságon adott *sima egységbontás* M-en értelmezett sima függvények olyan $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ családja, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(P1) Tetszőleges $p \in M$ pont és minden $\alpha \in A$ index esetén $f_\alpha(p) \geq 0$.

(P2) (*Lokális végesség*) Minden $p \in M$ pontnak van olyan $\mathcal{U}$ környezete, amely a $(supp(f_\alpha))_{\alpha \in A}$ halmazcsaládnak csak véges sok tagját metszi.

(P3) Bármely $p \in M$ esetén $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1$.

Az egységbontás az M sokaság egy $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ *nyílt lefedéséhez csatolt*, ha $supp(f_\alpha) \subset \mathcal{U}_\alpha$ teljesül, minden $\alpha \in A$ indexre.
Megjegyzés. Mivel (P2) értelmében tetszőleges $p \in M$ esetén $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = \sum_{f_\alpha(p) \neq 0} f_\alpha(p)$ véges összeg, a (P3) feltétel végtelen A indexhalmaz esetén is értelmes.

4.2.5. Egy sokaság minden nyílt lefedéséhez létezik az illető lefedéshez csatolt egységbontás. (*Az egységbontás tétele.*)

Megjegyzés. A tétel érvényessége szempontjából perdöntő az a sokaságok definíciójába beépített követelmény, hogy a topológiájának létezzen megszámlálható bázisa.

5. Az érintőnyaláb

5.1. Egy M sokaság egy $p \in M$ pontbeli *értintővektora* olyan $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ függvény, amely

(1) $\mathbb{R}$-*lineáris*: $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$, tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$ esetén;

(2) eleget tesz a

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \; ; \; f, g \in C^\infty(M)$$

*Leibniz-szabály*nak.

Az összes p-beli érintővektorok halmazát T_pM jelöli. T_pM valós vektortér a lineáris függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával, azaz ha $v, w \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$(v + w)f := v(f) + w(f) \; , \; (\lambda v)(f) := \lambda v(f) \; ; \; f \in C^\infty(M).$$

A T_pM valós vektortér az M sokaság p-beli *érintőtere*.

5.1.1. Ha az $f, g \in C^\infty(M)$ függvények egybeesnek egy $p \in M$ pont egy környezetében, akkor tetszőleges $v \in T_pM$ esetén $v(f) = v(g)$.

Bizonyítás. v linearitása miatt elegendő azt igazolni, hogy ha f zérus a p pont egy $\mathcal{U}$ környezetében, akkor $v(f) = 0$. Legyen $g \in C^\infty(M)$ olyan p-beli dudorfüggvény (**4.2.3.**), hogy *supp*$(g) \subset \mathcal{U}$. Ekkor $fg = 0$ teljesül az egész M sokaság fölött. Mivel $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$ miatt $v(0) = 0$, a Leibniz szabály alkalmazásával

$$0 = v(0) = v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) = v(f),$$

hiszen $f(p) = 0$ és $g(p) = 1$. □

5.1.2. Ha egy $f \in C^\infty(M)$ függvény konstans egy $p \in M$ pont egy környezetében, akkor bármely $v \in T_pM$ esetén $v(f) = 0$.

Bizonyítás. **5.1.1.** alapján feltehetjük, hogy f ugyanazt az $\alpha \in \mathbb{R}$ értéket veszi fel M minden pontjában. Ha $\mathbf{1} \in C^\infty(M)$ az $\{1\}$ értékkészletű konstans függvény, akkor $f = \alpha\mathbf{1}$. Mivel $v(\mathbf{1}) = v(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = v(\mathbf{1}) \cdot 1 + 1 \cdot v(\mathbf{1}) = 2v(\mathbf{1})$ miatt $v(\mathbf{1}) = 0$,

$$v(f) = v(\alpha\mathbf{1}) = \alpha v(\mathbf{1}) = 0.$$

□

5.1.3. Tekintsük az M sokaság egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt részsokaságát. Legyen $p \in \mathcal{U}$, $v \in T_p\mathcal{U}$ tetszőleges. Ha

$$\widetilde{v}(f) := v(f \restriction \mathcal{U}) \; , \; f \in C^\infty(M),$$

akkor $\widetilde{v} \in T_pM$. A

$$v \in T_p\mathcal{U} \mapsto \widetilde{v} \in T_pM$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris és injektív, s **5.1.1.** alkalmazásával az is adódik, hogy szürjektív, tehát lineáris izomorfizmus. Így *egy nyílt részsokaság tetszőleges pontbeli érintőtere azonosítható a sokaság illető pontbeli érintőterével* - „*az érintővektorok lokális objektumok*”.

5.1.4. (*Bázistétel*) Ha $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaság p pontja körül, akkor a

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p : f \in C^\infty(M) \mapsto \left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p (f) =: \tfrac{\partial f}{\partial u^i}(p) := D_i(f \circ u^{-1})(u(p)) \in \mathbb{R}$$

függvények p-beli érintővektorok, a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$ vektorsorozat pedig bázisa a T_pM érintőtérnek. Ebből a bázisból tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor a

$$v = \sum_{i=1}^n v(u^i) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$$

formula szerint kombinálható lineárisan.
Megjegyzés. A bázistételből kiolvashatóan *egy sokaság tetszőleges pontbeli érintőterének dimenziója véges, és megegyezik a sokaság dimenziójával.* A

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} := D_i(f \circ u^{-1}) \circ u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

függvényt az f függvény $(\mathcal{U}, u)$ térképre vonatkozó *i-edik parciális derivált*jának hívjuk.

5.1.5. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ és$(\widetilde{\mathcal{U}}, (\widetilde{u^i})_{i=1}^n)$ térkép az M sokaság egy p pontja körül, akkor érvényes a

$$\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{u^i}}\right)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^j}{\partial \widetilde{u^i}}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p \; ; \, i \in \{1, \dots, n\}$$

transzformációs szabály. Valóban, a bázistételt a $\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{u^i}}\right)_p \in T_pM$ érintővektorra alkalmazva, a felírt előállításhoz jutunk.

5.2. Legyen M n-dimenziós sokaság, s jelölje 0_p a T_pM érintőtér zérusvektorát. Ekkor M minden értintővektora egyetlenegy érintőtérbe tartozik, és M összes érintővektorainak halmaza megkapható a

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

unióként. TM M-re való *természetes projekció*ja a

$$\tau : TM \to M \; , \, v \mapsto \tau(v) := p \; , \text{ ha } v \in T_pM$$

leképezés. A definícióból adódóan tetszőleges $p \in M$ pont esetén $\tau^{-1}(p) = T_pM$.

Legyen $\mathcal{A}$ megszámlálható atlasza M-nek, s tekintsünk egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n) \in \mathcal{A}$ térképet. Képezzük az

$$x^i := u^i \circ \tau = e^i \circ u \circ \tau : \tau^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R},$$

valamint az

$$y^i : v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) \mapsto y^i(v) := v(u^i) \in \mathbb{R}$$

függvényeket ($i \in \{1, \dots, n\}$), ezekből pedig az

$$(x, y) = (x^i, y^i)_{i=1}^n = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) : \tau^{-1}(\mathcal{U}) \to u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

leképezést. A bázistétel alapján adódik, hogy (x, y) bijektív, az inverze az

$$(a, (\nu^1, \dots, \nu^n)) \in u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{u^{-1}(a)} \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$$

leképezés. *Egyértelműen létezik olyan megszámlálható bázisú Hausdorff-topológia a TM halmazon, hogy*

$$\left\{(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x, y)) | (\mathcal{U}, u) \in \mathcal{A}\right\}$$

atlasza TM-nek. Ily módon TM *$2n$-dimenziós sokaság*gá válik, amelynek *a τ projekció sima leképezés*e M-re. A továbbiakban TM-et az itt leírt sokaság-struktúrával ellátott sokaságként kezeljük, és *érintősokaság*ként is említjük.

Terminológia. $\tau : TM \to M$ - vagy egyszerűen τ - az M sokaság *érintőnyaláb*ja; TM az érintőnyaláb *totáltere*, M a *bázissokasága*; tetszőleges $p \in M$ pont esetén $\tau^{-1}(p) = T_pM$ a *p pont fölötti fibrum.* (Az érintőnyaláb elnevezés TM-re is használatos, bár ez a szóhasználat nem teljesen következetes.) A most bevezetett szóhasználat általánosabb megalapozást fog nyerni a vektornyalábokkal foglalkozó későbbi fejezetben.

6. Érintőleképezés. Görbék

6.1. Legyen M és N sokaság, $\varphi : M \to N$ sima leképezés. Kiválasztva egy $p \in M$ pontot, értelmezzünk egy

$$(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N \ , \ v \mapsto (\varphi_*)_p(v)$$

leképezést azzal az előírással, hogy tetszőleges $h \in C^\infty(N)$ függvény esetén

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi).$$

Ekkor $(\varphi_*)_p(v)$ valóban $\varphi(p)$-beli érintővektora az N sokaságnak, és a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ leképezés lineáris. Ezt a lineáris leképezést a φ leképezés *p-beli érintőleképezés*ének vagy *derivált*jának nevezzük. φ *érintőleképezés*e vagy *derivált*ja a

$$\varphi_* : TM \to TN \ , \ v \mapsto \varphi_*(v) := (\varphi_*)_p(v) \ , \text{ ha } v \in T_pM$$

leképezés.

A φ leképezés *immerzió a p pontban*, ha a $(\varphi_*)_p$ derivált injektív, *szubmerzió p-ben*, ha $(\varphi_*)_p$ szürjektív lineáris leképezés. φ immeriziója, ill. szubmerziója *az M sokaságnak az N sokaságba*, ha M minden pontjában immerzió, ill. szubmerzió.

A φ leképezést az M sokaság N sokaságba való *beágyazás*ának nevezzük, ha olyan *injektív immerzió*, amelyre teljesül, hogy a

$$\varphi_1 : M \to \varphi(M) \subset N \ , \ p \mapsto \varphi_1(p) := \varphi(p)$$

leképezés *homeomorfizmus*, ha $\varphi(M)$-et az N sokaság topológiájából származó altér-topológiával látjuk el.

6.1.1. Ha $\varphi \in C^\infty(M, N)$, akkor $\varphi_* \in C^\infty(TM, TN)$.

6.1.2. Legyenek L, M, N sokaságok, $\psi \in C^\infty(L, M)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$. Jelölje ι az M sokaság identikus transzformációját.

(1) Érvényes a
$$(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$$
láncszabály. Fibrumonként:
$$((\varphi \circ \psi)_*)_p = (\varphi_*)_{\psi(p)} \circ (\psi_*)_p \ , \ p \in L.$$

(2) $\iota_* = 1_{TM}$, ill. $(\iota_*)_p = 1_{T_pM}$, minden $p \in M$-re.

(3) Ha $\varphi \in C^\infty(M, N)$ diffeomorfizmus, akkor $\varphi_* \in C^\infty(TM, TN)$ is diffeomorfizmus, és
$$(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*.$$
Fibrumonként: tetszőleges $p \in M$ pont esetén
$$(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N \text{ és } (\varphi^{-1})_*(\varphi(p)) : T_{\varphi(p)}N \to T_pM$$
lineáris izomorfizmusok, amelyek egymás inverzei.

6.1.3. Ha $\mathcal{U}$ nyílt részsokasága az M sokaságnak és
$$j : \mathcal{U} \to M \ , \ p \mapsto j(p) := p$$
a befoglaló leképezés (inklúzió), akkor
$$(j_*)_p : T_p\mathcal{U} \to T_pM$$
lineáris izomorfizmus, minden $p \in \mathcal{U}$ esetén (v.ö. **5.1.3.**).

Ennek igazolására megkonstruáljuk a $(j_*)_p$ lineáris leképezés inverzét. Válasszunk olyan $h \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt, amelyre $supp(h) \subset \mathcal{U}$ teljesül. Értelmezzünk egy
$$k : T_pM \to T_p\mathcal{U} \ , \ v \mapsto k(v)$$
leképezést a
$$k(v)(f) := v(hf) \ , \ f \in C^\infty(\mathcal{U})$$
előírással. **5.1.1.** miatt k jól definiált. Tetszőleges $w \in T_p\mathcal{U}$ és $F \in C^\infty(M)$ esetén
$$k \circ (j_*)_p(w)(F) := (j_*)_p(w)(hF) := w(hF \circ j) = w(hF) \overset{\textbf{5.1.1.}}{=} w(F),$$
következésképpen $k \circ (j_*)_p = 1_{T_p\mathcal{U}}$. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy $(j_*)_p \circ k = 1_{T_pM}$.

6.1.4. Ha $\varphi \in C^\infty(M, N)$ diffeomorfan képezi le egy $p \in M$ pont egy környezetét a $\varphi(p) \in N$ pont egy környezetére, akkor a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ leképezés lineáris izomorfizmus.

Ez adódik **6.1.2.** alapján.

6.1.5. Ha M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság, $(\mathcal{U},(x^i)_{i=1}^m)$ térkép egy $p\in M$ pont körül, $(\mathcal{V},(y^j)_{j=1}^n)$ térkép a $\varphi(p)\in N$ pont körül, akkor

$$(\varphi_*)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p=\sum_{i=1}^n\frac{\partial(y^i\circ\varphi)}{\partial x^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(p)}\ ,\ j\in\{1,\dots,m\}.$$

A fellépő $\left(\frac{\partial(y^i\circ\varphi)}{\partial x^j}(p)\right)\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ mátrix φ *p-beli Jacobi mátrix*a az alapul vett térképekre vonatkozóan.

6.1.6. Legyen $\varphi:M\to M$ sima leképezés. Egy M-en kijelölt $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térkép és a TM-en általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}),(x^i,y^i)_{i=1}^n)$ térkép (**5.2.**) segítségével a $\varphi_*:TM\to TM$ érintőleképezés $\mathcal{U}\cap\varphi(\mathcal{U})$ fölött (ha az nem üres) a

$$\varphi_*\underset{(\mathcal{U})}{=}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y^j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\circ\tau\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\circ\varphi\circ\tau\right)\ ;\ \varphi^i:=u^i\circ\varphi$$

formulával írható le. φ_* koordinátafüggvényei

$$x^i\circ\varphi_*=u^i\circ\varphi\circ\tau=\varphi^i\circ\tau\ ,\ y^i\circ\varphi_*=\sum_{j=1}^n y^j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\circ\tau\right)\ ;\ i\in\{1,\dots,n\}\,.$$

Tetszőleges $v\in\tau^{-1}(\mathcal{U})$ esetén a

$$(\varphi_{**})_v:=\left((\varphi_*)_*\right)_v:T_vTM\to T_{\varphi_*(v)}TM$$

második derivált hatását T_vTM

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v,\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v\right)_{i=1}^n$$

bázisán a

$$(\varphi_{**})_v\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_v=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}(\tau(v))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi_*(v)}+\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n y^k(v)\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial u^j\partial u^k}(\tau(v))\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_*(v)},$$

$$(\varphi_{**})_v\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_v=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}(\tau(v))\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_*(v)}$$

formulák adják.

Bizonyítás. Legyen $v\in T_pM$, $p\in\mathcal{U}$ tetszőleges. A v vektort a bázistétel alapján a $v=\sum_{j=1}^n y^j(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p$ alakban állítva elő, **6.1.5.** alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\varphi_*(v)=\varphi_*\left(\sum_{j=1}^n y^j(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right)=\sum_{j=1}^n y^j(v)\sum_{i=1}^n\frac{\partial(u^i\circ\varphi)}{\partial u^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}=$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y^j(v)\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\circ\tau\right)(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\circ\varphi\circ\tau\right)(v),$$

ami a φ_*-ra adott lokális formula helyességét jelenti. Innen

$$x^i(\varphi_*(v)) := u^i \circ \tau(\varphi_*(v)) = u^i(\varphi(p)) = \varphi^i \circ \tau(v),$$
$$y^i(\varphi_*(v)) := \varphi_*(v)(u^i) = \sum_{j=1}^n y^j(v) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^j}(\tau(v))\delta^i_k =$$
$$\left(\sum_{j=1}^n y^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} \circ \tau\right)\right)(v),$$

ez az $x^i \circ \varphi_*$, $y^i \circ \varphi_*$ koordinátafüggvények megadott alakjához vezet. A továbbiak hasonlóan adódnak. □

6.1.7. Megtartva az előző pont jelöléseit, legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített valós szám, és jelentse m_λ a

$$TM \to TM \ , \ v \mapsto m_\lambda(v) := \lambda v$$

leképezést. Ekkor

$$\forall v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) : (m_\lambda)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\lambda v} \ , \ (m_\lambda)_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\lambda v} \quad i \in \{1, \dots, n\} \, .$$

Bizonyítás. Mivel $x^j \circ m_\lambda(v) = x^j(\lambda v) = u^j \circ \tau(\lambda v) = u^j \circ \tau(v) = x^j(v)$ és $y^j \circ m_\lambda(v) = y^j(\lambda v) = \lambda y^j(v)$,

$$x^j \circ m_\lambda = x^j \ , \ y^j \circ m_\lambda = \lambda y^j \ ; \ j \in \{1, \dots, n\} \, .$$

Felhasználva ezt az észrevételt, **6.1.5.** alapján

$$(m_\lambda)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (x^j \circ m_\lambda)}{\partial x^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\lambda v} + \frac{\partial (y^j \circ m_\lambda)}{\partial x^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\lambda v}\right) =$$
$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\lambda v} = \sum_{j=1}^n \delta^j_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\lambda v} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\lambda v},$$
$$(m_\lambda)_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (x^j \circ m_\lambda)}{\partial y^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\lambda v} + \frac{\partial (y^j \circ m_\lambda)}{\partial y^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\lambda v}\right) =$$
$$\sum_{j=1}^n \lambda \frac{\partial y^j}{\partial y^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\lambda v} = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\lambda v}.$$

□

6.1.8. (*Az inverz-leképezés tétel.*) Legyen $\varphi : M \to N$ sima leképezés, p egy pontja M-nek. A $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ derivált akkor és csak akkor lineáris izomorfizmus, ha a p pontnak megadható olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy a $\varphi \restriction \mathcal{U}$ leképezés diffeomorfizmusa $\mathcal{U}$-nak a $\varphi(p)$ pont $\varphi(\mathcal{U}) \subset N$ környezetére.

Bizonyítás. **6.1.4.** miatt a feltétel elegendő. Megfordítva, tegyük fel, hogy $(\varphi_*)_p$ lineáris izomorfizmusa T_pM-nek $T_{\varphi(p)}N$-re. Ekkor M és N dimenziója megegyezik, legyen a közös dimenziójuk n. Válasszunk a p pont körül egy $(\mathcal{U}_1, x)$, a $\varphi(p)$

pont körül pedig egy $(\mathcal{V}_1, y)$ térképet úgy, hogy $\varphi(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{V}_1$ teljesüljön. Legyen $a := x(p)$, $b := y(\varphi(p))$, $\psi := y \circ \varphi \circ x^{-1} \restriction x(\mathcal{U}_1)$. A feltétel alapján a

$$\psi'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

derivált lineáris izomorfizmus, ezért a klasszikus inverz leképezés tétel értelmében az a pontnak megadható olyan $\widetilde{\mathcal{U}}_1$, a b pontnak pedig olyan $\widetilde{\mathcal{V}}_1$ környezete, hogy $\psi \restriction \widetilde{\mathcal{U}}_1 : \widetilde{\mathcal{U}}_1 \to \widetilde{\mathcal{V}}_1$ diffeomorfizmus. Ha $\mathcal{U} := x^{-1}(\widetilde{\mathcal{U}}_1)$, $\mathcal{V} := y^{-1}(\widetilde{\mathcal{V}}_1)$, akkor $\mathcal{U}$ környezete p-nek, $\mathcal{V}$ környezete $\varphi(p)$-nek, $\varphi \restriction \mathcal{U} = y^{-1} \circ \psi \circ x \restriction \mathcal{U}$, és így φ diffeomorfizmusa $\mathcal{U}$-nak $\mathcal{V}$-re. □

6.1.9. Egy $\varphi : M \to N$ sima leképezést *lokális diffeomorfizmus*nak nevezünk egy $p \in M$ *pontban*, ha a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ derivált lineáris izomorfizmus. (A terminológiát **6.1.8.** indokolja.) Amennyiben φ lokális diffeomorfizmus M minden pontjában, úgy azt mondjuk, hogy φ *lokális diffeomorfizmusa M-nek N-be.* Ha $\varphi : M \to N$ bijektív lokális diffeomorfizmus, akkor diffeomorfizmus.

6.2. Hassler Whitney *beágyazási tételei.*

(1) *Immerzió-tétel.* Minden n-dimenziós sokaságnak létezik immerziója $\mathbb{R}^{2n}$-be. Erős változat: minden legalább kétdimenziós sokaságnak létezik immerizója $\mathbb{R}^{2n-1}$-be.

(2) *Beágyazási tétel.* Minden n-dimenziós sokaságnak létezik szabályos beágyazása $\mathbb{R}^{2n+1}$-be, azaz olyan beágyazása, amelynél bármely kompakt halmaz ősképe is kompakt. Erős változat: minden n-dimenziós sokaságnak létezik beágyazása $\mathbb{R}^{2n}$-be.

6.3. Legyen M és N sokaság, és tekintsük az $M \times N$ szorzatsokaságot. Tetszőleges $(a, b) \in M \times N$ esetén a $T_{(a,b)}(M \times N)$ érintőtér kanonikusan izomorf a $T_aM \oplus T_bN$ direkt összeggel, ilyen izomorfizmust ad meg a

$$\varphi_{a,b} : w \in T_{(a,b)}(M \times N) \mapsto \varphi_{a,b}(w) := ((\pi_M)_* (w), (\pi_N)_*(w)) \in T_aM \oplus T_bN$$

leképezés, ahol $\pi_M : M \times N \to M$ és $\pi_N : M \times N \to N$ természetes projekciók.

Bizonyítás. A $\varphi_{a,b}$ leképezés nyilvánvalóan lineáris. Megkonstruáljuk $\varphi_{a,b}$ inverzét. Tekintsük az „a-val, ill. b-vel ellentett”

$$j_a : N \to M \times N \text{ , } q \mapsto j_a(q) := (a, q),$$

ill.

$$j_b : M \to M \times N \text{ , } p \mapsto j_b(p) := (p, b)$$

inklúziót. γ_a-val, ill. γ_b-vel jelölve a

$$q \in N \mapsto \gamma_a(q) := a \in M \text{ , ill. } p \in M \mapsto \gamma_b(p) := b \in N$$

konstans leképezést, érvényesek a

$$\pi_M \circ j_a = \gamma_a \text{ , } \pi_M \circ j_b = 1_M;$$

$$\pi_N \circ j_a = 1_N \ , \ \pi_N \circ j_b = \gamma_b$$

relációk. Innen a láncszabály (**6.1.2.**) alapján

$$(\pi_M)_* \circ (j_a)_* = 0 \ , \ (\pi_M)_* \circ (j_b)_* = 1_{TM};$$

$$(\pi_N)_* \circ (j_a)_* = 1_{TN} \ , \ (\pi_N)_* \circ (j_b)_* = 0.$$

Tekintsük ezek után a

$$\psi_{a,b} : T_aM \oplus T_bN \to T_{(a,b)}(M \times N),$$

$$(u, v) \mapsto \psi_{a,b}(u, v) := (j_b)_*(u) + (j_a)_*(v)$$

lineáris leképezést. Az utoljára nyert relációk alkalmazásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $(u, v) \in T_aM \oplus T_bN$ esetén

$$\varphi_{a,b} \circ \psi_{a,b}(u, v) = \varphi_{a,b}\left((j_b)_*(u) + (j_a)_*(v)\right) =$$
$$((\pi_M)_* \circ (j_b)_*(u) + (\pi_M)_* \circ (j_a)_*(v), (\pi_N)_* \circ (j_b)_*(u) + (\pi_N)_* \circ (j_a)_*(v)) =$$
$$(u + 0_a, 0_b + v) = (u, v),$$

tehát $\varphi_{a,b} \circ \psi_{a,b}$ $T_aM \oplus T_bN$ identikus transzformációja. Mivel $\varphi_{a,b}$ és $\psi_{a,b}$ véges dimenziójú vektorterek közötti lináris leképezés, és

$$dimT_{(a,b)}(M \times N) = dim(M \times N) = dimM + dimN = dimT_aM + dimT_bN,$$

következik, hogy $\varphi_{a,b}$ és $\psi_{a,b}$ inverz izomorfizmusok. $\square$

A most igazolt eredmény lehetővé teszi, hogy a $T_{(a,b)}(M \times N)$ érintőteret és a $T_aM \oplus T_bN$ vektorteret azonosítsuk a

$$w \in T_{(a,b)}(M \times N) \mapsto ((\pi_M)_*(w), (\pi_N)_*(w)) \in T_aM \oplus T_bN,$$

ill. az

$$(u, v) \in T_aM \oplus T_bN \mapsto (j_b)_*(u) + (j_a)_*(v) \in T_{(a,b)}(M \times N)$$

leképezés révén. Tekintettel erre a természetes azonosíthatóságra, a továbbiakban rendszerint egyszerűen azt írjuk, hogy

$$T_{(a,b)}(M \times N) = T_aM \oplus T_bN.$$

Ha

$$\begin{cases} \varphi : T(M \times N) \to TM \times TN \\ \varphi \restriction T_{(a,b)}(M \times N) := \varphi_{a,b} \ ; \ (a, b) \in M \times N, \end{cases}$$

akkor φ olyan sima leképezés, amely fibrumtartó abban az értelemben, hogy tetszőleges $T_{(a,b)}(M \times N)$ érintőteret a $T_aM \oplus T_bN$ vektortérbe viszi át, és fibrumonként lineáris izomorfizmus. φ által $M \times N$ érintőnyalábja azonosítható a $TM \times TN$ „szorzatnyaláb”-bal; ez utóbbi fogalmat később pontosítjuk.

6.3.1. Megtartva a bevezetett jelöléseket,ha

$$w \in T_{(a,b)}(M \times N) \ , \ w_1 := (\pi_M)_*(w) \ , \ w_2 := (\pi_N)_*(w),$$

akkor tetszőleges $f \in C^\infty(M \times N)$ függvény esetén

$$w(f) = w_1(f \circ j_b) + w_2(f \circ j_a).$$

Valóban, az **6.3.** végén mondottak alapján

$$w(f) = (j_b)_*(w_1)(f) + (j_a)_*(w_2)(f) = w_1(f \circ j_b) + w_2(f \circ j_a).$$

6.3.2. *(Leibniz-formula)* Legyen Q további sokaság, és tekintsünk egy $F : M \times N \to Q$ sima leképezést. Kiválaszva egy $(a, b) \in M \times N$ pontot, jelentse F_a; ill. F_b az

$$N \to Q\ ,\ n \mapsto F_a(n) := F(a, n), \text{ ill. az } M \to Q\ ,\ m \mapsto F_b(m) := F(m, b)$$

leképezést. Ekkor tetszőleges $w = (w_1, w_2) \in T_{(a,b)}(M \times N)$ esetén

$$(F_*)_{(a,b)}(w) = ((F_b)_*)_a (w_1) + ((F_a)_*)_b (w_2).$$

Bizonyítás. $F_a = F \circ j_a$, $F_b = F \circ j_b$, így **6.3.** és a láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(F_*)_{(a,b)}(w) = (F_*)_{(a,b)}(\psi_{a,b}(w_1, w_2)) = (F_*)_{(a,b)}((j_b)_*(w_1) + (j_a)_*(w_2)) =$$
$$(F \circ j_b)_*(w_1) + (F \circ j_a)_*(w_2) = ((F_b)_*)(w_1) + ((F_a)_*)(w_2).$$

□

6.3.3. Legyenek - a korábbi jelölések megtartása mellett - M, N, Q, S sokaságok, $\varphi : M \to Q$ és $\psi : N \to S$ sima leképezések. Jelentse $\varphi \times \psi$ az

$$(m, n) \in M \times N \mapsto (\varphi(m), \psi(n)) \in Q \times S$$

leképezést. Ekkor tetszőleges $(a, b) \in M \times N$, $w = (w_1, w_2) \in T_{(a,b)}(M \times N)$ esetén

$$((\varphi \times \psi)_*)_{(a,b)}(w) = (\varphi_*)_a (w_1) + (\psi_*)_b (w_2).$$

Valóban, ha a rövidség kedvéért $F := \varphi \times \psi$, akkor $F_a = j_{\varphi(a)} \circ \psi$, $F_b = j_{\psi(b)} \circ \varphi$, és a Leibniz-formula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$(F_*)_{(a,b)}(w) = (F_b)_*(w_1) + (F_a)_*(w_2) = \left(j_{\psi(b)}\right)_* (\varphi_*(w_1)) + \left(j_{\varphi(a)}\right)_* (\psi_*(w_2)),$$

itt pedig a jobb oldalon szereplő vektor a $\varphi_*(w_1) + (\psi_*)(w_2)$ vektorral azonosítható.

6.4. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, ahol az $\mathbb{R}$ valós számegyenest **3.4.1.**-nek megfelelően sokaságnak, I-t $\mathbb{R}$ nyílt részsokaságának tekintjük. Egy $\gamma : I \to M$ sima leképezést *M-beli (parametrizált) görbének* nevezünk. Ha $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nem egypontú zárt intervallum, akkor egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ leképezést abban az esetben mondunk *görbé*nek (vagy *görbe szakasz*nak), ha kiterjeszthető egy, az $[a, b]$-t tartalmazó nyílt intervallum sima leképezésévé. Amennyiben $\gamma : [a, b] \to M$ folytonos leképezés, és az $[a, b]$ intervallumnak van olyan felosztása, amelynek részintervallumain γ görbe szakasz, úgy γ-t *szakaszonként sima görbé*nek hívjuk. Egy $\gamma : I \to M$ folytonos leképezést akkor nevezünk szakaszonként sima görbének, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ esetén $\gamma \restriction [a, b]$ szakaszonként sima.

6.5. Legyen $r := 1_{\mathbb{R}}$. Ekkor $\mathbb{R}$ sokaság-struktúráját az $(\mathbb{R}, r)$ egytagú atlasz definiálja. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum (mint nyílt részsokaság), s a rövidség kedvéért az $r \restriction I$ leképezést is jelöljük r-rel. Egy $\gamma : I \to M$ görbe $t \in I$-beli *érintővektor*a vagy *sebességvektor*a

$$\dot{\gamma}(t) := (\gamma_*)_t \left(\frac{d}{dr}\right)_t \in T_{\gamma(t)}M;$$

a görbe *reguláris*, ha az érintővektora sehol sem zérusvektor.

Megtartva a bevezetett jelöléseket, érvényesek a következők.

6.5.1. (*Az érintővektorok mint iránymenti deriválások.*) Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor tetszőleges $t \in I$-re

$$\dot{\gamma}(t)(f) = (f \circ \gamma)'(t);$$

ha például $\dot{\gamma}(0) =: v \in T_{\gamma(0)}M$, akkor $v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$.

6.5.2. (*Koordinátakifejezés.*) Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en és $\gamma(t) \in \mathcal{U}$, akkor

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n (u^i \circ \gamma)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)}.$$

6.5.3. (*Átparaméterezés.*) Ha $J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\theta : J \to I$ sima függvény, akkor a γ görbe $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \theta : J \to M$ *átparaméterezett*jének érintővektorait a

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(t) = \theta'(t)\dot{\gamma}(\theta(t)) \ , \ t \in J$$

formula adja.

6.5.4. (*Leképezés hatása.*) Ha N további sokaság és $\varphi : M \to N$ sima leképezés, akkor a $\varphi \circ \gamma : I \to N$ N-beli görbe érintővektorai γ érintővektorainak képei a φ_* érintőleképezésnél:

$$\dot{\overbrace{\varphi \circ \gamma}}(t) = (\varphi_*)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \ , \ t \in I$$

- „az érintőleképezés megőrzi a sebességeket”.
Megjegyzés. A most felírt formula segítségével rendszerint hatékonyabb módon nyerhető információ az érintőleképezésről, mint az **6.1.5.**-ön alapuló koordinátás számolásokkal.

6.5.5. Egy sokaság minden érintővektora fellép egy sokaságbeli görbe érintővektoraként.

Bizonyítás. Legyen M n-dimenziós sokaság, $p \in M$, $v \in T_pM$. Válasszunk egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ p-középpontú térképet. Ekkor $v = \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$ írható. A

$$\gamma :]-1, 1[\to M \ , \ t \mapsto \gamma(t) := u^{-1}(t\nu^1, \dots, t\nu^n)$$

leképezés M-beli görbe, amelyre $\gamma(0) = p$ teljesül. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$u^i \circ \gamma(t) = e^i \circ u \circ u^{-1}(t\nu^1, \dots, t\nu^n) = t\nu^i,$$

így $(u^i \circ \gamma)'(t) = \nu^i$, és **6.5.2.** azt adja, hogy

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(0)} = \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = v.$$

□

6.6. Legyen V n-dimenziós valós vektortér, ellátva a **3.4.2.**-ben leírt sokaság struktúrával. Ekkor tetszőleges

$$x = (x^1, \ldots, x^n) : V \to \mathbb{R}^n \ , \ x^i = e^i \circ x \ (i \in \{1, \ldots, n\})$$

lineáris izomorfizmus koordinátarendszer V-n (v.ö. **3.1.**), az ilyen koordinátarendszereket a vektortér *lineáris koordinátarendszer*einek hívjuk.

Megmutatjuk, hogy *a V vektortér természetes módon izomorf tetszőleges p pontbeli érintőterével*; természetes izomorfizmust ad meg V és T_pV között az

$$\iota_p : v \in V \mapsto \iota_p(v) := \dot{\gamma}(0) \in T_pV$$

leképezés, ahol

$$\gamma : \mathbb{R} \to V \ , \ t \mapsto \gamma(t) := p + tv.$$

Az $x = (x^i)_{i=1}^n$ lineáris koordinátarendszert használva, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ és $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$x^i \circ \gamma(t) = x^i(p + tv) = x^i(p) + tx^i(v),$$

így $(x^i \circ \gamma)'(t) = x^i(v)$, következésképpen

$$\iota_p(v) := \dot{\gamma}(0) \overset{\textbf{6.5.2.}}{=} \sum_{i=1}^n (x^i \circ \gamma)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(0)} = \sum_{i=1}^n x^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p .$$

A kapott

6.6.1.
$$\iota_p(v) = \sum_{i=1}^n x^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

formulából kiolvasható, hogy az ι_p leképezés lineáris és injektív, s ezért izomorfizmus (hiszen $dimV = dimT_pV$).

7. Vektormezők

7.1. Az M sokaság egy $\mathcal{U}$ nyílt részhalmazán adott *durva vektormező* olyan $X : \mathcal{U} \to TM$ leképezés, amely eleget tesz a $\tau \circ X = 1_{\mathcal{U}}$ feltételnek, azaz amelyre teljesül, hogy minden $p \in \mathcal{U}$ esetén

$$X_p := X(p) \in T_p\mathcal{U} \overset{\textbf{5.1.3.}}{=} T_pM.$$

Az X durva vektormezőt *folytonos*, *C^k-osztályú* ($k \in \mathbb{N}^*$), ill. *sima vektormező*nek mondjuk aszerint, amint folytonos, C^k-osztályú, ill. sima leképezése $\mathcal{U}$-nak TM-be.

7.1.1. Legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaságon, s tekintsük a TM-en általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképet (**5.2.**). A

$$\tfrac{\partial}{\partial u^i} : \mathcal{U} \to TM, \ p \mapsto \left(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \ ; \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

leképezések sima vektormezők, az $(\mathcal{U}, u)$ térképhez tartozó *koordinátavektormezők*.

Ha $X : M \to TM$ durva vektormező, akkor az

$$X^i := y^i \circ (X \restriction \mathcal{U}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \; ; \; i \in \{1, \dots, n\}$$

függvényeket X $(\mathcal{U}, u)$-ra vonatkozó *komponensfüggvényei*nek hívjuk; segítségükkel X $\mathcal{U}$ fölött

$$X \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

alakban állítható elő. Ezt a relációt gyakran az

$$X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

formában írjuk.

7.1.2. Egy $X : M \to TM$ durva vektormezőre a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(1) Az X leképezés sima.

(2) X tetszőleges térképre vonatkozó komponensfüggvényei simák.

(3) Tetszőleges $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz és $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ függvény esetén az

$$Xf : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \; , \; p \mapsto (Xf)(p) := X_p(f)$$

függvény sima.

Bizonyítás. (1) $\to$ (2) Legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en. Ha X sima leképezés, akkor $X \restriction \mathcal{U}$ is sima (**4.1.3.**), és ezért a vektormező $y^i \circ X \restriction \mathcal{U} = X^i$ komponensfüggvényei is simák.

(2) $\to$ (3) Mivel a leképezések simasága lokális tulajdonság (**4.1.3.**), feltehető, hogy az adott nyílt halmaz egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép tartománya. Tetszőleges $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ esetén

$$Xf = \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) f = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial u^i},$$

s itt a jobb oldalon a (2) feltétel értelmében sima függvény áll.

(3) $\to$ (1) Kiválasztva M-en egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és tekintve TM-en az általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x, y)) = (\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképet, elegendő azt ellenőrizni, hogy az

$$(x, y) \circ X \circ u^{-1} : u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \to u(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$$

leképezés sima. Ennek koordinátafüggvényei

$$x^i \circ X \circ u^{-1} = u^i \circ \tau \circ X \circ u^{-1} = e^i \circ u \circ u^{-1} = e^i$$

és

$$y^i \circ X \circ u^{-1} = X^i \circ u^{-1} \ (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Az első n koordinátafüggvény sima. Mivel tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ esetén

$$y^i \circ X(p) \overset{\mathbf{5.1.4.}}{=} y^i \left(\sum_{j=1}^n X(p)(u^j) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n (Xu^j)(p) y^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p =$$
$$\sum_{j=1}^n (Xu^j)(p) \frac{\partial u^i}{\partial u^j}(p) = (Xu^i)(p),$$

következik, hogy

$$X^i := y^i \circ X = Xu^i \ , \ i \in \{1, \dots, n\},$$

és ezek a függvények a feltétel szerint simák. Ily módon a vizsgált leképezés második n számú koordinátafüggvénye is sima. □

7.2. Megállapodunk abban, hogy

vektormezőn sima vektormezőt értünk.

Egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazon értelmezett vektormezők a $C^\infty(\mathcal{U})$ gyűrű feletti modulust alkotnak, ha a vektormezők összegét és függvényszeresét pontonként definiáljuk, azaz ha tetszőleges $X : \mathcal{U} \to TM$ és $Y : \mathcal{U} \to TM$ vektormező és $f \in C^\infty(U)$ függvény esetén

$$(X + Y)_p := X_p + Y_p \ , \ (fX)_p := f(p) X_p \ ; \ p \in M.$$

Erre a modulusra az $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ jelölést használjuk, speciálisan $\mathfrak{X}(M)$ az M sokaság vektormezőinek $C^\infty(M)$ modulusa.

7.3. Ha p egy pontja, $v \in T_pM$ pedig egy p-beli érintővektora az M sokaságnak, akkor van olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $X(p) = v$.

Bizonyítás. Válasszunk egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ p körüli térképet; ekkor $v = \sum_{i=1}^n \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_p$ írható. Tekintsük az

$$Y^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \ , \ q \mapsto Y^i(q) := \nu^i \ ; \ i \in \{1, \dots, n\}$$

konstans, és ennélfogva sima függvényeket. Legyen $Y := \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$; ekkor $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ és $Y(p) = v$.

A következő lépésben az Y $\mathcal{U}$ fölötti vektormezőt M-en értelmezett vektormezővé terjesztjük ki. Ehhez olyan $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt alkalmazunk, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik. Ha $X := fY$, akkor X M-en értelmezett vektormezőnek tekinthető, amely $M \setminus \mathcal{U}$ pontjaiban 0-t vesz föl. A p pont egy környezetében X egybeesik Y-nal, ezért $X(p) = Y(p) = v$. □

7.4. A $C^\infty(M)$ függvényalgebra egy *derivációja* olyan $\theta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto \theta(f)$ leképezés, amely

(1) $\mathbb{R}$-*lineáris*: $\theta(\alpha f + \beta g) = \alpha\theta(f) + \beta\theta(g)$, tetszőleges $f, g \in C^\infty(M)$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén;

(2) eleget tesz a *Leibniz-szabály*nak:

$$\theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g) \ ; \ f, g \in C^\infty(M).$$

7.4.1. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor az

$$L_X : f \in C^\infty(M) \mapsto L_X(f) := Xf \ ; \ (Xf)(p) := X_p(f) \ (p \in M)$$

leképezés derivációja $C^\infty(M)$-nek, ez az érintővektorok definíciója (**5.1.** (1),(2)) alapján közvetlenül adódik. Megfordítva, *minden $\theta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivációhoz egyértelműen létezik olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $\theta = L_X$.*

Az *egyértelműség* igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy ha valamely $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre $L_X = 0$, akkor $X = 0$. Legyen tehát $L_X = 0$. Ekkor bármely $f \in C^\infty(M)$ függvényre $L_X(f) = Xf = 0 \in C^\infty(M)$, s így minden $p \in M$ pontban $(Xf)(p) = X_p(f) = 0$. Ebből f tetszőlegessége miatt $X_p = 0_p$, innen pedig p tetszőlegessége folytán $X = 0$ következik.

A *létezés* bizonyítása céljából legyen adva $C^\infty(M)$-nek egy tetszőleges θ derivációja, és értelmezzünk egy

$$X : M \to TM \ , \, p \mapsto X_p$$

leképezést azzal az előírással, hogy

$$\forall f \in C^\infty(M) : X_p(f) := \theta(f)(p).$$

Mivel θ deriváció, ekkor $X_p \in T_pM$, tehát X durva vektormező. Azonban a definíció alapján

$$\forall f \in C^\infty(M) : Xf = \theta(f) \in C^\infty(M),$$

így **7.1.2.** értelmében $X \in \mathfrak{X}(M)$. Evidens a konstrukcióból, hogy $L_X = \theta$.

A tett észrevételre tekintettel, a továbbiakban

egy M sokaság vektormezőit szabadon interpretáljuk a $C^\infty(M)$ függvényalgebra derivációiként.

7.5. Legyen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Az

$$f \in C^\infty(M) \mapsto X(Yf) - Y(Xf) \in C^\infty(M)$$

leképezés deriváció, ezért **7.4.1.** alapján egyértelműen létezik olyan $[X, Y]$-nal jelölt vektormező M-en, hogy

$$\forall f \in C^\infty(M) : [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Ezt a vektormezőt az X és Y vektormező *Lie-zárójel*ének nevezzük. Mint M-nek TM-be való leképezése, $[X, Y]$ tetszőleges $p \in M$ ponthoz azt az $[X, Y]_p \in T_pM$ érintővektort rendeli, amelyre

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf) \ , \ f \in C^\infty(M).$$

7.5.1. *A koordinátavektormezők Lie-zárójele eltűnik.*
Valóban, legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaságon. Tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexek és $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ függvény esetén

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right](f) = \frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^j} - \frac{\partial}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^i} \overset{\mathbf{5.1.4.}}{=} \frac{\partial}{\partial u^i}(D_j(f \circ u^{-1}) \circ u) -$$
$$\frac{\partial}{\partial u^j}(D_i(f \circ u^{-1}) \circ u) = D_i D_j(f \circ u^{-1}) \circ u - D_j D_i(f \circ u^{-1}) \circ u = 0,$$

tehát $\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right] = 0$.

7.5.2. Az $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) $\mathbb{R}$-*bilineáris*;

(2) *ferdeszimmetrikus*: $[X, Y] = -[Y, X]$;

(3) *eleget tesz a Jacobi-azonosságnak*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0;$$

(4) tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \ , \ [X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y.$$

(1)-(3) értelmében $\mathfrak{X}(M)$, mint valós vektortér, a Lie-zárójel műveletével ellátva valós *Lie-algebra.* A ferdeszimmetriából következik, hogy $[X, X] = 0$ minden X vektormező esetén

7.6. Legyen M és N sokaság, $\varphi \in C^\infty(M, N)$. Azt mondjuk, hogy az $X \in \mathfrak{X}(M)$ és az $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormezők *φ-megfelelők*, s ilyenkor az $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ jelölést használjuk, ha

$$\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi.$$

7.6.1. Az $X \in \mathfrak{X}(M)$ és az $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező akkor és csak akkor φ-megfelelő, ha

$$X(h \circ \varphi) = Yh \circ \varphi \ , \ h \in C^\infty(N).$$

Bizonyítás. A következő megállapítások ekvivalensek:
$X(h \circ \varphi) = Yh \circ \varphi \ , \quad h \in C^\infty(N)$;
$X(h \circ \varphi)(p) = (Yh \circ \varphi)(p) \ ; \quad p \in M, \ h \in C^\infty(N)$;
$X_p(h \circ \varphi) = (Yh)(\varphi(p)) \ ; \quad p \in M, \ h \in C^\infty(N)$;
$((\varphi_*)_p X_p)(h) = Y_{\varphi(p)}(h) \ ; \quad p \in M, \ h \in C^\infty(N)$;
$(\varphi_*)_p(X_p) = Y_{\varphi(p)} \ , \quad p \in M$;
$\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi.$ □

7.6.2. Legyen $\varphi \in C^\infty(M,N)$; $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$; $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$. Ha $X_1 \underset{\varphi}{\sim} Y_1$ és $X_2 \underset{\varphi}{\sim} Y_2$, akkor

(1) $\lambda X_1 + \mu X_2 \underset{\varphi}{\sim} \lambda Y_1 + \mu Y_2$,

(2) $(h \circ \varphi) X_1 \underset{\varphi}{\sim} hY_1$, $h \in C^\infty(N)$;

(3) $[X_1, X_2] \underset{\varphi}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

Mindhárom észrevétel egyszerűen adódik **7.6.1.** ismételt alkalmazásával.

7.6.3. Ha $\varphi \in C^\infty(M,N)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, és létezik olyan $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező, hogy $X \underset{\varphi}{\sim} Y$, akkor azt mondjuk, hogy az X vektormező φ által *vetíthető*. Amennyiben φ *szürjektív*, úgy minden $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz legföljebb egy olyan $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező létezik, hogy $X \underset{\varphi}{\sim} Y$.

7.6.4. Tegyük fel, hogy $\varphi : M \to N$ *diffeomorfizmus*. Ekkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén képezhető a

$$\varphi_\# X := \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} \in \mathfrak{X}(N)$$

vektormező, X φ általi *előretolt*ja (push-forward). $X \underset{\varphi}{\sim} \varphi_\# X$, és további $\mathfrak{X}(N)$-beli vektormező nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A

$$\varphi_\# : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N) \ , \ X \mapsto \varphi_\# X$$

leképezés izomorfizmus az $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathfrak{X}(N)$ Lie-algebra között, így speciálisan

$$\varphi_\#[X_1, X_2] = [\varphi_\# X_1, \varphi_\# X_2] \ ; \ X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

Ha $\psi : N \to Q$ további diffeomorfizmus, akkor

$$(\psi \circ \varphi)_\# = \psi_\# \circ \varphi_\#.$$

Egy $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező φ általi *visszahúzott*ja (pull-back) a

$$\varphi^\# Y := (\varphi_*)^{-1} \circ Y \circ \varphi \overset{\textbf{6.1.2.}}{=} (\varphi^{-1})_* \circ Y \circ \varphi = (\varphi^{-1})_\# Y$$

$\mathfrak{X}(M)$-beli vektormező.

7.6.5. Legyen $\mathcal{U}$ nyílt részhalmaza az M sokaságnak, és legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$. Az X vektormező a

$$p \in \mathcal{U} \mapsto (X_\mathcal{U})_p := X_p \in T_pM \overset{\textbf{5.1.3.}}{=} T_p\mathcal{U}$$

előírás szerint egy $X_\mathcal{U} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ vektormezőt indukál, ezt X $\mathcal{U}$-ra való *leszűkítés*ének hívjuk. Ha $j : \mathcal{U} \to M$ a kanonikus inklúzió (**6.1.3.**), akkor $X_\mathcal{U} \underset{j}{\sim} X$.

7.7. Legyen M és N sokaság, és tekintsük az $M \times N$ szorzatsokaságot. Az $M \times N \to M$, ill. az $M \times N \to N$ természetes projekciót a korábbiaknak megfelelően π_M, ill. π_N jelöli, és élünk az **6.3.** végén mondott azonosítási lehetőségekkel. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$ és

$$i_M X : (p,q) \in M \times N \mapsto (X_p, 0_q) \in T_{(p,q)}(M \times N),$$

akkor $i_M X$ vektormező $M \times N$-en. Hasonlóképpen, minden $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező egy

$$i_N Y : (p,q) \in M \times N \mapsto (0_p, Y_q) \in T_{(p,q)}(M \times N)$$

vektormezőt származtat $M \times N$-en. Közvetlenül adódik ezekből a definíciókból, hogy

$$i_M X \underset{\pi_M}{\sim} X \ , \ i_N Y \underset{\pi_N}{\sim} Y,$$

érvényesek továbbá a következő relációk:

$$i_M X(f \circ \pi_M) = Xf \circ \pi_M \ , \ i_N Y(f \circ \pi_M) = 0 \ ; \ f \in C^\infty(M);$$

$$i_N Y(g \circ \pi_N) = Yg \circ \pi_N \ , \ i_M X(g \circ \pi_N) = 0 \ ; \ g \in C^\infty(N).$$

Valóban, tetszőleges $(p,q) \in M \times N$ esetén

$$i_M X(f \circ \pi_M)(p,q) = (X_p, 0_q)(f \circ \pi_M) \overset{\mathbf{6.3.1.}}{=} \\ X_p(f \circ \pi_M \circ j_q) + 0_q(f \circ \pi_M \circ j_p) = X_p(f) = Xf(p) = Xf \circ \pi_M(p,q);$$

$$i_N Y(f \circ \pi_M)(p,q) = (0_p, Y_q)(f \circ \pi_M) = 0_p(f \circ \pi_M \circ j_q) + Y_q(f \circ \pi_M \circ j_p) = \\ Y_q(f \circ \pi_M \circ j_p) = 0,$$

mert $f \circ \pi_M \circ j_p : N \to \mathbb{R}$ az $\{f(p)\}$ értékkészletű konstans függvény. Ezzel az első két reláció bizonyítást nyert, a másik kettő igazolása analóg.

7.7.1. Ha $Z \in \mathfrak{X}(M \times N)$, és tetszőleges $f \in C^\infty(M)$, ill. $g \in C^\infty(N)$ esetén $Z(f \circ \pi_M) = 0$ és $Z(g \circ \pi_N) = 0$, akkor $Z = 0$.

Bizonyítás. Legyen $(a,b) \in M \times N$ tetszőleges, $w := Z_{(a,b)}$. Felhasználva az **6.3.**-beli bizonyításban látottakat,

$$w = (j_b)_*(u) + (j_a)_*(v) \ ; \ u \in T_a M \ , \ v \in T_b N$$

írható, és így a $Z(f \circ \pi_M) = 0$ feltétel azt adja, hogy

$$0 = Z_{(a,b)}(f \circ \pi_M) = w(f \circ \pi_M) = (j_b)_*(u)(f \circ \pi_M) + (j_a)_*(v)(f \circ \pi_M) = \\ u(f \circ \pi_M \circ j_b) + v(f \circ \pi_M \circ j_a) = u(f) + v(f \circ \gamma_a) = u(f)$$

(mert $f \circ \gamma_a \in C^\infty(N)$ konstans függvény). Így $u = 0_p$ következik, és hasonlóan adódik, hogy $v = 0_p$. Ezzel beláttuk, hogy Z minden $(a,b) \in M \times N$ pontban zérusvektort vesz föl, tehát $Z = 0$. □

8. Elsőfokú differenciálformák

8.1. Egy M sokaság p pontbeli érintőterének duálisára a T_p^*M jelölést és a p-beli *koérintő tér* elnevezést használjuk, T_p^*M elemeit p-beli *érintő kovektor*okként, vagy egyszerűen *p-beli kovektor*okként is említjük. Az M sokaságon adott *elsőfokú differenciálforma*, röviden *1-forma*, vagy *kovektormező* olyan

$$\omega : p \in M \to \omega_p \in T_p^*M$$

leképezés, amely eleget tesz a következő *simasági feltétel*nek: tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén az

$$\omega(X) : M \to \mathbb{R} \ , \ p \mapsto \omega(X)(p) := \omega_p(X_p)$$

függvény sima.

Egy M sokaságon értelmezett összes elsőfokú differenciálformák $C^\infty(M)$-modulust alkotnak, ha két differenciálforma összegét és egy differenciálforma függvényszeresét a „pontonkénti elv” alapján értelmezzük (v.ö. **7.2.**); erre a modulusra az $A^1(M)$ jelölést használjuk.

Ugyanígy szólhatunk egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölötti 1-formák $A^1(\mathcal{U})$ $C^\infty(\mathcal{U})$-modulusáról.

8.2. Egy $f \in C^\infty(M)$ függvény *differenciál*ja egy *$p \in M$ pontban* a

$$(df)_p : T_pM \to \mathbb{R} \ , \ v \mapsto (df)_p(v) := v(f)$$

függvény. Ekkor $(df)_p \in T_p^*M$, azaz $(df)_p$ p-beli kovektor, és a

$$df : p \in M \to (df)_p \in T_p^*M$$

leképezés elsőfokú differenciálforma, amelyet *az f függvény differenciáljá*nak nevezünk. (A simasági feltétel teljesülése adódik abból, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $p \in M$ pont esetén

$$df(X)(p) := (df)_p(Xp) := X_p(f) = (Xf)(p),$$

s így $df(X) = Xf \in C^\infty(M)$.)

8.2.1. Legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaság p pontja körül.

(1) $\left((du^i)_p\right)_{i=1}^n$ a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\right)_{i=1}^n$ bázishoz duális bázisa a T_p^*M koérintő térnek.

(2) Ha $\omega \in A^1(M)$, akkor

$$\omega \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) du^i.$$

(3) Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor

$$df \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i.$$

(4) Amennyiben $(\widetilde{\mathcal{U}}, (\widetilde{u}^i)_{i=1}^n)$ további térkép a p pont körül, úgy érvényes a

$$(d\widetilde{u}^i)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^j}(p)(du^j)_p \ ; \ i \in \{1, \dots, n\}$$

transzformációs szabály.

Bizonyítás.

(1) Tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén

$$(du^i)_p \left(\tfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p := \left(\tfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p (u^i) := D_j(u^i \circ u^{-1})(u(p)) = D_j e^i(u(p)) = \delta^i_j.$$

(2) Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ pontban

$$\omega_q \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j (du^j)_q \ , \ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Alkalmazva mindkét oldalt a $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ bázisvektorokra, azt kapjuk, hogy

$$\omega_q \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q = \sum_{j=1}^n \lambda_j (du^j)_q \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta^j_i = \lambda_i,$$

így

$$\omega_q = \sum_{i=1}^n \omega_q \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q (du^i)_q = \left(\sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) du^i\right)_q .$$

Ez igazolja a (2) előállítást.

(3) $df\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) := \frac{\partial}{\partial u^i} f = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, (3) ezért következik (2) alapján.

(4) adódik (3)-ból, $f := \widetilde{u}^i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ választással.

□

8.2.2. A

$$d : C^\infty(M) \to A^1(M) \ , \ f \mapsto df$$

leképezés

(1) $\mathbb{R}$-lineáris;

(2) eleget tesz a $d(fg) = gdf + fdg$ szorzat-szabálynak.

Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ esetén

(3) $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.

Az utóbbi reláció igazolására válasszunk egy $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet M-en. **8.2.1.** (3) alapján $d(h \circ f) \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial (h \circ f)}{\partial u^i} du^i$. Itt

$$\tfrac{\partial (h \circ f)}{\partial u^i} = D_i(h \circ f \circ u^{-1}) \circ u = (h' \circ f)(D_i(f \circ u^{-1}) \circ u) = (h' \circ f)\tfrac{\partial f}{\partial u^i},$$

így

$$d(h \circ f) \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n (h' \circ f) \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i = (h' \circ f)df.$$

8.3. *Egy M sokaság elsőfokú differenciálformáinak $A^1(M)$ $C^\infty(M)$-modulusa és a vektormezők modulusának $\mathfrak{X}^*(M)$ duálisa között természetes izomorfizmust ad meg az*

$$\omega \in A^1(M) \mapsto \widetilde{\omega} \in \mathfrak{X}^*(M) \ ; \ \widetilde{\omega}(X) := \omega(X) \ , \ X \in \mathfrak{X}(M)$$

leképezés.

Bizonyítás. (1) Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy $\widetilde{\omega} \in \mathfrak{X}^*(M)$ valóban fennáll (azaz $\widetilde{\omega}$ $C^\infty(M)$-lineáris leképezése $\mathfrak{X}(M)$-nek $C^\infty(M)$-be), és hogy a megadott leképezés $C^\infty(M)$-lineáris.

(2) Tegyük fel, hogy az ω_1 és ω_2 1-formára $\widetilde{\omega_1} = \widetilde{\omega_2}$ teljesül. Ekkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $p \in M$ pont esetén $\widetilde{\omega_1}(X)(p) = \widetilde{\omega_2}(X)(p)$, ami a vizsgált leképezés definíciója alapján azzal ekvivalens, hogy $\omega_1(X)(p) = \omega_2(X)(p)$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $(\omega_1)_p(X_p) = (\omega_2)_p(X_p)$, amiből X tetszőlegessége miatt $(\omega_1)_p = (\omega_2)_p$, innen pedig p tetszőlegessége folytán $\omega_1 = \omega_2$ következik. Ezzel beláttuk, hogy a leképezés *injektív.*

(3) A *szürjektív*ség igazolása céljából megmutatjuk: $\mathfrak{X}^*(M)$ tetszőleges η eleméhez van olyan ω 1-forma M-en, hogy $\widetilde{\omega} = \eta$.

(a) Belátjuk először, hogy *ha egy Y vektormezőre $Y_p = 0$ teljesül, akkor* $\eta(Y)(p) = 0$. Válasszunk egy p körüli $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor

$$Y \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^n (Yu^i) \frac{\partial}{\partial u^i},$$

ahol $Y(p) = 0$ miatt

$$Y^i(p) = (Yu^i)(p) = Y_p(u^i) = 0 \ ; \ i \in \{1, \ldots, n\} \, .$$

Az $Y \restriction \mathcal{U}$ vektormezőt alkalmas módon kiterjesztjük M-en értelmezett vektormezővé. Legyen ebből a célból $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvény, $\mathcal{U}$-beli tartóval. Képezzük f segítségével minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre az

$$\widetilde{Y^i} := \begin{cases} fY^i \ , \mathcal{U} \text{ fölött} \\ 0 \ , \ M \backslash \mathcal{U} \text{ fölött} \end{cases}$$

sima függvényeket és a

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}} := \begin{cases} f \dfrac{\partial}{\partial u^i} \ , \mathcal{U} \text{ fölött} \\ 0 \ , \ M \backslash \mathcal{U} \text{ fölött} \end{cases}$$

vektormezőket. Ekkor

$$\widetilde{Y} := \sum_{i=1}^n \widetilde{Y^i} \widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}} \in \mathfrak{X}(M) \ , \ \widetilde{Y} \restriction \mathcal{U} = f^2(Y \restriction \mathcal{U})$$

és $Y = \widetilde{Y} + (\mathbf{1} - f^2)Y$. Így

$$\eta(Y)(p) = \eta(\widetilde{Y})(p) + (1 - f^2(p))Y_p = \eta(\widetilde{Y})(p) = \sum_{i=1}^n \widetilde{Y^i}(p) \eta \left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial u^i}} \right)(p) = 0,$$

mert $\widetilde{Y}^i(p) = f(p)Y^i(p) = Y^i(p) = 0$ $(i \in \{1, \dots, n\})$.

(b) Értelmezzünk egy $\omega : p \in M \mapsto \omega_p \in T_p^*M$ leképezést az

$$\omega_p(v) := \eta(X)(p) \ ; \ X \in \mathfrak{X}(M) \ , \ X(p) = v$$

előírással. A definícióban alkalmazott X vektormező **7.3.** értelmében létezik, ellenőriznünk kell azonban, hogy $\omega_p(v)$ független a p pontban v értéket felvevő vektormező megválasztásától. Legyen $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, és tegyük fel, hogy $X_1(p) = X_2(p) = v$. Ha $Y := X_1 - X_2$, akkor $Y(p) = 0$, és az (a)-ban tett észrevétel felhasználásával

$$\eta(X_1)(p) - \eta(X_2)(p) = \eta(X_1 - X_2)(p) = \eta(Y)(p) = 0,$$

tehát $\eta(X_1)(p) = \eta(X_2)(p)$, ami igazolja ω_p jól-definiáltságát. Mivel a konstrukció alapján tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $\omega(X) = \eta(X) \in C^\infty(M)$ és $\eta = \widetilde{\omega}$, a szürjektívség igazolást nyert. □

Tekintettel a kapott eredményre, a továbbiakban

egy M sokaság elsőfokú differenciálformáit szabadon interpretáljuk az $\mathfrak{X}^*(M)$ duális modulus elemeiként.

9. Az immerziók és szubmerziók lokális jellemzése

9.1. Ebben az alpontban vektortéren egy $\mathbb{F}$ test fölötti vektorteret értünk. Ha V vektortér és $S \subset V$, akkor S *annullátora* a V^* duális tér

$$S^0 := \{f \in V^* | \forall v \in S : f(v) = 0\}$$

altere.

Egy $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés *transzponált*ja a

$${}^t\varphi : W^* \to V^* \ , \ l \mapsto {}^t\varphi(l) := l \circ \varphi$$

leképezés, ez szintén lineáris. Kompozíció transzponáltja a transzponáltak fordított sorrendben képzett kompozíciója: ha $\psi : U \to V$ további lineáris leképezés, akkor

$${}^t(\varphi \circ \psi) = {}^t\psi \circ {}^t\varphi.$$

9.1.1. Ha $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, akkor

$$Ker({}^t\varphi) = (\varphi(V))^0 \subset W^*.$$

Bizonyítás. $l \in (\varphi(V))^0 \iff l(\varphi(V)) = 0 \iff l \circ \varphi(V) = 0 \iff {}^t\varphi(l)(V) = 0 \iff {}^t\varphi(l) = 0 \in V^* \iff l \in Ker({}^t\varphi)$. □

9.1.2. Ha V véges dimenziójú vektortér és U vektor-altere V-nek, akkor $dimU + dimU^0 = dimV$.

9.1.3. Ha V és W véges dimenziójú vektortér, $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, akkor φ és ${}^t\varphi$ rangja egyenlő.

Bizonyítás. $dimKer({}^t\varphi) \overset{\mathbf{9.1.1.}}{=} dim(\varphi(V))^0 \overset{\mathbf{9.1.2.}}{=} dimW - dim\varphi(V) = dimW - rang(\varphi)$, így
$rang(\varphi) = dimW - dimKer({}^t\varphi) = rang({}^t\varphi)$. □

9.1.4. Legyen V és W véges dimenziójú vektortér, $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés.

(1) φ pontosan akkor szürjektív, ha ${}^t\varphi$ injektív.

(2) φ pontosan akkor injektív, ha ${}^t\varphi$ szürjektív.

Bizonyítás. (1) Felhasználva az előző bizonyítást is,
${}^t\varphi$ injektív $\iff dimKer({}^t\varphi) = 0 \iff rang(\varphi) = dimW \iff \varphi$ szürjektív.

(2) φ injektív $\iff Ker(\varphi) = \{0\} \iff rang(\varphi) = dimV \overset{\mathbf{9.1.3.}}{\iff} rang({}^t\varphi) = dimV^* \iff Im({}^t\varphi) = V^* \iff {}^t\varphi$ szürjektív. □

9.2. Egy M sokaság egy p pontjának egy környezetében definiált $y^1, \dots, y^k$ sima függvényekről azt mondjuk, hogy *függetlenek a p pontban*, ha $(dy^1)_p, \dots, (dy^k)_p$ lineárisan független p-beli kovektorok.

9.2.1. Legyen M n-dimenziós sokaság. Ha $y^1, \dots, y^n$ egy $p \in M$ pont egy környezetében értelmezett, a p pontban független sima függvények, akkor $y := (y^1, \dots, y^n)$ lokális koordinátarendszere M-nek p körül.

Bizonyítás. Elegendő azt megmutatni, hogy az $(y_*)_p : T_pM \to T_{y(p)}\mathbb{R}^n$ derivált lineáris izomorfizmus, ebből az inverz-leképezés tétel (**6.1.8.**) alapján következik az állítás.

Tekintsük a ${}^t(y_*)_p : T^*_{y(p)}\mathbb{R}^n \to T^*_pM$ transzponált lineáris leképezést. Kijelölve a p pont körül egy $(u^1, \dots, u^n)$ lokális koordinátarendszert, tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexekre azt kapjuk, hogy

$$
{}^t(y_*)_p (de^i)_{y(p)} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p := (de^i)_{y(p)} \left((y_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right) = (y_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p (e^i) = \frac{\partial (e^i \circ y)}{\partial u^j}(p) = \frac{\partial y^i}{\partial u^j}(p) = (dy^i)_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p,
$$

következésképpen

$$
{}^t(y_*)_p (de^i)_{y(p)} = (dy^i)_p \ , \ i \in \{1, \dots, n\}.
$$

Ez azt jelenti, hogy ${}^t(y_*)_p$ $T^*_{y(p)}\mathbb{R}^n$ egy bázisát T^*_pM egy bázisába viszi át. Így ${}^t(y_*)_p$ lineáris izomorfizmus, amiből **9.1.4.** alapján következik, hogy $(y_*)_p$ is lineáris izomorfizmus. □

9.2.2. Ha M n-dimenziós sokaság, és $y^1, \dots, y^k$ $(k < n)$ egy $p \in M$ pont egy környezetében értelmezett, p-ben független függvények, akkor $(y^i)_{i=1}^k$ p körüli lokális koordinátarendszerré egészíthető ki.

Bizonyítás. Válasszunk a p pont körül egy $(u^i)_{i=1}^n$ lokális koordinátarendszert. Ekkor

$$((dy^1)_p, \dots, (dy^k)_p, (du^1)_p, \dots, (du^n)_p)$$

olyan generátorrendszere T_p^*M-nek, amelynek első k tagja lineárisan független. A lineáris algebra egy jól ismert tétele szerint a második n számú kovektor körül kiválasztható $n-k$ számú, mondjuk $(du^{i_1})_p, \dots, (du^{i_{n-k}})_p$ úgy, hogy

$$((dy^1)_p, \dots, (dy^k)_p, (du^{i_1})_p, \dots, (du^{i_{n-k}})_p)$$

bázisa legyen T_p^*M-nek. **9.2.1.** értelmében ekkor $(y^1, \dots, y^k, u^{i_1}, \dots, u^{i_{n-k}})$ lokális koordinátarendszer a p pont körül. □

9.2.3. Legyen M n-dimenziós sokaság, s tegyük fel, hogy $y^1, \dots, y^s$ egy $p \in M$ pont egy környezetében értelmezett sima függvények. Ha $\left((dy^i)_p\right)_{i=1}^s$ generátorrendszere a T_p^*M koérintő térnek, akkor kiválaszthatók $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, s\}$ indexek úgy, hogy $(y^{i_1}, \dots, y^{i_s})$ lokális koordinátarendszer a p pont körül.

Bizonyítás. A $\left((dy^i)_p\right)_{i=1}^s$ generátorrendszer tartalmazza T_p^*M-nek egy bázisát, így **9.2.1.** alapján következik az állítás. □

9.3. Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság. Egy $\varphi \in C^\infty(M, N)$ leképezésre a következők ekvivalensek:

(1) φ immerzió egy $p \in M$ pontban.

(2) φ p-beli Jacobi-mátrixa valamely (és ezért bármely) p és $\varphi(p)$ körüli térképpárra vonatkozóan m rangú.

(3) Ha $(y^1, \dots, y^n)$ lokális koordinátarendszer $\varphi(p)$ körül, akkor megadhatók olyan $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ $(m \leq n)$ indexek úgy, hogy $(y^{i_1} \circ \varphi, \dots, y^{i_m} \circ \varphi)$ lokális koordinátarendszer p körül.

Bizonyítás. Mivel $(\varphi_*)_p$ injektívsége ekvivalens azzal, hogy a $(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ lineáris leképezés m-rangú, és egy lineáris leképezés rangja megegyezik tetszőleges mátrix-reprezentánsának rangjával, (1) és (2) ekvivalenciája **6.1.5.** figyelembevételével nyilvánvaló.

(1) → (3) Úgy okoskodhatunk, mint **9.2.1.** igazolásánál. Tekintsük a ${}^t(\varphi_*)_p : T_{\varphi(p)}^*N \to T_p^*M$ transzponált lineáris leképezést. Kijelölve egy $(u^j)_{j=1}^m$ lokális koordinátarendszert a p pont körül, tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ indexek esetén

$$\begin{gathered}{}^t(\varphi_*)_p (dy^i)_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p := (dy^i)_{\varphi(p)} \left((\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right) = (\varphi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p (y^i) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p (y^i \circ \varphi) = (d(y^i \circ \varphi))_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p,\end{gathered}$$

következésképpen

$$^{t}(\varphi_*)_p\,(dy^i)_{\varphi(p)} = (d(y^i \circ \varphi))_p\ ,\ i \in \{1,\dots,n\}.$$

$(\varphi_*)_p$ injektívsége esetén $^{t}(\varphi_*)_p$ szürjektív (**9.1.4.**), ezért generátorrendszert (ill. speciálisan bázist) generátorrendszerbe visz át. $\left((d(y^i \circ \varphi))_p\right)_{i=1}^n$ tehát generátorrendszere $T^*_{\varphi(p)}N$-nek, amiből **9.2.3.** alapján adódik az állítás.

(3) $\to$ (1) Ha $y := (y^{i_1} \circ \varphi, \dots, y^{i_m} \circ \varphi)$ lokális koordinátarendszer a p pont körül, akkor **6.1.4.** értelmében az $(y_*)_p : T_pM \to T_{y(p)}\mathbb{R}^m$ leképezés lineáris izomorfizmus. Így a $^{t}(y_*)_p : T^*_{y(p)}\mathbb{R}^m \to T^*_pM$ transzponált is lineáris izomorfizmus, s ezért

$$^{t}(y_*)_p\,(de^k)_{y(p)} = d(y^{i_k} \circ \varphi)_p\ ,\ k \in \{1,\dots,m\}$$

miatt (ld. **9.2.1.** bizonyítását) $\left((d(y^{i_k} \circ \varphi))_p\right)_{k=1}^m$ bázisa T^*_pM-nek. A másik irányú implikáció bizonyítása során elvégzett számolás szerint $^{t}(\varphi_*)_p$ a $T^*_{\varphi(p)}N$ koérintő tér $\left((dy^j)_{\varphi(p)}\right)_{j=1}^n$ bázisát T^*_pM most kapott bázisába viszi át. Ebből következik, hogy $^{t}(\varphi_*)_p$ szürjektív, és így **9.1.4.** miatt $(\varphi_*)_p$ injektív. □

9.4. Ha M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság, és $\varphi \in C^\infty(M,N)$, akkor a következők ekvivalensek:

(1) φ szubmerzió egy $p \in M$ pontban.

(2) φ p-beli Jacobi-mátrixa valamely (és ezért bármely) p és $\varphi(p)$ körüli térképre vonatkozóan n rangú.

(3) Ha $(y^1,\dots,y^n)$ lokális koordinátarendszer $\varphi(p)$ körül, akkor az $y^1 \circ \varphi, \dots, y^n \circ \varphi$ függvények p körüli lokális koordinátarendszerré bővíthetők.

Bizonyítás. (1) és (2) ekvivalenciája a **9.3.**-ban látottak szerint adódik.

(1) $\to$ (3) Ha $(\varphi_*)_p$ szürjektív, akkor $^{t}(y_*)_p$ injektív. A **9.3.**-ban elvégzett számolással kapjuk, hogy $\left((d(y^i \circ \varphi))_p\right)_{i=1}^n$ független rendszere T^*_pM-nek, így **9.2.2.** alapján következik az állítás.

(3) $\to$ (1) (3) teljesülése esetén $\left((d(y^i \circ \varphi))_p\right)_{i=1}^n$ független rendszere T^*_pM-nek, s így a **9.3.**-ban alkalmazott érveléssel most azt kapjuk, hogy $^{t}(\varphi_*)_p$ $T^*_{\varphi(p)}N$ $\left((dy^i)_{\varphi(p)}\right)_{i=1}^n$ bázisát független rendszerbe viszi át. Ebből $^{t}(\varphi_*)_p$ injektívsége, és így $(\varphi_*)_p$ szürjektívsége következik, φ tehát szubmerzió a p pontban. □

10. Részsokaságok

10.1. Egy M sokaság *részsokaság*a egy N sokaságnak, ha

(1) M topologikus altere N-nek,

(2) a $j : M \to N$ kanonikus inklúzió immerziója M-nek N-be.

Ekvivalens módon: *az M sokaság részsokasága az N sokaságnak, ha $M \subset N$ és a $j : M \to N$ inklúzió beágyazás.*

10.1.1. Egy sokaság nyílt részsokaságai (**3.4.4.**) részsokaságok a **10.1.** szerinti értelemben is; ez világos **6.1.3.**-ból.

10.1.2. Ha $\varphi \in C^\infty(M, N)$ beágyazás (**6.1.**), akkor $\varphi(M)$ részsokasága N-nek.

Valóban, legyen $M_1 := \varphi(M) \subset N$, és tekintsük a

$$\varphi_1 : M \to M_1 \ , \ p \mapsto \varphi_1(p) := \varphi(p)$$

bijekciót. Ez a feltétel értelmében homeomorfizmus. φ_1 által M maximális atlasza átvihető M_1-re úgy, hogy φ_1 diffeomorfizmussá váljon. Ekkor $M_1 = \varphi(M) = \varphi_1(M)$ olyan sokaság, amely egyben topologikus altere N-nek. A $j : M_1 \to N$ inklúzió éppen a $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ leképezés, és ez (a láncszabály figyelembevételével) immerzió. Ily módon $\varphi(M)$ eleget tesz a **10.1.** definíció feltételeinek.

10.1.3. Ha M részsokasága N-nek, akkor M tetszőleges T_pM érintőtere természetes módon azonosítható a $(j_*)_p : T_pM \to T_pN$ injektív lineáris leképezés általi képével. Erre tekintettel egy részsokaság érintőterei szabadon interpretálhatók a befoglaló sokaság megfelelő pontbeli érintőtereinek altereiként.

10.2. A részsokaság-fogalomnak számos, nem ekvivalens változata használatos a differenciálgeometriában. Így például azt mondjuk, hogy egy M sokaság *immergált részsokaságá*a egy N sokaságnak, ha M részhalmaza N-nek, és a $j : M \to N$ inklúzió immerzió. A részsokaságok nyilvánvalóan immergált részsokaságok is egyben, a megfordítás azonban nem igaz. A klasszikus ellenpélda a következő.

Legyen $M := \mathbb{R}$, $N := T^2 := S^1 \times S^1$ (**3.4.5.**). A T^2 tóruszt $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ részhalmazaként interpretálva, tekintsük a

$$\varphi : M \to N \ , \ t \mapsto \varphi(t) := \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \nu t}\right)$$

leképezést, ahol ν tetszőlegesen rögzített irracionális szám. Ekkor φ injektív immerzió, és így $\varphi(M)$ immergált részsokasága N-nek. Ugyanakkor a

$$\varphi_1 : M = \mathbb{R} \to \varphi_1(M) \subset N = T^2 \ , \ t \mapsto \varphi_1(t) := \varphi(t)$$

leképezés nem homeomorfizmus, és ezért φ nem beágyazás, mert a $\varphi(\mathbb{Z}) = \left\{\varphi(k) \in T^2 | k \in \mathbb{Z}\right\} \subset T^2$ halmaznak a $\varphi(0) = ((1,0),(1,0))$ pont torlódási pontja, ugyanakkor $\mathbb{Z}$-nek nincs torlódási pontja $\mathbb{R}$-ben. Ebből következik, hogy $\varphi(M)$ nem részsokasága N-nek.

10.3. Legyen N n-dimenziós sokaság, $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképe N-nek.

(1) Rögzítsünk egy $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ számot és egy $a \in u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ pontot. Ha

$$S := \left\{p \in \mathcal{U} | u^i(p) = e^i(a) \ , \ i \in \{m+1, \ldots, n\}\right\},$$

akkor S m-dimenziós részsokasága N-nek, $(u^i \restriction S)_{i=1}^m$ pedig (globális) koordinátarendszer S számára. Ezt az S részsokaságot az $(\mathcal{U}, u)$ térkép egy *szelet*ének vagy, $\mathcal{U}$ egy *u-koordinátaszelet*ének nevezzük.

(2) Tekintsük az N sokaság egy M *részhalmaz*át. Az $(\mathcal{U}, u)$ térképet *M-hez adaptált*nak mondjuk, ha $\mathcal{U} \cap M$ u-koordinátaszelete $\mathcal{U}$-nak. Az általánosság sérelme nélkül föltehetjük ilyenkor, hogy $\mathcal{U} \cap M$ fölött az $(u^1, \ldots, u^n)$ függvény n-es utolsó $n - m$ tagja konstans. Ha - speciálisan - M részsokasága N-nek, akkor ebben az esetben $(u^1, \ldots, u^m)$ $\mathcal{U} \cap M$-re való leszűkítése lokális koordinátarendszer M-en.

10.4. Ha M részsokasága az N sokaságnak, akkor M minden pontja körül létezik M-hez adaptált térképe N-nek.

Bizonyítás. Legyen N n-dimenziós, M m-dimenziós sokaság, az $M \to N$ kanonikus inklúziót jelölje j. Tekintsünk egy tetszőleges $p \in M$ pontot, és jelöljük ki N-nek egy $j(p) = p$ körüli $u = (u^1, \dots, u^n)$ lokális koordinátarendszerét. Mivel j immerzió a p pontban, **9.3.** értelmében az $u^1 \circ j, \dots, u^n \circ j$ függvények közül alkalmas m számú, mondjuk az első m, M-nek egy p körüli lokális koordinátarendszerét alkotja. $\mathcal{V}$-vel jelölve ennek tartományát, így az M sokaság egy $(\mathcal{V}, (u^i \circ j)_{i=1}^m)$ p-körüli térképéhez jutunk. Bevezetve a

$$\pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \ (\alpha^1, \dots, \alpha^m, \alpha^{m+1}, \dots, \alpha^n) \mapsto (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$$

projekciót,

$$(u^1 \circ j, \dots, u^m \circ j) = \pi_m \circ u \circ j =: \widetilde{u}$$

írható. Legyen

$$\widetilde{\mathcal{U}} := (\pi_m \circ u)^{-1}(\widetilde{u}(\mathcal{V})) \ , \ f^i := u^i \circ j \circ \widetilde{u}^{-1} \ (i \in \{1, \dots, m\}).$$

Tekintsük az $\widetilde{\mathcal{U}} \subset M$ nyílt halmazon a

$$z^i := \begin{cases} u^i, \text{ ha } i \in \{1, \dots, m\}\,; \\ u^i - f^i \circ \pi_m \circ u, \text{ ha } i \in \{m+1, \dots, n\} \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor

$$(dz_p^i) := \begin{cases} (du^i)_p, \text{ ha } i \in \{1, \dots, m\}\,; \\ (du^i)_p - \displaystyle\sum_{j=1}^m \alpha_j^i (du^j)_p, \text{ ha } i \in \{m+1, \dots, n\}\,, \end{cases}$$

ahol $(\alpha)_j^i \in M_{(n-m)\times m}(\mathbb{R})$. Valóban, $i \in \{m+1, \dots, n\}$ esetén

$$(d(f^i \circ \pi_m \circ u))_p \overset{\mathbf{8.2.1.}(3)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (f^i \circ \pi_m \circ u)}{\partial u^j}(p)(du^j)_p,$$

és itt

$$\frac{\partial (f^i \circ \pi_m \circ u)}{\partial u^j}(p) := D_j(f^i \circ \pi_m \circ u \circ u^{-1})(u(p)) = D_j(f^i \circ \pi_m)(u(p)) \overset{\mathbf{1.3.}}{=}$$
$$\sum_{k=1}^m D_k f^i(\pi_m(u(p))) D_j(e^k \circ \pi_m)(u(p)),$$

aholt most $(e^k)_{k=1}^m$ $\mathbb{R}^m$ kanonikus koordinátarendszere. Mivel $D_j(e^k \circ \pi_m) = 0$, ha $j \in \{m+1, \dots, n\}$, következik, hogy

$$(d(f^i \circ \pi_m \circ u))_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (f^i \circ \pi_m \circ u)}{\partial u^j}(p)(du^j)_p =: \sum_{j=1}^m \alpha_j^i (du^j)_p.$$

Ezzel a $(dz^i)_p$-re vonatkozó formula igazolást nyert. Ebből kiolvasható, hogy a $z^1, \dots, z^n$ függvények függetlenek p-ben, és így **9.2.1.** értelmében létezik a p

pontnak olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy $(\mathcal{U},(z^i)_{i=1}^n)$ térképe N-nek. Mivel M topologikus altere N-nek, $\mathcal{U}$ megválasztható úgy, hogy $\mathcal{U}\cap M\subset\mathcal{V}$ teljesüljön.

$$\mathcal{O}:=(u^1\circ j,\dots,u^m\circ j)\restriction(\mathcal{U}\cap M)\subset\mathbb{R}^m$$

nyílt halmaz, ezért $\mathcal{U}$ esetleges összehúzásával az is elérhető, hogy

$$(u^1\circ j,\dots,u^m\circ j)(\mathcal{U})\subset\mathcal{O}$$

teljesüljön. Ekkor azonban tetszőleges $i\in\{m+1,\dots,n\}$ index és $q\in\mathcal{U}\cap M$ pont esetén

$$z^i(q):=u^i(q)-f^i\circ\pi_m(u(q))=u^i(q)-f^i\circ\pi_m\circ u\circ j(q)=u^i(q)-f^i\circ\widetilde{u}(q)=\\ u^i(q)-u^i\circ j\circ\widetilde{u}^{-1}(\widetilde{u}(q))=u^i(q)-u^i(q)=0,$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{U}\cap M$ benne van $\mathcal{U}$

$$S:=\left\{q\in\mathcal{U}|z^{m+1}(q)=\dots=z^n(q)=0\right\}$$

z-koordinátaszeletében. Megfordítva, ellenőrizhető, hogy $S\subset\mathcal{U}\cap M$ is fennáll, tehát $S=\mathcal{U}\cap M$. □

10.4.1. Legyen M részsokasága az N sokaságnak. Ha $\varphi:L\to N$ olyan sima leképezés, amelyre $\varphi(L)\subset M$ teljesül, akkor a

$$\overline{\varphi}:L\to M\ ,\ p\mapsto\overline{\varphi}(p):=\varphi(p)$$

indukált leképezés is sima.

Bizonyítás. Tekintve egy $q\in L$ pontot, válasszunk a $\varphi(p)\in N$ pont körül egy M-hez adaptált $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Simasága miatt a $\varphi:L\to N$ leképezés folytonos (**4.1.1.**), s mivel M topologikus altere N-nek, a $\overline{\varphi}:L\to M$ leképezés is folytonos. Így létezik a q pontnak olyan $\mathcal{V}\subset L$ környezete, hogy $\varphi(\mathcal{V})\subset\mathcal{U}\cap M$. Mivel az $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-hez adaptált, a **10.3.** (2)-ben mondottak figyelembevételével $(u^1,\dots,u^m)\restriction\mathcal{U}\cap M$ lokális koordinátarendszer M-en. Tekintve a $j:M\to N$ kanonikus inklúziót,

$$(u^i\restriction\mathcal{U}\cap M)\circ\overline{\varphi}=u^i\circ j\circ\overline{\varphi}=u^i\circ\varphi\ ;\ i\in\{1,\dots,m\}.$$

Itt az $u^i\circ\varphi$ függvények simák, hiszen sima leképezések kompozíciói. Azt kaptuk tehát, hogy a $\overline{\varphi}:L\to M$ leképezés kompozíciója egy tetszőleges $\overline{\varphi}(q)=\varphi(q)\in M$ pont körüli térkép koordinátafüggvényeivel sima, amiből következik $\overline{\varphi}$ simasága. □

10.4.2. Egy sokaság egy részhalmaza legfeljebb egyféleképpen tehető részsokasággá.

Bizonyítás. Ha egy N sokaság egy M részhalmaza részsokaság, akkor **10.1.** (1) értelmében M-nek az altér-topológiával kell rendelkeznie. Tegyük fel, hogy M-en kijelöltünk két atlaszt, amelyek M-et az N sokaság egy M_1, ill. M_2 részsokaságává teszik. Ekkor mind az $M_1\to N$, mind az $M_2\to N$ kanonikus inklúzió sima leképezés, s így **10.4.1.** alapján a $M_1\to M_2$ és a $M_2\to M_1$ identikus leképezés egyaránt sima. Így ezek az izomorfizmusok egymáshoz inverz diffeomorfizmusok, amiből következik, hogy M_1 és M_2 sokaság-struktúrája azonos. □

A most tett észrevétel alapján értelmesen szólhatunk arról, hogy egy sokaság egy részhalmaza részsokaság (ill. hogy nem az).

10.5. Egy N sokaság egy M részhalmaza akkor és csak akkor m-dimenziós részsokasága N-nek, ha minden pontja körül megadható N-nek olyan M-hez adaptált térképe, amely m-dimenziós szeletet származtat.

Bizonyítás. **10.4.** értelmében a feltétel szükséges. Az elegendőség igazolása céljából tegyük fel, hogy N n-dimenziós sokaság, és hogy $M \subset N$ rendelkezik a mondott tulajdonsággal. Lássuk el M-et az altér-topológiával. Tekintve egy tetszőleges $p \in M$ pontot, jelöljünk ki $p = j(p) \in N$ körül olyan $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ p-középpontú térképet, hogy $\mathcal{U} \cap M$ a

$$\left\{q \in \mathcal{U} | u^i(q) = 0 \ , \ i \in \{m+1, \dots, n\}\right\}$$

szelet legyen. Mivel $u = (u^1, \dots, u^n)$ homeomorfizmus,
$u_M := (u^1, \dots, u^m) \restriction \mathcal{U} \cap M$ homeomorfizmusa $\mathcal{U} \cap M$-nek az $u(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m$ nyílthalmazra, ahol $\mathbb{R}^m$-et az $\mathbb{R}^n$ tér $(\alpha^1, \dots, \alpha^m, 0, \dots, 0)$ alakú pontjai által alkotott altérként fogjuk fel.

Ellenőrizhető, hogy az így nyert térképek M-nek egy m-dimenziós atlaszát határozzák meg, miáltal M m-dimenziós sokasággá válik. Azt kell még belátni, hogy ez a sokaság az N sokaságnak részsokasága. Tekintsük ismét az okoskodásunk elején szerepeltetett $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ekkor az

$$u^i \restriction \mathcal{U} \cap M = u^i \circ j \ , \ i \in \{1, \dots, m\}$$

függvények simák, hiszen ezek alkotják az u_M koordinátázást. Ebből következik, hogy a $j : M \to N$ inklúzió sima leképezés (v.ö. **10.4.1.** bizonyításával). j M minden pontjában immerzió, következményeként a **9.3.**-beli (3) $\to$ (1) implikációnak. □

10.6. Egy $\varphi \in C^\infty(N, Q)$ sima leképezésnek egy $q \in Q$ pont *reguláris érték*e, ha φ a $\varphi^{-1}(q)$ őskép minden pontjában szubmerzió.

10.6.1. Ha N n-dimenziós, Q k-dimenziós sokaság, $\varphi \in C^\infty(N, Q)$, és $q \in Im(\varphi)$ reguláris értéke φ-nek, akkor $\varphi^{-1}(q)$ $(n-k)$-dimenziós részsokasága N-nek.

Bizonyítás. Legyen $(y^1, \dots, y^k)$ q-középpontú lokális koordinátarendszere Q-nak. Mivel φ szubmerzió a $\varphi^{-1}(q)$ őskép pontjaiban, tetszőleges $p \in \varphi^{-1}(q)$ pont esetén **9.2.2.** alapján az

$$u^{n-k+1} := y^1 \circ \varphi, \dots, u^n := y^k \circ \varphi$$

függvények egy p körüli $u = (u^1, \dots, u^{n-k}, u^{n-k+1}, \dots, u^n)$ lokális koordinátarendszerré egészíthetők ki; legyen ezek tartománya $\mathcal{U}$. Ekkor

$$\mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(q) = \left\{a \in \mathcal{U} | u^{n-k+1}(a) = \dots = u^n(a) = 0\right\},$$

tehát $\mathcal{U} \cap \varphi^{-1}(q)$ u-koordinátaszelete $\mathcal{U}$-nak, maga $(\mathcal{U}, u)$ pedig $\varphi^{-1}(q)$-hoz adaptált térképe N-nek. Mivel ilyen térkép minden $p \in \varphi^{-1}(q)$ pont körül létezik, **10.5.** értelmében $\varphi^{-1}(q)$ részsokasága N-nek, mégpedig $(n-k)$-dimenziós részsokasága, mert a szeletek $(n-k)$-dimenziósak. □

10.6.2. Egy n-dimenziós sokaság $(n-1)$-dimenziós részsokaságait *hiperfelület*ekként is említjük. Ha $f \in C^\infty(M)$, $\lambda \in Im(f)$ és tetszőleges $p \in f^{-1}(\lambda)$ pontban $(df)_p \neq 0$, akkor $f^{-1}(\lambda)$ hiperfelülete M-nek, amelyet f egy *szint-hiperfelület*ének hívunk.

A tett kijelentés igazolása céljából tekintsük az $\mathbb{R}$ 1-dimenziós sokaság (r) kanonikus koordinátarendszerét. Ekkor $r \circ f = f$, és így $(df)_p \neq 0$ miatt $(r \circ f)$ független rendszer a p pontban. Ez a független rendszer **9.2.2.** miatt p körüli lokális koordinátarendszerré egészíthető ki, ami **9.4.** alapján ekvivalens azzal, hogy f szubmerzió p-ben. Mivel ez a tulajdonság $f^{-1}(\lambda)$ minden pontjában teljesül, **10.6.1.** biztosítja, hogy $f^{-1}(\lambda)$ hiperfelülete M-nek.

10.7. Legyen M részsokasága az N sokaságnak. Azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező érintő vektormezője M-nek, ha minden $p \in M$ pont esetén $X_p \in T_pM$ (élve azzal a **10.1.3.**-ban említett megállapodással, hogy T_pM altere T_pN-nek). M-hez adaptált térkép alkalmazásával adódik, hogy ekkor $X \restriction M : M \to TM$ sima leképezés, és így $X \in \mathfrak{X}(M)$. Amennyiben $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ érintő vektormezői M-nek, úgy $[X,Y]$ is az, és $[X,Y] \restriction M = [X \restriction M, Y \restriction M]$. Ez **7.6.2.** (3) alapján következménye annak, hogy $X \restriction M \underset{j}{\sim} X$ és $Y \restriction M \underset{j}{\sim} Y$ (v.ö. **7.6.5.**).

11. Közönséges differenciálegyenletek

11.1. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezés. Egy

$$x' = f(x)$$

alakú képletet, ahol x és x' egy-egy szimbólum, $\mathcal{U}$ fölötti *közönséges, elsőrendű, autonom differenciálegyenlet*nek, röviden *differenciálegyenlet*nek nevezünk. Azt mondjuk, hogy egy $\gamma : I \to \mathcal{U}$ C^k-osztályú leképezés ($k \geq 1$, $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum) *megoldás*a az $x' = f(x)$ differenciálegyenletnek, ha

$$\forall t \in I : \gamma'(t) = f(\gamma(t)),$$

röviden, ha $\gamma' = f \circ \gamma$. Ekkor a γ leképezést a differenciálegyenlet egy *integrálgörbé*jének is hívjuk. Egy $\gamma : I \to \mathcal{U}$ megoldásra vonatkozó *kezdeti feltétel* $\gamma'(t_0) = p_0$ alakú feltétel, ahol $t_0 \in I$ adott paraméter, $p_0 \in \mathcal{U}$ adott pont.

11.1.1. Egy $x' = f(x)$ differenciálegyenlet egy $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ megoldásánál az I intervallum nyílt, zárt, félig zárt, $]\alpha, \infty[$ és $[\alpha, \infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ alakú, valamint a teljes valós egyenes egyaránt lehet. A γ integrálgörbe minden

$$\widetilde{\gamma} : I + \lambda := \{t + \lambda \in \mathbb{R} | t \in I\} \to \mathcal{U} \text{ , } t \mapsto \widetilde{\gamma}(t) := \gamma(t - \lambda) \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

alakú átparaméterezettje is integrálgörbe. Erre tekintettel a továbbiakban az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy az I intervallum tartalmazza a 0-t, és $\gamma(0) = p$ alakú kezdeti feltételt szerepeltethetünk. Egy ilyen kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást a *p ponton átmenő*, vagy a *p pontból induló integrálgörbe*ként említünk.

11.1.2. Egy differenciálegyenletnek több olyan megoldása is létezhet, amely kielégít egy adott kezdeti feltételt, ezért ahhoz, hogy egy előírt kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás *egyértelműségé*t biztosítsuk, az $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ leképezésre további megszorítással kell élni. Ebből a célból elegendő azt megkövetelni, hogy f C^1-osztályú legyen, kényelmi okokból azonban feltesszük a továbbiakban, hogy f sima. Megmutatható ugyanakkor, hogy az $x' = f(x)$ differenciálegyenletnek már f folytonossága esetén is *létezik* tetszőlegesen előírt kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

11.2. *(Lokális egzisztencia-unicitás és simasági tétel.)*
Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s tegyük fel, hogy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ sima leképezés.

(1) *(Egzisztencia)* Az $x' = f(x)$ differenciálegyenletnek tetszőlegesen adott $p \in \mathcal{U}$ ponthoz *létezik* p-ből induló sima integrálgörbéje.

(2) *(Unicitás)* Az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet bármely két p-ből induló (sima) integrálgörbéje egybeesik értelmezési tartományaik metszetén.

(3) *(Sima függés a kezdeti feltételektől)* Jelölje γ_p az $x' = f(x)$ differenciálegyenlet p-ből induló integrálgörbéjét. Megadható a p pontnak olyan $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ környezete, valamint egy ϵ pozitív valós szám úgy, hogy a

$$\varphi : \mathcal{V} \times] - \epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^n \ , \ (q, t) \mapsto \varphi(q, t) := \gamma_q(t)$$

leképezés sima.

12. Vektormezők integrálgörbéi

12.1. Legyen M egy sokaság, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Egy $\gamma : I \to M$ görbét az X vektormező egy *integrálgörbéjé*nek nevezünk, ha $\dot{\gamma} = X \circ \gamma$. Amennyiben $0 \in I$, úgy a $p := \gamma(0)$ pontot az integrálgörbe kezdőpontjaként is említjük, és a *p pontból induló integrálgörbé*ről szólunk.

12.1.1. Legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaságon. Egy $\gamma : I \to M$ görbe akkor és csak akkor integrálgörbéje egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek $\mathcal{U}$ fölött, ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) koordinátafüggvényei $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ fölött eleget tesznek a

$$\gamma^{i'} = f^i \circ (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$$

relációnak, ahol $f^i := Xu^i \circ u^{-1}$, vagyis ha

$$u \circ \gamma : \gamma^{-1}(\mathcal{U}) \subset I \to u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$$

integrálgörbéje az

$$f := (f^1, \dots, f^n) : u(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

leképezés segítségével képzett $x' = f(x)$ differenciálegyenletnek.

Valóban, tetszőleges $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{U})$ esetén egyrészt **6.5.2.** alapján

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{i'}(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_{\gamma(t)},$$

másrészt **7.1.1.** és a **7.1.2.** bizonyításában látottak figyelembevételével

$$X_{\gamma(t)} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n}(Xu^i)(\gamma(t))\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n}(Xu^i)\circ u^{-1}\circ(u\circ\gamma)(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\circ(\gamma^1,\dots,\gamma^n)(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma(t)},$$

így $\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \Longleftrightarrow \gamma^{i'}(t) = f^i\circ(\gamma^1,\dots,\gamma^n)(t)$ $(i\in\{1,\dots,n\})$.

12.1.2. (*Az eltolási lemma*, v.ö. **11.1.1.**) Ha $\gamma : I \to M$ integrálgörbéje az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek, akkor tetszőleges λ valós szám esetén a

$$\widetilde{\gamma} : I+\lambda \to M\ ,\ t \mapsto \widetilde{\gamma}(t) := \gamma(t-\lambda)$$

átparaméterezett görbe is az.

Tekintsük ennek igazolásához a $T_{-\lambda} : t\in\mathbb{R} \mapsto t-\lambda \in \mathbb{R}$ transzlációt. Ennek segítségével $\widetilde{\gamma} = \gamma\circ T_{-\lambda}$ írható, és így **6.5.3.** alapján tetszőleges $t \in I+\lambda$ paraméterre $\dot{\widetilde{\gamma}}(t) = (T_{-\lambda})'(t)\dot\gamma(T_{-\lambda}(t)) = (\dot\gamma\circ T_{-\lambda})(t)$, következésképpen

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = \dot\gamma\circ T_{-\lambda} = X\circ\gamma\circ T_{-\lambda} = X\circ\widetilde{\gamma}.$$

Az eltolási lemma alapján a vektormezők integrálgörbéivel kapcsolatban is feltehetjük, hogy az értelmezési tartományuk tartalmazza a 0-t, v.ö. **11.1.1.**.

12.2. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor tetszőleges $p \in M$ ponthoz létezik egy és csak egy olyan $\gamma : I \to M$ integrálgörbéje X-nek, hogy $0 \in I$ és $\gamma(0) = p$.

Ez **12.1.1.** alapján következik **11.2.**/(1),(2)-ből.

12.3. *(Vektormezők integrálgörbéinek unicitása.)* Ha $\gamma_1 : I \to M$ és $\gamma_2 : I \to M$ integrálgörbéi egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek, és valamely $t_0 \in I$ pontban $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ teljesül, akkor $\gamma_1 = \gamma_2$.

Bizonyítás. Egyszerű folytonossági érveléssel adódik, hogy γ_1 ésγ_2 $A := \{t\in I|\gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ egybeesési halmaza zárt halmaz. Belátjuk, hogy A egyidejűleg nyílt halmaz is. Legyen $s \in A$ tetszőleges. Az eltolási lemma értelmében $\widetilde{\gamma_1} := \gamma_1\circ T_s$ és $\widetilde{\gamma_2} := \gamma_2\circ T_s$ is integrálgörbéje X-nek, amelyekre

$$\widetilde{\gamma_1}(0) = \gamma_1(s) = \gamma_2(s) = \widetilde{\gamma_2}(0)$$

teljesül. Ebből a **12.2.**-beli egyértelműség tulajdonság alapján következik, hogy $\widetilde{\gamma_1}$ és $\widetilde{\gamma_2}$ egybeesik a 0 egy környezetében, és így γ_1 és γ_2 is egybeesik $s \in A$ egy környezetében. Ez azt jelenti, hogy A nyílt halmaz: tetszőleges „s" pontját annak egy környezetével együtt tartalmazza. Ily módon A nemüres zárt-nyílt halmaza az I nyílt intervallumnak, amely összefüggő halmaz; ez csak úgy lehetséges, hogy $A = I$. □

12.3.1. Rögzítve egy $p \in M$ pontot, tekintsük az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező mindazon $\gamma : I_\gamma \to M$ integrálgörbéit, amelyek *p-ből indulnak*, vagyis amelyekre $\gamma(0) = p$ teljesül. Ha α és β két ilyen integrálgörbe, akkor **12.3.** miatt $\alpha \restriction I_\alpha \cap I_\beta = \beta \restriction I_\alpha \cap I_\beta$. Ebből **4.1.4.** alapján következik, hogy ezek az integrálgörbék egyetlen

$$\gamma_p : I_p \to M\ ,\ I_p := \bigcup I_\gamma$$

integrálgörbét határoznak meg; ezt az X vektormező p-ből induló *maximális integrálgörbé*jének nevezzük. (γ_p értelmezési tartománya a lehető legbővebb, de nem szükségképpen a teljes valós egyenes!)

12.3.2. Ha egy vektormező két maximális integrálgörbéje metszi egymást, akkor ezek csak paraméterezésben térnek el egymástól. Nevezetesen: ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\gamma_p : I_p \to M$ a p pontból induló maximális integrálgörbéje X-nek, $q := \gamma_p(s)$ $(s \in I_p)$, akkor

$$s + I_q = I_p \text{ és } \gamma_q = \gamma_p \circ T_s.$$

Bizonyítás. A

$$\widetilde{\gamma} := \gamma_q \circ T_{-s} : s + I - q \to M$$

görbe az eltolási lemma értelmében integrálgörbéje X-nek. Mivel $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma_q(0) = q = \gamma_p(s)$, **12.3.** miatt $(s + I_q) \cap I_p$ fölött $\widetilde{\gamma}$ és γ_p egybeesik. Így a **12.3.1.**-ben látottak szerint az $(s+I_q) \cup I_p$ halmazon $\widetilde{\gamma}$ és γ_p egyetlen integrálgörbévé rakható össze. I_p maximalitása miatt $s + I_q \subset I_p$, így

$$\forall t \in I_q : \gamma_p(s + t) = \widetilde{\gamma}(s + t) = (\gamma_q \circ T_{-s})(s + t) = \gamma_q(t),$$

azaz $\gamma_q = \gamma_p \circ T_s$. Másrészt I_q is maximális, ezért $-s + I_p \subset I_q$, ill., ekvivalens módon, $s + I_q \subset I_p$. □

12.3.3. Egy nem konstans $\gamma : \mathbb{R} \to M$ görbét *periodikus*nak nevezünk, ha van olyan k pozitív valós szám, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ paraméterre $\gamma(t + k) = \gamma(t)$ teljesül; e pozitív számok legkisebbikét a görbe *periódus*ának hívjuk. Azt mondjuk, hogy egy k periódusú $\gamma : \mathbb{R} \to M$ görbe *egyszerű periodikus*, ha valamely $[a, a + k[$ intervallumon injektív. **12.3.2.** alapján következik, hogy *egy vektormező maximális integrálgörbéje csakis injektív, egyszerű periodikus vagy konstans görbe lehet.*

12.4. Egy vektormező *teljes*, ha valamennyi maximális integrálgörbéje értelmezve van az összes valós számok halmazán. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ *teljes vektormező folyama* a

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M \ , \ (t, p) \mapsto \varphi(t, p) := \gamma_p(t)$$

leképezés, ahol γ_p X p-ből induló maximális integrálgörbéje.

Rögzített $p \in M$ pont mellett a $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t, p) \in M$ leképezés éppen az γ_p integrálgörbe. Ha egy t valós számot rögzítünk, akkor egy $\varphi_t : M \to M$, $p \mapsto \varphi_t(p) := \varphi(t, p)$ leképezéshez jutunk, amely „a p pontot t ideig engedi folyni”. Azt mondjuk, hogy φ_t a φ folyam t*-edik stádium*a, és X folyamára olykor a stádiumok $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ halmazaként hivatkozunk.

12.4.1. Ha $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ egy teljes vektormező folyama, akkor

(1) $\varphi_0 = 1_M$;

(2) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$, következésképpen $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$ minden $s, t \in \mathbb{R}$-re (a stádiumok kommutálnak);

(3) valamennyi stádium diffeomorfizmus, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$-re $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

Bizonyítás. (1) Tetszőleges $p \in M$ esetén $\varphi_0(p) := \varphi(0,p) = \gamma_p(0) = p$.

(2) Tekintve ismét egy $p \in M$ pontot,

$$\begin{aligned}\varphi_t \circ \varphi_s(p) =: \varphi_t(q) = \gamma_q(t) &\overset{\mathbf{12.3.2.}}{=} \gamma_p \circ T_s(t) = \gamma_p(t+s) = \\ &= \gamma_{t+s}(p) = \gamma_{s+t}(p) = \gamma_s \circ \gamma_t(p).\end{aligned}$$

(3) **11.2.**/(3) biztosítja a stádiumok simaságát, a megelőző két tulajdonság alapján pedig $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$, és így $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$. □

12.5. Egy M sokaságon adott *egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport*on olyan

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M \ , \ (t,p) \mapsto \varphi(t,p)$$

sima leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$(\mathrm{FL})_1$ $\varphi(0,p) = p$, $p \in M$;

$(\mathrm{FL})_2$ $\varphi(s, \varphi(t,p)) = \varphi(s+t,p)$; $s,t \in \mathbb{R}$, $p \in M$.

Bevezetve tetszőlegesen rögzített $t \in \mathbb{R}$ mellett a

$$\varphi_t : M \to M \ , \ p \mapsto \varphi_t(p) := \varphi(t,p)$$

leképezést, ezek a feltételek a

$(\mathrm{FL})_1$ $\varphi_0 = 1_M$,

$(\mathrm{FL})_2$ $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$; $s,t \in \mathbb{R}$

alakot öltik. A feltételek miatt a φ_t transzformációk mindegyike diffeomorfizmus, $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$. Rögzítve egy $p \in M$ pontot, a

$$\gamma_p : \mathbb{R} \to M \ , \ t \mapsto \gamma_p(t) := \varphi(t,p)$$

leképezés görbe, a diffeomorfizmus-csoport p-n átmenő *áramvonal*a, $Im(\gamma_p) = \gamma_p(\mathbb{R}) = \{\varphi(t,p) \in M | t \in \mathbb{R}\}$ a p pont *orbit*ja.

12.4.1. értelmében egy teljes vektormező folyama egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport, amelynek áramvonalai a vektormező maximális integrálgörbéi.

12.5.1. Egy $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport *sebességvektormező*je vagy *infinitezimális generátor*a a

$$\dot{\varphi} : M \to TM \ , \ p \mapsto \dot{\varphi}(p) := \dot{\gamma}_p(0)$$

leképezés. Ez *vektormező M-en, amelynek integrálgörbéi az áramvonalak.*

Bizonyítás. Vezessük be az $X := \dot{\varphi}$ jelölést.

(1) Tetszőleges $p \in M$ esetén $X_p = \dot{\gamma}(p) \in T_{\gamma_p(0)}M \overset{(\mathrm{FL})_1}{=} T_pM$; így $\tau \circ X = 1_M$, X tehát durva vektormező.

(2) Legyen $(\mathcal{U}, u)$ egy térkép M-en. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ esetén $Xf \in C^\infty(\mathcal{U})$, ebből **7.1.2.** alapján következik X simasága.

X definíciója értelmében egyrészt

$$Xf(p) = X_p(f) = \dot{\varphi}(p)(f) = \dot{\gamma}_p(0)(f) \overset{\mathbf{6.5.1.}}{=} (f \circ \gamma_p)'(0)\ ,\ p \in M.$$

Tekintsük másrészt az $\mathbb{R}\times M$ szorzatsokaság $(0,p)$ pontja körül az $(\mathbb{R}\times\mathcal{U},(r,u))$ térképet, ahol $r := 1_{\mathbb{R}}$. A $\frac{\partial}{\partial r} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ vektormező a **7.7.**-ben mondottak szerint $\mathbb{R}\times M$-en az

$$i_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial r} : (t,q) \in \mathbb{R}\times M \mapsto \left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_t, 0_q\right) \in T_{(t,q)}(\mathbb{R}\times M)$$

vektormezőt származtatja. $f\circ\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$, így $i_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial r}(f\circ\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathcal{U})$. **6.3.1.** alkalmazásával

$$i_{\mathbb{R}}\tfrac{\partial}{\partial r}(f\circ\varphi)(0,p) = \left(\left(\tfrac{\partial}{\partial r}\right)_0, 0_p\right)(f\circ\varphi) = \left(\tfrac{\partial}{\partial r}\right)_0(f\circ\varphi\circ j_p) + 0_p(f\circ\varphi\circ j_0) =$$
$$\left(\tfrac{\partial}{\partial r}(f\circ\varphi\circ j_p)\right)(0) = (f\circ\varphi\circ j_p)'(0) = (f\circ\gamma_p)'(0) = Xf(p),$$

amiből következik Xf simasága $\mathcal{U}$ fölött.

(3) Telintsük φ-nek egy $p\in M$ ponton átmenő

$$\gamma_p : t\in\mathbb{R} \mapsto \gamma_p(t) := \varphi_p(t) := \varphi(t,p) \in M$$

áramvonalát. Állítjuk, hogy $X\circ\gamma_p = \dot{\gamma}_p$. Mivel

$$X\circ\gamma_p(0) = X_p := \dot{\varphi}(p) := \dot{\gamma}_p(0),$$

a kívánt reláció a 0-ban automatikusan érvényes. Legyen $t\in\mathbb{R}$ tetszőleges, és vezessük be a $q := \gamma_p(t)$ rövidítést. Ekkor

$$\forall s\in\mathbb{R} : \gamma_q(s) := \varphi(s,q) = \varphi(s,\gamma_p(t)) = \varphi(s,\varphi(t,p)) \overset{(\mathrm{FL})_2}{=} \varphi(s+t,p) = \gamma_p(s+t),$$

így $\dot{\gamma}_q(0) = \dot{\gamma}_p(t)$. Felhasználva ezt az észrevételt,

$$\forall t\in\mathbb{R} : X\circ\gamma_p(t) = X_q := \dot{\varphi}(q) = \dot{\gamma}_q(0) = \dot{\gamma}_p(t)$$

-és ezt kellett belátnunk. □

12.6. Legyen M egy sokaság. Az $\mathbb{R}\times M$ szorzatsokaság egy W részhalmazát *radiális*nak nevezzük, ha minden $p\in M$ pont esetén

$$W\cap(\mathbb{R}\times\{p\}) = I_p\times\{p\}\ ,\ \text{vagy}\ W\cap(\mathbb{R}\times\{p\}) = \emptyset,$$

ahol $I_p \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum. Radiális halmazok uniója és véges sok radiális halmaz metszete is radiális.

12.6.1. Minden $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz létezik a $\{0\}\times M \subset \mathbb{R}\times M$ halmaznak egy W radiális környezete, valamint egy $\varphi : W\to M$ sima leképezés úgy, hogy rögzített $p\in M$ mellett

$$\gamma_p : t\in I_p \mapsto \gamma_p(t) := \varphi(t,p)$$

p-ből induló integrálgörbéje X-nek:

$$\dot{\gamma}_p = X\circ\gamma_p\ ,\ \gamma_p(0) = 0.$$

A φ leképezést az X vektormező egyértelműen meghatározza.

Azt mondjuk, hogy $\varphi : W \subset \mathbb{R} \times M$ az X vektormező által generált *lokális folyam.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{U}_\alpha, u_\alpha)_{\alpha \in A}$ atlasza M-nek. **11.2.**, **12.2.** és **12.3.** alapján következik, hogy az állítás az $\mathcal{U}_\alpha$ környezetek mindegyikében érvényes. Így tetszőleges $\alpha \in A$ esetén létezik a $\{0\} \times \mathcal{U}_\alpha$ halmaznak egy $W_\alpha \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U}_\alpha$ radiális környezete, valamint egy $\varphi_\alpha : W_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ sima leképezés úgy, hogy ha $(\gamma_\alpha)_p(t) := \varphi_\alpha(t,p)$, akkor

$$\forall (t,p) \in W_\alpha : (\dot{\gamma_\alpha})_p(t) = X_{(\gamma_\alpha)_p(t)},$$

és $(\gamma_\alpha)_p(0) = p$, $p \in \mathcal{U}_\alpha$.

Legyen $W := \bigcup\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$. Ekkor W radiális környezete a $\{0\} \times M$-nek $\mathbb{R} \times M$-ben, és $p \in W_\alpha \cap W_\beta$ $(\alpha, \beta \in A)$ esetén

$$(W_\alpha \cap W_\beta) \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I \times \{p\},$$

ahol $I \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum. A

$$(\gamma_\alpha)_p : I \to M \text{ és a } (\gamma_\beta)_p : I \to M$$

leképezés egyaránt integrálgörbéje X-nek, s mivel

$$(\gamma_\alpha)_p(0) = (\gamma_\beta)_p(0) = p,$$

mindkét integrálgörbe ugyanabból a p pontból indul ki. Ebből **12.3.** alapján az következik, hogy $(\gamma_\alpha)_p$ és $(\gamma_\beta)_p$ egybeesik I fölött, s ennélfogva egyben

$$\varphi_\alpha \upharpoonright W_\alpha \cap W_\beta = \varphi_\beta \upharpoonright W_\alpha \cap W_\beta \ ; (\alpha, \beta) \in A \times A.$$

Így azonban **4.1.4.** értelmében a $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ leképezéscsalád egy $\varphi : W \to M$ sima leképezést határoz meg, amely a konstrukcióból kiolvashatóan rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. φ egyértelműsége szintén világos **12.3.** alapján. □

12.6.2. Megtartva az előző pont feltételeit és jelöléseit, ha (t,p), $(s, \varphi(t,p))$ és $(t+s, p)$ egyaránt W-be tartozik, akkor

$$\varphi(s, \varphi(t,p)) = \varphi(t+s, p).$$

Bevezetve a **12.4.**-ben látottak szerint a $\varphi_t : p \mapsto \varphi_t(p) := \varphi(t,p)$ leképezést, ez a reláció a

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$$

alakba írható.

Bizonyítás. Mivel $W \subset \mathbb{R} \times M$ radiális környezete $\{0\} \times M$-nek, van olyan a 0-t tartalmazó I nyílt intervallum, hogy

$$s \in I \ , (t+I) \times \{p\} \subset W \text{ és } I \times \varphi(t,p) \subset W.$$

Tekintsük az X vektormező

$$\gamma_1 : \tau \in I \mapsto \gamma_1(\tau) := \varphi(\tau, \varphi(t,p)) = \gamma_{\varphi(t,p)}(\tau)$$

és

$$\gamma_2 : \tau \in I \mapsto \gamma_2(\tau) := \varphi(t+\tau, p) = \gamma_p(t+\tau)$$

integrálgörbéjét. Mivel

$$\gamma_1(0) = \gamma_{\varphi(t,p)}(0) = \varphi(t,p) = \gamma_2(0),$$

12.3. alapján γ_1 és γ_2 egybeesése következik. Így, speciálisan, $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$, ami a kívánt $\varphi(s, \varphi(t,p)) = \varphi(t+s, p)$ relációt adja. □

12.7. (*A menekülési lemma.*) Ha γ olyan maximális integrálgörbéje egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek, amelynek értelmezési tartománya nem a teljes valós számegyenes, akkor γ képét M egyetlen kompakt részhalmaza sem tartalmazhatja.

Bizonyítás. Jelölje $]a,b[$, ahol $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, γ maximális értelmezési tartományát, s legyen $p := \gamma(0)$. Tekintsük az X vektormező

$$\gamma : W \subset \mathbb{R} \times M \to M$$

lokális folyamát. A maximális integrálgörbe unicitása miatt $\gamma = \gamma_p$, ahol $\gamma_p(t) := \varphi(t,p)$; $(t,p) \in W$. Tegyük fel, hogy $b < \infty$, de, ellentétben az állítással, $\gamma(]a,b[)$ benne van egy $K \subset M$ kompakt halmazban. (Az érvelés az $a > -\infty$ esetben hasonló.) Legyen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat, hogy

$$t_n \in]a,b[\ (n \in \mathbb{N}^*) \text{ és } \lim_{n\to\infty} t_n = b.$$

Ekkor $(\gamma(t_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ K-beli pontsorozat. Mivel megszámlálható bázisú Hausdorff-térben a kompaktság ekvivalens azzal, hogy minden sorozatnak van konvergens részsorozata, $(\gamma(t_n))$-nek megadható egy $q \in K$ ponthoz konvergáló részsorozata. Jelöljük ki a q pont egy $\mathcal{U}$ környezetét, és adjunk meg egy ϵ pozitív valós számot úgy, hogy φ értelmezve legyen $]-\epsilon,\epsilon[\times\mathcal{U}$ fölött. Legyen $n \in \mathbb{N}^*$ olyan, hogy $\gamma(t_n) \times \mathcal{U}$ és $b - \epsilon < t_n$. Értelmezzünk egy $\sigma : [a, t_n + \epsilon[\to M$ leképezést a

$$\sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), \text{ ha } a < t < b; \\ \varphi_{t-t_n} \circ \varphi_{t_n}(p), \text{ ha } t_n - \epsilon < t < t_n + \epsilon \end{cases}$$

előírással. Ekkor $t \in]a,b[\ \cap \ ]t_n - \epsilon, t_n + \epsilon[$ esetén **12.6.2.** alkalmazásával

$$\sigma(t) = \varphi_{t-t_n} \circ \varphi_{t_n}(p) = \varphi_t(p) = \gamma_p(t) = \gamma(t),$$

σ tehát jól definiált görbe, mégpedig X-nek integrálgörbéje. Ez az integrálgörbe kiterjesztése γ-nak, ami ellentmond $]a,b[$ maximalitásának. □

12.7.1. *Kompakt sokaságon minden vektormező teljes.*
Valóban, tegyük fel, hogy M kompakt sokaság, és legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$. A menekülési lemma értelmében nem létezhet X-nek olyan maximális integrálgörbéje, amelynek értelmezési tartománya nem a teljes valós egyenes, hiszen minden integrálgörbe képhalmaza benne van az M kompakt halmazban.

13. A horgász deriválás

13.1. (*A kiegyenesítési tétel.*) Ha X vektormező az M n-dimenziós sokaságon és $X_p \neq 0$, akkor a p pont körül megadható olyan $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép, hogy $X \upharpoonright \mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial u^1}$.

Bizonyítás. (1) Válasszunk első lépésként olyan $(\mathcal{V}, y) = (\mathcal{V}, (y^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül, hogy $y(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, és hogy

$$X_p, \left(\frac{\partial}{\partial y^2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p$$

bázisa T_pM-nek. Ilyen térkép létezését a lineáris algebrából jól ismert kicserélési tétel garantálja.

(2) Tekintsük az X vektormező

$$\varphi : W \subset \mathbb{R} \times M \to M \ , \ (t, p) \mapsto \varphi(t, p)$$

lokális folyamát. Az ennek segítségével az $\mathbb{R}^n$ tér origójának egy környezetében értelmezett

$$(a^1, a^2, \ldots, a^n) \mapsto f(a^1, a^2, \ldots, a^n) := \varphi(a^1, y^{-1}(0, a^2, \ldots, a^n)) \in M$$

leképezés differenciálható, és

$$f(0) = \varphi(0, y^{-1}(0, \ldots, 0)) = \varphi(0, p) = p.$$

(3) Megmutatjuk, hogy az $(f_*)_0 : T_0\mathbb{R}^n \to T_{f(0)}M = T_pM$ érintőleképezés a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_0\right)_{i=1}^n$ bázist ($(e^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere) a T_pM érintőtér (1)-ben kijelölt bázisába viszi át. A $\left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_0$ vektor érintővektora a

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ , \ t \mapsto \gamma_1(t) := (t, 0, \ldots, 0)$$

görbének a 0 helyen, ezért **6.5.4.** alapján $f_*\left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_0$ az $f \circ \gamma_1$ M-beli görbe érintővektora az $f \circ \gamma_1(0) = f(0) = p$ pontban. Ha a t paramétert a 0 elegendően kis környezetéből választjuk, akkor (**12.6.1.** jelöléseivel)

$$f \circ \gamma_1(t) = f(t, 0, \ldots, 0) := \varphi(t, y^{-1}(0, \ldots, 0)) = \varphi(t, p) =: \gamma_p(t),$$

$f \circ \gamma_1$ tehát éppen az X vektormező p-n átmenő integrálgörbéje. Így

$$(f_*)\left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_0 = \dot{\overline{f \circ \gamma_1}}(0) = \dot{\gamma}_p(0) = X_{\gamma_p(0)} = X_p.$$

Legyen az egyöntetűség kedvéért $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p := X_p$. Ha $i \in \{2, \ldots, n\}$, γ_i jelentse a

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_i(t) := (0, \ldots, \overset{i}{\breve{t}}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

görbét. Az előbbi módon kapjuk, hogy

$$(f_*)\left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_0 = \dot{\overline{f \circ \gamma_i}}(0) \ , \ i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Mivel elegendően kicsiny t-re

$$f \circ \gamma_i(t) = f(0, \ldots, \underbrace{t}_{i}, \ldots, 0) := \varphi(0, y^{-1}(0, \ldots, \underbrace{t}_{i}, \ldots, 0)) =$$
$$y^{-1}(0, \ldots, \underbrace{t}_{i}, \ldots, 0) = y^{-1} \circ \gamma_i(t),$$

6.5.2. alkalmazásával

$$\dot{\overbrace{f \circ \gamma_i}}(0) = \sum_{j=1}^{n} (y^j \circ y^{-1} \circ \gamma_i)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f \circ \gamma^i(0)} = \sum_{j=1}^{n} (e^j \circ \gamma_i)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \delta_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p .$$

Így tehát

$$(f_*)_0 \left(\frac{\partial}{\partial e^i}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p , \; i \in \{1, \ldots, n\} .$$

(4) A (3)-ban mondottakból következően $(f_*)_0 : T_0\mathbb{R}^n \to T_pM$ lineáris izomorfizmus, így az inverz-leképezés tétel (**6.1.8.**) alapján a $0 \in \mathbb{R}^n$ pontnak van olyan $\mathcal{U}_0$, a $p \in M$ pontnak pedig olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy $f \restriction \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmus. Ha $u := (f \restriction \mathcal{U}_0)^{-1}$, akkor $(\mathcal{U}, u)$ térkép p körül; azt ellenőrizzük végül, hogy ez a térkép rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Legyen $a := (a^1, a^2, \ldots, a^n) \in u(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkro egyrészt

$$(f_*)_a \left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_a = (u^{-1})_* \left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_a \overset{\textbf{6.1.5.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (u^j \circ u^{-1})}{\partial e^1}(a) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{f(a)} =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial e^j}{\partial e^1}(a) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{f(a)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_{f(a)}$$

adódik. Tekintsük másrészt a

$$\gamma : s \in]-\epsilon, \epsilon[\mapsto \gamma(s) := (a^1 + s, a^2, \ldots, a^n) \in u(\mathcal{U})$$

görbét, ahol ϵ alkalmas pozitív szám. γ 0-beli érintővektora $\left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_a$, s így $(f_*)_a \left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_a$ *az* $f \circ \gamma$ *görbe 0-beli érintővektora.* Ugyanakkor $f \circ \gamma$ X-nek az $f(a)$ ponton átmenő integrálgörbéje, mivel

$$f \circ \gamma(s) = f(a^1 + s, a^2, \ldots, a^n) := \varphi(a^1 + s, y^{-1}(0, a^2, \ldots, a^n)) =$$
$$\varphi_{a^1+s}(y^{-1}(0, a^2, \ldots, a^n)) \overset{\textbf{12.6.2.}}{=} \varphi_s \circ \varphi_{a_1}(y^{-1}(0, a^2, \ldots, a^n)) = \varphi_s(f(a)) =$$
$$\gamma_{f(a)}(s)$$

miatt

$$\dot{\overbrace{f \circ \gamma}}(0) = \dot{\gamma}_{f(a)}(0) = X_{f(a)}.$$

Összevetve a tett észrevételeket,

$$X_{f(a)} = \dot{\overbrace{f \circ \gamma}}(0) = (f_*)_a \left(\frac{\partial}{\partial e^1}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_{f(a)} ,$$

tehát $X \restriction \mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial u^1}$. □

13.2. Legyen V véges dimenziójú valós vektortér, ellátva a természetes topológiával (**3.4.2.**). Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to V$ egy leképezés, $s \in I$ tetszőlegesen rögzített, akkor képezhető a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(s+t) - f(s))$$

határérték. Létezése esetén ezt f *s-beli deriváltjának* nevezzük, és $f'(s)$-sel jelöljük. Ez a deriváltképzés egy M sokaság érintőtereiben is értelemszerűen működik; a segítségével leírunk egy eljárást, az ún. „horgász-deriválást”, amely tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $p \in M$ pont esetén „az Y vektormező X szerinti deriváltját” szolgáltatja a p pontban.

1. lépés Tekintjük az X vektormező

$$\varphi : W \subset \mathbb{R} \times M \to M \ , \ (t, q) \mapsto \varphi(t, q)$$

lokális folyamát. Követjük X p-n átmenő integrálgörbéjét egy $\varphi_t(p)$ pontig, és kiértékeljük az Y vektormezőt ebben a pontban.

2. lépés Visszahúzzuk az $Y_{\varphi_t(p)}$ vektort a T_pM érintőtérbe a φ_{-t} diffeomorfizmus érintőleképezése segítségével.

3. lépés T_pM-ben képezzük a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\varphi_{-t})_* \left(Y_{\varphi_t(p)} \right) - Y_p \right)$$

határértéket, azaz az

$$f_p :] - \epsilon, \epsilon[\to T_pM \ , \ t \mapsto f_p(t) := (\varphi_{-t})_* \left(Y_{\varphi_t(p)} \right) \ \ (\epsilon \in \mathbb{R}_+^*)$$

függvény 0-beli deriváltját.

Képletesen: A horgász a folyóparton ül. A folyam különféle objektumokat visz előtte, esetünkben az Y vektormezőt. Egy t időpillanatban beakasztja a horgát (1. lépés), maga elé rántja az objektumot (2. lépés), végül elvégzi a deriválást (3. lépés).

Kiderül, hogy *az eljárás eredménye az*$[X, Y]$ *vektormező* p*-ben fölvett értéke.*

13.2.1. Legyen X és Y vektormező az M sokaságon, és tekintsük az X vektormező $\varphi : W \subset \mathbb{R} \times M \to M$ lokális folyamát. Tetszőleges $p \in M$ pont esetén

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\varphi_{-t})_* \left(Y_{\varphi_t(p)} \right) - Y_p \right) .$$

Bizonyítás. Alkalmazva az $f_p(t) := (\varphi_{-t})_* \left(Y_{\varphi_t(p)} \right)$ rövidítést, azt kell igazolni, hogy $f_p'(0) = [X, Y]_p$.

1. eset: $X_p \neq 0$. Ekkor a kiegyenesítési tétel értelmében megadható a p pont körül olyan $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép, hogy $X \restriction \mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial u^1}$. Tekintsük, változatlan jelöléssel, X „p körüli”

$$\varphi :] - \epsilon, \epsilon[\times \mathcal{U} \to M \ , \ (t, q) \mapsto \varphi(t, q) =: \varphi_t(q) =: \gamma_q(t)$$

lokális folyamát. Megmutatjuk először, hogy φ az $\mathcal{U}$-beli pontoknak csakis az első koordinátáját változtatja meg, nevezetesen: tetszőleges $(t, p) \in] - \epsilon, \epsilon[\times \mathcal{U}$ esetén

$$u^1(\varphi_t(q)) = u^1(q) + t \ ; \ u^j(\varphi_t(q)) = u^j(q) \ , \ j \in \{2, \ldots, n\} .$$

Valóban, $\dot{\gamma}_q(t) = X_{\gamma_q(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_{\gamma_q(t)}$ miatt **6.5.2.** alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma_q)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma_q(t)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_{\gamma_q(t)};$$

innen $(u^1 \circ \gamma_q)' = 1$, $(u^j \circ \gamma_q)' = 0$ $(j \in \{2, \dots, n\})$, ami $\gamma_q(0) = q$ figyelembevételével a felírt relációkhoz vezet. Így tetszőleges $(t, q) \in]-\epsilon, \epsilon[\times \mathcal{U}$-ra

$$((\varphi_t)_*)_q \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q \overset{\textbf{6.1.5.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (u^j \circ \varphi_t)}{\partial u^i}(q) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\varphi_t(q)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi_t(q)}$$
$$i \in \{1, \dots, n\};$$

ha tehát $Y \restriction \mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor

$$f_p(t) := (\varphi_{-t})_* \left(\sum_{i=1}^{n} Y^i(\varphi_t(p)) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi_t(p)} \right) = \sum_{i=1}^{n} Y^i(\varphi_t(p)) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p.$$

Ezek alapján

$$f_p'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^{n} Y^i(\varphi_t(p)) - Y^i(p) \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y^i(\gamma_p(t)) - Y^i(\gamma_p(0)) \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} (Y^i \circ \gamma_p)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \overset{\textbf{6.5.1.}}{=}$$
$$\sum_{i=1}^{n} (\dot{\gamma}_p(0) Y^i) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} X_p(Y^i) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial u^1}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p =$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial u^1}, \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right](p) = \left[\frac{\partial}{\partial u^1}, Y \right](p) = [X, Y](p),$$

amint állítottuk.

2. eset: X eltűnik a p pont egy környezetében. Ekkor X-nek az illető környezet pontjaiból kiinduló integrálgörbéi konstans görbék, és így φ_t $(t \in]-\epsilon, \epsilon[)$ az identikus transzformáció az értelmezési tartományán. Ily módon $(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)} = Y_p$ $(t \in]-\epsilon, \epsilon[)$, következésképpen $f_p'(0) = 0$. Másrészt $[X, Y]_p = 0$ is teljesül, ugyanis tetszőleges $h \in C^\infty(M)$ esetén

$$[X, Y]_p(h) = X_p(Yh) - Y_p(Xh) = -Y_p(Xh) = 0,$$

hiszen Xh eltűnik a p pont egy környezetében, és ebből **5.1.2.** alapján következik, hogy $Y_p(Xh) = 0$.

3. eset: $X_p = 0$, de van olyan $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ M-beli pontsorozat, hogy $p = \lim_{n \to \infty} p_n$ és $X_{p_n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ekkor az állítás következik az 1. eset alapján, tekintettel arra, hogy (például a koordinátás előállításokból kiolvashatóan) a

$$p \mapsto f_p'(0) \text{ és a } p \mapsto [X, Y]_p$$

leképezések folytonosak. $\square$

13.2.2. Legyen M és N sokaság, $F \in C^\infty(M,N)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Jelölje φ és ψ az X, ill. az Y vektormező lokális folyamát. X és Y akkor és csak akkor F-megfelelő, ha $\psi_t \circ F = F \circ \varphi_t$ teljesül minden olyan esetben, amikor e reláció egyik oldala értelmezve van.

Bizonyítás. (1) Legyen $W_M \subset \mathbb{R} \times M$ a φ folyam, $W_N \subset \mathbb{R} \times N$ a ψ folyam értelmezési tartománya. Az állításbeli felcserélési reláció azzal ekvivalens, hogy ha $(t,p) \in W_M$ és $(t,F(p)) \in W_N$, akkor

$$\psi_{F(p)}(t) = F \circ \varphi_p(t).$$

(2) Tegyük fel, hogy X és Y F-megfelelő, vagyis hogy $Y \circ F = F_* \circ X$ (**7.6.**). Képezzük, alkalmazva **12.6.** jelöléseit, a

$$\gamma := F \circ \varphi_p : I_p \to N \ , \ t \mapsto F \circ \varphi_p(t) = F(\varphi(t,p))$$

görbét ($(t,p) \in W_M$). Ennek tetszőleges $t \in I_p$-beli sebességvektora

$$\dot\gamma(t) = \dot{\overbrace{F \circ \varphi_p}}(t) \overset{\textbf{6.5.4.}}{=} F_*(\dot\varphi_p(t)) = F_*\left(X_{\varphi_p(t)}\right) \overset{\text{feltétel}}{=} Y \circ F(\varphi_p(t)) = Y_{F(\varphi_p(t))} = Y \circ \gamma(t),$$

következésképpen γ a $\gamma(0) = F(\varphi(0,p)) = F(p)$ pontból kiinduló integrálgörbéje az Y vektormezőnek. Az integrálgörbék unicitás-tétele (**12.3.**) alapján így a $\psi_{F(p)}$ maximális integrálgörbének legalább az I_p intervallumon értelmezettnek kell lennie, és ezen az intervallumon az $\psi_{F(p)} = \gamma = F \circ \varphi_p$ relációnak kell teljesülnie.

Ezzel megmutattuk, hogy $X \underset{F}{\sim} Y$ esetén érvényes az (1)-ben szereplő, az állításbelivel ekvivalens, felcserélési reláció.

(3) Megfordítva, tegyük fel, hogy

$$\psi_{F(p)}(t) = F \circ \varphi_p(t) \ ; \ (t,p) \in W_M.$$

Ekkor tetszőleges $p \in M$ esetén

$$F_*(X_p) = F_*(\dot\varphi_p(0)) = \dot{\overbrace{F \circ \varphi_p}}(0) = \dot\psi_{F(p)}(0) = Y_{F(p)},$$

tehát X és Y F-megfelelő. □

13.2.3. Legyen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ha X lokális folyama φ, Y lokális folyama ψ, akkor a következők ekvivalensek:

(1) $[X,Y] = 0$.

(2) $\forall p \in M : \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\varphi_{-t})_*\left(Y_{\varphi_t(p)}\right) - Y_p\right) = 0.$

(3) $\forall p \in M : \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\psi_{-t})_*\left(X_{\psi_t(p)}\right) - X_p\right) = 0.$

(4) φ tartományának minden (t,p) pontjában $(\varphi_t)_* Y_p = Y_{\varphi_t(p)}$ - Y invariáns X folyamával szemben.

(5) ψ tartományának minden (t,p) pontjában $(\psi_t)_* X_p = X_{\psi_t(p)}$ - X invariáns Y folyamával szemben.

(6) $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, valahányszor a két oldal egyike definiálva van.

Bizonyítás. (1), (2) és (3) ekvivalenciája nyilvánvaló $[X,Y]_p$ horgász-deriváltként való előállítása (**13.2.1.**) és $[X,Y] = -[Y,X]$ alapján.

(4) → (2) A feltételbeli relációból $(\varphi_{-t})_*\left(Y_{\varphi_t(p)}\right) = Y_p$, így (2) teljesülése evidens. Ugyanígy kapjuk, hogy (5) → (3).

(2) → (4) Kiválasztva egy $p \in M$ pontot, X p-ből induló integrálgröbéje **12.6.1.** értelmében

$$\varphi_p : I_p \to M \ , \ t \mapsto \varphi_p(t) := \varphi(t,p).$$

Tekintsük a

$$\gamma : t \in I_p \mapsto \gamma(t) := (\varphi_{-t})_*\left(Y_{\varphi_t(p)}\right) \in T_pM$$

görbét. Ezt szerepeltetve, a (2) tulajdonság úgy fogalmazható meg, hogy $\gamma'(0) = 0$. Megmutatjuk, hogy γ' ekkor mindenütt eltűnik. Valóban, tetszőleges $t \in I_p$ esetén

$$\gamma'(t) := \lim_{s\to 0}\tfrac{1}{s}(\gamma(t+s) - \gamma(t)) = \lim_{s\to 0}\tfrac{1}{s}\left((\varphi_{-t-s})_*\left(Y_{\varphi_{t+s}(p)}\right) - Y_{\varphi_t(p)}\right) \overset{\textbf{12.6.2.}}{=}$$
$$(\varphi_{-t})_*\lim_{s\to 0}\tfrac{1}{s}\left((\varphi_{-s})_*\left(Y_{\varphi_s(\varphi_t(p))}\right) - Y_{\varphi_t(p)}\right) \overset{(2)}{=} 0.$$

Így γ konstans, s mivel $\gamma(0) = Y_p$, következik, hogy

$$\forall t \in I_p : (\varphi_{-t})_*\left(Y_{\varphi_t(p)}\right) = Y_p \iff \forall t \in I_p : (\varphi_t)_* Y_p = Y_{\varphi_t(p)}.$$

Ezzel igazoltuk (4) teljesülését. A (3) → (5) implikáció analóg módon bizonyítható.

(5) → (6) Jelölje W_Y az Y vektormező ψ folyamának értelmezési tartományát, s rögzített s paraméter mellett legyen M_s a

$$\psi_s : q \mapsto \psi_s(q) := \psi(s,q) \ ; \ (s,q) \in W_Y$$

leképezés értelmezési tartománya. ψ_s diffeomorfizmusa M_s-nek M_{-s}-re. Az (5) feltétel úgy fejezhető ki, hogy

$$X \upharpoonright M_s \underset{\psi_s}{\sim} X \upharpoonright M_{-s}.$$

Ebből **13.2.2.** alapján következik, hogy $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ érvényes azon a halmazon, amelyen $\psi_s \circ \varphi_t$ értelmezve van. Mivel az eddigiekből adódóan (4) $\iff$ (5), X és Y szerepének felcserélésével kapjuk, hogy $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ teljesül azon a halmazon is, ahol $\varphi_t \circ \psi_s$ van értelmezve.

(6) → (5) (6)-ból **13.2.2.** alapján következik, hogy $X \upharpoonright M_s \underset{\psi_s}{\sim} X \upharpoonright M_{-s}$, minden szóbajövő $s \in \mathbb{R}$ esetén. Ez azt jelenti, hogy X invariáns Y folyamával szemben. □

14. Frobenius tétele

14.1. Legyen M n-dimenziós sokaság, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ rögzített egész szám. M-en adott *k-dimenziós sima altérdisztribúción* olyan $\mathscr{D}$ leképezést értünk, amely minden $p \in M$ ponthoz a T_pM érintőtér egy $\mathscr{D}_p$ alterét rendeli hozzá, eleget téve a következő feltételnek: tetszőleges p pontnak van olyan $\mathcal{U}$ környezete, amelyen megadható k számú sima $X_1, \ldots, X_k$ vektormező azzal a tulajdonsággal, hogy

$$\forall q \in \mathcal{U} : \mathscr{D}_q = \operatorname{span}((X_1)_q, \ldots, (X_k)_q).$$

Megjegyzés.„Altérdisztribúció” helyett a következőkben egyszerűen *disztribúció*ról szólunk. Ezek a disztribúciók természetesen nem tévesztendők össze a matematikában szintén így nevezett olyan további objektumokkal, mint általánosított függvény vagy valószínűségi eloszlás.

14.1.1. Azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ *vektormező érint egy $\mathscr{D}$ disztribúciót*, ha $X_p \in \mathscr{D}_p$, minden $p \in M$-re. Egy $\mathscr{D}$ disztribúciót *involutív*nak vagy *teljesen integrálható*nak nevezünk, ha bármely két $\mathscr{D}$-t érintő vektormező Lie-zárójele is érinti $\mathscr{D}$-t.

14.1.2. Egy M sokaság egy *immergált részsokaságá*n (általánosabb értelemben, v.ö. **10.2.**) olyan (N, ι) párt értünk, ahol N egy sokaság, $\iota : N \to M$ pedig injektív immerzió. Egy M-en adott $\mathscr{D}$ disztribúció egy *integrálsokaság*a M-nek egy olyan (N, ι) immegrált részsokasága, amelyre teljesül, hogy

$$\forall q \in N : (\iota_*)_q T_q N = \mathscr{D}_{\iota(q)}.$$

14.2. Ha $\mathscr{D}$ olyan disztribúció, amelynek az M sokaság bármely pontján át halad integrálsokasága, akkor $\mathscr{D}$ involutív.

Bizonyítás. Legyen X és Y $\mathscr{D}$-t érintő vektormező, $p \in M$. Azt kell belátnunk, hogy $[X, Y]_q \in \mathscr{D}_p$. Tekintsünk ebből a célból egy p-n átmenő (N, ι) integrálsokaságot. Az integrálsokaság definíciójából következik, hogy egyértelműen létezik olyan $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$ és $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező, hogy

$$\widetilde{X} \underset{\iota}{\sim} X \ , \ \widetilde{Y} \underset{\iota}{\sim} Y.$$

Ekkor egyeben $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \underset{\iota}{\sim} [X, Y]$ is teljesül (**7.6.2.** (3)), így ha $q := \iota^{-1}(p)$, akkor

$$[X, Y]_p = [X, Y] \circ \iota(q) = \iota_* \circ [\widetilde{X}, \widetilde{Y}](q) = (\iota_*)_q [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_q \in (\iota_*)_q (T_q N) = \mathscr{D}_p.$$

□

14.3. (*Frobenius tétele*) Ha $\mathscr{D}$ involutív k-dimenziós sima altérdisztribúció az M n-dimenziós sokaságon, akkor M minden pontján áthalad $\mathscr{D}$-nek egy integrálsokasága. Közelebbről, minden $p \in M$ pont körül megadható egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép úgy, hogy az

$$u^i = c^i \ , \ i \in \{k+1, \ldots, n\}$$

egyenletrendszerrel adott részsokaság a $\mathscr{D}$ disztribúciónak integrálsokasága a $c^i \in \mathbb{R}$ konstansok minden olyan választása esetén, amelyre az egyenletrendszernek van legalább egy megoldása. Az integrálsokaságok lokálisan egyértelműek abban az értelemben, hogy ha (N, ι) $\mathcal{U}$-ban fekvő összefüggő integrálsokasága $\mathscr{D}$-nek, akkor az

$$u^i \circ \iota \ , \ i \in \{k+1, \dots, n\}$$

függvények konstansok.

Bizonyítás. Az állításban az $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre kiszabott feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$\forall q \in \mathcal{U} : \mathscr{D}_q = \operatorname{span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_q\right);$$

ami szemléletesen szólva azt jelenti, hogy $\mathscr{D}$ „kiegyenesíthető": lokálisan diffeomorf egy $\mathbb{R}^n$-en adott párhuzamos lineáris sokaságok alkotta disztribúcióval. Ilyen térkép létezését fogjuk először igazolni, a disztribúció dimenziója szerinti teljes indukcióval. $k = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló.

1. lépés Megmutatjuk a kívánt térkép létezését a $k = 1$ esetben.

Ha $\mathscr{D}$ 1-dimenziós sima altérdisztribúció M-en, akkor a definíció (**14.1.**) értelmében minden $p \in M$ pont egy alkalmas $\mathcal{V}$ környezete fölött létezik olyan $X_1 \in \mathfrak{X}(\mathcal{V})$ vektormező, hogy

$$\forall q \in \mathcal{V} : \mathscr{D}_q = \operatorname{span}(X_1(q)) \subset T_q M.$$

Ekkor X_1 seholsem tűnik el $\mathcal{V}$ fölött, így a kiegyenesítési tétel (**13.1.**) alapján megadható olyan $(\mathcal{U}, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép a p pont körül, hogy

$$\forall q \in \mathcal{U} : X_1(q) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_q.$$

Ez azt jelenti, hogy a $k = 1$ esetben érvényes az állítás.

2. lépés Megmutatjuk, hogy ha az állítás - azaz a mondott tulajdonságú térképek létezése - teljesül a $(k-1)$-dimenziós disztribúciókra, akkor teljesül a k-dimenziósakra is.

Tegyük fel tehát, hogy $\mathscr{D}$ k-dimenziós, involutív sima altérdisztribúció M-en. Ekkor tetszőleges p pont alkalmas $\mathcal{V}$ környzete fölött léteznek olyan $X_1, \dots, X_k$ vektormezők, hogy minden $q \in \mathcal{V}$ esetén $(X_1(q), \dots, X_k(q))$ bázisa $\mathscr{D}_q$-nak. Ekkor speciálisan $X_1(q) \neq 0$ $(q \in \mathcal{V})$, ezért az 1. lépésben mondottak szerint létezik olyan $(\mathcal{W}, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép a p pont körül, hogy $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, $(x^1(p), \dots, x^n(p)) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ és

$$X_1 \upharpoonright \mathcal{W} = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Mivel $k > 1$, képezhetjük azokat az $Y_1, \dots, Y_k$ $\mathcal{W}$ fölötti vektormezőket, amelyek az $X_1, \dots, X_k$ vektormezőkből az

$$Y_1 := X_1 \ ; \ Y_i := X_i - (X_i x^1) X_1 \ , \ i \in \{2, \dots, k\}$$

összefüggések szerint állíthatók elő. Ezekre teljesülnek a következők:

(i) $(Y_1(q), \dots, Y_k(q))$ bázisa $\mathscr{D}_q$-nak, minden $q \in \mathcal{W}$ esetén.

(ii) $\forall q \in \mathcal{W}$; $\forall i, j \in \{1, \dots, k\} : [Y_i, Y_j](q) \in \mathscr{D}_q$.

(iii) $Y_i x^1 = 0$, $i \in \{2, \dots, n\}$.

(i) adódik abból, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^i Y_i(q) = 0 \ ; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

esetén

$$0 = \lambda^1 X_1(q) + \sum_{j=2}^{k} \lambda^j (X_k(q) - (X_j(q)x^1)X_1(q)) =$$
$$(\lambda^1 - \sum_{j=2}^{k} \lambda^j X_j(q)x^1)X_1(q) + \sum_{j=2}^{k} \lambda^j X_j(q),$$

és így $\lambda^1 = \cdots = \lambda^k = 0$.

Az (ii) észrevétel a Lie-zárójelek kiszámítása után világos abból, hogy a $\mathscr{D}$ disztribúció involutív. Végül tetszőleges $i \in \{2, \ldots, k\}$ indexre

$$Y_i x^1 = (X_i - (X_i x^1)X_1)x^1 = X_i x^1 - (X_i x^1)(X_1 x^1) = X_i x^1 - X_i x^1 \tfrac{\partial x^1}{\partial x^1} = 0.$$

Tekintsük ezek után az

$$N := \big\{ q \in W \mid x^1(q) = 0 \big\}$$

halmazt; ez $(n-1)$-dimenziós részsokasága M-nek. Belátjuk, hogy az $Y_2, \ldots, Y_k$ vektormezők N-re való leszűkítései érintő vektormezői N-nek. Tetszőleges $i \in \{2, \ldots, k\}$ index esetén tekintsük az Y_i vektormező egy $\gamma_i : I \to M$ integrálgörbéjét. Ekkor minden $t \in I$-re

$$(y^1 \circ \gamma_i)'(t) = \dot{\gamma}_i(t) y^1 = Y_i(\gamma(t)) y^1 \overset{\text{(iii)}}{=} 0,$$

amiből következik, hogy ha γ_i egy pontja az N részsokaságban van, akkor γ_i képe is N-ben van. Így

$$Y_i(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}N \ , \ t \in I.$$

Az $Y_2 \restriction N, \ldots, Y_k \restriction N$ vektormezők egy $(k-1)$-dimenziós $\mathscr{D}'$ disztribúciót definiálnak. Ez involutív, ugyanis (ii) szerint

$$\forall q \in N : [Y_i \restriction N, Y_j \restriction N]_q \in \mathscr{D}_q \ (i, j \in \{2, \ldots, k\}),$$

másrészt

$$\forall q \in N : [Y_i \restriction N, Y_j \restriction N]_q \in T_q N \ (i, j \in \{2, \ldots, k\}),$$

hiszen az N sokaság érintő vektormezőiről van szó; tehát

$$\forall q \in N : [Y_i \restriction N, Y_j \restriction N]_q \in \mathscr{D}_q \cap T_q N = \mathscr{D}'_q \ \ (i, j \in \{2, \ldots, k\}).$$

Ily módon az indukciós feltevés alapján létezik a p pont körül olyan $(W', (y^i)_{i=1}^n)$ térkép, hogy $W' \subset W \cap N$ és

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^2} \right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)_q \right)$$

bázisa a $\mathscr{D}'_q \subset T_qN$ altérnek, minden $q \in W'$ pont esetén. Tekintsük most az

$$u^1 := x^1 \ , \ u^i := y^i \circ \pi \ ; \ i \in \{2, \ldots, n\}$$

függvényeket, ahol $\pi : \mathcal{W} \to N$ a természetes projekció az x-koordinátarendszerben: tetszőleges $q \in \mathcal{W}$ esetén $\pi(q) \in N$ az a pont, amelynek koordinátái $(x^2(q), \ldots, x^n(q))$. Az így definiált függvények értelmezve vannak a p pont egy környezetében, p-ben függetlenek, és mindegyikük eltűnik p-ben. Létezik tehát a p körül olyan $(\mathcal{U}, u)$ térkép, amelynek koordinátafüggvényei az $u^1, \ldots, u^n$ függvények $\mathcal{U}$-ra való leszűkítései; erre egyszerűen az $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ jelölést használjük. Megmutatjuk, hogy az $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép a kívánt tulajdonságú.

Vegyük először is észre, hogy

$$\tfrac{\partial u^j}{\partial x^i} = \begin{cases} 1, \text{ ha } j = 1; \\ 0, \text{ ha } j \in \{2, \ldots, d\}, \end{cases}$$

és így

$$Y^1 \restriction \mathcal{U} = \frac{\partial}{\partial u^1},$$

hiszen a konstrukció szerint $\mathcal{U}$ fölött $Y^1 = X^1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Ha $j \in \{2, \ldots, n\}$, akkor

$$\tfrac{\partial}{\partial u^1}(Y_i u^j) = \tfrac{\partial}{\partial u^1}(Y_i u^j) - Y_i \left(\tfrac{\partial u^j}{\partial u^1}\right) = \left[\tfrac{\partial}{\partial u^1}, Y^i\right] u^j = [Y_1, Y_i] u^j.$$

$\mathscr{D}$ involutivitása miatt léteznek olyan α^l_{1i} $(i, l \in \{1, \ldots, k\})$ sima függvények, hogy

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{l=1}^{k} \alpha^l_{1i} Y_l,$$

így

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(Y_i u^j) = \sum_{l=1}^{k} \alpha^l_{1i} (Y_l u^j).$$

Ez azt jelenti, hogy az $Y_i u^j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$ függvények úgy is előállíthatók, mint egy homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai. Mivel az $Y_i u^j$ függvények $j > k$ esetén az $u^1 = 0$ egyenletű halmazon eltűnnek, és adott kezdeti feltétel mellett egy ilyen rendszer egyértelmű megoldással rendelkezik, következik, hogy a zérus függvény az egyetlen megoldás. Ez arra vezet, hogy

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} (Y_i u^j) \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{j \le k} (Y_i u^j) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

teljesül $\mathcal{U}$ fölött, következésképpen a $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_q$ vektorok a $\mathscr{D}_q$ altér bázisát képezik, minden $q \in \mathcal{U}$ esetén.

3. lépés Belátjuk, hogy a $\mathscr{D}$ disztribúció integrálható. Válasszunk ki egy tetszőleges $p \in M$ pontot, és legyen $(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ olyan p körüli térkép, amelynek létezését az előzőekben igazoltuk. Konstrukciónk szerint $u(p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Ha

$$N := \left\{ v \in u(\mathcal{U}) \mid e^{k+1}(v) = \cdots = e^n(v) = 0 \right\},$$

akkor N k-dimenziós sima sokaság, az

$$\iota := u^{-1} \restriction N : N \to M$$

leképezés injektív immerzió, és (N, ι) immergált részsokasága M-nek. Közvetlenül adódik, hogy (N, ι) olyan integrálsokasága $\mathscr{D}$-nek, amely átmegy a p ponton.

Belátható végül a kapott integrálsokaság mondott értelmű egyértelműsége, az ehhez vezető rövid gondolatmenetet azonban mellőzzük. □

14.4. Egy disztribúció maximális integrálsokaságán olyan összefüggő (N, ι) integrálsokaságot értünk, amelynek $\iota(N)$ részhalmaza nem valódi részhalmaza egyetlen további összefüggő integrálsokaság képének sem.

Chevalley-Ehresmann-tétel. *Ha $\mathscr{D}$ involutív disztribúció egy M sokaságon, akkor minden $p \in M$ ponton átmegy $\mathscr{D}$-nek egyetlenegy maximális összefüggő integrálsokasága.*

A tételbeli egyértelműség úgy értendő, hogy ha (N_1, ι_1) és (N_2, ι_2) két olyan maximális összefüggő integrálsokaság, hogy $p \in \iota_1(N_1) \cap \iota_2(N_2)$, akkor van olyan $h : N_1 \to N_2$ diffeomorfizmus, hogy $\iota_1 = \iota_2 \circ h$.

15. Vektormezők az érintőnyalábon

Ebben a fejezetben egy M n-dimenziós sokaságot veszünk alapul, s tekintjük ennek $\tau : TM \to M$ érintőnyalábját. Koordinátás számolásokhoz egy M -en kijelölt $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és a TM-en általa indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképet (**5.2.**) *használjuk.*

15.1. Egy $f \in C^\infty(M)$ függvény *vertikális lift*je $f^\mathsf{v} := f \circ \tau \in C^\infty(TM)$, f *teljes lift*je az

$$f^\mathsf{c} : v \in TM \mapsto f^\mathsf{c}(v) := v(f) = (df)_{\tau(v)}(v)$$

függvény.

15.1.1. Ha $f, g \in C^\infty(M)$, akkor

$$(fg)^\mathsf{v} = f^\mathsf{v} g^\mathsf{v} \ , \ (fg)^\mathsf{c} = f^\mathsf{c} g^\mathsf{v} + f^\mathsf{v} g^\mathsf{c}.$$

Bizonyítás. Az első reláció nyilvánvaló. A második igazolásához legyen $v \in TM$ tetszőleges. **8.2.2.** (2) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(fg)^\mathsf{c}(v) = (d(fg))_{\tau(v)}(v) = (gdf + fdg)_{\tau(v)}(v) =$$
$$(g \circ \tau)(v)(df)_{\tau(v)}(v) + (f \circ \tau)(v)(dg)_{\tau(v)}(v) = (f^\mathsf{c} g^\mathsf{v} + f^\mathsf{v} g^\mathsf{c})(v).$$

□

15.1.2. Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$f^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ \tau \right) = \sum_{i=1}^{n} y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \right)^{\mathsf{v}};$$

speciálisan $(u^i)^{\mathsf{c}} = y^i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Bizonyítás. Ha $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ tetszőleges, akkor

$$f^{\mathsf{c}}(v) := (df)_{\tau(v)}(v) \overset{\mathbf{8.2.1.}(3)}{\underset{(\mathcal{U})}{=}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u^i}(\tau(v))(du^i)_{\tau(v)}(v) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ \tau \right)(v) v(u^i) = \left(\sum_{i=1}^{n} y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ \tau \right) \right)(v).$$

□

15.1.3. Ha egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőre minden $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén $\xi f^{\mathsf{v}} = \xi f^{\mathsf{c}} = 0$ teljesül, akkor $\xi = 0$.

Valóban, legyen $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$, ahol $\xi^i, \xi^{n+i} \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U}))$; $i \in \{1, \dots, n\}$. $f := u^j$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ választással élve, feltételünk azt adja, hogy

$$0 = \xi(u^j)^{\mathsf{v}} = \xi x^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \xi^j,$$
$$0 = \xi(u^j)^{\mathsf{c}} = \xi y^j = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi^{n+i} \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \xi^{n+j};$$

következésképpen $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} 0$.

15.1.4. További munkával megmutatható, hogy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ eltűnését már annak megkövetelése is biztosítja, hogy $\xi f^{\mathsf{c}} = 0$, minden $f \in C^\infty(M)$ esetén. Ebből következik, hogy ha $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$, és minden $f \in C^\infty(M)$ függvényre $\xi f^{\mathsf{c}} = \eta f^{\mathsf{c}}$, akkor $\xi = \eta$. *A TM-en adott vektormezőket ily módon egyértelműen meghatározza az M sokaság sima függvényeinek teljes liftjein való hatásuk.* Ezt *K. Yano* és *A. Ledger* vette észre (*Journal London Math. Soc.*, **39** (1964), 495-500).

Meggondolásainkban nem fogunk támaszkodni erre az erősebb állításra.

15.2. Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt *vertikális*nak nevezünk, ha $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$. Ha ξ_1 és ξ_2 vertikális vektormező, akkor a Lie-zárójelük is az, mivel $\xi_1 \underset{\tau}{\sim} 0$ és $\xi_2 \underset{\tau}{\sim} 0$ esetén **7.6.2.** (3) miatt $[\xi_1, \xi_2] \underset{\tau}{\sim} 0$ is fennáll. Következik ily módon, hogy a vertikális vektormezők részalgebráját alkotják az $\mathfrak{X}(TM)$ valós Lie-algebrának; erre a részalgebrára az $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ jelölést használjuk.

15.2.1. Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőre a következők ekvivalensek:

(1) ξ vertikális.

(2) Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén $\xi f^{\mathsf{v}} = 0$.

(3) ξ koordinátaelőállítása

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \ ; \ \xi^{n+i} \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U}))$$

alakú.

Bizonyítás. (1)$\Longleftrightarrow$(2) **7.6.1.** miatt.

Legyen

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \ ; \ \xi^i, \xi^{n+i} \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U})).$$

(2) teljesülése esetén $f := u^j$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ választással kapjuk, hogy

$$0 = \xi((u^j)^{\mathsf{v}}) = \xi x^j = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \xi^j,$$

következésképpen $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i}$. Tehát (2)$\to$(3).

Megfordítva, ha (3) teljesül, akkor tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$\xi f^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi^{n+i} \frac{\partial f^{\mathsf{v}}}{\partial y^i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi^{n+i} \left(\frac{\partial f}{\partial u^j} \circ \tau \right) \frac{\partial (u^j \circ \tau)}{\partial y^i} = 0,$$

és így (3)$\to$(2). □

15.2.2. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ vektormező, hogy

$$X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}, \textit{ minden } f \in C^\infty(M) \textit{ függvényre.}$$

Az X^{v} vektormezőt az X vektormező *vertikális lift*jének nevezzük. Ha $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ $(X^i \in C^\infty(\mathcal{U}))$, akkor

$$X^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} (X^i \circ \tau) \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Bizonyítás.

Egyértelműség. Ha $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ a kívánt tulajdonságú vektormező, akkor **15.2.1.** miatt $X^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}$. Alkalmazva az $X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ feltételt $f := u^j$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ választással,

$$X^{\mathsf{v}}(u^j)^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}} y^j = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \eta^j \text{ és } (Xu^j)^{\mathsf{v}} = (X^j)^{\mathsf{v}}$$

miatt $X^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ következik.

Létezés. Ha - lokálisan - az X^{v} vektormezőt az $X^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{:=} \sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ előírással értelmezzük, akkor **15.2.1.** értelmében $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$, és tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén **15.1.2.** figyelembevételével

$$X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(y^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j} \right)^{\mathsf{v}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \delta_i^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j} \right)^{\mathsf{v}} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u^j} \right)^{\mathsf{v}} = \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \circ \tau \underset{(\mathcal{U})}{=} (Xf) \circ \tau = (Xf)^{\mathsf{v}};$$

X^{v} tehát rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. □

15.2.3. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$(X+Y)^{\mathsf{v}} = X^{\mathsf{v}} + Y^{\mathsf{v}} \ , \ (fX)^{\mathsf{v}} = f^{\mathsf{v}} X^{\mathsf{v}} \ , \ [X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}] = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $h \in C^\infty(M)$ tetszőleges. Ekkor

$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}]\, h^{\mathsf{v}} = X^{\mathsf{v}}(Y^{\mathsf{v}} h^{\mathsf{v}}) - Y^{\mathsf{v}}(X^{\mathsf{v}} h^{\mathsf{v}}) \overset{\mathbf{15.2.1.}}{=} 0,$$
$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}]\, h^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}}(Y^{\mathsf{v}} h^{\mathsf{c}}) - Y^{\mathsf{v}}(X^{\mathsf{v}} h^{\mathsf{c}}) \overset{\mathbf{15.2.2.}}{=} X^{\mathsf{v}}(Yh)^{\mathsf{v}} - Y^{\mathsf{v}}(Xh)^{\mathsf{v}} \overset{\mathbf{15.2.1.}}{=} 0,$$

így **15.1.3.** alapján $[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}] = 0$. A másik két reláció ugyanilyen meggondolással (vagy a koordinátakifejezések alkalmazásával) adódik. □

15.2.4. Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$ és

$$\varphi : \mathbb{R} \times TM \to TM \ , \ (t, v) \mapsto v + tX(\tau(v)),$$

akkor φ egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport TM-en, amelynek sebességvektormezője az $X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ vertikális lift.

Bizonyítás. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy φ olyan sima leképezés, amely eleget tesz a **12.5.**-beli $(\mathrm{FL})_1$ és $(\mathrm{FL})_2$ feltételeknek. Kiválaszva egy $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ vektort, a diffeomorfizmus-csoport v-n átmenő áramvonala

$$\gamma_v : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(t) := v + tX(\tau(v)) \in TM,$$

a sebességvektormező

$$\dot{\varphi} : v \in TM \mapsto \dot{\varphi}(v) := \dot{\gamma}_v(0) \in TTM.$$

6.5.2. alkalmazásával

$$\dot{\gamma}_v(0) = \sum_{i=1}^{n} (x^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma_v(0)} + \sum_{i=1}^{n} (y^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\gamma_v(0)} .$$

Itt $\gamma_v(0) = v$. Az $x^i \circ \gamma_v$ függvények konstans függvények, ugyanis ha $v \in T_pM$, akkor

$$\forall t \in \mathbb{R} : x^i \circ \gamma_v(t) = u^i \circ \tau(v + tX(\tau(v))) = u^i(p),$$

következésképpen $(x^i \circ \gamma_v)' = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mivel

$$\forall t \in \mathbb{R} : (y^i \circ \gamma_v)(t) = y^i(v + tX(\tau(v))) = y^i(v) + ty^i(X(\tau(v))),$$

$$(y^i \circ \gamma_v)'(0) = y^i(X(\tau(v))) = X^i \circ \tau(v) = (X^i)^{\mathsf{v}}(v),$$

ha $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Így

$$\dot{\varphi}(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)(v) \overset{\mathbf{15.2.2.}}{=} X^{\mathsf{v}}(v),$$

amivel igazoltuk, hogy $\dot{\varphi} = X^{\mathsf{v}}$. □

15.3. A

$$\varphi : \mathbb{R} \times TM \to TM \ , \ (t, v) \mapsto \varphi(t, v) := e^t v$$

leképezés egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport TM-en. Ennek $C := \dot{\varphi}$ sebességvektormezőjét a TM-en adott *Liouville-vektormező*nek nevezzük. A Liouville-vektormező vertikális vektormező, koordinátakifejezése

$$C \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Bizonyítás. φ simasága, valamint $(\mathrm{FL})_1$ és $(\mathrm{FL})_2$ teljesülése most is közvetlenül látható. Legyen $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ tetszőleges. φ v-n átmenő áramvonala

$$\gamma_v : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(t) := e^t v \in TM,$$

a sebességvektormező

$$\dot{\varphi} : v \in TM \mapsto \dot{\varphi}(v) := \dot{\gamma}_v(0) = \sum_{i=1}^{n} \left((x^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v + (y^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_v \right) \in TTM.$$

Itt tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^i \circ \gamma_v(t) = u^i \circ \tau(e^t v) = u^i(p), \text{ ha } v \in T_pM;$$
$$y^i \circ \gamma_v(t) = y^i(e^t v) = e^t y^i(v),$$

következésképpen

$$(x^i \circ \gamma_v)' = 0 \ , \ (y^i \circ \gamma_v)'(0) = y^i(v),$$

és így

$$C := \dot{\varphi} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

□

15.3.1. Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$Cf^{\mathsf{v}} = 0 \ , \ Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \ , \ [C, X^{\mathsf{v}}] = -X^{\mathsf{v}}.$$

Bizonyítás. Cf^{v} **15.2.1.** alapján adódik abból, hogy C vertikális. A koordinátakifejezéseket használva (**15.1.2.**, **15.3.**),

$$Cf^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \left(\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right)\left(\sum_{j=1}^n y^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y^i \delta_i^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}} = \sum_{i=1}^n y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} f^{\mathsf{c}}.$$

Ezt is felhasználva, tetszőleges $h \in C^\infty(M)$ esetén

$$[C, X^{\mathsf{v}}]h^{\mathsf{c}} = C(X^{\mathsf{v}}h^{\mathsf{c}}) - X^{\mathsf{v}}(Ch^{\mathsf{c}}) \overset{\mathbf{15.2.2.}}{=} C(Xh)^{\mathsf{v}} - X^{\mathsf{v}}h^{\mathsf{c}} = -X^{\mathsf{v}}h,$$

amiből $[C, X^{\mathsf{v}}]$ és X^{v} vertikális volta miatt **15.1.3.** alapján $[C, X^{\mathsf{v}}] = -X^{\mathsf{v}}$ következik. □

15.4. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, hogy $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$, azaz $\tau_* \circ X^{\mathsf{c}} = X \circ \tau$, és

$$X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}, \textit{ minden } f \in C^\infty(M) \textit{ függvényre.}$$

Az X^{c} vektormezőt az X vektormező *teljes lift*jének nevezzük. Ha $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ $(X^i \in C^\infty(\mathcal{U}))$, akkor

$$X^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \left((X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^{\mathsf{c}} \frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

speciálisan $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{c}} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Bizonyítás.

Egyértelműség. Tegyük fel, hogy

$$X^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \ ; \ \xi^i, \eta^i \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U})).$$

Tetszőleges $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ vektort tekintve,

$$\tau_*(X^{\mathsf{c}}_v) = \tau_*\left(\sum_{i=1}^n \left(\xi^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v + \eta^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v\right)\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)},$$

mert

$$\tau_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v \overset{\mathbf{6.1.5.}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial(u^j \circ \tau)}{\partial x^i}(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\tau(v)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\tau(v)} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)},$$

és $\tau_*\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = 0$, hiszen a $\frac{\partial}{\partial y^i}$ koordinátavektormezők (például **15.2.1.**-ből adódóan) vertikálisak. Így a $\tau_* \circ X^{\mathsf{c}} = X \circ \tau$ feltétel azt adja, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \tau\right) = \sum_{i=1}^{n} (X^i \circ \tau) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \tau\right),$$

amiből

$$\xi^i = (X^i)^{\mathsf{v}} \; ; i \in \{1, \ldots, n\}$$

következik. Az $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$ követelmény tehát azt eredményezi, hogy

$$X^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left((X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

Alkalmazzuk ezután az $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}$ feltételt $f := u^j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ választással. Ekkor egyrészt

$$X^{\mathsf{c}}(u^j)^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{c}} y^j = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \eta^j,$$

másrészt $(Xu^j)^{\mathsf{c}} = (X^j)^{\mathsf{c}}$, tehát

$$\eta^j = (X^j)^{\mathsf{c}} \; ; j \in \{1, \ldots, n\},$$

és így

$$X^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left((X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^{\mathsf{c}} \frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

ami igazolja az egyértelműséget.

Létezés. Ha az X^{c} vektormezőt (lokálisan) a most nyert formulával definiáljuk, akkor $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$ nyilvánvalóan teljesül. Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvényt tekintve, **15.1.2.** alapján

$$X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left((X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^{\mathsf{c}} \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \left(y^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} y^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^j} \circ \tau\right) \frac{\partial (u^k \circ \tau)}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{c}} \delta_i^j \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{v}} y^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \circ \tau\right) + \sum_{i=1}^{n} (X^i)^{\mathsf{c}} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{v}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left((X^i)^{\mathsf{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{c}} + (X^i)^{\mathsf{c}} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{v}}\right) \overset{\mathbf{15.1.1.}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} (Xf)^{\mathsf{c}},$$

tehát X^{c} eleget tesz a második feltételnek is. □

15.4.1. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}},\ (X+Y)^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{c}} + Y^{\mathsf{c}},\ (fX)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{v}} X^{\mathsf{c}} + f^{\mathsf{c}} X^{\mathsf{v}},$$
$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{c}}] = [X,Y]^{\mathsf{v}},\ [X^{\mathsf{c}}, Y^{\mathsf{c}}] = [X,Y]^{\mathsf{c}},\ [C, X^{\mathsf{c}}] = 0.$$

Bizonyítás. $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$ miatt **7.6.1.** alapján

$$X^{\mathsf{c}}(f \circ \tau) = (Xf) \circ \tau, \text{ azaz } X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}},\ f \in C^\infty(M).$$

A többi reláció például **15.1.3.** alapján annak megmutatásával igazolható, hogy mind a bal, mind a jobb oldal ugyanazt az értéket veszi fel a $C^\infty(M)$-beli függvények vertikális és teljes liftjein.

Illusztrációként igazoljuk az utolsó relációt.

$$[C, X^{\mathsf{c}}] f^{\mathsf{v}} = C(X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}}) - X^{\mathsf{c}}(C f^{\mathsf{v}}) = C(Xf)^{\mathsf{v}} = 0,$$
$$[C, X^{\mathsf{c}}] f^{\mathsf{c}} = C(X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}}) - X^{\mathsf{c}}(C f^{\mathsf{c}}) = C(Xf)^{\mathsf{c}} - X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = 0.$$

□

15.4.2. Tegyük fel, hogy $X \in \mathfrak{X}(M)$ teljes vektormező, és tekintsük az általa generált

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \to M\ ,\ (t,p) \mapsto \varphi(t,p) =: \varphi_t(p) =: \gamma_p(t)$$

folyamot. Ha

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \times TM \to TM\ ,\ (t,v) \mapsto \widetilde{\varphi}(t,v) := (\varphi_t)_*(v),$$

akkor $\widetilde{\varphi}$ egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport TM-en, amelynek sebességvektormezője az X vektormező teljes liftje.

Bizonyítás. Mivel φ_t minden $t \in \mathbb{R}$ esetén diffeomorfizmus, $(\varphi_t)_*$ simasága adódik az érintőleképezés **6.1.6.**-ban leírt koordinátaelőállításából, és ebből következik $\widetilde{\varphi}$ simasága. $(\mathrm{FL})_1$ és $(\mathrm{FL})_2$ közvetlenül ellenőrizhető, a $\widetilde{\varphi}$ leképezés tehát valóban egyparaméteres diffeomorfizmus-csoport TM-en. $\widetilde{\varphi}$-nak egy $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ ponton átmenő áramvonala

$$\widetilde{\gamma}_v : t \in \mathbb{R} \mapsto \widetilde{\gamma}_v(t) := \widetilde{\varphi}(t,v) = (\varphi_t)_*(v) \in TM,$$

így $\widetilde{\varphi}$ sebességvektormezője

$$\dot{\widetilde{\varphi}} : v \in TM \mapsto \dot{\widetilde{\gamma}}_v(0) \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left((x^i \circ \widetilde{\gamma}_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v + (y^i \circ \widetilde{\gamma}_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v \right) \in TTM.$$

Mivel tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ pontban, bármely $i \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$x^i \circ \widetilde{\gamma}_v(t) = x^i \circ (\varphi_t)_*(v) = u^i \circ \tau\left((\varphi_t)_*(v)\right) = u^i \circ \varphi_t \circ \tau(v) = u^i \circ \gamma_{\tau(v)}(t),$$

azt kapjuk, hogy

$$(x^i \circ \widetilde{\gamma}_v)'(t) = (u^i \circ \gamma_{\tau(v)})'(t).$$

Azonban $\gamma_{\tau(v)}$ integrálgörbéje X-nek, azaz $X \circ \gamma_{\tau(v)} = \dot{\gamma}_{\tau(v)}$, amiből

$$X^i \circ \gamma_{\tau(v)} = (u^i \circ \gamma_{\tau(v)})'\ ;\ X^i := y^i \circ X = Xu^i$$

adódik, és így

$$(x^i \circ \widetilde{\gamma}_v)'(0) = (u^i \circ \gamma_{\tau(v)})'(0) = X^i \circ \gamma_{\tau(v)}(0) = X^i(\tau(v))$$

($i \in \{1, \dots, n\}$) következik. Ezzel $\dot{\widetilde{\gamma}}$ koordinátaelőállításában az első n komponenst meghatároztuk. A továbbiak hasonlóan nyerhetők. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$y^i \circ \widetilde{\gamma}_v(t) = y^i \circ (\varphi_t)_*(v) \overset{\mathbf{6.1.6.}}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} y^j \left(\frac{\partial(u^i \circ \varphi_t)}{\partial u^j} \circ \tau \right) \right)(v),$$

s mivel

$$\left(t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial(u^i \circ \varphi_t)}{\partial u^j}(\tau(v)) \right)'(0) = \left(t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial(u^i \circ \gamma_{\tau(v)})}{\partial u^j}(t) \right)'(0) = \frac{\partial X^i}{\partial u^j}(\tau(v)),$$

$\dot{\widetilde{\varphi}}$ koordinátaelőállításában a második n komponensfüggvény $\sum_{j=1}^{n} y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} \circ \tau \right) = (X^i)^{\mathsf{c}}$. Tehát

$$\dot{\widetilde{\varphi}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left((X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^{\mathsf{c}} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \underset{(\mathcal{U})}{=} X^{\mathsf{c}}.$$

□

15.5. Átvisszük a **2.1.**-ben bevezetett homogenitás-fogalmakat a TM érintősokaság egy alkalmas részhalmazán értelmezett valósértékű függvényekre.

(1) Legyen $\mathcal{V} \subset TM$ olyan nemüres halmaz, amelyre teljesül, hogy minden $v \in \mathcal{V}$ és $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $tv \in \mathcal{V}$. Egy $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ függvény *r-edfokú pozitív homogén*, ahol $r \in \mathbb{R}$, ha

$$F(tv) = t^r F(v) \; ; \; t \in \mathbb{R}_+^* \, , \; v \in \mathcal{V}.$$

(2) Legyen $k \in \mathbb{Z}$. Egy $F : \mathcal{V} \subset TM \to \mathbb{R}$ függvény *k-adfokú homogén*, ha minden $v \in \mathcal{V}$ vektor és $t \in \mathbb{R}^*$ valós szám esetén $tv \in \mathcal{V}$ és $F(tv) = t^k F(v)$.

15.5.1. Tegyük fel, hogy $\mathcal{V} \subset TM$ nemüres nyílt halmaz, amelyre teljesül, hogy ha $t \in \mathbb{R}_+^*$ és $v \in \mathcal{V}$, akkor $tv \in \mathcal{V}$. Egy $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, C^1-osztályú függvény akkor és csak akkor r-edfokú pozitív homogén ($r \in \mathbb{R}$), ha $CF = rF$.

Bizonyítás. A **2.2.** Euler-tétel igazolása során alkalmazott gondolatmenetet ültetjük át érintősokaság-kontextusba. Rögzített $v \in \mathcal{V}$ érintővektor mellett szerepeltetni fogjuk az

$$m_v : \mathbb{R}_+^* \to \mathcal{V} \; , \; t \mapsto m_v(t) := tv$$

leképezést. Okoskodásunkat lokálisan, $\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$ fölött végezzük, amelyet értelemszerűen nemüresnek tételezhetünk.

(1) Tegyük fel először, hogy F r-edfokú pozitív homogén, és képezzük a $h := F \circ m_v$ függvényt, ahol $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$ rögzített. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}(tv)(x^i \circ m_v)'(t) + \frac{\partial F}{\partial y^i}(tv)(y^i \circ m_v)'(t) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^i}(tv) y^i(v),$$

mert $x^i \circ m_v(t) = u^i \circ \tau(tv) = u^i(\tau(v))$ miatt az $x^i \circ m_v$ függvények konstansok, míg $y^i \circ m_v(t) = y^i(tv) = ty^i(v)$.
Így

$$h'(1) = \sum_{i=1}^{n} y^i(v) \frac{\partial F}{\partial y^i}(v) \overset{\mathbf{15.3.}}{=} C_v(F) = (CF)(v).$$

Másrészt a feltétel értelmében $h(t) = F(tv) = t^r F(v)$; innen $h'(t) = rt^{r-1}F(v)$, $h'(1) = rF(v)$. A $h'(1)$-re nyert két kifejezést összevetve a kívánt $CF = rF$ reláció adódik.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy $CF = rF$. Tetszőlegesen rögzített $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$ mellett képezzük a

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(t) := F(tv)t^{-r} = (F \circ m_v)(t)t^{-r} = h(t)t^{-r}$$

függvényt. Ez differenciálható; tetszőleges $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$\varphi'(t) = h'(t)t^{-r} - rt^{-r-1}h(t) \overset{(1)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} y^i(v) \frac{\partial F}{\partial y^i}(tv) \right) t^{-r} - rt^{-r-1}h(t) =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} y^i(tv) \frac{\partial F}{\partial y^i}(tv) \right) t^{-r-1} - rt^{-r-1}h(t) = (CF)(tv)t^{-r-1} - rt^{-r-1}h(t) \overset{\text{feltétel}}{=}$$
$$rF(tv)t^{-r-1} - rt^{-r-1}h(t) = rh(t)t^{-r-1} - rh(t)t^{-r-1} = 0,$$

következésképpen φ konstans függvény. Így tetszőleges $v \in \mathcal{V}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$ esetén

$$F(v) = \varphi(1) = \varphi(t) = F(tv)t^{-r},$$

ami ekvivalens a kívánt $F(tv) = t^r F(v)$ relációval. □

Megjegyzés. Ha (**15.5.1.** feltételeinek megtartása mellett) $F : \mathcal{V} \subset TM \to \mathbb{R}$ r-edfokú homogén ($r \in \mathbb{Z}$), akkor eleget tesz a $CF = rF$ „Euler-reláció”-nak, míg $CF = rF$ teljesülése csupán pozitív homogenitást (és nem homogenitást) von maga után.

15.5.2. Legyen $\mathring{T}M := \bigcup_{p \in M} (T_pM \setminus \{0_p\})$, és tegyük fel, hogy $F : TM \to \mathbb{R}$ $\mathring{T}M$ fölött sima függvény.

(1) Ha F $\mathring{T}M$-en nulladfokú pozitív homogén és TM-en folytonos, akkor F vertikális lift: van olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény, hogy $F = f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$.

(2) Ha F $\mathring{T}M$-en elsőfokú pozitív homogén és TM-en C^1-osztályú, akkor F fibrumonként lineáris: tetszőleges $p \in M$ esetén $F \restriction T_pM \in (T_pM)^*$.

(3) Ha F k-adfokú pozitív homogén $\mathring{T}M$-en és TM-en (legalább) C^k-osztályú, akkor F fibrumonként k-adfokú homogén polinom.

Ezek az eredmények közvetlenül adódnak **2.1.1.** és **2.1.2.** alapján, ill. **2.2.1.** mintájára.

15.6. Legyen $\xi : TM \to TTM$ olyan durva vektormező, amely $\mathring{T}M$ fölött sima. Azt mondjuk, hogy ξ *k-adfokú pozitív homogén*, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ha $\mathring{T}M$ fölött

$$[C, \xi] = (k-1)\xi$$

teljesül. Mivel **15.3.1.**, ill. **15.4.1.** alapján tetszőleges X vektormező esetén $[C, X^{\mathsf{v}}] = -X^{\mathsf{v}}$, ill. $[C, X^{\mathsf{c}}] = 0$, X^{v} nulladfokú, X^{c} elsőfokú pozitív homogén. $\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{c}}$, ill. $\frac{\partial}{\partial y^i} = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{v}}$ miatt így a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ koordinátavektormezők nulladfokú, a $\frac{\partial}{\partial y^i}$ koordinátavektormezők elsőfokú pozitív homogének. Amennyiben

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right),$$

úgy ξ *akkor és csak akkor k-adfokú pozitív homogén, ha a ξ^i függvények $(k-1)$-edfokú, a ξ^{n+i} függvények k-adfokú pozitív homogének.*

Valóban, felhasználva iménti észrevételünket,

$$[C, \xi] \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\left[C, \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right] + \left[C, \xi^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right] \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left((C\xi^i) \frac{\partial}{\partial x^i} + (C\xi^{n+i} - \xi^{n+i}) \frac{\partial}{\partial y^i} \right),$$

s így $[C, \xi] = (k-1)\xi$ pontosan akkor teljesül, ha

$$C\xi^i = (k-1)\xi^i \ , \ C\xi^{n+i} = k\xi^i \ (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Ezek a relációk **15.5.1.** alapján a ξ^i függvények $(k-1)$-edfokú, a ξ^{n+i} függvények k-adfokú pozitív homogenitását jelentik.

16. Másodrendű vektormezők

16.1. Legyen M n-dimenziós sokaság, $\gamma : I \to M$ egy görbe. A

$$\dot{\gamma} := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} : I \to TM \ , \ t \mapsto \dot{\gamma}(t) = (\gamma_*)_t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)_t$$

leképezést a γ görbe *sebességvektormező*jének (v.ö. **6.5.**) vagy γ TM-be való *kanonikus lift*jének hívjuk. A $\dot{\gamma} : I \to TM$ görbe

$$\ddot{\gamma} = (\dot{\gamma})_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} : I \to TTM$$

sebességvektormezője a γ görbe *gyorsulásvektormező*je. Kiválasztva M-en egy olyan $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, amelyre $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, tekintsük TM-en a $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ indukált térképet. Ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, akkor

$$\ddot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\gamma^{i'}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\dot{\gamma}(t)} + \gamma^{i''}(t) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\dot{\gamma}(t)} \right) \ , \ t \in \gamma^{-1}(\mathcal{U}).$$

Valóban, $\dot{\gamma}$ komponensfüggvényei az indukált térképre vonatkozóan

$$x^i \circ \dot{\gamma} = u^i \circ \gamma = \gamma^i \ , \ y^i \circ \dot{\gamma} \overset{\textbf{6.5.2.}}{=} (\gamma^i)' \ (i \in \{1, \dots, n\}),$$

így **6.5.2.** alkalmazásával $\ddot{\gamma}(t)$-re a felírt formula adódik.

16.1.1. Egy $c : I \to TM$ görbe akkor és csak akkor kanonikus liftje egy $\gamma : I \to M$ görbének, ha $c = \tau_* \circ \dot{c}$.

Bizonyítás. (1) Ha c kanonikus liftje egy $\gamma : I \to M$ görbének, azaz $c = \dot{\gamma}$, akkor $\tau \circ c = \tau \circ \dot{\gamma} = \gamma$ figyelembevételével

$$c = \dot{\gamma} = \gamma_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = (\tau \circ \dot{\gamma})_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \tau_* \circ \left(\dot{\gamma}_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) = \tau_* \circ \ddot{\gamma} = \tau_* \circ \dot{c}$$

adódik, ami éppen a kívánt reláció.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy c eleget tesz a $\tau_* \circ \dot{c} = c$ feltételnek. Legyen ekkor $\gamma := \tau \circ c$. γ M-beli görbe, amelynek sebességvektormezője

$$\dot{\gamma} := \gamma_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = (\tau \circ c)_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \tau_* \circ \left(c_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) = \tau_* \circ \dot{c} \overset{\text{feltétel}}{=} c;$$

c tehát a $\gamma = \tau \circ c$ vetített görbe kanonikus liftje. □

16.2. Egy $\xi : TM \to TTM$ vektormezőt *másodrendű vektormező*nek nevezünk, ha eleget tesz a $\tau_* \circ \xi = 1_{TM}$ feltételnek. Ha, ráadásul, tetszőleges $t \in \mathbb{R}^*$, $v \in TM$ esetén

$$\xi_{tv} = t(m_t)_*(\xi_v),$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ξ *affin spray* M fölött. ($m_t : TM \to TM$ a **6.1.7.**-ben leírt leképezés.)

16.2.1. Egy $\xi : TM \to TTM$ vektormező akkor és csak akkor másodrendű vektormező, ha tetszőleges M-en adott $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép esetén a $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó koordinátaelőállítása

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

alakú, ahol $G^i \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U}))$ ($i \in \{1, \dots, n\}$; a -2 együttható szerepeltetése tradicionális okokból történik).

Bizonyítás. (1) Tegyük fel, hogy

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right).$$

Legyen $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ tetszőleges. Mivel a **15.4.** bizonyításában látottak szerint $\tau_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)}$, $\tau_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = 0$ ($i \in \{1, \dots, n\}$),

$$\tau_* \circ \xi(v) = \tau_*(\xi_v) = \tau_* \left(\sum_{i=1}^{n} y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v - 2G^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v \right) = \sum_{i=1}^{n} y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)} = v,$$

következésképpen $\tau_* \circ \xi = 1_{TM}$, ξ tehát másodrendű vektormező.

(2) Legyen, megfordítva, $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ másodrendű vektormező. Mint vektormező, $\mathcal{U}$ fölött ξ előállítható a

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

alakban, ahol $X^i, G^i \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U}))$; $(i \in \{1, \dots, n\})$. Ekkor tetszőleges $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ esetén

$$\tau_*(\xi_v) = \tau_*\left(\sum_{i=1}^n \left(X^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v - 2G^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v\right)\right) = \sum_{i=1}^n X^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)},$$

és így a $\tau_* \circ \xi = 1_{TM}$ feltétel azt adja, hogy

$$\sum_{i=1}^n X^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)} = v = \sum_{i=1}^n y^i(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)},$$

következésképpen $X^i = y^i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$. Így ξ koordinátaelőállítása a kívánt alakú. □

16.2.2. Egy $\xi : TM \to TTM$ vektormező pontosan akkor másodrendű vektormező, ha valamennyi integrálgörbéje kanonikus lift.

Bizonyítás. (1) Tegyük fel, hogy ξ másodrendű vektormező, és legyen $c : I \to TM$ integrálgörbéje ξ-nek. Ekkor $\dot{c} = \xi \circ c$, és így

$$\tau_* \circ \dot{c} = (\tau_* \circ \xi) \circ c \overset{\text{feltétel}}{=} 1_{TM} \circ c = c.$$

A kapott $\tau_* \circ \dot{c} = c$ reláció az előző pont szerint ekvivalens azzal, hogy c kanonikus lift.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy ha $c : I \to TM$ integrálgörbéje ξ-nek, akkor c kanonikus lift. Ebben az esetben

$$c \overset{\textbf{16.1.1.}}{=} \tau_* \circ \dot{c} = (\tau_* \circ \xi) \circ c,$$

s mivel minden $v \in TM$ vektor megkapható ξ egy integrálgörbéjének kezdősebességeként, innen következik, hogy $\tau_* \circ \xi = 1_{TM}$. ξ tehát másodrendű vektormező. □

16.3. Egy $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező *pályá*ján vagy *geodetikus*án olyan $\gamma : I \to M$ görbét értünk, amelynek kanonikus liftje integrálgörbéje ξ-nek, vagyis amelyre $\ddot{\gamma} = \xi \circ \dot{\gamma}$ teljesül. Ezt a relációt a γ görbére vonatkozó, ξ által meghatározott *másodrendű differenciálegyenlet*ként is említjük. Ha egy $\gamma : I \to M$ görbe eleget tesz ennek a relációnak és a $\dot{\gamma}(0) = v$ feltételnek is, ahol $v \in TM$ adott vektor, akkor azt mondjuk, hogy γ a v *kezdeti feltételhez tartozó megoldás.*

16.1.1. bizonyításából kiderül, hogy ξ geodetikusai éppen az integrálgörbéinek a τ projekció általi képei. Így a vektormezők integrálgörbéivel kapcsolatos alapvető eredmények (**12.1.-12.3.**) közvetlenül alkalmazhatók egy másodrendű vektormező geodetikusaira.

16.3.1. Legyen $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező. Kijelölve egy $v \in T_pM$ érintővektort, létezik egy és csak egy olyan $\gamma : I \to M$ geodetikusa ξ-nek, hogy I a 0 körüli nyílt intervallum és $\dot{\gamma}(0) = v$.

Ez a megállapítás adódik **12.2.**-ből. A $\dot{\gamma}(0) = v$ feltétel értelemszerűen magában foglalja azt is, hogy $\gamma(0) = p$, a γ geodetikust ezért a *p pontból induló v kezdősebességű geodetikus*ként is említjük.

16.3.2. Tegyük fel, hogy $\gamma_1 : I \to M$ és $\gamma_2 : I \to M$ geodetikusai a ξ másodrendű vektormezőnek, amelyekre valamely $t_0 \in I$ pontban $\dot{\gamma}_1(t_0) = \dot{\gamma}_2(t_0)$ teljesül. Ekkor $\gamma_1 = \gamma_2$.

Bizonyítás. Okoskodjunk indirekt módon. Ha $\gamma_1 \neq \gamma_2$, akkor van olyan $\tau \in I$, hogy $\gamma_1(\tau) \neq \gamma_2(\tau)$; tegyük fel például, hogy $\tau > t_0$. Legyen

$$H := \{t \in I | t > t_0 \text{ és } \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}.$$

Ekkor H nemüres, alulról korlátos számhalmaz, így van $t_1 \in \mathbb{R}$ pontos alsó korlátja, amelyre $t_1 \geq t_0$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $\dot{\gamma_1}(t_1) = \dot{\gamma_2}(t_1)$. Ez automatikusan igaz, ha $t_1 = t_0$, tegyük fel ezért, hogy $t_1 > t_0$. Ekkor

$$\gamma_1 \restriction]t_0, t_1[= \gamma_2 \restriction]t_0, t_1[.$$

A $\dot{\gamma_i} :]t_0, t_1[\to TM$, $t \mapsto \dot{\gamma_i}(t)$ $(i \in \{1, 2\})$ leképezések folytonosak (hiszen simák), ezért

$$\dot{\gamma}_1(t_1) = \lim_{t \to t_1-} \dot{\gamma}_1(t) = \lim_{t \to t_1-} \dot{\gamma}_2(t) = \dot{\gamma}_2(t_1).$$

Mivel a $t \mapsto \gamma_1(t + t_1)$ és a $t \mapsto \gamma_2(t + t_1)$ görbék is geodetikusai ξ-nek (v.ö. **12.1.2.**), amelyeknek a most tett észrevétel szerint a 0-beli kezdősebességei megegyeznek, **16.3.1.**-ből következően γ_1 és γ_2 egybeesik egy t_1 körüli nyílt intervallumon. Ez azonban ellentmond t_1 definíciójának. □

16.3.3. Legyen $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező. Kijelölve egy $v \in T_pM$ érintővektort, létezik egy és csak egy olyan $\gamma_v : I \to M$ geodetikusa ξ-nek, amelyre teljesülnek a következők:

(1) γ_v kezdősebessége v, azaz $\dot{\gamma}_v(0) = v$;

(2) γ_v értelmezési tartománya a lehető legbővebb: ha $\gamma : J \to M$ is v kezdősebességű geodetikus, akkor $J \subset I$ és $\gamma = \gamma_v \restriction J$.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{G} := \{\gamma : I_\gamma \to M | \gamma \text{ geodetikusa } \xi\text{-nek és } \dot{\gamma}(0) = v\}.$$

16.3.1. miatt $\mathcal{G} \neq \emptyset$. **16.3.2.** értelmében tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ esetén $\alpha \restriction I_\alpha \cap I_\beta = \beta \restriction I_\alpha \cap I_\beta$, így **4.1.4.** figyelembevételével a $\mathcal{G}$ kollekció konzisztens módon definiál egy

$$\gamma_v : I \to M \ , \ I := \bigcup_{\gamma \in \mathcal{G}} I_\gamma$$

görbét, amely nyilvánvalóan rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. □

Tekintettel a (2) tulajdonságra, a γ_v geodetikust *maximális*nak, vagy *geodetikusan kiterjeszthetetlen*nek mondjuk. Egy ξ másodrendű vektormezőt (*geodetikusan*) *teljes*nek nevezünk, ha valamennyi maximális geodetikusa értelmezve van az összes valós számok halmazán; ez a tulajdonság nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy ξ mint TM-en adott vektormező teljes (**12.4.**).

16.3.4. Legyen $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező, amelynek koordinátaelőállítása egy M-en kijelölt $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép által indukált $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozóan

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

(v.ö. **16.2.1.**). Egy $\gamma : I \to M$ görbe akkor és csak akkor geodetikusa ξ-nek, ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ koordinátafüggvényeire $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ fölött

$$\gamma^{i''} + 2G^i \circ \dot{\gamma} = 0 \ (i \in \{1, \dots, n\})$$

teljesül. Ezt a relációt (némi pongyolasággal) a ξ-re vonatkozó *geodetikusok differenciálegyenlete*ként is említjük.

Bizonyításként gondoljuk meg, hogy a **16.1.**-ben mondottak szerint egyrészt

$$\ddot{\gamma} = \sum_{i=1}^n \left(\gamma^{i'} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} \right) + \gamma^{i''} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right) \right)$$

érvényes $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ fölött, másrészt ξ koordinátaelőállítása alapján ugyanezen a halmazon

$$\xi \circ \dot{\gamma} = \sum_{i=1}^n \left((y^i \circ \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} \right) - 2(G^i \circ \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right) \right) =$$
$$\sum_{i=1}^n \left((\gamma^i)' \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} \right) - 2(G^i \circ \dot{\gamma}) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right) \right),$$

így ($\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ fölött)

$$\xi \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma} \iff \gamma^{i''} = -2G^i \circ \dot{\gamma} \iff \gamma^{i''} + 2G^i \circ \dot{\gamma} = 0 \ (i \in \{1, \dots, n\}).$$

16.4. Ha $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező, $f \in C^\infty(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor

(1) $\xi f^{\mathsf{v}} = f^{\mathsf{c}}$,

(2) $[X^{\mathsf{c}}, \xi]$ vertikális vektormező,

(3) $[X^{\mathsf{v}}, \xi]$ vetíthető vektormező, mégpedig $[X^{\mathsf{v}}, \xi] \underset{\tau}{\sim} X$

Bizonyítás. (1) ξ **16.3.4.**-ben leírt koordinátaelőállítását alkalmazva, és figyelembe véve, hogy a vertikális vektormezők a függvények vertikális liftjeit annullálják,

$$\xi f^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \left(\sum_{i=1}^n \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \right) f^{\mathsf{v}} = \sum_{i=1}^n y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \right)^{\mathsf{v}} \overset{\mathbf{15.1.2.}}{\underset{(\mathcal{U})}{=}} f^{\mathsf{c}}.$$

(2) $[X^{\mathsf{c}}, \xi] \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ igazolásához **15.2.1.** értelmében elegendő azt ellenőrizni, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén $[X^{\mathsf{c}}, \xi]f^{\mathsf{v}} = 0$. Ez $X^{\mathsf{c}}f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ (**15.4.1.**) és az (1) észrevétel alapján közvetlenül adódik:

$$[X^{\mathsf{c}}, \xi]f^{\mathsf{v}} = X^{\mathsf{c}}(\xi f^{\mathsf{v}}) - \xi(X^{\mathsf{c}}f^{\mathsf{v}}) = X^{\mathsf{c}}f^{\mathsf{c}} - \xi(Xf)^{\mathsf{v}} = X^{\mathsf{c}}f^{\mathsf{c}} - (Xf)^{\mathsf{c}} \overset{\mathbf{15.4.}}{=} 0.$$

(3) **7.6.1.** értelmében $[X^{\mathsf{v}}, \xi]$ és X pontosan akkor τ-ekvivalens, ha tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$[X^{\mathsf{v}}, \xi](f \circ \tau) = (Xf) \circ \tau, \text{ azaz } [X^{\mathsf{v}}, \xi]f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}.$$

Itt **15.2.1.**, **15.2.2.** és (1) alapján

$$[X^{\mathsf{v}}, \xi]f^{\mathsf{v}} = X^{\mathsf{v}}(\xi f^{\mathsf{v}}) - \xi(X^{\mathsf{v}}f^{\mathsf{v}}) = X^{\mathsf{v}}f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}},$$

ami igazolja az állítást. □

Megjegyzés. (3) igazolására bemutatunk egy további, *M. Crampin*től származó tanulságos érvelést. **15.2.4.** értelmében X^{v} folyama a

$$\varphi : \mathbb{R} \times TM \to TM\ ,\ (t, v) \mapsto \varphi(t, v) := v + tX(\tau(v))$$

leképezés, így **13.2.1.** alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$[X^{\mathsf{v}}, \xi]_v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\varphi_{-t})_* \left(\xi_{\varphi_t(v)} \right) - \xi_v \right).$$

Innen

$$\tau_* \left([X^{\mathsf{v}}, \xi]_v \right) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \left(\tau_* \circ (\varphi_{-t})_* \left(\xi_{\varphi_t(v)} \right) - \tau_*(\xi_v) \right) =$$
$$\lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \left(\tau_* \circ (\varphi_{-t})_* \left(\xi_{v + tX(\tau(v))} \right) - v \right) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \left((\tau \circ \varphi_{-t})_* \left(\xi_{v + tX(\tau(v))} \right) - v \right) =$$
$$\lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \left(\tau_* \left(\xi_{v + tX(\tau(v))} \right) - v \right) = \lim_{t \to 0} \tfrac{1}{t} \left(v + tX(\tau(v)) - v \right) = X \circ \tau(v),$$

tehát $\tau_* \circ [X^{\mathsf{v}}, \xi] = X \circ \tau$, azaz $[X^{\mathsf{v}}, \xi] \underset{\tau}{\sim} X$.

16.5. Egy másodrendű vektormező akkor és csak akkor affin spray, ha tetszőleges $\gamma : I \to M$ geodetikusával együtt minden olyan $\theta \circ \gamma$ átparaméterezettje is geodetikus, ahol $\theta : J \to I$ affin paramétertranszformáció, azaz

$$t \in J \mapsto \theta(t) = \alpha t + \beta \in I\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ rögzített}\ ;\ \alpha \neq 0$$

alakú.

Bizonyítás. Rögzített λ valós szám esetén μ_λ-val jelöljük a $w \in T\mathbb{R} \mapsto \lambda w \in T\mathbb{R}$ leképezést, m_λ-val pedig - az eddigieknek megfelelően - a $v \in TM \mapsto \lambda v \in TM$ leképezést.

(1) Tekintsük a valós egyenesen az $r := 1_{\mathbb{R}}$ kanonikus koordinátázást. Azt ellenőrizzük először, hogy

$$\theta_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \mu_\alpha \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta.$$

Valóban, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén **6.1.5.** alkalmazásával

$$(\theta_*)_t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)_t = (r \circ \theta)'(t) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)_{\theta(t)} = \theta'(t) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)_{\theta(t)} = \alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right)_{\theta(t)},$$

ami a felírt reláció helyességét jelenti.

(2) Kiszámítjuk $\gamma \circ \theta$ sebességvektormezőjét.

$$\dot{\overline{\gamma\circ\theta}} := (\gamma\circ\theta)_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \gamma_*\circ\theta_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \overset{(1)}{=} \gamma_*\circ\mu_\alpha\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\circ\theta = m_\alpha\circ\gamma_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\circ\theta = m_\alpha\circ\dot\gamma\circ\theta,$$

tehát

$$\dot{\overline{\gamma\circ\theta}} = m_\alpha\circ\dot\gamma\circ\theta.$$

(3) Meghatározzuk $\gamma\circ\theta$ gyorsulásvektormezőjét:

$$\ddot{\overline{\gamma\circ\theta}} := (\dot{\overline{\gamma\circ\theta}})_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \overset{(2)}{=} (m_\alpha\circ\dot\gamma\circ\theta)_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = (m_\alpha)_*\circ\dot\gamma_*\circ\theta_*\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \overset{(1)}{=}$$
$$(m_\alpha)_*\circ\dot\gamma_*\circ\mu_\alpha\circ\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\circ\theta = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\ddot\gamma\circ\theta,$$

azaz

$$\ddot{\overline{\gamma\circ\theta}} = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\ddot\gamma\circ\theta.$$

(4) Tegyük fel ezek után, hogy a $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormezőnek tetszőleges γ geodetikusával együtt annak $\gamma\circ\theta$ átparaméterezettje is geodetikusa. Ekkor a $\xi\circ\dot{\overline{\gamma\circ\theta}} = \ddot{\overline{\gamma\circ\theta}}$ reláció (2) és (3) alapján azt adja, hogy

$$\xi\circ m_\alpha\circ\dot\gamma\circ\theta = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\ddot\gamma\circ\theta,$$

ami θ invertálhatósága folytán azzal ekvivalens, hogy

$$\xi\circ m_\alpha\circ\dot\gamma = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\ddot\gamma.$$

Itt a jobb oldalon $\ddot\gamma = \xi\circ\dot\gamma$, hiszen γ geodetikus, így egy már alkalmazott érveléssel (ld. **16.2.2.**) következik, hogy

$$\xi\circ m_\alpha = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\xi.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy ξ affin spray.

(5) Legyen végül $\xi : TM \to TTM$ affin spray. Tekintsük ξ-nek egy $\gamma : I \to M$ geodetikusát, és ennek egy $\widetilde\gamma := \gamma\circ\theta : J \to M$ affin átparaméterezettjét (ahol $\theta(t) := \alpha t+\beta$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$). Ekkor

$$\ddot{\widetilde\gamma} = \ddot{\overline{\gamma\circ\theta}} \overset{(3)}{=} m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\ddot\gamma\circ\theta = m_\alpha\circ(m_\alpha)_*\circ\xi\circ\dot\gamma\circ\theta \overset{\text{feltétel}}{=} \xi\circ m_\alpha\circ\dot\gamma\circ\theta \overset{(2)}{=}$$
$$\xi\circ\dot{\overline{\gamma\circ\theta}} = \xi\circ\dot{\widetilde\gamma},$$

tehát $\widetilde\gamma$ is geodetikusa ξ-nek. □

16.6. Legyen $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező, $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ egy tetszőlegesen kijelölt térkép M-en, $(\tau^{-1}(\mathcal{U}),(x^i,y^i)_{i=1}^n)$ az általa indukált térkép TM-en. A következők ekvivalensek:

(1) ξ affin spray.

(2) Ha $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n\left(y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$, akkor a G^i függvények másodfokú homogének:

$$G^i(tv) = t^2G^i(v)\ ,\ v\in\tau^{-1}(\mathcal{U})\ ,\ t\in\mathbb{R}^*\ (i\in\{1,\dots,n\}).$$

(3) $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{j,k=1}^{n} (G^i_{jk} \circ \tau) y^j y^k \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$, ahol $G^i_{jk} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sima függvények, melyeknek vertikális liftjei $\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$ $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$.

Bizonyítás. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Legyen $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$, $t \in \mathbb{R}^*$ tetszőleges. Ekkor egyrészt

$$\xi_{tv} = \sum_{i=1}^{n} \left(t y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{tv} - 2G^i(tv) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{tv} \right),$$

másrészt

$$(m_t)_*(\xi_v) = (m_t)_* \left(\sum_{i=1}^{n} \left(y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_v - 2G^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_v \right) \right) \overset{\mathbf{6.1.7.}}{=}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(y^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{tv} - 2tG^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{tv} \right),$$

így

ξ affin spray $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \xi_{tv} = t(m_t)_*(\xi_v)$ $(v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})\ ,\ t \in \mathbb{R}^*)$ $\Longleftrightarrow$ $G^i(tv) = t^2 G^i(v)$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ $\Longleftrightarrow$ a G^i függvények másodfokú homogének.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) A most mondottak szerint ξ akkor és csak akkor affin spray, ha tetszőleges

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

koordinátaelőállításában a G^i függvények másodfokú homogének. **15.5.2.** (3) alapján ekkor ezek a függvények fibrumonként kvadratikus formák, megadhatók ezért $G^i_{jk} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sima függvények úgy, hogy

$$G^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (G^i_{jk} \circ \tau) y^j y^k \ (i \in \{1, \dots, n\})$$

és $G^i_{jk} = G^i_{kj}$. Innen ismételt parciális deriválással azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} = G^i_{jk} \circ \tau \ ; \, i, j, k \in \{1, \dots, n\} \, .$$

Beláttuk ezzel, hogy az affin sprayk koordinátaelőállítása megadható a (3) alakban. Megfordítva, ha egy másodrendű vektormező koordinátaelőállítása (3) alakú, akkor a

$$G^i := \sum_{j,k=1}^{n} (G^i_{jk} \circ \tau) y^i y^k \ , \, i \in \{1, \dots, n\}$$

függvények másodfokú homogének, és így (1)$\Longleftrightarrow$(2) miatt ξ affin spray. □

16.6.1. Megtartva az előző pont jelöléseit, ha $\xi : TM \to TTM$ affin spray, akkor a geodetikusainak differenciálegyenlete

$$x^{i''} + \sum_{j,k=1}^{n} (G^i_{jk} \circ x) x^{j'} x^{k'} = 0 \ , \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

alakú, értve ezen azt, hogy egy $\gamma : I \to M$ görbe pontosan akkor geodetikusa ξ-nek, ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ koordinátafüggvényeire $\gamma^{-1}(\mathcal{U})$ fölött

$$\gamma^{i''} + \sum_{j,k=1}^{n} (G^i_{jk} \circ \gamma) \gamma^{j'} \gamma^{k'} = 0 \ , \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

teljesül.

Ez közvetlenül adódik a **16.3.4.**-ben mondottak és az affin sprayk **16.6.**-ban leírt koordinátaelőállítása alapján.

16.7. Legyen adva egy $\xi : TM \to TTM$ másodrendű vektormező. Tetszőleges $v \in TM$ esetén jelölje c_v a ξ vektormező v-ből induló (azaz a $c_v(0) = v$ feltételnek eleget tevő) integrálgörbéjét (**12.2.**). A következő kijelentések ekvivalensek:

(S_1) ξ affin spray, azaz

$$\xi \circ m_t = m_t \circ (m_t)_* \circ \xi \ , \ t \in \mathbb{R}^*.$$

(S_2) Egy t valós szám akkor és csak akkor van benne ξ egy c_{sv} ($s \in \mathbb{R}^*$) integrálgörbéjének értelmezési tartományában, ha st benne van c_v értelmezési tartományában, és ekkor

$$c_{sv}(t) = s c_v(st).$$

(S_3) Legyen $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$. st pontosan akkor van benne ξ egy c_v integrálgörbéjének értelmezési tartományában, ha t benne van c_{sv} értelmezési tartományában, és ebben az esetben

$$\tau \circ c_{sv}(t) = \tau \circ c_v(st).$$

(S_4) Egy t valós szám akkor és csak akkor tartozik c_v értelmezési tartományába, ha az 1 eleme c_{tv} értelmezési tartományának, és ekkor

$$\tau \circ c_v(t) = \tau \circ c_{tv}(1).$$

Bizonyítás. (S_1)→(S_2) Legyen $s \in \mathbb{R}^*$ rögzített valós szám, és jelölje θ_s a $t \in \mathbb{R} \mapsto st \in \mathbb{R}$ transzformációt. Minden olyan $t \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre st benne van c_v értelmezési tartományában, $c_v \circ \theta_s$ értelmezve van. Kiszámítjuk az $m_s \circ c_v \circ \theta_s$ görbe sebességvektormezőjét.

$$\dot{\overline{m_s \circ c_v \circ \theta_s}} := (m_s \circ c_v \circ \theta_s)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = (m_s)_* \circ (c_v)_* \circ (\theta_s)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \overset{(*)}{=} (m_s)_* \circ (c_v)_* \circ \mu_s \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta_s = (m_s)_* \circ m_s \circ (c_v)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta_s = (m_s)_* \circ m_s \circ \dot{c}_v \circ \theta_s = m_s \circ (m_s)_* \circ \xi \circ c_v \circ \theta_s \overset{(S_1)}{=} \xi \circ (m_s \circ c_v \circ \theta_s),$$

a $(*)$ lépésben a **16.5.** bizonyításának (1) lépésében tett észrevételt használva fel, a $\theta := \theta_s$ szereposztással. A kapott eredmény azt jelenti, hogy $m_s \circ c_v \circ \theta_s$ integrálgörbéje ξ-nek. Ez az integrálgörbe az $m_s \circ c_v \circ \theta_s(0) = m_s(c_v(0)) = sv$ pontból indul ki, így a **12.3.** unicitás-tétel alapján

$$m_s \circ c_v \circ \theta_s = c_{sv}$$

következik, amivel megkaptuk S_2-t.

(S_2)$\to$(S_1) c_{sv} ξ-nek az sv-ből induló integrálgörbéje, ezért $\dot{c}_{sv}(0) = \xi_{sv}$. A feltétel értelmében

$$c_{sv} = m_s \circ c_v \circ \theta_s.$$

Innen az imént elvégzett számolás egyik részeredménye alapján

$$\dot{c}_{sv} = \dot{\overline{m_s \circ c_v \circ \theta_s}} = m_s \circ (m_s)_* \circ \dot{c}_v \circ \theta_s,$$

így speciálisan

$$\dot{c}_{sv}(0) = m_s \circ (m_s)_* \circ \dot{c}_v(0) = m_s \circ (m_s)_*(\xi_v).$$

Összevetve a $\dot{c}_{sv}(0)$-ra kapott két eredményt, a

$$\xi_{sv} = m_s \circ (m_s)_*(\xi_v)$$

relációhoz jutunk, ami $s \in \mathbb{R}^*$ és $v \in TM$ tetszőlegessége folytán azt jelenti, hogy ξ affin spray.

(S_2)$\to$(S_3) - ez evidens.

(S_3)$\to$(S_2) Csak az integrálgörbék közötti reláció igényel ellenőrzést. Mivel c_{sv} integrálgörbéje ξ-nek, **16.2.2.** értelmében c_{sv} kanonikus lift. Így

$$c_{sv} = \dot{\overline{\tau \circ c_{sv}}} \overset{(\mathrm{S}_3)}{=} \dot{\overline{\tau \circ c_v \circ \theta_s}} = \tau_* \circ (c_v)_* \circ (\theta_s)_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \overset{(*)}{=} \tau_* \circ (c_v)_* \circ \mu_s \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta_s =$$
$$m_s \circ \tau_* \circ (c_v)_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta_s = m_s \circ (\tau \circ c_v)_* \circ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \circ \theta_s = m_s \circ \dot{\overline{\tau \circ c_v}} \circ \theta_s \overset{(**)}{=} m_s \circ c_v \circ \theta_s,$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben ismét **16.5.** bizonyításának (1) lépésében nyert relációt alkalmazva, a $(**)$-gal jelölt lépésben pedig felhasználva, hogy c_v is kanonikus lift. Ezzel megkaptuk a kívánt (S_2) összefüggést.

(S_4)$\to$(S_3) Tetszőleges $v \in TM$ vektor esetén jelölje I_v a c_v integrálgörbe értelmezési tartományát. Ekkor a feltétel értelmében

$$st \in I_v \iff 1 \in I_{stv},$$
$$t \in I_{sv} \iff 1 \in I_{tsv} = I_{st};$$

következésképpen

$$st \in I_v \iff t \in I_{sv},$$

amivel beláttuk (S_3) első észrevételét. (S_4) második feltételének alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\tau \circ c_v(st) = \tau \circ c_{stv}(1)\ ,\ \tau \circ c_{sv}(t) = \tau \circ c_{stv}(1)$$

amiből a kívánt

$$\tau \circ c_{sv}(t) = \tau \circ c_v(st)$$

relációhoz jutunk.

(S_3)$\to$(S_4) - ez a most látott mintára adódik. □

16.8. Tegyük fel, hogy $\xi : TM \to TTM$ affin spray, és tetszőleges $v \in TM$ esetén jelentse $c_v : I_v \to TM$ ξ-nek a v-ből induló integrálgörbéjét. Legyen

$$\mathcal{E} := \{v \in TM | [0,1] \subset I_v\} .$$

12.6.1. biztosítja, hogy $\mathcal{E}$ nyílt halmaz és a

$$v \in \mathcal{E} \mapsto c_v(1) \in TM$$

leképezés sima. Az

$$\exp : \mathcal{E} \subset TM \to M \ , \ v \mapsto \exp(v) := \tau \circ c_v(1)$$

leképezés szintén sima, ezt a ξ affin sprayhez tartozó *exponenciális leképezés*nek, $\mathcal{E}$-t az *exponenciális leképezés tartományá*nak nevezzük.

16.8.1. Megtartva a bevezetett jelöléseket, legyen

$$\mathcal{O}(M) := TM \backslash \mathring{T}M = \{0_p \in TM | p \in M\} .$$

Ekkor $\mathcal{O}(M) \subset \mathcal{E}$, és

$$\exp \upharpoonright \mathcal{O}(M) = \tau \upharpoonright \mathcal{O}(M),$$

azaz $\exp(0_p) = p$, $p \in M$.

Bizonyítás. Tetszőleges $p \in M$ esetén $\xi_{0_p} = 0$, amint az például az affin sprayk koordinátaelőállításából (**16.6.**/(3)) kiolvasható. ξ-nek a 0_p pontokból kiinduló integrálgörbéi értelmezve vannak a teljes valós számegyenesen, ugyanis tetszőleges $s \in \mathbb{R}^*$ esetén (S_2) miatt

$$t \in I_{s0_p} = I_{0_p} \iff st \in I_{0_p},$$

és így I_{0_p} minden elemével együtt tartalmazza annak összes nemnulla skalárszorosát. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\exp(0_p) := \tau \circ c_{0_p}(1) = \tau \circ c_{t0_p}(1) \overset{(\mathrm{S}_4)}{=} \tau \circ c_{0_p}(t),$$

így speciálisan $t := 0$ választással azt kapjuk, hogy

$$\exp(0_p) := \tau \circ c_{0_p}(0) = \tau(0_p) = p.$$

□

16.8.2. Továbbra is megtartva az eddigi feltételeket és jelöléseket, ha $\exp : \mathcal{E} \to M$ a ξ affin sprayhez tartozó exponenciális leképezés, akkor tetszőleges $p \in M$ pont esetén

$$\exp_p := \exp \upharpoonright \mathcal{E} \cap T_pM$$

lokális diffeomorfizmus a $0_p \in T_pM$ pontban (**6.1.7.**), mégpedig $(\exp_p)_* \, T_{0_p}TM$ identikus transzformációja. Ily módon $\exp_p$ a 0_p egy környezetét diffeomorfan képezi le a $p \in M$ pont egy környezetére.

Bizonyítás. Legyen $v \in \mathcal{E} \cap T_pM$ tetszőleges.

(1) Tekintsük a
$$\rho : [0,1] \to T_pM \ , \ t \mapsto \rho(t) := tv$$
görbét. **6.6.** értelmében az
$$\iota_0 : v \in T_pM \mapsto \iota_0(v) := \dot\rho(0) \in T_0T_pM$$
leképezés lineáris izomorfizmus.

(2) Képezzük a
$$\gamma := \exp_p \circ \rho : [0,1] \to M$$
görbét! Ennek sebességvektormezője
$$\dot\gamma = (\exp_p)_* \circ \rho_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = (\exp_p)_* \circ \dot\rho,$$
így
$$\dot\gamma(0) = (\exp_p)_* \circ \dot\rho(0) = (\exp_p)_* \circ \iota_0(v).$$

(3) Jegyezzük meg, hogy
$$\gamma = \tau \circ c_v.$$
Valóban, tetszőleges $t \in T_v$ esetén
$$\gamma(t) = \exp_p(tv) := \tau \circ c_{tv}(1) \overset{(\mathrm{S}_4)}{=} \tau \circ c_v(t).$$
Felhasználva ezt az észrevételt,
$$\dot\gamma(0) = \dot{\overline{\tau \circ c_v}}(0) = \tau_* \circ \dot c_v(0) = \tau_* \circ \xi_{c_v(0)} = \tau_* \circ \xi_v = v.$$
Összevetve a $\dot\gamma(0)$-ra most és (2)-ben nyert eredményt, az
$$(\exp_p)_* \circ \iota_0 = 1_{T_pM}$$
relációhoz jutunk, amiből következik, hogy $\big((\exp_p)_*\big)_{0_p}$ az identikus transzformációja $T_{0_p}TM$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $(\exp)_p$ lokális diffeomorfizmus 0_p-ben. □

16.8.3. Ha $\xi : TM \to TTM$ affin spray, akkor tetszőleges T_pM érintőtér origón átmenő, affin paraméterezésű parametrizált egyenesszakaszainak képei a ξ-hez tartozó exponenciális leképezésnél ξ-nek geodetikusai. Nevezetesen, ha $v \in T_pM$ és
$$\gamma_v : I_v \to M \ , \ t \mapsto \gamma_v(t) := \exp_p(tv),$$
akkor γ_v geodetikus. Megfordítva, ha $\gamma : I \to M$ $v \in T_pM$ kezdősebességű geodetikusa ξ-nek, akkor
$$\gamma(t) = \exp_p(tv) \ , \ t \in I.$$

Bizonyítás. (1) Tetszőleges $t \in I_v$ paraméterre
$$\gamma_v(t) := \exp_p(tv) := \tau \circ c_{tv}(1) \overset{(\mathrm{S}_3)}{=} \tau \circ c_v(t).$$

Mivel c_v integrálgörbéje ξ-nek, c_v kanonikus lift, és ezért $c_v = \dot{\overline{\tau \circ c_v}}$. Ezt felhasználva,

$$\ddot{\gamma}_v = \ddot{\overline{\tau \circ c_v}} = \dot{c}_v = \xi \circ c_v = \xi \circ \dot{\overline{\tau \circ c_v}} = \xi \circ \dot{\gamma}_v$$

adódik, ami igazolja, hogy γ_v geodetikusa ξ-nek.

(2) Tegyük fel, megfordítva, hogy γ v kezdősebességű geodetikusa ξ-nek:

$$\ddot{\gamma} = \xi \circ \dot{\gamma}\ ,\ \dot{\gamma}(0) = v.$$

Az (1)-ben mondottak szerint γ_v is geodetikusa ξ-nek, s mivel

$$\gamma_v(0) := \exp_p(0v) = \exp_p(0) \overset{\mathbf{16.8.1.}}{=} p,$$
$$\dot{\gamma}_v(0) = \dot{\overline{\tau \circ c_v}}(0) = v \text{ (ld. } \mathbf{16.8.2.} \text{ bizonyítását),}$$

a γ_v geodetikus szintén v kezdősebességű. Így **16.3.2.** alapján $\gamma = \gamma_v$ következik.

□

16.8.4. Megtartva **16.8.3.** jelöléseit, az elmondottak alapján minden $\xi : TM \to TTM$ affin spray származtat egy

$$\varphi : (t, v) \mapsto \varphi(t, v) := \gamma_v(t) \in M$$

leképezést, amely $\mathbb{R} \times TM$ egy nyílt részhalmazán van értelmezve; ezt az M-en ξ által meghatározott *geodetikus folyam*nak nevezzük. Ezzel kapcsolatban érvényes a következő

Átskálázási lemma. Ha $s, t \in \mathbb{R}$, úgy t pontosan akkor tartozik γ_{sv} értelmezési tartományához, ha st benne van γ_v értelmezési tartományában, és ebben az esetben

$$\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)\ \text{, azaz } \varphi(t, sv) = \varphi(st, v).$$

Valóban, a megállapítás első fele következik (S_3)-ból. Feltéve, hogy t benne van γ_{sv} értelmezési tartományában, ami ugyanaz, mint a c_{sv} integrálgörbe értelmezési tartománya, szintén (S_3) alapján

$$\tau \circ c_{sv}(t) = \tau \circ c_v(st) \iff \gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st) \iff \varphi(t, sv) = \varphi(st, v).$$

16.8.5. Legyen $\xi : TM \to TTM$ továbbra is affin spray. Kiválasztva egy $p \in M$ pontot, tekintsük a T_pM érintőteret, és rögzítsük ennek egy $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$ bázisát. Ez a

$$v_i \in T_pM \mapsto \varphi_{\mathcal{B}}(v_i) := e_i \in \mathbb{R}^n\ ,\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

hozzárendelések révén meghatároz egy $\varphi_{\mathcal{B}} : T_pM \to \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmust. **16.8.2.** értelmében a $0_p \in T_pM$ origónak megadható egy olyan $\widetilde{\mathcal{U}}$, a $p \in M$ pontnak pedig olyan $\mathcal{U}$ környezete, hogy az

$$\exp_p \restriction \widetilde{\mathcal{U}} : \widetilde{\mathcal{U}} \subset T_pM \to \mathcal{U} \subset M$$

leképezés diffeomorfizmus. Ha

$$u := \varphi_{\mathcal{B}} \circ \left(\exp_p \restriction \widetilde{\mathcal{U}}\right)^{-1},$$

akkor $(\mathcal{U}, u)$ p körüli térképe M-nek, amelyet a ξ affin sprayhez tartozó p-beli *normáltérképnek* nevezünk. Egy sokaságbeli pontnak egy normáltérképre vonatkozó koordinátáit *normálkoordinátákként* is említjük. A p-beli normáltérképpel kapcsolatban érvényesek a következők:

(1) $(\mathcal{U}, u)$ p *középpontú*: $u(p) = \mathbf{0}$.

Valóban, $\exp_p(0_p) = p$ miatt $(\exp_p)^{-1}(p) = 0_p$, és így
$u(p) := \varphi_{\mathcal{B}}((\exp_p)^{-1}(p)) = \varphi_{\mathcal{B}}(0_p) = \mathbf{0}$.

(2) Ha $\gamma_v : I \to M$ p-ből induló, $v = \sum_{i=1}^{n} \nu^i v_i \in T_pM$ kezdősebességű geodetikus, akkor ez noormálkoordinátákban a

$$t \in I \mapsto t(\nu^1, \ldots, \nu^n) \in \mathbb{R}^n$$

parametrizált egyenes szakaszként írható le, ugyanis tetszőleges $t \in I$ esetén

$$u \circ \gamma_v(t) = \varphi_{\mathcal{B}} \circ (\exp_p)^{-1} \circ \gamma_v(t) \overset{\textbf{16.8.3.}}{=} \varphi_{\mathcal{B}} \circ (\exp_p)^{-1} \circ \exp_p(tv) =$$
$$\varphi_{\mathcal{B}}(tv) = t\varphi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} \nu^i v_i\right) = t\sum_{i=1}^{n} \nu^i e_i = t(\nu^1, \ldots, \nu^n).$$

(3) Ha $u = (u^1, \ldots, u^n)$, akkor

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p = v_i \ , \ i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Tekintsünk ennek belátására egy tetszőleges $v = \sum_{i=1}^{n} \nu^i v_i$ p-beli érintővektort. Ekkor

$$v = \dot{\gamma}_v(0) = \sum_{i=1}^{n} (u^i \circ \gamma_v)'(0) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\gamma_v(0)} \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p ,$$

így speciálisan

$$v_i = \dot{\gamma}_{v_i}(0) = \sum_{j=1}^{n} \delta_i^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \ , \ i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

17. Tenzorok

Egy sokaságon adott tenzor (vagy tenzormező) fogalma a sokaságokon értelmezett sima függvények, vektormezők és elsőfokú differenciálformák fogalmának közös általánosítása, s fontos eszközül szolgál a sokaság bonyolultabb objektumainak leírásában. A tenzorok megjelenési formája igen eltérő lehet, karakterisztikus tulajdonságuk azonban minden esetben a *multilinearitás*. Az általunk alapulvett definíció explicite ezt emeli ki, ugyanakkor egyszerűen alkalmazható a klasszikus, koordinátás leírás céljaira is. Tárgyalásunkat az algebrai háttér rövid vázolásával kezdjük.

17.1. Legyen K kommutatív, egységelemes gyűrű, $V_1, \dots, V_s$ pedig legyenek K fölötti modulusok. (K elemeit skalárokként, a K-modulusok elemeit vektorokként is említjük.) A $V_1 \times \dots \times V_s$ Descartes-szorzat elemeinek szokásos, komponensenkénti összeadása és skalárral való szorzása esetén K-modulussá válik, amelyet az adott modulusok direkt szorzatának és (külső) direkt összegének egyaránt nevezünk (utóbbi esetben a nyert K-modulusra a $\bigoplus_{i=1}^{s} V_i$ jelölést használjuk). Ha a V_i ($i \in \{1, \dots, s\}$) modulusok mindegyike ugyanaz a V K-modulus, akkor a Descartes-szorzatra a V^s rövidítést használjuk.

Tekintsünk egy további, W K-modulust. Egy

$$A : V_1 \times \dots \times V_s \to W$$

leképezést (K)-*multilineáris*nak mondunk, ha valamennyi változójában K-lineáris, azaz ha minden $i \in \{1, \dots, s\}$ index és tetszőlegesen rögzített $v_j \in V_j$, $j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i\}$ vektorok esetén a

$$v \in V_i \mapsto A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s) \in W$$

leképezés K-lineáris.

Ha V K-modulus, akkor az összes $V \to K$ K-lineáris leképezések halmazát V^*-gal jelöljük. V^* a függvények összegének és skalárszorosának szokásos, elemenkénti értelmezése esetén szintén K-modulus, amelyet V *duális modulus*ának hívunk.

17.1.1. Legyenek r és s nemnegatív egészek, föltéve, hogy nem mindkettőjük zérus, és tekintsünk egy V K-modulust. *V fölötti (r, s)típusú tenzor*on egy

$$A : (V^*)^r \times V^s \to K$$

(K)-multilineáris függvényt értünk. Ekkor az r, ill. az s egész számot *kontravariáns*, ill. *kovariáns index*ként említjük, s azt is mondjuk, hogy az A tenzor *r-edrendben kontravariáns*, *s-edrendben kovariáns.* A $(0, s)$-típusú, vagy s-edrendű kovariáns tenzorok a $V^s \to K$ alakú, az $(r, 0)$-típusú vagy r-edrendű kontravariáns tenzorok a $(V^*)^r \to K$ alakú multilineáris függvények. Megállapodunk abban, hogy a V fölötti, *$(0, 0)$-típusú tenzor*ok a K skalártartomány elemei.
Jelölés. $T_s^r(V)$ a V fölötti (r, s)-típusú tenzorok halmaza, $T^r(V) := T_0^r(V)$, $T_s(V) := T_s^0(V)$; ekkor $T_0^0(V) = K$.

Közvetlenül adódik, hogy $T_s^r(V)$ a függvények összeadásának és skalárral való szorzásának szokásos értelmezése esetén K-modulus; speciálisan $T_1^0(V) = V^*$.

17.2. A bevezetett általános tenzorfogalom lefedi azt a számunkra legfontosabb két esetet, amikor az alapulvett modulus egy M sokaság vektormezőinek $C^\infty(M)$-modulusa ill. a sokaság egy tetszőleges p pontbeli T_pM érintőtere (az utóbbi esetben a modulus valós vektortér).

Egy *M sokaságon adott tenzor*on az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-modulus fölötti tenzort értünk. Az M-en adott (r, s)-típusú tenzorok $C^\infty(M)$-modulusára $T_s^r(\mathfrak{X}(M))$ helyett az egyszerűbb $\mathcal{T}_s^r(M)$ jelölést használjuk. Ekkor, a korábban mondottaknak megfelelően,

$$\mathcal{T}^r(M) := \mathcal{T}_0^r(M)\ ,\ \mathcal{T}_s(M) := \mathcal{T}_s^0(M)\ ,\ \mathcal{T}_0^0(M) := C^\infty(M).$$

Az értelmezés szerint $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ azt jelenti, hogy A olyan

$$\underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to C^\infty(M)$$

leképezés, amely minden változójában $C^\infty(M)$-lineáris. Képletesen szólva, A olyan multilineáris gép, amely r számú $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-forma és s számú $X_1, \dots, X_s$ vektormező betáplálása esetén egy

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

sima függvényt készít. Azt mondjuk, hogy itt θ^i az A tenzor i-edik kontravariáns, X_j pedig a j-edik kovariáns helyét foglalja el.

Példák. (1) A

$$\gamma : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \ , \ (\theta, X) \mapsto \gamma(\theta, X) := \theta(X)$$

leképezés (v.ö. **8.1.**)mindkét változójában $C^\infty(M)$-lineáris, így (1,1)-típusú tenzor M-en. Ezt a tenzort az M fölötti *Kronecker-delta tenzor*nak hívjuk.

(2) Rögzítsünk egy $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M) \overset{\textbf{8.3.}}{\cong} A^1(M)$ nemzérus elsőfokú differenciálformát. Ha

$$A(X, Y) := X\delta(\omega, Y) \ ; \ X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

akkor az $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ leképezés az első változójában $C^\infty(M)$-lineáris, a második változójában additív, azonban

$$A(X, fY) := X\delta(\omega, fY) = X(f\delta(\omega, Y)) = (Xf)\delta(\omega, Y) + fX\delta(\omega, Y) = \\ (Xf)\delta(\omega, Y) + fA(X, Y) \neq fA(X, Y) \ (f \in C^\infty(M)),$$

és így A *nem tenzor*. A dolgot az „rontja el”, hogy A differenciáloperátorként is működik.

17.2.1. Egy sokaság elsőrendű kontravariáns tenzorainak modulusa természetes módon izomorf a sokaság vektormezőinek modulusával: $\mathcal{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}(M)$; természetes izomorfizmust ad meg a

$$\begin{cases} \gamma : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \gamma_X \in \mathcal{T}^1_0(M) = (\mathfrak{X}^*(M))^*; \\ \qquad \gamma_X(\theta) := \theta(X) \ , \ \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \end{cases}$$

leképezés.

17.2.2. Egy M sokaság $(1, s) \neq (1, 0)$ típusú tenzorainak $C^\infty(M)$-modulusa természetes módon izomorf az $(\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-multilineáris leképezések $L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ modulusával:
$\mathcal{T}^1_s(()M) \cong L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$; ilyen izomorfizmust ad meg az

$$\begin{cases} \qquad \alpha \in L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) \mapsto A \in \mathcal{T}^1_s(M), \\ A(\theta, X_1, \dots, X_s) := \theta\alpha(X_1, \dots, X_s) \ (\theta \in \mathfrak{X}^*(M); X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)) \end{cases}$$

leképezés.

Tekintettel $\mathcal{T}^1_s(M)$ és $L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ azonosíthatóságára, $\mathcal{T}^1_s(M)$ elemeit *vektorértékű tenzor*okként is említjük.

17.2.3. Ha $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$ és

$$A \otimes B(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) :=$$
$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}),$$
$$(\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M), i \in \{1, \dots, r+r'\}\ ;\ X_j \in \mathfrak{X}(M)\ ,\ j \in \{1, \dots, s+s'\},$$

akkor $A \otimes B \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}$; ezt a tenzort A és B *tenzori szorzat*ának nevezzük. Ha speciálisan $r' = s' = 0$, és így $B =: f \in C^\infty(M)$, akkor $A \otimes f = f \otimes A := fA$.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a tenzori szorzat $C^\infty(M)$-bilineáris: ha A_1 és A_2 azonos típusú, B tetszőleges tenzor M-en, akkor tetszőleges $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ esetén

$$(f_1A_1 + f_2A_2) \otimes B = f_1(A_1 \otimes B) + f_2(A_2 \otimes B),$$

és hasonló reláció érvényes a második tényezőre is.

Szintén kiolvasható a definícióból, hogy tetszőleges A, B, C tenzorok esetén érvényes az $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ asszociatív szabály, és így többtényezős tenzori szorzatnál a zárójelek mellőzhetők. Ugyanakkor a tenzori szorzat tényezői általában nem cserélhetők föl. Válasszunk ennek illusztrálására az M sokaságon egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, s tekintsük $\mathcal{U}$ fölött a du^1 és du^2 1-formát. Ekkor

$$du^1 \otimes du^2 \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right) = du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) du^2\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right) = 1,$$

$$du^2 \otimes du^1 \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right) = du^2\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right) = 0,$$

következésképpen $du^1 \otimes du^2 \neq du^2 \otimes du^1$. A függvények azonban minden tenzorral kommutálnak:

$$f(A \otimes B) = fA \otimes B = A \otimes fB,$$

és ha A kovariáns, B kontravariáns tenzor, akkor $A \otimes B = B \otimes A$ szintén teljesül.

17.3. Következő meggondolásaink célja annak megmutatása, hogy a vektormezőkhöz és 1-formákhoz hasonlóan egy sokaságon adott tenzorok is tekinthetők *mező*knek, azaz olyan leképezéseknek, amelyek a sokaság minden p pontjához egy bizonyos A_p értéket rendelnek. Ez azon múlik, hogy ha egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort 1-formákon és vektormezőkön kiértékelve eljutunk egy $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)$ függvényhez, akkor ennek egy $p \in M$ pontban felvett értéke nem függ az 1-formák és a vektormezők egészbeni viselkedésétől, sőt a p pont egy környezetében felvett értékeiktől sem, hanem egyedül a p-beli értékeiktől.

17.3.1. Ha a $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formák, vagy az $X_1, \dots, X_s$ vektormezők valamelyike zérus egy $p \in M$ pontban, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor esetén

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy például $X_s(p) = 0$. Kijelölve p körül egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet,

$$X_s \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

írható, ahol $X^i = X_s u^i \in C^\infty(\mathcal{U})$ $(i \in \{1, \dots, n\})$. Válasszunk olyan f dudorfüggvényt p-ben, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik (**4.2.3.**). Ekkor a már ismert módon (ld. **8.3.** bizonyítását) az fX^i függvények, ill. az $f\frac{\partial}{\partial u^i}$ vektormezők $(i \in \{1, \dots, n\})$ az egész M sokaságon értelmezett sima függvényeknek, ill. vektormezőknek tekinthetők. Így

$$f^2 A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f^2 X_s) =$$
$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} (fX^i) f\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_{i=1}^{n} fX^i A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f\frac{\partial}{\partial u^i}).$$

$X_s(p) = 0$ miatt $X^i(p) = 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, míg $f(p) = 1$. Így a nyert összefüggés bal és jobb oldalát p-ben kiértékelve, azt kapjuk, hogy $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$. □

17.3.2. Legyen $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $p \in M$. Ha $\theta^1, \dots, \theta^r$ és $\overline{\theta}^1, \dots, \overline{\theta}^r$ olyan 1-formák, $X_1, \dots, X_s$ és $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s$ pedig olyan vektormezők az M sokaságon, amelyekre

$$\overline{\theta}^i(p) = \theta^i(p) \ (i \in \{1, \dots, r\}), \text{ ill. } \overline{X}_j(p) = X_j(p) \ (j \in \{1, \dots, s\})$$

teljesül, akkor

$$A(\overline{\theta}^1, \dots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p).$$

Bizonyítás. A jobb áttekinthetőség érdekében az $r = 1$, $s = 2$ esettel foglalkozunk, az alkalmazásra kerülő ötlet teljes általánosságban is működik. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy érvényes az

$$A(\overline{\theta}, \overline{X}, \overline{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\overline{\theta} - \theta, \overline{X}, \overline{Y}) + A(\overline{\theta}, \overline{X} - X, \overline{Y}) + A(\overline{\theta}, \overline{X}, \overline{Y} - Y)$$

„teleszkóp-azonosság”, ahol $\theta, \overline{\theta} \in \mathfrak{X}^{\vee}(M)$; $X, Y, \overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(M)$. Ha $\overline{\theta}(p) = \theta(p)$, $\overline{X}(p) = X(p)$ és $\overline{Y}(p) = Y(p)$, akkor a $\overline{\theta} - \theta$ 1-forma, valamint az $\overline{X} - X$ és az $\overline{Y} - Y$ vektormező egyaránt zérust vesz fel p-ben, így **17.3.1.** alapján a jobb oldal p-beli eltűnése, ebből pedig $A(\overline{\theta}, \overline{X}, \overline{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p)$ következik. □

17.3.3. Most már módunk van arra, hogy bevezessük egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor egy pontbeli értékének fogalmát.

Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot. Ha $\nu^1, \dots, \nu^r \in T^*_p M$ tetszőleges p-beli kovektorok; $v_1, \dots, v_s \in T_p M$ pedig p-beli érintővektorok, és

$$A_p(\nu^1, \dots, \nu^r, v_1, \dots, v_s) := A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

ahol

$$\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)\ ,\ \theta^i(p) = \nu^i \ (i \in \{1, \dots, r\})\ ;\ X_j \in \mathfrak{X}(M)\ ,\ X_j(p) = v_j \ (j \in \{1, \dots, s\}),$$

akkor $A_p \in T^r_s(T_p M)$ jól definiált - a θ^i 1-formák és az X_j vektormezők választásától független - (r, s) típusú tenzor a $T_p M$ érintőtéren. Ezt az A_p tenzort nevezzük az $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ *tenzor p-beli értékének*.

17.3.4. A mondottak azt is lehetővé teszik, hogy egy M sokaságon adott tenzort - a vektormezők mintájára, ld. **7.1.** - egy alkalmas „nyaláb szeléseiként” interpretáljuk. Ehhez, vázlatosan, a következő meggondolás vezet. Rögzített $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén legyen

$$T^r_s M := \bigcup_{p \in M} T^r_s(T_pM) \text{ (diszjunkt unió).}$$

$T^r_s M$ természetes módon sima sokasággá tehető úgy, hogy a

$$\tau^r_s : T^r_s M \to M \ , \ \alpha \mapsto p \ , \ ha \ \alpha \in T^r_s(T_pM)$$

kanonikus projekció sima leképezéssé váljon. Ekkor egy M fölötti (r,s)-típusú tenzor olyan $A : M \to T^r_s M$ sima leképezésként interpretálható, amely eleget tesz a $\tau^r_s \circ A = 1_M$ feltételnek. Ezen interpretáció bitokában szólhatunk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzornak egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazra való $A \restriction \mathcal{U}$ leszűkítéséről, mint jól definiált

$$p \in \mathcal{U} \mapsto A_p \in T^r_s(T_pM)$$

$\mathcal{U}$ fölötti tenzorról.

17.4. Egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzornak $((r,s) \neq (0,0))$ az M sokaság egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ *térképre vonatkozó komponensei*n az

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := (A \restriction \mathcal{U}) \left(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}} \right) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

sima függvényeket értjük, ahol valamennyi index 1-től n-ig fut.

17.4.1. Ha ω $(0,1)$-típusú tenzor, azaz elsőfokú differenciálforma, akkor az $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó komponensei az értelmezés szerint az

$$\omega_j = (\omega \restriction \mathcal{U}) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) =: \omega \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \in C^\infty(\mathcal{U}) \ ; \ j \in \{1, \dots, n\}$$

függvények. Mivel tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ esetén $\omega_p \in T^*_p M$, egyértelmű módon $\omega_p = \sum_{j=1}^n \lambda_j(p) du^j(p)$ írható. Az így adódó $\lambda_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvények megegyeznek az imént bevezetett komponensfüggvényekkel, ugyanis

$$\omega_j(p) := \left(\omega \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \right)(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) du^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)_p =$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \delta^i_j = \lambda_j(p).$$

17.4.2. Az $(1,0)$-típusú tenzorok komponensei megegyeznek a nekik **17.2.1.** szerint kanonikusan megfelelő vektormezők **7.1.1.**-ben bevezetett komponensfüggvényeivel. Valóban, ha $X \in \mathcal{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}(M)$, akkor X-nek a **17.4.** szerinti értelemben vett komponensei az

$$\widetilde{X}^i := (X \restriction \mathcal{U})(du^i) =: X(du^i) \ , \ i \in \{1, \dots, n\}$$

függvények. Másrészt **7.1.1.** alapján

$$X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \ , \ X^i = Xu^i \in C^\infty(U);$$

így

$$\widetilde{X}^i = X(du^i) \overset{\textbf{17.2.1.}}{=} du^i(X) = du^i \left(\sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{j=1}^{n} X^j du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} X^j \delta^i_j = X^i.$$

17.4.3. Ha egy $(1, s)$-típusú tenzort a **17.2.2.**-ben megadott $\mathcal{T}^1_s(M) \cong L^s(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ interpretáció alapján $\alpha : (\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ leképezésként adunk meg, akkor a komponensei közvetlenül az

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}} \right) = \sum_{i=1}^{n} A^i_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

relációk alapján nyerhetők, ha ugyanis $A \in \mathcal{T}^1_s(M)$ az α-nak megfelelő $(1, s)$-tenzor, akkor

$$A \left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}} \right) \overset{\textbf{17.2.2.}}{=} du^i \alpha \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_s}} \right) =$$
$$du^i \sum_{k=1}^{n} A^k_{j_1\dots j_s} \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{k=1}^{n} A^k_{j_1\dots j_s} \delta^i_k = A^i_{j_1\dots j_s}.$$

17.4.4. Egy tenzornak az 1-formákon és a vektormezőkön való kiértékelése elvégezhető koordinátás úton, ha mindent kiírunk komponensekben. Tekintsünk ennek illusztrálására egy $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$ tenzort, és jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ha $\theta \in \mathfrak{X}^\vee(M)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, és

$$\theta \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \theta_i du^i \ , \ X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \ , \ Y \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

akkor

$$A(\theta, X, Y) \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i,j,k} A \left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \theta_i X^j Y^k = \sum_{i,j,k} A^i_{jk} \theta_i X^j Y^k.$$

17.4.5. Tenzorok összeadásakor a megfelelő tenzorkomponensek összeadódnak, egy tenzor függvényszeresének komponenseit a komponensek függvényszerese adja.

Ha $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$, $B \in \mathcal{T}^1_1(M)$, és a komponenseik egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozóan az A^i_{jk}, ill. a B^i_j függvények $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$, akkor az $A \otimes B$ tenzori szorzat komponensei az illető térképre vonatkozóan

$$(A \otimes B)^{ij}_{klm} := A \otimes B \left(du^i, du^j, \tfrac{\partial}{\partial u^k}, \tfrac{\partial}{\partial u^l}, \tfrac{\partial}{\partial u^m} \right) :=$$
$$A \left(du^i, \tfrac{\partial}{\partial u^k}, \tfrac{\partial}{\partial u^l} \right) B \left(du^j, \tfrac{\partial}{\partial u^m} \right) = A^i_{kl} B^j_m.$$

A kapott formula általánosítása tetszőleges (r, s), ill. (r', s') típusú tenzor tenzori szorzatára kézenfekvő.

17.4.6. Az M sokaság egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképének rögzítése után minden $A\in\mathcal{T}^r_s(M)$ $((r,s)\neq(0,0))$ tenzor egyértelműen előállítható $\mathcal{U}$ fölött az

$$A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\otimes du^{j_1}\otimes\dots\otimes du^{j_s}$$

alakban, ahol az $A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ függvények A komponensei a kijelölt térképre vonatkozóan, és valamennyi kétszer előforduló indexre összegzés értendő 1-től n-ig.

Bizonyítás. A jobb áttekinthetőség végett föltesszük, hogy $r=1$, $s=2$; az általános eset hasonlóan tárgyalható, csak több írásmunkát igényel. Megmutatjuk, hogy

$$A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum A^i_{jk}\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^j\otimes du^k \text{ , ahol } A^i_{jk}:=A\left(du^i,\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right).$$

A $C^\infty(M)$-multilinearitás miatt elegendő azt ellenőrizni, hogy az igazolandó reláció mindkét oldala ugyanazt az értéket veszi fel tetszőleges

$$\left(du^l,\frac{\partial}{\partial u^r},\frac{\partial}{\partial u^s}\right)\ ;\ l,r,s\in\{1,\dots,n\}$$

hármason. Ez azonban közvetlenül adódik, hiszen egyrészt

$$A\left(du^l,\frac{\partial}{\partial u^r},\frac{\partial}{\partial u^s}\right)=:A^l_{rs},$$

másrészt

$$\sum A^i_{jk}\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^j\otimes du^k\left(du^l,\frac{\partial}{\partial u^r},\frac{\partial}{\partial u^s}\right)=$$
$$\sum A^i_{jk}du^l\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^r}\right)du^k\left(\frac{\partial}{\partial u^s}\right)=\sum A^i_{jk}\delta^l_i\delta^j_r\delta^k_s=A^l_{rs}.$$

Az alkalmazott meggondolással a vizsgált előállítás egyértelműsége is azonnal következik, hiszen ha $A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum B^i_{jk}\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^j\otimes du^k$ is fennállna, akkor az iménti számolás a $B^i_{jk}=A^i_{jk}$ eredményre vezetne. □

17.4.7. Tekintsünk egy $A\in\mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort, ahol $(r,s)\neq(0,0)$. Legyen $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ és $(\widetilde{\mathcal{U}},(\widetilde{u}^i)_{i=1}^n)$ egy-egy térkép M fölött, feltéve, hogy $\mathcal{U}\cap\widetilde{\mathcal{U}}\neq\emptyset$. Ha A komponensei e térképekre vonatkozóan az $A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ és $\widetilde{A}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ függvények, akkor $\mathcal{U}\cap\widetilde{\mathcal{U}}$ fölött érvényes az

$$\widetilde{A}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}=\sum\frac{\partial\widetilde{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}}\dots\frac{\partial\widetilde{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}}\frac{\partial u^{l_1}}{\partial\widetilde{u}^{j_1}}\dots\frac{\partial u^{l_s}}{\partial\widetilde{u}^{j_s}}A^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}$$

transzformációs szabály.

Bizonyítás. A kijelölt térképekhez tartozó koordinátavektormezők, ill. koordináta 1-formák kapcsolatát **5.1.5.** ill. **8.2.1.** (4) alapján a

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{u}^i}=\sum_j\frac{\partial u^j}{\partial\widetilde{u}^i}\frac{\partial}{\partial u^j}\text{ , ill. }d\widetilde{u}^i=\sum_k\frac{\partial\widetilde{u}^i}{\partial u^k}du^k\text{ , }i\in\{1,\dots,n\}$$

relációk adják. Így

$$\widetilde{A}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} := A\left(d\widetilde{u}^{i_1},\dots,d\widetilde{u}^{i_r},\frac{\partial}{\partial\widetilde{u}^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial\widetilde{u}^{j_s}}\right) =$$
$$A\left(\sum_{k_1}\frac{\partial\widetilde{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}}du^{k_1},\dots,\sum_{k_r}\frac{\partial\widetilde{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}}du^{k_r},\sum_{l_1}\frac{\partial u^{l_1}}{\partial\widetilde{u}^{j_1}}\frac{\partial}{\partial u^{l_1}},\dots,\sum_{l_s}\frac{\partial u^{l_s}}{\partial\widetilde{u}^{j_s}}\frac{\partial}{\partial u^{l_s}}\right) =$$
$$\sum\frac{\partial\widetilde{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}}\cdots\frac{\partial\widetilde{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}}\frac{\partial u^{l_1}}{\partial\widetilde{u}^{j_1}}\cdots\frac{\partial u^{l_s}}{\partial\widetilde{u}^{j_s}}A^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}.$$

□

17.5. Legyen adva egy M és egy N sokaság, valamint egy $\varphi : M \to N$ sima leképezés. Ha $A \in \mathcal{T}^0_s(N)$ ($s \in \mathbb{N}^*$), és tetszőleges $p \in M$ pont, ill. $v_1,\dots,v_s \in T_pM$ érintővektorok esetén

$$(\varphi^*A)_p(v_1\dots,v_s) := A_{\varphi(p)}(\varphi_*(v_1),\dots,\varphi_*(v_s)),$$

akkor $\varphi^*A \in \mathcal{T}^0_s(M)$, amelyet az A tenzor φ általi *visszahúzott*jának (pullback) nevezünk. Megállapodunk abban, hogy ha $A =: f \in \mathcal{T}^0_0(N) = C^\infty(N)$, akkor $\varphi^*f = f\circ\varphi \in C^\infty(M)$. Érvényesek a következők:

(i) A $\varphi^* : \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M)$, $A \mapsto \varphi^*A$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris.

(ii) A visszahúzás megőrzi a tenzori szorzatot: ha $A \in \mathcal{T}^0_{s_1}(N)$, $B \in \mathcal{T}^0_{s_2}(N)$, akkor $\varphi^*(A\otimes B) = \varphi^*A \otimes \varphi^*(B)$.

(iii) Ha $f \in C^\infty(N)$, akkor $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$.

(iv) Amennyiben P további sokaság és $\psi : N \to P$ sima leképezés, úgy $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^* : \mathcal{T}^0_s(P) \to \mathcal{T}^0_s(M)$, minden $s \in \mathbb{N}^*$-ra.

(v) Ha $\varphi : M \to N$ diffeomorfizmus, akkor $\varphi^* : \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M)$ lineáris izomorfizmus.

17.6. Jól ismert egy véges dimenziójú vektortéren ható lineáris transzformáció *nyom*ának (*trace*) konstrukciója: elkészítjük a transzformáció egy tetszőleges mátrixreprezentánsát és képezzük az átlsó elemek összegét. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott skalár független a bázisválasztástól, s ezért egy invariánsa a lineáris transzformációnak. Ez az eljárás egy *kontrakció*nak nevezett fontos tenzoroperációvá általánosítható, amelynek során egy (r,s) típusú tenzort ($r \geq 1, s \geq 1$) $(r-1,s-1)$-típusú tenzorrá „húzunk össze”. A kiindulópont az $(1,1)$-tenzorok kontrakciójának értelmezése.

17.6.1. Létezik egy és csak egy olyan

$$\mathrm{tr} : \mathcal{T}^1_1(M) \to C^\infty(M)\ ,\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$$

$C^\infty(M)$-lineáris leképezés, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-forma esetén

$$\mathrm{tr}(X\otimes\theta) = \theta(X).$$

Ezt a leképezést *trace-operátor*nak vagy $(1,1)$-*kontrakció*nak nevezzük.

Bizonyítás. (1) A $C^\infty(M)$-linearitás követelménye folytán, létezése esetén, a tr operátornak *pontonkénti operátor*nak kell lennie, amelynek tetszőleges $p \in M$ pontbeli értéke (v.ö. **17.3.3.**) a

$$\mathrm{tr}_p : T_1^1(T_pM) \to \mathbb{R} \ , \ A_p \mapsto \mathrm{tr}_p(A_p) \ ; \ A \in \mathcal{T}_1^1(M)$$

lineáris forma. Megfordítva, ezekből a lineáris formákból a tr operátor a

$$\mathrm{tr}(A)(p) := \mathrm{tr}_p(A_p) \ , \ A \in \mathcal{T}_1^1(M)$$

előírással rekonstruálható.

(2) Jelöljünk ki ezután M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és tekintsünk $\mathcal{U}$ fölött egy $A \in \mathcal{T}_1^1(\mathcal{U})$ tenzort. **17.4.6.** értelmében A az

$$A = \sum_{i,j=1}^n A_j^i \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j \ ; \ A_j^i \in C^\infty(\mathcal{U}) \ ; \ i,j \in \{1,\dots,n\}$$

alakban állítható elő. Mivel a feltétel szerint

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j\right) = du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \delta_i^j,$$

$\mathcal{U}$ fölött a tr operátor értelmezésére egyetlen lehetőségünk van: legyen

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_i^i \overset{\mathbf{17.4.}}{=} \sum_{i=1}^n A\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy az így értelmezett $\mathrm{tr} : \mathcal{T}_1^1(M) \to C^\infty(\mathcal{U})$ leképezés megfelel a kívánalmaknak.

(3) Definiáljuk ezek után a

$$\mathrm{tr} : A \in \mathcal{T}_1^1(M) \mapsto \mathrm{tr}(A) \in C^\infty(M)$$

leképezést oly módon, hogy ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ egy térkép M-en, akkor

$$\mathrm{tr}(A) \underset{(\mathcal{U})}{:=} \mathrm{tr}(A \restriction \mathcal{U}) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i,j=1}^n A_j^i \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j\right) := \sum_{i=1}^n A_i^i.$$

Meg kell mutatnunk, hogy ez a definíció „jó”, azaz független a térképválasztástól. Tekintsünk ebből a célból egy további $(\widetilde{\mathcal{U}}, (\widetilde{u}^i)_{i=1}^n)$ térképet, föltéve, hogy $\mathcal{U} \cap \widetilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$. Ekkor **5.1.5.**, ill. **8.2.1.** (4) alapján $\mathcal{U} \cap \widetilde{\mathcal{U}}$ fölött

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l} \frac{\partial}{\partial u^i} \ , \ d\widetilde{u}^l = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^l}{\partial u^k} du^k,$$

és így

$$\sum_{l=1}^n A\left(d\widetilde{u}^l, \frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^l}\right) = \sum_{l=1}^n A\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^l}{\partial u^k} du^k, \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l} \frac{\partial}{\partial u^i}\right) =$$

$$\sum_{i,k,l=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^l}{\partial u^k} \frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l} A\left(du^k, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i,k=1}^n \delta_k^i A\left(du^k, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_{i=1}^n A\left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^i}\right),$$

ami igazolja a jól definiáltságot. A (*)-gal jelzett lépésben például a következőképpen okoskodhatunk:

$$\delta_k^i = du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l} d\widetilde{u}^l\right)\left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^m}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial \widetilde{u}^m}\right) = \sum_{l,m=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l}\frac{\partial \widetilde{u}^m}{\partial u^k}\delta_m^l = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \widetilde{u}^l}{\partial u^k}\frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^l}.$$

□

17.6.2. Kiterjesztjük az $(1,1)$-kontrakciót magasabb rendű tenzorokra. Legyen $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, ahol $r \geq 2$, $s \geq 2$, és válasszunk ki egy $i \in \{1,\dots,r\}$ „kontravariáns” indexet, valamint egy $j \in \{1,\dots,s\}$ „kovariáns” indexet. Tetszőlegesen rögzített $\theta^1,\dots,\theta^{r-1}$ 1-formák, valamint $X_1,\dots,X_{s-1}$ vektormezők esetén jelentse $\widehat{A}_j^i(\theta^1,\dots,\theta^{r-1},X_1,\dots,X_{s-1})$ az

$$\widehat{A}_j^i(\theta^1,\dots,\theta^{r-1},X_1,\dots,X_{s-1})(\theta,X) := A(\theta^1,\dots,\underset{\smile}{\overset{i}{\theta}},\dots,\theta^{r-1},X_1,\dots,\underset{\smile}{\overset{j}{X}},\dots,X_{s-1})$$
$$\theta \in \mathfrak{X}^*(M)\ ,\ X \in \mathfrak{X}(M))$$

előírással értelmezett leképezést. Világos, hogy így egy $(1,1)$-tenzort definiáltunk. Alkalmazva erre a trace operátort, a

$$(c_j^i A)(\theta^1,\dots,\theta^{r-1},X_1,\dots,X_{s-1}) := \operatorname{tr}(\widehat{A}_j^i(\theta^1,\dots,\theta^{r-1},X_1,\dots,X_{s-1}))$$

sima függvényhez jutunk. $c_j^i A$ nyilvánvalóan valamennyi változójában $C^\infty(M)$-lineáris, így $c_j^i A \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$; ezt a tenzort *az A tenzor i-edik kontravariáns és j-edik kovariáns indexe szerinti kontrakció*jának nevezzük. A $c_j^i A$ tenzor komponensei egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozóan a

$$c_j^i A\left(du^{i_1},\dots,du^{i_{r-1}},\frac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{j_{s-1}}}\right) :=$$
$$\operatorname{tr}\left(\widehat{A}_j^i\left(du^{i_1},\dots,du^{i_{r-1}},\frac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{j_{s-1}}}\right)\right) \overset{\mathbf{17.6.1.}}{=}$$
$$\sum_{l=1}^n A(du^{i_1},\dots,\underset{\smile}{\overset{i}{du^l}},\dots,du^{i_{r-1}},\frac{\partial}{\partial u^{j_1}},\dots,\underset{\smile}{\overset{j}{\frac{\partial}{\partial u^l}}},\dots,\frac{\partial}{\partial u^{j_{s-1}}}) = \sum_{l=1}^n A^{i_1\dots \overset{i}{\smile}{l}\dots i_{r-1}}_{j_1\dots \underset{\smile}{l}\dots j_{s-1}}$$

függvények.

17.7. Képezhetjük az M sokaságon adott összes (r,s)-típusú tenzorok alkotta vektorterek

$$\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathcal{T}_s^r(M)$$

direkt összegét. Ez a $\otimes$ tenzori szorzással - mint szorzással - valós algebrává válik, amelyet az M sokaság *tezoralgebrá*jának nevezünk. Az M sokaságon adott *tenzorderiváció*n olyan

$$\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)\ ,\ A \mapsto \mathcal{D}(A) =: \mathcal{D}A$$

$\mathbb{R}$-*lineáris* leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) *típustartó*, azaz tetszőleges $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{D}(\mathcal{T}^r_s(M)) \subset \mathcal{T}^r_s(M)$;

(2) *eleget tesz a Leibniz-szabálynak*:

$$\mathcal{D}(A \otimes B) = (\mathcal{D}A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B \ ; \ A, B \in \mathcal{T}(M);$$

(3) *felcserélhető a kontrakciókkal*: tetszőleges $A \in \mathcal{T}(M)$ tenzor és c^i_j kontrakció esetén

$$\mathcal{D}(c^i_j A) = c^i_j(\mathcal{D}A)$$

(feltéve, hogy $c^i_j A$ értelmezve van).

17.7.1. Egy sokaság tenzorderivációi *lokális operátor*ok a következő értelemben: ha $\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tenzorderiváció, $A \in \mathcal{T}(M)$ és $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, akkor

$$A \restriction \mathcal{U} = 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{D}A \restriction \mathcal{U} = 0.$$

Válasszunk ki ennek igazolására egy tetszőleges $p \in M$ pontot. p-beli dudorfüggvények létezése folytán megadható olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény is, amelyre az teljesül, hogy

$$f(p) = 0 \text{ és } f(q) = 0 \text{ , ha } q \in M \backslash \mathcal{U}.$$

f segítségével

$$A = fA = f \otimes A$$

írható, s így azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}(f \otimes A) \overset{\mathbf{17.7.}(2)}{=} (\mathcal{D}f) \otimes A + f \otimes \mathcal{D}A = (\mathcal{D}f)A + f(\mathcal{D}A).$$

Innen

$$\mathcal{D}A(p) = \mathcal{D}f(p)A(p) + f(p)\mathcal{D}A(p) = \mathcal{D}f(p) \cdot 0 + 0 \cdot \mathcal{D}A(p) = 0,$$

amiből $p \in \mathcal{U}$ tetszőlegessége folytán arra következtethetünk, hogy $\mathcal{D}A \restriction \mathcal{U} = 0$.

17.7.2. A tenzorderivációk a *leszűkítésre nézve természetes* operátorok: ha $\mathcal{D}$ tenzorderiváció M-en és $\mathcal{U} \subset M$ (nemüres) nyílt halmaz, akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{D}_\mathcal{U} : \mathcal{T}(\mathcal{U}) \to \mathcal{T}(\mathcal{U})$ tenzorderiváció, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}(M)$ tenzor esetén

$$\mathcal{D}_\mathcal{U}(A \restriction \mathcal{U}) = (\mathcal{D}A) \restriction \mathcal{U}.$$

A bizonyítás fő lépései a következők:

(1) $\mathcal{D}_\mathcal{U}$ *értelmezése.* Legyen adva egy $B \in \mathcal{T}(\mathcal{U})$ tenzor. Kiválasztva egy $p \in \mathcal{U}$ pontot, tekintsünk olyan $f \in C^\infty(M)$ dudorfüggvényt, amelynek tartója $\mathcal{U}$-ba esik: $\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{U}$. Ekkor f 1-et vesz föl a p pont egy környezetében (**4.2.3.**). Ha

$$A := \begin{cases} fB \text{ , } \mathcal{U} \text{ fölött;} \\ 0 \text{ , } M \backslash \mathcal{U} \text{ fölött,} \end{cases}$$

akkor $A \in \mathcal{T}(M)$; szólhatunk ezért $\mathcal{D}A$ tenzorról; legyen

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}B)(p) := (\mathcal{D}A)(p).$$

(2) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ *jól definiált*: független a B tenzor kiterjesztéséhez használt dudorfüggvény választásától.

Valóban, ha $h \in C^{\infty}(M)$ további p-beli dudorfüggvény $\mathcal{U}$-beli tartóval és

$$\widetilde{A} := \begin{cases} hB \text{ , } \mathcal{U} \text{ fölött;} \\ 0 \text{ , } M \backslash \mathcal{U} \text{ fölött,} \end{cases}$$

akkor a p pontnak van olyan $\mathcal{V}$ környezete, hogy $A \restriction \mathcal{V} = \widetilde{A} \restriction \mathcal{V}$, és ennélfogva $(A - \widetilde{A}) \restriction \mathcal{V} = 0$. **17.7.1.** alapján ebből $\mathcal{D}(A - \widetilde{A}) \restriction \mathcal{V} = 0$ következik, innen pedig $\mathcal{D}$ $\mathbb{R}$-linearitásának figyelembevételével azt kapjuk, hogy $(\mathcal{D}A)(p) = (\mathcal{D}\widetilde{A})(p)$.

Annak megmutatása van ezek után még hátra, hogy

(3) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ tenzorderivációja $\mathcal{T}(\mathcal{U})$-nak;

(4) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ rendelkezik a kívánt leszűkítési tulajdonsággal;

(5) $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ az előírt feltételek által egyértelműen meghatározott.

(3)-(5) ellenőrzése rutin feladat.

17.7.3. Legyen $\mathcal{D}$ tenzorderiváció az M sokaságon, és tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort, ahol $r + s \geq 2$. Ekkor tetszőleges $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formák és $X_1, \dots, X_s$ vektormezők esetén

$$(\mathcal{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) -$$
$$\sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_j, \dots, X_s).$$

Erre a fontos összefüggésre mint *szorzatszabály*ra fogunk hivatkozni. Bizonyítását a jobb áttekinthetőség érdekében az $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$ esetre végezzük el.

Előkészítő lépésként azt látjuk be, hogy tetszőleges $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(m)$ vektormező esetén

$$A(\theta, X) = \mathcal{C}(A \otimes \theta \otimes X), \tag{1}$$

ahol $\mathcal{C}$ két alkalmas kontrakció kompozíciója.

Jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)^n_{i=1})$ térképet. Az $A \otimes \theta \otimes X \in \mathcal{T}^2_2(M)$ tenzor erre vonatkozó komponensei az

$$A \otimes \theta \otimes X \left(du^i, du^j, \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right) := A \left(du^i, \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \theta \left(\frac{\partial}{\partial u^l} \right) du^j(X) = A^i_k \theta_l X^j \in C^{\infty}(\mathcal{U})$$

függvények, ha $\theta \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} \theta_i du^i$, $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Másrészt

$$A(\theta, X) \underset{(\mathcal{U})}{=} A \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i du^i, \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} A^i_j \theta_i X^j,$$

a **17.6.2.**-ben mondottak alapján világos ily módon, hogy ha $\mathcal{C} := c_2^1 \circ c_1^2$, akkor $A(\theta, X) = \mathcal{C}(A \otimes \theta \otimes X)$.

A tett észrevétel után a szorzatszabály igazolása igen egyszerű:

$$\mathcal{D}(A(\theta, X)) \overset{(1)}{=} \mathcal{D}\mathcal{C}(A \otimes \theta \otimes X) \overset{\mathbf{17.7.}(3)}{=} \mathcal{C}\mathcal{D}(A \otimes \theta \otimes X) \overset{\mathbf{17.7.}(2)}{=} \mathcal{C}(\mathcal{D}A \otimes \theta \otimes X + A \otimes \mathcal{D}\theta \otimes X + A \otimes \theta \otimes \mathcal{D}X) \overset{\mathbf{17.7.}(1),(1)}{=} (\mathcal{D}A)(\theta, X) + A(\mathcal{D}\theta, X) + A(\theta, \mathcal{D}X),$$

és innen $(\mathcal{D}A)(\theta, X)$-re a kívánt összefüggés adódik.

Megjegyzés. Ha $A \in \mathcal{T}_s^1(M)$, akkor a **17.2.2.**-ben mondottak szerint A $(\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-multilineáris leképezésként interpretálható. A szorzatszabály formailag változatlan alakban érvényes ennek az interpretációnak a használata esetén is: ha $\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tenzorderiváció; $X_1, \dots, X_s$ tetszőleges vektormezők M-en, akkor

$$(\mathcal{D}A)(X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}(A(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s).$$

17.7.4. *Egy tenzorderivációt egyértelműen meghatároz a sokaság sima függvényeinek gyűrűjén és vektormezőinek modulusán való hatása.*

Tekintsünk ennek igazolására egy $\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tenzorderivációt. Az általános szorzatszabályból kiolvasható, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}(M)$ tenzor esetén a $\mathcal{D}A$ tenzort egyértelműen meghatározza a $\mathcal{D}$ operátor $C^\infty(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathfrak{X}^*(M)$ fölötti hatása. Feladatunk így annak megmutatására redukálódik, hogy $\mathcal{D}$-nek a differenciálformákon való hatása kiváltható a függvényeken és az 1-formákon való hatása révén. Legyen tehát $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor $\theta(X) \in C^\infty(M)$, és

$$\mathcal{D}(\theta(X)) \overset{\mathbf{17.6.1.}}{=} \mathcal{D}\mathrm{tr}(\theta \otimes X) \overset{\mathbf{17.7.}(3)}{=} \mathrm{tr}(\mathcal{D}(\theta \otimes X)) \overset{\mathbf{17.7.}(2)}{=} \mathrm{tr}((\mathcal{D}\theta) \otimes X + \theta \otimes \mathcal{D}X) = \mathrm{tr}((\mathcal{D}\theta) \otimes X) + \mathrm{tr}(\theta \otimes \mathcal{D}X) = (\mathcal{D}\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}X),$$

tehát

$$(D\theta)(X) = \mathcal{D}(\theta(X)) - \theta(\mathcal{D}(X))$$

- és ezt akartuk belátni.

17.7.5. (*Willmore tétele*, 1960.) Megadva egy $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt és egy olyan $\rho : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést, amely eleget tesz a

$$\rho(fX) = (Zf)X + f\rho(X) \; ; \; f \in C^\infty(M) \; , \; X \in \mathfrak{X}(M)$$

„Leibniz-szabály"-nak, létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{D}$ tenzorderiváció M-en, hogy $\mathcal{D} \restriction C^\infty(M) = Z$, $\mathcal{D} \restriction \mathfrak{X}(M) = \rho$.

Bizonyítás. Az egyértelműséget biztosítja **17.7.4.**. A létezés igazolása úgy történik, hogy a megadott Z vektormező - amely $C^\infty(M)$-en derivációként hat! - és $\rho : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ segítségével explicite megkonstruálunk egy olyan $\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ tenzorderivációt, amely $C^\infty(M)$-en Z hatását, $\mathfrak{X}(M)$-en ρ hatását adja vissza.

1. lépés A **17.7.4.**-ben látottak szerint $\mathcal{D}$ $\mathfrak{X}^*(M)$ fölötti értelmezésére egyetlen lehetőségünk van: ha $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, akkor $\mathcal{D}\theta$ $\mathfrak{X}(M)$-en a

$$\mathcal{D}\theta(X) := Z(\theta(X)) - \theta(\rho(X)) \; , \; X \in \mathfrak{X}(M)$$

előírás szerint hasson. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) $\mathcal{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Valóban, $\mathcal{D}\theta$ nyilvánvalóan additív, s mivel tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$\mathcal{D}\theta(fX) := Z(\theta(fX)) - \theta(\rho(fX)) = Z(f\theta(X)) - \theta((Zf)X + f\rho(X)) = \\ (Zf)(\theta(X) + fZ(\theta(X)) - (Zf)(\theta(X) - f(\theta(\rho(X))) = f(Z(\theta(X)) - \theta(\rho(X))) =: \\ f\mathcal{D}\theta(X),$$

A $C^\infty(M)$-homogenitás is teljesül.

(2) A $\theta \in \mathfrak{X}^*(M) \to \mathcal{D}\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris.

2. lépés A $C^\infty(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathfrak{X}^*(M)$ fölött immár értelmezett $\mathcal{D}$ operátort kiterjesztjük $\mathcal{T}(M)$-re. Mivel $\mathcal{D}$-nek teljesítenie kell a szorzatszabályt, a kiterjesztés módja ismét ki van kényszerítve: tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $r+s \geq 2$ tenzor esetén jelentse $\mathcal{D}A$ a

$$(\mathcal{D}A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) := Z(A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)) - \\ \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \ldots, \mathcal{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \rho(X_j), \ldots, X_s)$$

előírással értelmezett tenzort. Természetesen ekkor ellenőriznünk kell, hogy $\mathcal{D}$ valóban eleget tesz a **17.7.**-beli (1)-(3) feltételeknek.

(a) Az, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ esetén a $\mathcal{D}A$ leképezés $C^\infty(M)$-multilineárs, az 1. lépésben látottak mintájára egyszerű, közvetlen számolással adódik az értelmezés alapján. A típustartás kiolvasható a definícióból, és a $\mathcal{D} : \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_s(M)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris volta is könnyen látható.

(b) A Leibniz-szabály ellenőrzése szintén nem jár elvi nehézséggel, csupán mechanikus - de kissé hosszadalmas - írásmunkát igényel. (Hasznos gyakorló feladat elvégezni a számolást abban az esetben, amikor $A, B \in \mathcal{T}^1_1(M)$.)

(c) A kontrakcióval való felcserélhetőséget először az $(1,1)$-kontrakcióra, azaz a $\mathrm{tr} : \mathcal{T}^1_1(M) \to C^\infty(M)$ trace-operátorra igazoljuk. Ha $A := X \otimes \theta$ ($X \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$), akkor

$$\mathcal{D}(\mathrm{tr}(X \otimes \theta)) = \mathcal{D}(\theta(X)) = (\mathcal{D}\theta)(X) + \theta(\mathcal{D}(X)) = \mathrm{tr}(X \otimes \mathcal{D}\theta + \mathcal{D}(X) \otimes \theta) = \\ \mathrm{tr}(\mathcal{D}(X \otimes \theta)),$$

tehát $\mathcal{D} \circ \mathrm{tr} = \mathrm{tr} \circ \mathcal{D}$ az $X \otimes \theta$ alakú $(1,1)$ tenzorokon teljesül. Ha $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$ tetszőleges tenzor, akkor amiatt, hogy $\mathcal{D}$ a leszűkítésre nézve természetes (**17.7.2.**) és hogy tr „pontonkénti operátor", $\mathcal{D} \circ \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr} \circ \mathcal{D}(A)$ teljesülését elegendő egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép tartományán ellenőrizni. Ekkor azonban $A \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i,j} A^i_J \dfrac{\partial}{\partial u^i} \otimes du^j$ alakú lokális előállíthatóságból a már elintézett eset alapján következik a kívánt felcserélhetőség.

A tetszőleges kontrakcióval való felcserélhetőség igazolása ezek után lényegében egy zárójel-használatra vonatkozó gyakorlatra redukálódik.

Legyen például $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$. Ekkor $c^1_2 A \in \mathcal{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$, és tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$(\mathcal{D}c^1_2 A)(X) = \mathcal{D}((c^1_2 A)(X)) - c^1_2 A(\mathcal{D}X) \overset{\mathbf{17.6.2.}}{=} \mathcal{D}(\mathrm{tr}(\widehat{A}^1_2(X))) - \mathrm{tr}(\widehat{A}^1_2(\mathcal{D}X)) = \\ \mathrm{tr}(\mathcal{D}(\widehat{A}^1_2(X)) - \widehat{A}^1_2(\mathcal{D}X)) \overset{(*)}{=} \mathrm{tr}(\widehat{\mathcal{D}A}^1_2(X)) = (c^1_2 \mathcal{D}A)(X),$$

ami a $\mathcal{D} \circ c^1_2 = c^1_2 \circ \mathcal{D}$ felcserélhetőséget adja.

A (*)-gal jelölt lépés a következő számolással igazolható: tetszőleges $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ és $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$(\mathcal{D}(\widehat{A}_2^1(X)) - \widehat{A}_2^1(\mathcal{D}X))(\theta, Y) = (\mathcal{D}(\widehat{A}_2^1(X)))(\theta, Y) - (\widehat{A}_2^1(\mathcal{D}X))(\theta, Y) =$$
$$\mathcal{D}(\widehat{A}_2^1(X)(\theta, Y)) - \widehat{A}_2^1(X)(\mathcal{D}\theta, Y) - \widehat{A}_2^1(X)(\theta, \mathcal{D}Y) - \widehat{A}_2^1(\mathcal{D}X)(\theta, Y) =$$
$$\mathcal{D}(A(\theta, X, Y)) - A(\mathcal{D}\theta, X, Y) - A(\theta, X, \mathcal{D}Y) - A(\theta, \mathcal{D}X, Y) = \mathcal{D}A(\theta, X, Y) =$$
$$\widehat{\mathcal{D}A}_2^1(X)(\theta, Y),$$

tehát $\mathcal{D}(\widehat{A}_2^1(X)) - \widehat{A}_2^1(\mathcal{D}X) = \widehat{\mathcal{D}A}_2^1(X)$. □

17.7.6. Legyen adva egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, és tekintsük a

$$\rho : Y \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \rho(Y) := [X, Y]$$

leképezést. Ez eleget tesz a Willmore-tételben előírt feltételnek, hiszen tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$\rho(fY) = [X, fY] = f[X, Y] + (Xf)Y = (Xf)Y + f\rho(Y).$$

Létezik tehát egy és csak egy olyan

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)\ ,\ A \mapsto \mathcal{L}_X A$$

tenzorderiváció, hogy

$$\forall f \in C^\infty(M) : \mathcal{L}_X f = Xf\ ;\ \forall Y \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Ezt a tenzorderivációt az X vektormező szerinti *Lie-deriváltnak* nevezzük.

Speciális esetek

(1) Ha $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$ $(s \geq 1)$, akkor a szorzatszabály alapján

$$(\mathcal{L}_X A)(X_1, \ldots, X_s) = X(A(X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} A(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_s),$$

ahol $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Amennyiben $s = 1$, és így $A := \omega \in \mathcal{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$, azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])\ ,\ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ha $A := g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, akkor tetszőleges $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$(\mathcal{L}_X g)(X_1, X_2) = X(g(X_1, X_2)) - g([X, X_1], X_2) - g(X_1, [X, X_2]).$$

(2) Jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet. Ha $X \underset{(\mathcal{U})}{=} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor tetszőleges $k \in \{1, \ldots, n\}$-re

$$\mathcal{L}_X \frac{\partial}{\partial u^k} := \left[X, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] =$$
$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i};$$

speciálisan

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^k} = \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right] = 0.$$

Tetszőleges $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indexek esetén

$$(\mathcal{L}_X du^j)\frac{\partial}{\partial u^k} = X\left(du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)\right) - du^j\left(\mathcal{L}_X\frac{\partial}{\partial u^k}\right) =$$
$$X(\delta^i_k) - du^j\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial u^k}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial X^j}{\partial u^k} = \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial u^l}du^l\right)\frac{\partial}{\partial u^k},$$

tehát

$$\mathcal{L}_X du^j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial u^l}du^l.$$

Ha $X = \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{i=1}^n \delta^i_k \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial u^k}} du^j = 0.$$

(3) Ha $A \in \mathcal{T}^1_s(M)$, $s \geq 1$, és A-t $(\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-multilineáris leképezésként interpretáljuk, akkor a **17.7.3.**-ban tett megjegyzésnek megfelelően

$$(\mathcal{L}_X A)(X_1, \dots, X_s) = [X, A(X_1, \dots, X_s)] - \sum_{i=1}^s A(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_s)$$

$(X \in \mathfrak{X}(M)$; $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \{1, \dots, s\})$.

17.7.7. $\mathcal{T}(M)$ összes tenzorderivációi valós Lie-algebrát alkotnak, ha egy $\mathcal{D}_1$ és egy $\mathcal{D}_2$ tenzorderiváció Lie-zárójelét a szokásos $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] := \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ kommutátorszorzatként értelmezzük. Ennek a Lie-algebrának Lie-részalgebráját képezik a Lie-deriválások, ugyanis tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Ennek a relációnak az ellenőrzéséhez **17.7.4.** alapján elegendő azt megmutatni, hogy a bal és jobb oldal ugyanúgy hat $C^\infty(M)$ és $\mathfrak{X}(M)$ fölött.

Az, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]f := \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f) = X(Yf) - Y(Xf) \overset{\mathbf{7.5.}}{=} [X, Y]f = \mathcal{L}_{[X,Y]}f,$$

nem más, mint a vektormezők Lie-zárójelének definíciója. Ami az $\mathfrak{X}(M)$-en való hatást illeti, tetszőleges $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]Z = (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)Z = \mathcal{L}_X([Y, Z]) - \mathcal{L}_Y([X, Z]) = [X, [Y, Z]] -$$
$$[Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = -[Z, [X, Y]] = [[X, Y], Z] =: \mathcal{L}_{[X,Y]}Z,$$

felhasználva a számolás során a Jacobi-azonosságot.

A kapott eredmény azt jelenti, hogy $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ és $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ valóban ugyanúgy hat $\mathfrak{X}(M)$ fölött.

17.7.8. Ha X és Y vektormezők, ω 1-forma, f és h sima függvény M-en, akkor

(1) $\mathcal{L}_{fX}Y = f\mathcal{L}_X Y - df(Y)X$;

(2) $\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + \omega(X)df$;

(3) $\mathcal{L}_{fX}h = fL_Xh$.

Valóban,

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{fX}Y := [fX,Y] = f[X,Y] - (Yf)X = f\mathcal{L}_XY - df(Y)X;\\ (\mathcal{L}_{fX}\omega)(Y) = fX(\omega(Y)) - \omega(\mathcal{L}_{fX}Y) \overset{(1)}{=} fX(\omega(Y)) - \omega(f\mathcal{L}_XY - df(Y)X) =\\ f(X\omega(Y) - \omega(\mathcal{L}_XY)) + df(Y)\omega(X) = f(\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(X)df(Y) =\\ (f\mathcal{L}_X\omega + \omega(X)df)(Y),\end{gathered}$$

ami igazolja a (2) relációt; végül

$$\mathcal{L}_{fX}h = (fX)h \overset{(*)}{=} f(Xh) = f\mathcal{L}_Xh,$$

hiszen tetszőleges $p \in M$ pont esetén

$$((fX)h)(p) = (fX)_p(h) = (f(p)X_p)(h) = f(p)(X_p(h)) = f(p)(Xh)(p) = (f(Xh))(p),$$

ami igazolja a (*)-gal jelölt lépést.

18. Vektornyalábok

18.1. *Nyaláb*on olyan (E, π, M) hármast értünk, ahol $\pi : E \to M$ egy leképezés. A „nyaláb” elnevezéssel akkor élünk, amikor a hangsúly a $p \in M$ pontok $E_p := \pi^{-1}(p)$ ősképein van. E_p-t a p pont fölötti *fibrum*nak hívjuk, és azt is mondjuk, hogy p az E_p fibrum alappontja. E-t, π-t és M-et rendre a nyaláb *totálter*ének, *projekció*jának, ill. *alapter*ének nevezzük. (E, π, M) vagy $\pi : E \to M$ nyaláb helyett gyakran $E \to M$, π vagy E nyalábról szólunk (az utóbbi a legkevésbé pontos). A különböző elnevezésbeli alternatívák közül aszerint választunk, hogy a nyaláb melyik alkotórészét kívánjuk nyomatékosítani.

Egy $\pi : E \to M$ nyalábot *simá*nak mondunk, ha E és M sokaságok, π pedig sima leképezés. A továbbiakban *nyalábon sima nyalábot értünk.*

18.2. Legyen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Egy $\pi : E \to M$ nyalábot M fölötti $\mathbb{K}$-*vektornyaláb*nak nevezünk, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

$(\mathrm{VB})_1$ Valamennyi fibrum k-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött.

$(\mathrm{VB})_2$ Minden $p \in M$ ponthoz megadható p-nek egy $\mathcal{U} \subset M$ környezete, valamint egy

$$\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{K}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

diffeomorfizmus úgy, hogy

(i) $\pi \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$, ahol $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{U} \times \mathbb{K}^k \to \mathcal{U}$ az első tényezőre való természetes projekció;

(ii) tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén a

$$\varphi_q : \mathbb{K}^k \to E_q\ ,\ v \mapsto \varphi_q(v) := \varphi(q, v)$$

leképezés $\mathbb{K}$-lineáris izomorfizmus.

A $k \in \mathbb{N}^*$ számot a vektornyaláb *rang*jának hívjuk, az 1-rangú vektornyalábokat *vonalnyaláb*okként is említjük. *Valós*, ill. *komplex vektornyaláb*ról szólunk aszerint, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ill. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A következőkben kizárólag valós vektornyalábokat tekintünk, s ezért a valós jelzőt elhagyjuk. A $(\mathrm{VB})_2$ feltételben szereplő φ leképezésről azt mondjuk, hogy *trivializáció*ja $\pi^{-1}(\mathcal{U})$-nak, vagy *lokális trivializáció*ja E-nek.

18.2.1. Tekintsünk egy M sokaságot, és legyen $k \in \mathbb{N}^*$. Ha

$$\pi : M \times \mathbb{R}^k \to M \ , \ (p, v) \mapsto p,$$

akkor π k-rangú (valós) vektornyaláb, amelyet az M fölötti *triviális k-rangú vektornyaláb*nak nevezünk, és a **18.1.**-ben jelzett pontatlansággal $M \times \mathbb{R}^k$-val is jelöljük. Ennek a nyalábnak egy $p \in M$ pont fölötti fibruma $\{p\} \times \mathbb{R}^k$, ellátva a természetes vektortér-struktúrával:

$$(p, u) + (p, v) := (p, u + v) \ ; \ \lambda(p, u) := (p, \lambda u) \ (u, v \in \mathbb{R}^k; \lambda \in \mathbb{R})$$

(a sokaság pontjai itt csupán index szerepet töltenek be).

18.2.2. Egy M n-dimenziós sokaság

$$\tau : TM \to M \ , \ v \mapsto \tau(v) := p \ , \ \text{ha } v \in T_pM$$

érintőnyalábja (ld. **5.2.**) n-rangú vektornyaláb M fölött, amelynek fibrumai az M sokaság érintőterei. Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, akkor a

$$\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \tau^{-1}(\mathcal{U}) \ , \ (q, (\nu^1, \dots, \nu^n)) \mapsto v := \sum_{i=1}^{n} \nu^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q$$

leképezés lokális trivializációja TM-nek.

18.2.3. Ha (E, π, M) és (E', π', M) vektornyaláb, E' részsokasága E-nek, s teljesül, hogy $\pi \restriction E' = \pi'$, úgy azt mondjuk, hogy (E', π', M) *résznyaláb*ja az (E, π, M) vektornyalábnak. Ekkor tetszőleges $p \in M$ pont esetén $E'_p = E_p \cap E'$ vektoraltere E_p-nek.

18.3. Egy $\pi_1 : E_1 \to M_1$ és $\pi_2 : E_2 \to M_2$ vektornyaláb közötti *nyalábleképezés*en olyan $(\varphi, \underline{\varphi})$ leképezés-párt értünk, ahol $\varphi : E_1 \to E_2$ és $\underline{\varphi} : M_1 \to M_2$ sima leképezés, és teljesülnek a következők:

(1) $\pi_2 \circ \varphi = \underline{\varphi} \circ \pi_1$;

(2) tetszőleges $p \in M_1$ pont esetén a

$$\varphi_p := \varphi \restriction (E_1)_p : (E_1)_p \to (E_2)_{\underline{\varphi}(p)}$$

leképezés lineáris.

A $(\varphi, \underline{\varphi})$ nyalábleképezést *nyalábizomorfizmus*nak, röviden *izomorfizmus*nak mondjuk, ha φ diffeomorfizmus. Megmutatható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $\underline{\varphi}$ diffeomorfizmus és a (2) feltételben szereplő φ_p leképezések lineáris izomorfizmusok.

Az $M_1 = M_2 =: M$ esetben egy $\varphi : E_1 \to E_2$ leképezést *erős nyalábleképezés*nek mondunk, ha $(\varphi, 1_M)$ nyalábleképezés.

(Egy $(\varphi, \underline{\varphi})$ nyalábleképezést úgy képzelhetünk el, mint egymásnak megfelelő $(E_1)_p$ és $(E_2)_{\underline{\varphi}(p)}$ fibrumok közötti φ_p lineáris leképezések egy „sima családját”.)

Példa. Ha M és N sokaság, $\varphi : M \to N$ sima leképezés, akkor (φ_*, φ) nyalábleképezés a τ_M és a τ_N érintőnyaláb között.

18.4. Egy $\pi : E \to M$ vektornyaláb *szelés*én olyan $\sigma : M \to E$ sima leképezést értünk, amely eleget tesz a $\pi \circ \sigma = 1_M$ feltételnek. Hasonló módon, a nyaláb $\mathcal{U} \subset M$ *nyílt halmaz fölötti szelés*e olyan $\sigma : \mathcal{U} \to E$ sima leképezés, amelyre $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$ teljesül.

Példák (1) Tetszőleges $\pi : E \to M$ vektornyaláb esetén az

$$\sigma : p \in M \mapsto 0_p := E_p \textit{ zérusvektora}$$

leképezés szelés, amelyet π *zérusszelés*ének hívunk.

(2) Egy sokaság érintőnyalábjának szelései a sokaság (sima) vektormezői.

18.4.1. Ha σ, σ_1 és σ_2 szelése a $\pi : E \to M$ vektornyalábnak és $f \in C^\infty(M)$, akkor a

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(p) := \sigma_1(p) + \sigma_2(p) \text{ és } (f\sigma)(p) := f(p)\sigma(p)\ ,\ p \in M$$

előírással definiált $\sigma_1 + \sigma_2$ és $f\sigma$ leképezés is szelése π-nek. Az így bevezetett összeadással és függvényszeres-képzéssel π összes szelései $C^\infty(M)$-modulust alkotnak, amelyre a $\mathrm{Sec}(\pi)$ jelölést használjuk. Ugyanígy kapjuk egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölötti szelések $C^\infty(\mathcal{U})$-modulusát.

Példa Tekintsük a $\pi : M \times \mathbb{R}^k \to M$ triviális vektornyalábot (**18.2.1.**). Ha $\varphi : M \to \mathbb{R}^k$ sima leképezés, akkor

$$\sigma : p \in M \mapsto \sigma(p) := (p, \varphi(p)) \in M \times \mathbb{R}^k$$

szelése π-nek. Megfordítva, ha $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ és $\varphi : \mathrm{pr}_2 \circ \sigma$, akkor $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, és segítségével σ a $p \in M \mapsto \sigma(p) = (p, \varphi(p)) \in M \times \mathbb{R}^k$ alakban állítható elő. A

$$\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi) \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \sigma \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$$

leképezés izomorfizmus a $\mathrm{Sec}(\pi)$ és a $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ $C^\infty(M)$-modulus között. Ha $(v_1, \dots, v_k)$ bázisa $\mathbb{R}^k$-nak és

$$\sigma_i : M \to M \times \mathbb{R}^k\ ,\ p \mapsto \sigma_i(p) := (p, v_i)\ ,\ i \in \{1, \dots, k\}\,,$$

akkor $(\sigma_i)_{i=1}^k$ bázisa $\mathrm{Sec}(\pi)$-nak, amely így módon *szabad* $C^\infty(M)$*-modulus*.

18.4.2. Legyen $\pi : E \to M$ vektornyaláb, és válasszunk ki egy $p \in M$ pontot.

(1) Tetszőlegesen megadott $v \in E_p$ vektorhoz létezik olyan $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ szelés, hogy $\sigma(p) = v$.

(2) Ha p benne van egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmazban és $\sigma : \mathcal{U} \to E$ $\mathcal{U}$ fölötti szelés, akkor van olyan $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Sec}(\pi)$ szelés, amely megegyezik σ-val a p pont egy környezetében.

Bizonyítás. (1) Válasszunk olyan $\varphi : \mathcal{W} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{W})$ lokális trivializációt, ahol $p \in \mathcal{W}$, és legyen $f \in C^\infty(M)$ olyan p-beli dudorfüggvény, amelynek tartója $\mathcal{W}$-be esik. Ekkor $v \in \pi^{-1}(\mathcal{W})$, és megadható (egy és csak egy) olyan $u \in \mathbb{R}^k$ vektor, hogy $\varphi(p, u) = v$.

Értelmezzünk egy $\sigma : M \to E$ leképezést a következőképpen:

$$\sigma(q) = \begin{cases} \varphi(q, f(p)u), \text{ ha } q \in \mathcal{W}; \\ 0_q, \text{ ha } q \notin \mathcal{W}. \end{cases}$$

Ekkor $(\mathrm{VB})_2$/(i) alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\pi \circ \sigma = 1_M$; speciálisan $\sigma(p) = v$. Mivel φ diffeomorfizmus, σ $\mathcal{W}$ fölött sima. $\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{W}$ folytán σ zérust vesz fel $M \backslash \mathcal{W}$ egy környezetében. Következik ily módon, hogy $\sigma : M \to E$ sima leképezés; ezzel beláttuk, hogy σ szelése π-nek, mégpedig a kívánt tulajdonságú szelés.

(2) igazolása hasonló. □

Vegyük észre, hogy **18.4.2.** (1) **7.3.** általánosítása.

18.4.3. Legyen $\pi : E \to M$ k-rangú vektornyaláb, $\mathcal{U} \subset M$ pedig nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ fölöti szelések egy $(\sigma_i)_{i=1}^k$ sorozata *k-élmező* (röviden k-él, angolul *frame*) $\mathcal{U}$ fölött, ha tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ esetén $(\sigma_i(p))_{i=1}^k$ bázisa az E_p vektortérnek. Amennyiben az $\mathcal{U}$ értelmezési tartományt nem jelöljük ki explicite, a mondott tulajdonságú $(\sigma_i)_{i=1}^k$ sorozatot *lokális k-él*ként (vagy *lokális k-élmező*ként) is említjük.

Ha $(\sigma_i)_{i=1}^k$ k-élmező $\mathcal{U}$ fölött, akkor a

$$\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U}) \ , \ (p, (\nu^1, \dots, \nu^k)) \mapsto \sum_{i=1}^k \nu^i \sigma_i(p)$$

leképezés trivializációja $\pi^{-1}(\mathcal{U})$-nak. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U})$ trivializációja $\pi^{-1}(\mathcal{U})$-nak. Ha $(e_i)_{i=1}^k$ $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisa, és

$$\sigma_i : p \in \mathcal{U} \mapsto \sigma_i(p) := \varphi(p, e_i) \ , \ i \in \{1, \dots, k\} \, ,$$

akkor $(\sigma_i)_{i=1}^k$ k-élmező $\mathcal{U}$ fölött.

Bizonyítás. Tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ esetén a

$$\varphi_p : \mathbb{R}^k \to E_p \ , \ (\nu^1, \dots, \nu^k) \to \varphi(p, (\nu^1, \dots, \nu^k)) = \sum_{i=1}^k \nu^i \sigma_i(p)$$

leképezés lineáris izomorfizmus, és ebből következően a φ leképezés bijektív. A $(\mathrm{VB})_2$-beli (i), (ii) feltételek teljesülése nyilvánvaló, megmutatjuk, hogy φ diffeomorfizmus. Válasszunk ebből a célból a p pont egy $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ környezetében egy $\psi : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k \to E$ lokális trivializációt. Ekkor tetszőleges $q \in \mathcal{V}$ és $v \in \mathbb{R}^k$ esetén

$$\psi^{-1} \circ \varphi(q, v) = (q, \psi_q^{-1} \circ \varphi_q(v)).$$

Mivel $\varphi_q : \mathbb{R}^k \to E_q$ és $\psi_q : \mathbb{R}^k \to E_q$ lineáris izomorfizmus, következik, hogy

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k \to \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k$$

diffeomorfizmus. Ebből adódóan φ maximális rangú $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^k$ fölött, s mivel ez tetszőlegesen kiválasztott $p \in \mathcal{U}$ pont alkalmas környezetére igaz, φ diffeomorfizmus.

A fordított irányú megállapítás helyessége nyilvánvaló. $\square$

A tett megállapítás azt jelzi, hogy egy lokális trivializáció, ill. egy k-élmező „ugyanannak az éremnek két oldala”, s ezért időnként nem is teszünk különbséget közöttük.

18.4.4. Megtartva az eddigi feltételeket és jelöléseket, tekintsük a $\pi : E \to M$ vektornyaláb egy

$$\varphi = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to E$$

lokális trivializációját / k-élmezőjét. Ekkor tetszőleges $s : \mathcal{U} \to E$ $\mathcal{U}$ fölötti széléshez egyértelműen létezik olyan $s_\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ sima leképezés, hogy minden $p \in \mathcal{U}$ esetén

$$s(p) = \varphi(p, s_\varphi(p)).$$

Valóban, ha $s_\varphi = (s^1, \dots, s^k)$, ahol az $s^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvények, s komponensei a $(\sigma^i)_{i=1}^k$ k-élre vonatkozóan, azaz

$$s = \sum_{i=1}^k s^i \sigma_i, \text{ ill. pontonként } s(p) = \sum_{i=1}^k s^i(p)\sigma_i(p) \ (p \in \mathcal{U}),$$

akkor s_φ a kívánt tulajdonságú leképezés, hiszen a **18.4.3.**-ban mondottak szerint

$$\varphi(p, s_\varphi(p)) = \varphi(p, (s^1(p), \dots, s^k(p))) = \sum_{i=1}^k s^i(p)\sigma_i(p) = s(p).$$

Az s_φ leképezést az s szelés *fő részé*nek nevezzük a φ lokális trivializációra vonatkozóan.

Ha $\psi = (\rho_1, \dots, \rho_k) : \mathcal{V} \times \mathbb{R}^k \to E$ további lokális trivializációja π-nek és $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, akkor létezik olyan

$$A = (\alpha^i_j) : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to GL(\mathbb{R}, k) \ , \ p \mapsto A(p) = (\alpha^i_j(p))$$

sima leképezés, hogy

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^k \alpha^j_i \rho_j \ , \ i \in \{1, \dots, k\} \, .$$

Amennyiben $s \in \mathrm{Sec}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ és s fő része φ-re, ill. ψ-re vonatkozóan

$$s_\varphi = (s^1_\varphi, \dots, s^k_\varphi) \ , \text{ ill. } s_\psi = (s^1_\psi, \dots, s^k_\psi),$$

akkor

$$s^i_\psi = \sum_{j=1}^k \alpha^i_j s^j_\varphi \ (i \in \{1, \dots, k\}) \ , \text{ röviden: } s_\psi = A s_\varphi. \tag{2}$$

(Ez egyszerű lineáris algebra. Tetszőleges $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ esetén egyrészt $s(p) = \sum_{i=1}^{k} s_\psi^i(p)\rho_i(p)$, másrészt

$$s(p) = \sum_{j=1}^{k} s_\varphi^j(p)\sigma_j(p) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^i(p)s_\varphi^j(p)\rho_i(p),$$

és a két reláció összevetése a felírt összefüggést adja.)

A mondottak alapján egy vektornyaláb szeléseit olyan $s_\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ leképezéscsaládokként interpretálhatjuk, amelyek „helyesen transzformálódnak”, azaz a lokális trivializáció megváltoztatása esetén az (2) transzformációs szabálynak tesznek eleget. Ez a nézőpont a számolások szempontjából igen fontos.

18.5. Legyen adva egy M sokaság, páronként diszjunkt valós vektorterek egy $(E_p)_{p\in M}$ családja, M-nek egy $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedése, valamint minden $\alpha \in A$ index és $p \in \mathcal{U}_\alpha$ pont esetén egy $p_{\alpha,p} : \mathbb{R}^k \to E_p$ lineáris izomorfizmus. Ha a

$$\gamma_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to GL(\mathbb{R}, k)\ ,\ p \mapsto \gamma_{\alpha\beta}(p) := \varphi_{\alpha,p}^{-1} \circ \varphi_{\beta,p}$$

$((\alpha, \beta) \in A \times A)$ leképezések simák, akkor az $E := \bigcup_{p\in M} E_p$ (diszjunkt unió) halmaz egyértelműen felruházható sokaság-struktúrával úgy, hogy a

$$\pi : E \to M\ ,\ z \mapsto \pi(z) := p\ ,\ \text{ha } z \in E_p$$

projekció M fölötti, k-rangú vektornyalábbá váljon, amelynek a

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U})\ ,\ (p, v) \mapsto \varphi_\alpha(p, v) := \varphi_{\alpha,p}(v)$$

bijekciók lokális trivializációi.

A bizonyítás vázlata. (1) Nevezzünk nyíltnak egy $\mathcal{V} \subset E$ halmazt, ha minden $\alpha \in A$ index esetén $\varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{V})$ nyílt halmaz $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$-ban. Ez az előírás topológiát ad meg E-n. A $\gamma_{\alpha\beta}$ leképezések simasága miatt a

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^k \to (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{R}^k$$

leképezések diffeomorfizmusok. Így arra következtethetünk, hogy egy $\mathcal{V} \subset E$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha bármely $p \in M$ ponthoz van olyan $\alpha \in A$ index, hogy $p \in \mathcal{U}_\alpha$ és $\varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{V})$ nyílt halmaz $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$-ban.

Egyszerűen adódik, hogy az E halmazon így megadott topológia Hausdorff és megszámlálható bázisú.

(2) Legyen $(\mathcal{U}, u)$ olyan térképe M-nek, ahol $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_\alpha$, valamely $\alpha \in A$ indexre. Ha

$$x : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to x(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^k\ ,\ z \mapsto x(z) := (u \circ \pi(z), \varphi_{\alpha,\pi(z)}^{-1}(z)),$$

akkor $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), x)$ térkép E-n, és az így adódó térképek sokaság-struktúrát határoznak meg E-n. Erre a sokaság-struktúrára nézve $\pi : E \to M$ k-rangú vektornyaláb, amelynek a φ_α bijekciók lokális trivializációi. E sima struktúrájának egyértelműsége adódik abból a követelményből, hogy a φ_α leképezéseknek diffeomorfizmusoknak kell lenniük.

18.5.1. *Vektornyaláb visszahúzottja* Legyen adva egy $\pi : E \to M$ k-rangú vektornyaláb és egy $f : N \to M$ sima leképezés. Tetszőleges $q \in N$ esetén legyen

$$(f^*E)_q := \left\{(q,z) \in N \times E \mid z \in E_{f(q)}\right\},$$

és lássuk el $(f^*E)_q$-t

$$(q,z_1) + (q,z_2) := (q, z_1 + z_2)\ ,\ \lambda(q,z) := (q, \lambda z)\ (\lambda \in \mathbb{R})$$

előírás szerint vektortér-struktúrával, vagyis azzal a vektortér-struktúrával, amely az

$$(f^*E)_q = \{q\} \times E_{f(q)} \to E_{f(q)} : (q,z) \mapsto z$$

leképezést lineáris izomorfizmussá teszi. Ha $\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(\mathcal{U})$ lokális trivializációja E-nek és $q \in f^{-1}(\mathcal{U}) \subset N$ tetszőleges, akkor értelmezzük a $\psi_q : \mathbb{R}^k \to (f^*E)_q$ leképezést a

$$\psi_q(u) := (q, \varphi_{f(q)}(u))$$

előírással. Világos, hogy ekkor ψ_q lineáris izomorfizmus, és az is egyszerűen ellenőrizhető, hogy a páronként diszjunkt vektorterek $((f^*E)_q)_{q\in N}$ családja valamint a ψ_q lineáris izomorfizmusok eleget tesznek a **18.5.**-ben megfogalmazott feltételnek. Így egy

$$\rho : f^*E \to N$$

vektornyalábhoz jutunk, amelynek

totáltere $f^*E := \bigcup_{q\in N} (f^*E)_q = \{(q,z) \in N \times E \mid f(q) = \pi(z)\} =: N \times_M E \subset N \times E$;

projekciója $\rho := \mathrm{pr}_1 \restriction N \times_M E$, ahol pr_1 az $N \times M \to N$ természetes projekció.

A kapott vektornyalábot a $\pi : E \to M$ vektornyaláb f általi *visszahúzott*jának (*pull-back*) nevezzük és rá az $f^*\pi$ jelölést is használjuk.

Egy $s : N \to f^*E = N \times_M E$ sima leképezés akkor és csak akkor szelése az $f^*\pi$ visszahúzott nyalábnak, ha van olyan $\underline{s} : N \to E$ sima leképezés, hogy

$$\pi \circ \underline{s} = f\ ,\ \text{és } s(q) = (q, \underline{s}(q))\ (q \in N).$$

Az $\underline{s}$ leképezést az s szelés *fő rész*ének hívjuk.

Ha egy $\underline{s} : N \to E$ sima leképezés eleget tesz a $\pi \circ \underline{s} = f$ feltételnek, akkor azt mondjuk, hogy $\underline{s}$ f*menti szelés*e E-nek. E összes f-menti szelései természetes módon $C^\infty(N)$-modulust alkotnak, amelyet $\mathrm{Sec}_f(E)$-vel jelölünk. Az

$$s \in \mathrm{Sec}(f^*E) \mapsto \underline{s} := s \textit{ fő része } \in \mathrm{Sec}_f(E)$$

leképezés kanonikus modulus-izomorfizmus, amely által $\mathrm{Sec}(f^*E)$ és $\mathrm{Sec}_f(E)$ azonosítható. A gyakorlatban többnyire kényelmesebb f-menti szelésekkel foglalkozni f^*E szelései helyett, ahon egyszerű okból, hogy f^*E egy szelésének első komponense nem tartalmaz információt.

Példa. Ha $\gamma : I \to M$ egy görbe, akkor ennek

$$\dot\gamma : I \to TM\ ,\ t \mapsto \dot\gamma(t) := (\gamma_*)_t \left(\frac{d}{dr}\right)_t$$

sebességvektormezője γ-menti szelése τ_M-nek, hiszen $\tau \circ \dot\gamma = \gamma$. Általánosabban, ha $X : I \to TM$ olyan sima leképezés, amelyre tetszőleges $t \in I$-re $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ teljesül, akkor $X \in \mathrm{Sec}_\gamma(\tau_M)$. TM-nek egy $\gamma : I \to M$ görbe menti szeléseit γ-*menti vektormező*kként említjük.