DIFFERENCIÁLGEOMETRIA

2010 – 11., őszi félév

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA

Szilasi József

---

(1)

0. Előismeretek

(A) Analízis

0.1. $\mathbb{R}^n$, mint valós vektortér $\mathbb{R}^n$-nel jelöljük a rendezett valós szám n-esek halmazát; elemeire a következőkben az

$$a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \; ; \quad \alpha^i \in \mathbb{R} \; , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

jelöléseit használjuk, tehát a koordinátákat felső indexszel látjuk el. $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós valós vektortér, ha elemeinek összeadását komponensenként, azaz az

$a + b = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) + (\beta^1, \dots, \beta^n) := (\alpha^1 + \beta^1, \dots, \alpha^n + \beta^n)$, ill. a $\lambda a := \lambda(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

előírással értelmezzük. Ennek a vektortérnek egy bázisa az

$$e_1 := (1, 0, \dots, 0) \; , \quad e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0) \; , \; \dots , \; e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

vektorsorozat, amelyet $\mathbb{R}^n$ <u>kanonikus bázisaként</u> is említünk. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér elemeire a vektor elnevezés mellett a <u>pont</u> elnevezést is fogjuk használni. Az

$$e^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \; , \quad a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \longmapsto e^i(a) := \alpha^i \; , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

függvények lineárisak, ezeket $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátafüggvényeinek, $(e^i)_{i=1}^n$ együttesüket $\mathbb{R}^n$ <u>kanonikus koordinátarendszerének</u> hívjuk. A kanonikus koordinátarendszer és a kanonikus bázis kapcsolatát az

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \; ; \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

relációk adják.

0.2. $\mathbb{R}^n$ euklideszi struktúrája Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren pozitív definit skaláris szorzatot ad meg az

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (a,b) \longmapsto \langle a,b \rangle := \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i \\ (a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \; , \; b = (\beta^1, \dots, \beta^n)) \end{array} \right.$$

függvény, vagyis teljesülnek rá a következők:

(1) szimmetrikus: $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle \quad (a,b \in \mathbb{R}^n)$;

(2) bilineáris: $\langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b \rangle = \lambda_1 \langle a_1, b \rangle + \lambda_2 \langle a_2, b \rangle$
$(a_1, a_2, b \in \mathbb{R}^n \; ; \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$;

(3) pozitív definit: $\langle a,a \rangle > 0$, ha $a \neq \underline{0}$.

Ezt a skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$ kanonikus skaláris szorzatának hívjuk; $\mathbb{R}^n$ a kanonikus skaláris szorzattal felruházva euklideszi vektortér. A továbbiakban $\mathbb{R}^n$-en ezt a struktúrát adottnak tekintjük. A kanonikus skaláris szorzatból jól ismert módon származtatható

az euklideszi norma: $\forall v \in \mathbb{R}^n: \; \|v\| := \langle v,v \rangle^{1/2}$;

az euklideszi távolság: $\forall a,b \in \mathbb{R}^n: \; d(a,b) := \|a-b\| = \langle a-b, a-b \rangle^{1/2}$.

a nemzérus vektorok szöge: ha $a,b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, akkor a szögük az a θ valós szám, amelyre
$$\cos\theta = \frac{\langle a,b \rangle}{\|a\|\|b\|}$$ teljesül.

0.3. $\mathbb{R}^n$, mint topologikus tér Tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ pont és $\varepsilon > 0$ valós szám esetén a

$$B_\varepsilon(a) := \{ p \in \mathbb{R}^n \mid \|a-p\| < \varepsilon \}$$

ponthalmazt „a" középpontú, ε-sugarú gömbnek nevezzük.

Egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt nyíltnak mondunk, ha minden pontja benne van egy általa tartalmazott gömbben, azaz ha

$$\forall a \in \mathcal{U}: \; \exists \, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \; B_\varepsilon(a) \subset \mathcal{U}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy minden gömb nyílt halmaz. $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazainak halmaza rendelkezik a következő alapvető tulajdonságokkal:

(1) az üres halmaz és $\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz;

(2) két – s ennélfogva véges sok – nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz;

(3) nyílt halmazok tetszőleges családjának az uniója is nyílt.

Ezek a tulajdonságok elvezetnek egy igen általános struktúrához, a topologikus terek osztályához.

0.4. Topologikus terek

Definíció. Egy S halmazon adott topológián – vagy topologikus struktúrán – az S halmaz részhalmazainak egy olyan $\mathcal{T}$ halmazát értjük, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(TOP 1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $S \in \mathcal{T}$;

(TOP 2) bármely két – s ennélfogva bármely véges sok – $\mathcal{T}$-beli halmaz metszete is $\mathcal{T}$-beli;

(TOP 3) tetszőleges sok $\mathcal{T}$-beli halmaz uniója is $\mathcal{T}$-beli.

Ekkor a $\mathcal{T}$ halmazcsalád tagjait nyílt halmazoknak nevezzük, az $(S, \mathcal{T})$ párt pedig – ill. gyakran magát csak S-et – topologikus térnek mondjuk, elemeit pontokként említjük.

Egy topologikus tér egy részhalmazát zárt halmaznak hívjuk, ha a komplementere nyílt halmaz; egy pont egy környezetén a pontot tartalmazó nyílt halmazt értünk.

Példák. (1) Ha S egy halmaz és $\mathcal{T}_d := \mathcal{P}(S) :=$ S hatványhalmaza, akkor $\mathcal{T}_d$ topológia S-en. Ezt a topológiát a diszkrét topológiának, az $(S, \mathcal{T}_d)$ topologikus teret diszkrét topologikus térnek hívjuk. (2) Tetszőleges S halmaz esetén

$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset, S\}$ szintén topológia S-en, amelyet antidiszkrét vagy kaotikus topológiának hívunk. Ez a topológia az alkalmazások szempontjából érdektelen. (3) 0.3.-beli kiinduló példánk, az $\mathbb{R}^n$ valós koordinátatér, az ott definiált nyílt halmazokkal értelemszerűen topologikus tér. – A továbbiakra nézve föltesszük, hogy $\mathbb{R}^n$ fel van ruházva a 0.3.-ban leírt szokásos vagy természetes topológiával.

Lemma és definíció. Legyen $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér, s tekintsük S-nek egy H részhalmazát. Ha

$$\mathcal{T}_H := \{\mathcal{U} \cap H \subset H \mid \mathcal{U} \in \mathcal{T}\},$$

akkor $\mathcal{T}_H$ topológia a H halmazon. Ezt a topológiát a H-n $\mathcal{T}$ által indukált topológiának hívjuk, s azt mondjuk, hogy az indukált topológiával ellátott $H \subset S$ halmaz altere az $(S, \mathcal{T})$ topologikus térnek. A $\mathcal{T}_H$ topológiát altér-topológiaként is említjük.

Bizonyítás. (1) $\emptyset = \emptyset \cap H \in \mathcal{T}_H$, mert $\emptyset \in \mathcal{T}$; $H = S \cap H \in \mathcal{T}_H$, mert $S \in \mathcal{T}$; $\mathcal{T}_H$ tehát eleget tesz (TOP 1)-nek.

(2) Legyen $A, B \in \mathcal{T}_H$. Ekkor $A = \mathcal{U} \cap H$, $B = \mathcal{V} \cap H$ írható, ahol $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$. Így $A \cap B = (\mathcal{U} \cap H) \cap (\mathcal{V} \cap H) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap H \in \mathcal{T}_H$, mivel $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{T}$, hiszen $\mathcal{T}$ topológia. Így módon $\mathcal{T}_H$-ra (TOP 2) is teljesül.

(3) Tegyük fel, hogy $(A_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathcal{T}_H$-beli halmazcsalád. Ekkor

$$\forall i \in I: \exists\, \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}: \quad A_i = \mathcal{U}_i \cap H \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U}_i \cap H) = \Big(\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i\Big) \cap H \in \mathcal{T}_H$$

mert $\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$, lévén $\mathcal{T}$ topológia. – Ezzel (TOP 3) teljesülését is igazoltuk $\mathcal{T}_H$-ra. □

Megjegyzés. Egy topologikus tér egy alterének egy nyílt halmaza nem szükségképpen nyílt halmaz az eredeti topologikus térben!

Illusztrációként tekintsük az $\mathbb{R}^2$ topologikus tér

$$\mathbb{R} \cong \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

részhalmazát. $\mathbb{R}$ az $\mathbb{R}^2$ topologikus térnek zárt részhalmaza (a komplementere ui. könnyen láthatóan nyílt), ugyanakkor $\mathbb{R}$ a $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} := \{ U \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \mid U \subset \mathbb{R}^2 \text{ nyílt}\}$ indukált topológiára nézve nyílt halmaz, mert $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^2$, s itt $\mathbb{R}^2$ nyílt.

0.5. Folytonosság Legyen $(S, \mathcal{T}_S)$ és $(Z, \mathcal{T}_Z)$ egy-egy topologikus tér, s tekintsünk egy $f: S \longrightarrow Z$ leképezést.

(1) Azt mondjuk, hogy az f leképezés folytonos egy $p \in S$ pontban, ha az $f(p)$ pont minden $V \in \mathcal{T}_Z$ környezetéhez létezik a p pontnak olyan $U \in \mathcal{T}_S$ környezete, hogy $f(U) \subset V$.

(2) Az f leképezést az S topologikus tér Z-be való folytonos leképezésének nevezzük, ha bármely Z-beli halmaz ősképe nyílt halmaz S-ben: $V \in \mathcal{T}_Z \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_S$.

(3) Az f leképezést homeomorfizmusnak vagy topologikus izomorfizmusnak mondjuk, ha olyan bijektív folytonos leképezés, amelynek az inverze is folytonos. Két topologikus teret homeomorfnak nevezünk, ha létezik közöttük homeomorfizmus.

Tétel (F. Hausdorff(-), 1914.). Legyen adva egy $(S, \mathcal{T}_S)$, valamint egy $(Z, \mathcal{T}_Z)$ topologikus tér, s tekintsünk egy $f: S \longrightarrow Z$ leképezést. A következő állítások ekvivalensek:

(i) f S minden pontjában folytonos.

(ii) f folytonos leképezése S-nek Z-be.

(iii) Valamennyi Z-beli zárt halmaz f általi ősképe zárt halmaz S-ben: $V \subset Z$ zárt $\Rightarrow f^{-1}(V) \subset S$ zárt.

<u>Bizonyítás.</u> $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Legyen $V \subset Z$ tetszőleges nyílt halmaz. Bármely $p \in f^{-1}(V)$ esetén $f(p) \in V$, s mivel f folytonos p-ben, megadható p-nek olyan U_p környezete, hogy $f(U_p) \subset V$. Így minden $p \in f^{-1}(V)$ pontnak megfelel egy olyan $U_p \subset S$ nyílt halmaz, hogy $p \in U_p \subset f^{-1}(V)$. Világos, hogy $f^{-1}(V) = \bigcup_{p \in f^{-1}(V)} U_p$. Ily módon $f^{-1}(V)$ előáll nyílt halmazok egy családjának uniójaként, tehát maga is nyílt halmaz. Ezt kellett igazolnunk.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Tetszőleges $H \subset Z$ esetén fennáll az

(*) $$S \setminus f^{-1}(H) = f^{-1}(Z \setminus H)$$

halmazelméleti azonosság. Így ha H zárt halmaza Z-nek, akkor $Z \setminus H$ nyílt halmaz, ezért a feltétel miatt $f^{-1}(Z \setminus H)$, s a vele egyenlő $S \setminus f^{-1}(H)$ is nyílt, következésképpen $f^{-1}(H)$ zárt halmaz. Folytonos leképezésnél tehát zárt halmaz ősképe is zárt.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Legyen $p \in S$ tetszőleges pont, $V \subset Z$ pedig tetszőleges környezete $f(p)$-nek. Ha $U := f^{-1}(V)$, akkor $f(U) \subset V$ és $p \in U$. (*) alapján – $H := Z \setminus V$ választással – következik, hogy

$$U = f^{-1}(V) = S \setminus f^{-1}(Z \setminus V).$$

Itt $Z \setminus V$ zárt halmaz, ezért a feltétel értelmében $f^{-1}(Z \setminus V)$ is zárt, s ezért $U = S \setminus f^{-1}(Z \setminus V)$ nyílt. – Ezzel beláttuk, hogy $f(p)$ bármely V környezetéhez van olyan U környezete p-nek, hogy $f(U) \subset V$; f tehát folytonos p-ben. □

<u>Példa</u> Tekintsük az $\mathbb{R}^k$ és az $\mathbb{R}^n$ topologikus teret. Egy $f: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezésre a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(a) f folytonos egy $a \in \mathbb{R}^k$ pontban.

(b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* : \quad p \in B_\delta(a) \Rightarrow f(p) \in B_\varepsilon(f(a))$.

<u>Bizonyítás.</u> $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esetén $B_\varepsilon(f(a))$ környezet $f(a)$-nak, ezért f a-beli folytonossága esetén van a-nak olyan $U \subset \mathbb{R}^k$ környezete, hogy $f(U) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Mivel minden $\mathbb{R}^k$-beli

nyílt halmaz előállítható gömbök uniójaként, van olyan δ pozitív valós szám, hogy $B_\delta(a) \subset U$. Ekkor $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$, amivel beláttuk (b) teljesülését.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Legyen V az $f(a) \in \mathbb{R}^n$ pont tetszőleges környezete. Megadható olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, hogy $B_\varepsilon(f(a)) \subset V$. Ha δ olyan pozitív valós szám amellyel (b) teljesül, akkor $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$. Az $U := B_\delta(a)$ választással élve a-nak olyan környezetét jelöltük ki, amely eleget tesz az $f(U) \subset V$ kívánalomnak, igazolva f a-beli folytonosságát. □

<u>0.6. Határérték</u> Legyen S és T topologikus tér, $H \subset S$, s legyen adva egy $f: H \to T$ leképezés. Tegyük föl, hogy $a \in S$ torlódási pontja H-nak, azaz hogy „a" minden környezete tartalmaz a-tól különböző H-beli pontot. Azt mondjuk, hogy f <u>határértéke a-ban $b \in T$</u>, ha a b pont minden $V \subset T$ környezetéhez létezik az „a" pontnak olyan $U \subset S$ környezete, hogy

$$f(p) \in V, \quad \text{ha } p \in U \cap H \text{ és } p \neq a.$$

Ennek jelölésére a

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in H}} f(x) = b \; ; \quad \lim_{x \to p} f(x) = b \; ; \quad f(x) \to b, \text{ ha } x \to a \; (x \in H)$$

írásmódok bármelyikét alkalmazhatjuk. – Megjegyzendő, hogy ebben az általánosságban a határérték nem föltétlenül egyértelmű, ha azonban föltesszük, hogy a T topologikus tér Hausdorff-tér, akkor teljesül az egyértelműség. A folytonosság és a határérték kapcsolatát illetően érvényes a következő

<u>Lemma.</u> Legyen S és T topologikus tér, $f: S \to T$ egy leképezés. f akkor és csak akkor folytonos egy $p \in S$ pontban, ha p izolált pontja S-nek (azaz van olyan környezete, amely nem tartalmaz p-től különböző pontot – s így $\{p\} \subset S$ nyílt halmaz –), vagy p torlódási pontja S-nek, és ekkor $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. Δ

0.7. <u>$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ alakú leképezések differenciálása</u> Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, p egy pontja U-nak, s tekintsünk egy $f: U \to \mathbb{R}^m$ leképezést. Azt mondjuk, hogy f <u>differenciálható</u> a $p \in U$ <u>pontban</u>, ha van olyan $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ <u>lineáris</u> leképezés, hogy

$$\lim_{h \to \underline{0}} \frac{1}{\|h\|}\left(f(p+h) - f(p) - L(h)\right) = \underline{0} \quad (\in \mathbb{R}^m).$$

Ekkor az L lineáris leképezést f <u>p-beli deriváltjának</u> nevezzük és $f'(p)$-vel jelöljük. $f'(p)$-nek az $\mathbb{R}^n$, ill. az $\mathbb{R}^m$ vektortér kanonikus bázisra vonatkozó mátrixát f <u>p-beli Jacobi-mátrixának</u> hívjuk, s rá a $J_f(p)$ jelölést használjuk. Amennyiben az f leképezés az U halmaz minden pontjában differenciálható, úgy f-et <u>U fölött differenciálható</u>nak nevezzük, és ebben az esetben az

$$f': U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad p \longmapsto f'(p)$$

leképezést f <u>derivált leképezés</u>ének, röviden <u>deriváltjának</u> mondjuk ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ az összes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések vektorterét jelöli).

0.8. <u>A derivált elemi tulajdonságai</u>

(1) <u>Egyértelműség</u>. Ha egy leképezésnek létezik deriváltja egy pontban, akkor az egyértelműen meghatározott.

(2) <u>Linearitás</u>. Ha $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ és $g: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ egy $a \in \mathbb{R}^n$ pontban differenciálható leképezések, akkor tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda f + \mu g$ leképezés is differenciálható a-ban, és $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'$

(3) <u>Láncszabály</u>. Ha egy $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható egy $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, egy $g: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés pedig differenciálható az $f(a) \in \mathbb{R}^m$ pontban, akkor a $g \circ f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ leképezés differenciálható a-ban, és $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.

0.9. <u>Példák</u>

(1) Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: U \to \mathbb{R}^m$ pedig <u>konstans</u> leképezés, akkor f differenciálható U fölött, és tetszőleges $p \in U$ pont esetén $f'(p): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a <u>zérus lineáris leképezés</u>.

Valóban, ha $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a zérus leképezés, és $h \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, hogy $p+h \in \mathcal{U}$, akkor

$$f(p+h)-f(p)-L(h) = f(p)-f(p) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m,$$

amiből a derivált egyértelműsége folytán következik, hogy

$$L = f'(p) = \underline{0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

(2) A lineáris leképezések differenciálhatók, és azonosak tetszőleges pontbeli deriváltjukkal.

Legyen ennek igazolására $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, s válasszunk ki egy tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ pontot. $\forall h \in \mathbb{R}^n$: $f(p+h)-f(p)-f(h) = f(p)+f(h)-$ $-f(p)-f(h) = \underline{0} \in \mathbb{R}^m \implies f'(p) = f$.

(3) Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pedig differenciálható leképezés, akkor f tetszőleges $t_0 \in I$-beli deriváltja azonosítható az $f'(t_0)(1) \in \mathbb{R}^n$ vektorral, amely megkapható a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ határértékként.

Ezzel az azonosítási lehetőséggel rendszerint élni fogunk, s ilyen szituációban a deriváltat vektorként interpretáljuk.

0.10. Iránymenti deriváltak Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz; $p \in \mathcal{U}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy egy $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezésnek létezik az a <u>v szerinti iránymenti deriváltja</u> a p pontban, ha létezik a

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

határérték. Speciálisan az $\mathbb{R}^n$ tér $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázisának tagjai szerint képzett

$$D_i f(p) := D_{e_i} f(p) \quad , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

iránymenti deriváltakat – ha léteznek – f p-beli <u>parciális deriváltjainak</u> hívjuk. Amennyiben $D_i f(p)$ minden $p \in \mathcal{U}$ pontban létezik, úgy a $D_i f: p \in \mathcal{U} \longmapsto D_i f(p) \in \mathbb{R}^m$ leképezést f <u>$\mathcal{U}$ fölötti i-edik parciális deriváltjának</u> mondjuk.

<u>Példa.</u> Az $\mathbb{R}^n$ tér $(e^i)_{i=1}^n$ kanonikus koordinátarendszere tagjainak parciális deriváltjai

$$D_i e^j = \delta_i^j \quad ; \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Valóban, fölhasználva, hogy az e^j függvények lineárisak,

$$\forall\, p \in \mathbb{R}^n: \quad D_i e^j(p) = \lim_{t\to 0} \frac{e^j(p+te_i) - e^j(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^j(p) + t e^j(e_i) - e^j(p)}{t}$$
$$= e^j(e_i) = \delta_i^j .$$

<u>Lemma.</u> Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s tegyük föl, hogy az $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható egy $p \in \mathcal{U}$ pontban. Ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik a $D_v f(p)$ iránymenti derivált, és

$$D_v f(p) = f'(p)(v) \ ;$$

speciálisan

$$D_i f(p) = f'(p)(e_i) \qquad (i \in \{1,\dots,n\}).$$

Ha $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, akkor $D_v f(p) = \sum_{i=1}^n v^i D_i f(p)$.

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsük a

$$\gamma: t \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(t) := p + tv \in \mathbb{R}^n \quad \text{és a} \quad c = f\circ\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

leképezést. Ekkor γ differenciálható leképezés, c pedig differenciálható a $0 \in \mathbb{R}$ pontban. Ismételten élve az <u>0.9.</u>(3) említett beazonosításaival,

$$\dot\gamma(0) := \gamma'(0)(1) = v \ ; \qquad \dot c(0) := c'(0)(1) = \lim_{t\to 0} \frac{c(t)-c(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} =: D_v f$$

Másrészt

$$c'(0)(1) = (f\circ\gamma)'(0)(1) \overset{\text{láncszabály}}{=} f'(\gamma(0))\gamma'(0)(1) = f'(p)(v),$$

így $D_v f(p) = f'(p)(v)$ következik. Ha $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, akkor

$$D_v f(p) = f'(p)\Big(\sum_{i=1}^n v^i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n v^i f'(p)(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i D_i f(p). \qquad \square$$

<u>0.11. C^k-osztályú leképezések</u> Vegyünk alapul egy $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmazt. (1) Azt mondjuk, hogy egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvény <u>C^1-osztályú</u> $\mathcal{U}$-n, ha $D_1 f, \dots, D_n f$ parciális deriváltjai léteznek és folytonosak $\mathcal{U}$-n. Ha $k > 1$ egész szám, s a

$D_1 f, \dots, D_n f$ parciális deriváltak mindegyike létezik és C^{k-1}-osztályú $\mathcal{U}$-n, akkor f-et $\underline{\mathcal{U} \text{ fölött } C^k\text{-osztályú}}$ függvénynek nevezzük. Amennyiben f minden k pozitív egészre C^k-osztályú $\mathcal{U}$-n, akkor azt mondjuk, hogy f $\underline{C^\infty\text{-osztályú}}$ vagy <u>sima</u> az $\mathcal{U}$ nyílt halmazon.

(2) Tekintsünk egy $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést. Jelentse $(e^i)_{i=1}^m$ $\mathbb{R}^m$ kanonikus koordinátarendszerét, s képezzük az F leképezés (erre vonatkozó) $F^i := e^i \circ F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ koordinátafüggvényeit. Jegyezzük meg, hogy ha $\mathbb{R}^m$ vektorait oszlopvektorokként írjuk, akkor F a koordinátafüggvényei segítségével az $F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix}$ alakban írható fel, hiszen

$$\forall p \in \mathcal{U}: \quad F(p) = \begin{pmatrix} e^1(F(p)) \\ \vdots \\ e^m(F(p)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(p) \\ \vdots \\ F^m(p) \end{pmatrix}.$$

Az F leképezést aszerint nevezzük <u>C^k-osztályúnak</u>, ill. <u>simának</u>, amint valamennyi koordinátafüggvénye C^k-osztályú, ill. sima.

(3) Ha F az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaznak egy $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra való olyan <u>bijektív C^k-osztályú</u> leképezése, amelynek $F^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ <u>inverze is C^k-osztályú</u>, akkor azt mondjuk, hogy F <u>C^k-osztályú diffeomorfizmus</u>, röviden <u>diffeomorfizmus</u>.

(4) Legyen H $\mathbb{R}^n$-nek egy nemüres részhalmaza. Egy $F : H \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést akkor nevezünk C^k-osztályúnak $(k \geqq 1)$, ha van olyan $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $\tilde{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^k-osztályú leképezés, hogy $H \subset \mathcal{U}$ és $\tilde{F} \restriction H = F$; röviden: ha <u>$F$-nek létezik egy H-t tartalmazó nyílt halmazra való C^k-osztályú kiterjesztése</u>.

0.12. Elegendő feltétel a differenciálhatóságra és a vegyes második parciális deriváltak egyenlőségére

(A) Tétel. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s tegyük fel, hogy

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^m \end{pmatrix} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

C^1-osztályú leképezés. Ekkor minden $p \in U$ pontban létezik az $F'(p)$ derivált, és

$$J_F(p) = \left(D_j F^i(p) \right) = \begin{pmatrix} D_1 F^1(p) & \dots & D_n F^1(p) \\ D_1 F^2(p) & \dots & D_n F^2(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_1 F^m(p) & \dots & D_n F^m(p) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

(B) Tétel. Tegyük fel, hogy f az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett C^1-osztályú, valós értékű függvény. Ha valamely $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ indexekre a

$$D_i D_j f : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{és a} \quad D_j D_i f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvények léteznek és folytonosak, akkor

$$D_i D_j f = D_j D_i f. \qquad \Delta$$

0.13. Gradiens Egy $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény $p \in \mathbb{R}^n$-beli gradiensén a

$$\operatorname{grad} F(p) := \left(D_1 F(p), \dots, D_n F(p) \right) \in \mathbb{R}^n$$

vektort értjük. Ez az az egyetlen vektor, amelyre teljesül, hogy

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \; F'(p)(v) = \langle \operatorname{grad} F(p), v \rangle .$$

Valóban, mivel az $F'(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ derivált lineáris függvény az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren, a lineáris algebrából ismert Riesz-lemma alapján létezik egyetlenegy olyan $a \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ esetén $F'(p)(v) = \langle a, v \rangle$. Ekkor

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \; D_i F(p) = F'(p)(e_i) = \langle a, e_i \rangle \implies a = \sum_{i=1}^{n} D_i F(p) e_i = \operatorname{grad} F(p).$$

(B) Lineáris algebra

> Általában ezentúl (ha nem mondunk mást) V véges, de nem nulla dimenziójú valós vektorteret jelent.

0.14. Vektorkoordináták Rögzítve a V vektortér egy $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisát, tetszőleges $v \in V$ vektor $\mathcal{B}$-re vonatkozó koordinátáit (miként már 0.1.-ben is) felső indexekkel látjuk el, azaz v $\mathcal{B}$-ből való előállítását a

(*) $$v = \sum_{i=1}^n v^i b_i$$

alakban írjuk. Ekkor az

$$M_{\mathcal{B}}(v) := \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

mátrixot a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordináta-mátrixának hívjuk. (*) helyett időnként a

(**) $$v = v^i b_i$$

rövidítést alkalmazzuk, követve az ún. Einstein-féle összegzési megállapodást:

> ha egy formálisan egytagú kifejezésben ugyanaz a betű alsó és felső indexként is szerepel, akkor erre összegzés értendő 1-től n-ig.

0.15. Bázistranszformáció Megadva egy $S = (s^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ invertálható mátrixot, képezzük a V vektortér $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisa segítségével a

(0.15) $$\tilde{b}_j := \sum_{i=1}^n s^i_j b_i \quad , \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

vektorokat. Ekkor

$\tilde{\mathcal{B}} := (\tilde{b}_i)_{i=1}^n$ lineárisan független, s így bázisa V-nek.

Tegyük fel ennek igazolása céljából, hogy $\sum_{j=1}^n \lambda^j \tilde{b}_j = \underline{0}$.

Ekkor (0.15) értelmében egyben

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \lambda^j s^i_j \right) b_i = \underline{0}$$

is fennáll, amiből a $(b_i)_{i=1}^n$ vektorrendszer lineáris függetlensége alapján

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^j s^i_j = 0 \quad , \qquad i \in \{1,\dots,n\}$$

következik. Szorozzuk meg itt mindkét oldalt az (s^i_j) mátrix $(\tilde{s}^i_j)$ inverzének $\tilde{s}^k_i$ elemeivel, és összegezzünk i-re 1-től n-ig. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda^j (s^i_j \tilde{s}^k_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \delta^k_j = \lambda^k .$$

Mivel itt $k \in \{1,\dots,n\}$ tetszőleges, azt kaptuk, hogy $\tilde{\mathcal{B}}$-ből a zérusvektor csakis a triviális módon kombinálható lineárisan; $\tilde{\mathcal{B}}$ tehát valóban lineárisan független.

Áttérve a $\mathcal{B}$ bázisról (0.15a)-nak megfelelően a $\tilde{\mathcal{B}}$ bázisra, azt mondjuk, hogy S mátrixú <u>bázistranszformációt</u> hajtottunk végre.

<u>0.16. Lineáris transzformációk mátrixelőállítása</u> Legyen $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^{n}$ továbbra is bázisa a V vektortérnek, s tekintsünk egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformációt. Tetszőleges $j \in \{1,\dots,n\}$ index esetén egyértelmű módon

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_j b_i$$

írható. Az így kapott $(\alpha^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ mátrixot a φ lineáris transzformáció <u>$\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixának</u> nevezzük, és $M^{\mathcal{B}}(\varphi)$-vel vagy egyszerűen $M(\varphi)$-vel jelöljük. A mátrixelemek írásmódjánál – miként az előzőekben is – a

felső index – sorindex
alsó index – oszlopindex

megállapodást követjük.

Végrehajtva egy S mátrixú $\mathcal{B} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bázistranszformációt, ha $A := M^{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\tilde{A} := M^{\tilde{\mathcal{B}}}(\varphi)$, akkor ismeretesen

(0.16) $$\boxed{\tilde{A} = S^{-1} A S} .$$

0.17. Lineáris transzformáció determinánsa és nyoma.

Egy véges dimenziójú vektortéren ható lineáris transzformáció determinánsán ill. nyomán tetszőleges mátrix-reprezentánsa determinánsát, ill. főátlóbeli elemeinek összegét értjük.

Megmutatjuk, hogy mindkét adat jól definiált: független a mátrix-reprezentáns választásától.

Jelölje $\mathrm{End}(V)$ a V vektortér lineáris transzformációinak vektorterét, s legyen $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ tetszőleges. Ha
$$A = (\alpha^i_j) = M^{\mathcal{B}}(\varphi), \quad \tilde{A} = (\tilde{\alpha}^i_j) \in M^{\tilde{\mathcal{B}}}(\varphi) \; ; \quad \tilde{b}_j = \sum_{i=1}^{n} s^i_j b_i \; (j \in \{1, \dots, n\}),$$
ahol $S = (s^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ invertálható mátrix, akkor
$$\det \tilde{A} \overset{(0.16)}{=} \det(S^{-1} A S) = \det S^{-1} \det A \det S = \det A \det(S^{-1} S)$$
$$= \det A \det 1_n = \det A,$$
tehát φ bármely két mátrix-reprezentánsának ugyanaz a determinánsa.

A mátrixelemek nyelvén (0.16) az
$$(\tilde{\alpha}^i_j) = \left(\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{s}^i_k \alpha^k_l s^l_j \right)$$
alakot ölti, ahol $(\tilde{s}^i_j) := S^{-1}$. Innen
$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}^i_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \tilde{s}^i_k \alpha^k_l s^l_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{s}^i_k s^l_i \right) \alpha^k_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta^l_k \alpha^k_l = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i .$$
Ezzel beláttuk, hogy a φ-t reprezentáló mátrixok főátlóbeli elemeinek összege ugyanaz.

<u>Jelölés</u> $\det \varphi$ – $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ determinánsa

$\mathrm{tr}\, \varphi$ – $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ nyoma (trace = nyom)

0.18. Sajátvektor, sajátérték, karakterisztikus polinom

(1) Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció <u>sajátvektorán</u> olyan <u>nemzérus</u> $v \in V$ vektort értünk, amelyhez létezik olyan λ valós szám, hogy $\varphi(v) = \lambda v$. Ekkor azt mondjuk, hogy a λ a v sajátvektorhoz tartozó <u>sajátérték</u>.

(2) Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformációt <u>diagonalizálható</u>-

nak nevezzük, ha V-nek van olyan bázisa, amelyre vonatkozóan φ-t diagonálmátrix reprezentálja.

Egyszerűen átgondolható, hogy φ pontosan akkor diagonalizálható, ha V-nek van olyan bázisa, amelyet φ sajátvektorai alkotnak, s hogy a diagonális alakú mátrix-reprezentáns főátlójában éppen a transzformáció (nem feltétlenül különböző) sajátértékei állnak.

(3) Egy $A \in M_n(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},\ n \in \mathbb{N}^*)$ mátrix karakterisztikus polinomján a

$$P_A(t) := \det(A - t\,1_n)$$

polinomot értjük. Ez valóban polinom, mégpedig pontosan n-edfokú, a főegyütthatója $(-1)^n$, a konstans tagja $\det A$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja egyenlő. (Két $n \times n$-es mátrixot akkor mondunk hasonlónak, ha a (0.16)-tal leírható relációban állnak egymással.)

(4) Egy $\varphi : V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció karakterisztikus polinomján tetszőleges mátrix-reprezentánsa karakterisztikus polinomját értjük, tehát ha $\mathcal{B}$ bázisa V-nek és $A = M^{\mathcal{B}}(\varphi)$, akkor

$$P_\varphi(t) := P_A(t) := \det(A - t\,1_n).$$

Mivel a hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja egyenlő, ez a fogalom jól definiált. Egy λ valós akkor és csak akkor sajátértéke φ-nek, ha zérushelye a $P_\varphi(t)$ karakterisztikus polinomnak, azaz ha $P_\varphi(\lambda) = 0$.

(5) Ha $\dim V = 2$ és $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, akkor

$$P_\varphi(t) = t^2 - (\mathrm{tr}\,\varphi)t + \det\varphi .$$

Valóban, ha $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ φ-nek egy mátrix-reprezentánsa, akkor

$$P_\varphi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \alpha - t & \beta \\ \gamma & \delta - t \end{pmatrix} = (\alpha - t)(\delta - t) - \beta\gamma =$$

$$= t^2 - (\alpha + \delta)t + (\alpha\delta - \beta\gamma) = t^2 - (\mathrm{tr}\,\varphi)t + \det\varphi .$$

0.19. Bilineáris formák és skaláris szorzat

(1) Legyen V valós vektortér. Egy $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt *bilineáris függvénynek* vagy *formának* mondunk, ha mindkét változójában lineáris, azaz ha

$B(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + \beta B(u_2, v)$ és $B(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha B(u, v_1) + \beta B(u, v_2)$

minden $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén. Ha, ráadásul,

$$\forall u, v \in V: \quad B(u, v) = B(v, u),$$

akkor *szimmetrikus bilineáris formáról* beszélünk.

(2) Tegyük föl, hogy $(u_i)_{i=1}^{n}$ bázisa a V valós vektortérnek. Egy $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvénynek az adott bázisra vonatkozó mátrixán azt a (b_{ij}) $n \times n$-es mátrixot értjük, ahol $b_{ij} := B(u_i, u_j)$; $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Egy bilineáris forma akkor és csak akkor szimmetrikus, ha valamely, s így egyben bármely, bázisra vonatkozó mátrixa szimmetrikus.

(3) Egy $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineáris formához tartozó *kvadratikus formán* a

$$Q_B : V \longrightarrow \mathbb{R}, \; v \longmapsto Q_B(v) := B(v, v)$$

függvényt értjük. Ha B *szimmetrikus* bilineáris forma, akkor rekonstruálható a Q_B kvadratikus formából, érvényes ugyanis a

$$B(u, v) = \frac{1}{2}\left(Q_B(u+v) - Q_B(u) - Q_B(v)\right); \; u, v \in V$$

ún. *polarizációs azonosság*.

(4) Egy $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát *pozitív definitnek* mondunk, ha $Q_B(v) = B(v, v) \neq 0$, minden $v \neq \underline{0}$ vektor esetén. *Skaláris szorzaton* pozitív definit szimmetrikus bilineáris formát értünk. Egy véges dimenziós, de nem 0-dimenziójú valós vektorteret *euklideszi vektortérnek* nevezünk, ha el van látva egy skaláris szorzattal. $\mathbb{R}^n$ a 0.2.-ben leírt kanonikus skaláris szorzattal példa euklideszi vektortérre.

(5) Legyen V euklideszi vektortér, a V-n adott skaláris szorzatot az egyszerűség kedvéért jelölje a $\langle , \rangle$ szimbólum. Egy $v \in V$ vektor hosszán vagy normáján a

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$$

valós számot értjük, $\|v\| = 1$ esetén v-t egységvektor-nak mondjuk. V összes egységvektorainak

$$S := \{ v \in V \mid \|v\| = 1 \}$$

halmazát V egységgömbjének nevezzük. V két vektorát ortogonálisnak (merőlegesnek) mondjuk, ha a skaláris szorzatuk 0. Amennyiben V n-dimenziós, és az $u_1, \dots, u_n$ vektorok páronként ortogonális egységvektorok, azaz

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \; ; \quad 1 \leq i, j \leq n \quad ,$$

akkor $(u_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek. A páronként ortogonális egységvektorok alkotta bázisokat ortonormált bázisoknak nevezzük. Ha $(u_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa V-nek, akkor minden $v \in V$ vektor egyértelműen előállítható

(0.19) $$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

alakban, ez a v vektornak egy ún. Fourier-előállítása.

0.20. Önadjungált lineáris transzformációk. Spektráltétel

Legyen V euklideszi vektortér, ellátva a $\langle , \rangle$ skaláris szorzattal.

(1) Megmutatható, hogy minden $\varphi : V \to V$ lineáris transzformációhoz egyértelműen létezik olyan $\varphi^* : V \to V$ lineáris transzformáció, amelyre

$$\forall \, (u, v) \in V \times V : \quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi^*(v) \rangle .$$

Ezt a φ^* transzformációt φ adjungáltjának nevezzük. φ-t önadjungáltnak mondjuk, ha megegyezik az adjungáltjával, azaz ha

$$\forall \, (u, v) \in V \times V : \quad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle .$$

Egy lineáris transzformációnak és az adjungáltjának ugyanazon <u>ortonormált</u> bázisra vonatkozó mátrixai egymás transzponáltjai, speciálisan <u>egy euklideszi vektortér egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor önadjungált, ha ortonormált bázisra vonatkozóan szimmetrikus mátrix reprezentálja.</u>

<u>0.21. Tétel.</u> Ha φ önadjungált lineáris transzformációja a V euklideszi vektortérnek, akkor az

$$f : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad v \longmapsto f(v) := \frac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

függvény V egységgömbjén felveszi a szélsőértékeit, a szélsőértékhelyek φ-nek sajátvektorai, s így a szélsőértékek sajátértékek.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Jegyezzük meg először, hogy az f függvény <u>nulladfokú homogén</u> abban az értelemben, hogy

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \forall v \in V \setminus \{0\} : \quad f(\lambda v) = f(v).$$

Ez egyszerű számolással ellenőrizhető.

(2) Az f függvény két kvadratikus forma hányadosa, így differenciálható, és speciálisan folytonos. f-nek az $S \subset V$ egységgömbre való leszűkítése is folytonos, s mivel S korlátos és zárt halmaz, ezen f felveszi a szélsőértékeit.

(3) Legyen $e \in S$ minimumhelye S-nek, azaz teljesüljön, hogy

$$(*) \qquad \forall a \in S : \quad f(e) \leq f(a).$$

Ekkor „e" $V \setminus \{0\}$ fölött is abszolút minimumhelye f-nek, ugyanis tetszőleges $v \in V \setminus \{0\}$ vektor fölírható $v = \|v\| \frac{1}{\|v\|} v =: \|v\| v^0$ alakban, ahol $v^0 \in S$, s így $(*)$ és a nulladfokú homogenitás alapján

$$f(e) \leq f(v^0) = f(\|v\| v^0) = f(v).$$

(4) Megmutatjuk, hogy <u>„e" sajátvektora φ-nek.</u> Kiválasztva és rögzítve egy $u \in V$ vektort, képezzük ebből a célból a $\gamma : \mathbb{R} \to V$, $t \longmapsto \gamma(t) := e + tu$ paraméterezett görbét és a $h := f \circ \gamma$ valós értékű függvényt, melynek értelmezési tartománya egy, a 0-t tartalmazó I nyílt intervallum. h differenciálható, mivel differenciálható leképezések kompo-

zíciója. A 0-beli deriváltját kétféleképpen is kiszámítjuk.

(a) A láncszabály alapján

$$h'(0) = (f\circ\gamma)'(0) = f'(\gamma(0))\,\gamma'(0) = f'(e)(u) = 0,$$

ui. a (3)-ban mondottaktól adódóan $f'(e) = 0$ (mint lineáris függvény).

(b) A $h = f\circ\gamma = \dfrac{\langle\varphi\circ\gamma,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}$ definiáló relációból

$$h' = \frac{\langle\varphi\circ\gamma,\gamma\rangle'\langle\gamma,\gamma\rangle - \langle\varphi\circ\gamma,\gamma\rangle\langle\gamma,\gamma\rangle'}{\langle\gamma,\gamma\rangle^2} = \frac{(\langle\varphi\circ\gamma',\gamma\rangle + \langle\varphi\circ\gamma,\gamma'\rangle)\langle\gamma,\gamma\rangle - 2\langle\varphi\circ\gamma,\gamma\rangle\langle\gamma',\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle^2}$$

(fölhasználva, hogy φ linearitása miatt $(\varphi\circ\gamma)' = (\varphi'\circ\gamma)\circ\gamma' = \varphi\circ\gamma'$; ld. <u>0.9</u>(2)). Innen $\gamma(0) = e$, $\gamma'(0) = u$, $\langle\gamma(0),\gamma(0)\rangle = \langle e,e\rangle = 1$ figyelembevételével, és a (!) jellel jelölt lépésben alkalmazva φ önadjungáltságát, azt kapjuk, hogy

$$h'(0) = \langle\varphi(u),e\rangle + \langle\varphi(e),u\rangle - 2\langle\varphi(e),e\rangle\langle e,u\rangle$$
$$\overset{(!)}{=} 2\langle\varphi(e),u\rangle - 2\langle\langle\varphi(e),e\rangle e,u\rangle = 2\langle\varphi(e) - \langle\varphi(e),e\rangle e, u\rangle.$$

Így módon $h'(0) = 0$ arra vezet, hogy minden $u\in V$ vektor esetén $\langle\varphi(e) - \langle\varphi(e),e\rangle e, u\rangle = 0$, amiből a skaláris szorzat definitsége és u tetszőlegessége folytán $\varphi(e) = \langle\varphi(e),e\rangle e$ következik. Ez azt jelenti, hogy „e" sajátvektora φ-nek, a megfelelő sajátérték $\langle\varphi(e),e\rangle = f(e)$.

(5) Ha „e" maximumhelye f-nek, az okoskodás analóg. □

<u>0.22. A spektráltétel</u> A most levezetett tétel birtokában egyszerűen igazolható a következő alapvető eredmény:

> <u>Egy euklideszi vektortér minden önadjungált transzformációja diagonalizálható: megadható a vektortérnek olyan ortonormált bázisa, amelyet a transzformáció sajátvektorai alkotnak.</u>

I. GÖRBEELMÉLET

<u>Megállapodás.</u> Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, s tegyük föl, hogy $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés. A <u>0.9.(3)</u>-ban mondottaknak megfelelően tetszőleges $t_0 \in I$ esetén <u>az $f'(t_0)$ deriváltat $\mathbb{R}^n$-beli vektornak tekintjük</u>, amely az

$$f'(t_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

határértékként értelmezhető. Ebben az interpretációban f <u>derivált leképezése</u> az

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto f'(t)$$

leképezés.

1. Paraméterezett görbék $\mathbb{R}^n$-ben

<u>Megállapodás.</u> A továbbiakban $\mathbb{R}^n$-ről szólva föltesszük, hogy $n \geqq 2$.

<u>1.1. Lemma.</u> Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, s legyenek $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezések.

(1) Az $\langle f, g \rangle : I \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto \langle f, g \rangle(t) := \langle f(t), g(t) \rangle$ függvény differenciálható, mégpedig

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle .$$

(2) Ha az f leképezés $\|f\| : I \longrightarrow \mathbb{R}, \ t \longmapsto \|f\|(t) := \|f(t)\|$ <u>norma-függvénye</u> konstans, akkor $\langle f, f' \rangle = 0$, s így $f'(t)$ minden $t \in I$ esetén merőleges $f(t)$-re.

(3) Az <u>$n = 3$</u> esetben az $f \times g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto (f \times g)(t) := f(t) \times g(t)$ leképezés differenciálható, a deriváltja

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g' .$$

<u>Bizonyítás.</u> A koordinátafüggvények segítségével $f = (f^1, \dots, f^n)$, ill. $g = (g^1, \dots, g^n)$ írható, s ekkor a derivált leképezések $f' = (f^{1\prime}, \dots, f^{n\prime})$, ill. $g' = (g^{1\prime}, \dots, g^{n\prime})$. Mivel $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f^i g^i$, az elemi analízisből

ismert differenciálási szabályok alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\langle f, g\rangle' = \left(\sum_{i=1}^{n} f^i g^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (f^i g^i)' = \sum_{i=1}^{n} \left(f^{i\prime} g^i + f^i g^{i\prime}\right) = \sum_{i=1}^{n} f^{i\prime} g^i + \sum_{i=1}^{n} f^i g^{i\prime}$$
$$= \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle.$$

Ezzel (1) igazolást nyert. Ha $\|f\| : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konstans függvény, akkor az $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ függvény is konstans, s így $0 = \langle f, f\rangle' \overset{(1)}{=} 2\langle f, f'\rangle$ amivel beláttuk (2)-t. (3) igazolása hasonlóan egyszerű. □

<u>1.2. Definíció.</u> Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem-egypontú intervallum, megengedve azt is, hogy I alulról vagy felülről nem korlátos, speciálisan hogy $I = \mathbb{R}$. I-n értelmezett, <u>$\mathbb{R}^n$-beli paraméterezett görbén</u>, röviden <u>görbén</u>, olyan

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto c(t)$$

leképezést értünk, amely legalább C^3-osztályú. A $t \in I$ „változót" ekkor <u>paraméternek</u>, $c(t)$-t a t paraméterű <u>görbepontnak</u> hívjuk.

<u>1.3. Megjegyzések.</u> (1) Értelmezésünk szerint egy (<u>paraméterezett</u>) <u>görbe</u> egy <u>leképezést</u> jelent, amelyről jó intuitív képet ad egy, a „térben" mozgó tömegpont; a $t \in I$ paramétert ilyenkor „idő-paraméternek" képzeljük. <u>Egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ görbe és a görbepontok $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ halmaza között</u> tehát <u>éles fogalmi különbség van.</u> Számos példa fogja mutatni: különböző $\mathbb{R}^n$-beli görbék rendelkezhetnek közös képhalmazzal.

(2) Ha egy $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ponthalmazhoz megadható olyan $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbe, hogy $c(I) = \Gamma$, akkor azt mondjuk, hogy c egy <u>paraméterezése</u> vagy <u>paraméteres előállítása</u> Γ-nak.

(3) Egy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbe a koordinátafüggvényei segítségével a $c = (c^1, \dots, c^n)$ alakban adható meg, ahol – v.ö. 0.11. (2) – $c^i := e^i \circ c$, $i \in \{1, \dots, n\}$. c legalább C^3-osztályú volta azt jelenti hogy a c^i koordinátafüggvények mindegyike legalább C^3-osztályú.

1.4. Definíció. Legyenek a, b valós számok, $a < b$, s tekintsünk egy
$c = (c^1, \dots, c^n) : \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t))$
parametrizált görbét.

(1) c <u>sebesség-vektormezője</u> a
$$c' : t \in \,]a,b[\, \longmapsto c'(t) = (c^{1\prime}(t), \dots, c^{n\prime}(t)) \in \mathbb{R}^n$$
leképezés, <u>gyorsulás-vektormezője</u> a
$$c'' : t \in \,]a,b[\, \longmapsto c''(t) = (c^{1\prime\prime}(t), \dots, c^{n\prime\prime}(t)) \in \mathbb{R}^n$$
leképezés. A
$$v := \|c'\| : \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto v(t) := \|c'\|(t) = \|c'(t)\|$$
függvényt a görbe <u>pályasebességének</u> nevezzük.

(2) A c görbét <u>regulárisnak</u> mondjuk, ha a sebességvektora sehol sem $\underline{0}$, azaz ha $\forall t \in \,]a,b[: c'(t) \neq \underline{0}$. Ha – speciálisan – minden $t \in \,]a,b[$ esetén $\|c'(t)\| = 1$, s ennélfogva c pályasebessége az 1 értékű konstans függvény, akkor a görbét <u>egységpálya-sebességűnek</u> vagy <u>természetes paraméterezésűnek</u> nevezzük.

(3) Tegyük föl, hogy $c : \,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris görbe! Ekkor tetszőleges $t_0 \in \,]a,b[$ esetén a
$$c(t_0) + \operatorname{span}(c'(t_0)) = \{ c(t_0) + \lambda c'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^n$$
egyenest a görbe <u>t_0-beli érintőegyenesének</u> mondjuk; a
$$T := \frac{1}{\|c'\|} c' = \frac{1}{v} c' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
leképezés a görbe <u>érintő-egységvektormezője</u> ($T = c'$, ha c egységpályasebességű).

(4) A c görbét <u>biregulárisnak</u> nevezzük, ha minden $t \in \,]a,b[$ paraméterre a $c'(t)$ és a $c''(t)$ vektor lineárisan független. Ekkor tetszőleges $t_0 \in \,]a,b[$ esetén
$$c(t_0) + \operatorname{span}(c'(t_0), c''(t_0)) = \{ c(t_0) + \lambda c'(t) + \mu c''(t_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^n$$
kétdimenziós lineáris sokaság, amelyet a görbe t_0-beli <u>simulósíkjának</u> hívunk.

1.5. Példák.

(1) $\mathbb{R}^n$-beli egyenesek paraméterezése. $\mathbb{R}^n$-beli egyenesen egydimenziós $\mathbb{R}^n$-beli lineáris sokaságot, azaz

$$l = a + \mathrm{span}(v) = \{a + tv \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\} \quad ; \quad v \neq \underline{0}$$

alakú ponthalmazt értünk (ld. Lin. alg.). A tekintett l egyenesnek egy paraméterezése a

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto \gamma(t) := a + tv$$

leképezés. Ezt a paraméterezést affin paraméterezésnek hívjuk, tekintettel arra, hogy egy lineáris leképezés és egy transzláció kompozíciója. Maga c parametrizált görbe, amelyet parametrizált egyenesként is említünk. A c görbe sima, s mivel

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad c'(t) = v \neq \underline{0} ,$$

következik, hogy c reguláris. Tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén c t_0-beli érintőegyenese maga az adott l egyenes, c érintő-egységvektormezője a

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto T(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|}\, c'(t) = \frac{1}{\|v\|}\, v$$

konstans leképezés. c gyorsulás-vektormezője a $t \in \mathbb{R} \mapsto c''(t) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$ zérus leképezés.

(2) Megadjuk az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathrm{span}((1,0,0))$ „x-tengelyének" háromféle paraméterezését.

(i) $c_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c_1(t) := (t, 0, 0)$

c_1 reguláris, sőt egységpályasebességű parametrizált görbe:

$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad c_1'(t) = (1, 0, 0) =: e_1 .$

(ii) $c_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c_2(t) := (t^3, 0, 0)$

c_2 szintén $\mathrm{span}(e_1)$ paraméterezése, hiszen

$$c_2(\mathbb{R}) = \{(\tau^3, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(t, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}(e_1).$$

$c_2'(t) = (3t^2, 0, 0) \quad (t \in \mathbb{R})$, így $c_2'(0) = (0, 0, 0)$; ez azt jelenti, hogy c_2 nem reguláris.

(iii) $c_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c_3(t) := (t^3+t, 0, 0)$

$c_3(\mathbb{R}) = \operatorname{span}(e_1)$ most is fennáll, a c_3 ismét *reguláris* parametrizált görbe: tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$c_3'(t) = (3t^2+1, 0, 0) \neq \underline{0}$.

(3) Legyen $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^3-osztályú függvény. Ekkor a

$$c : t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (t, h(t)) \in \mathbb{R}^2$$

leképezés reguláris $\mathbb{R}^2$-beli parametrizált görbe, hiszen

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad c'(t) = (1, h'(t)) \neq (0,0).$$

c értékkészlete éppen a h függvény grafikonja:

$$c(\mathbb{R}) := \{ c(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \} = \{ (t, h(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \} =: \mathrm{graf}(h).$$

c érintőegyenese t_0-ban ($t_0 \in \mathbb{R}$) a $(t_0, h(t_0)) + \operatorname{span}((1, h'(t_0)))$ egyenes.
Ennek egyenlete $h'(t_0) \neq 0$ esetén

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - h(t_0)}{h'(t_0)},$$

ami átírható a jól ismert

$$\underline{y - h(t_0) = h'(t)(x - t_0)}$$

alakba.

(4) *Parametrizált kör.* Legyen $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ rögzített pont, ϱ rögzített pozitív valós szám. A

$$c :]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto c(t) := (\alpha + \varrho \cos t, \beta + \varrho \sin t)$$

leképezés reguláris parametrizált görbe, hiszen c C^∞-osztályú és

$$\forall t \in]0, 2\pi[: \quad c'(t) = (-\varrho \sin t, \varrho \cos t) \neq (0,0).$$

Mivel $\| c'(t) \| = \sqrt{\varrho^2 \sin^2 t + \varrho^2 \cos^2 t} = \varrho \quad (t \in]0, 2\pi[)$, c pálya-sebessége a $\{\varrho\}$ értékkészletű konstans függvény. c érintő-egységvektormezője a

$$T : t \in]0, 2\pi[\longmapsto T(t) := \frac{1}{\| c'(t) \|} c'(t) = (-\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2$$

leképezés. c gyorsulási-vektormezője

$$c'' : t \in]0, 2\pi[\longmapsto c''(t) = (-\varrho \cos t, -\varrho \sin t) \in \mathbb{R}^2.$$

c értékkészletét az $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$ egyenletű körvonal pontjai alkotják, a $(\alpha+\varrho, \beta)$ pont kivételével.

(5) Hengeres csavarvonal. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, s tekintsük a

$$c: t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t) \in \mathbb{R}^3$$

leképezést. Ez sima, hiszen koordinátafüggvényei, a

$$c^1: t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \cos t \in \mathbb{R}, \quad c^2: t \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha \sin t \in \mathbb{R}, \quad c^3: t \in \mathbb{R} \longmapsto \beta t \in \mathbb{R}$$

függvények simák. Mivel

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad c'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t, \beta) \neq (0,0,0),$$

következik, hogy c reguláris parametrizált görbe. Mivel

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad (c^1(t))^2 + (c^2(t))^2 = (\alpha)^2,$$

a görbepontok illeszkednek az $\mathbb{R}^3$ tér $x^2+y^2=(\alpha)^2$ egyenletű ponthalmazára, ami $\mathrm{span}(e_3) = \mathrm{span}((0,0,1))$ tengelyű, α sugarú egyenes körhenger. Erre is tekintettel, a c parametrizált görbét hengeres csavarvonalnak nevezzük, de röviden gyakran csak csavarvonalnak mondjuk. c pályasebessége a

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \|c'\|(t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \in \mathbb{R}$$

konstans függvény, így az érintő-egységvektormező a

$$T: t \in \mathbb{R} \longmapsto T(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\alpha \sin t, \alpha \cos t, \beta t) \in \mathbb{R}^3$$

leképezés.

1.6. Megjegyzés. A parametrizált görbéknél az intervallumok végpontjaiban esetleg fölmerülő problémák tisztázása érdekében emlékeztetünk arra, hogy például egy $c: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(a \neq b)$ görbe esetén c differenciálhatósága 0.11. (4) értelmében úgy értendő, hogy van olyan $[a,b]$-t tartalmazó $]\bar{a}, \bar{b}[$ nyílt intervallum és $\bar{c}:]\bar{a}, \bar{b}[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, hogy $\bar{c} \restriction [a,b] = c$. Ekkor a $c'(a) := \bar{c}'(a)$, $c'(b) := \bar{c}'(b)$ további megállapodással élhetünk. Bár így $c'(a)$ és $c'(b)$ függ c kiterjesztésének módjától, ez nincs hatással a kiépítésre kerülő elméletre.

<u>1.7. Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy a $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és a $\tilde{c}: \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe <u>ekvivalens</u>, ha van olyan $\theta: \tilde{I} \longrightarrow I$ C^k-diffeomorfizmus, hogy $\tilde{c} = c \circ \theta$. Ilyenkor a θ függvényt <u>paramétertranszformáció</u>nak hívjuk, a $\tilde{c}$ görbét pedig a c görbe θ általi <u>átparaméterezettje</u>ként említjük. <u>Pozitív</u>, ill. <u>negatív átparaméterezésről</u> szólunk aszerint, amint tetszőleges $t \in \tilde{I}$ esetén $\theta'(t) > 0$, ill. $\theta'(t) < 0$.

<u>1.8. Megjegyzés.</u> A parametrizált görbék halmazában értelmezett „ekvivalencia" könnyen átgondolható módon ekvivalenciareláció; az ekvivalenciaosztályokat szokás <u>geometriai görbék</u>nek is nevezni. Egy parametrizált görbével kapcsolatos fogalom, tulajdonság nak akkor tekinthető „geometriai"-nak, ha ezzel a görbe által reprezentált ekvivalenciaosztály valamennyi tagja rendelkezik. Másként fogalmazva: <u>a parametrizált görbék geometriai tulajdonságai a paramétertranszformációval szemben invariáns tulajdonságok.</u>

<u>1.9. Lemma.</u> Tekintsük a $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe $\theta: \tilde{I} \longrightarrow I$ diffeomorfizmus általi $\tilde{c} = c \circ \theta$ átparaméterezettjét. Az átparaméterezés során a pályasebesség, ill. az érintő-egységvektormező a

$$\tilde{\nu} = |\theta'|(\nu \circ \theta), \text{ ill. a } \tilde{T} = \varepsilon(T \circ \theta)$$

formula szerint változik, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint az átparaméterezés pozitív, ill. negatív.

<u>Bizonyítás.</u> Kiindulva a $\tilde{c} = c \circ \theta$ relációból, a láncszabály alapján

$$\tilde{c}' = (c' \circ \theta)\,\theta'\,;$$

innen

$$\tilde{\nu} := \|\tilde{c}'\| = \|(c' \circ \theta)\theta'\| = |\theta'|\,\|c' \circ \theta\| = |\theta'|\,\|c'\| \circ \theta = |\theta'|(\nu \circ \theta).$$

Így

$$\tilde{T} := \frac{1}{\tilde{\nu}}\tilde{c}' = \frac{1}{|\theta'|(\nu \circ \theta)}\theta'(c' \circ \theta) = \frac{\theta'}{|\theta'|}\left(\left(\frac{1}{\nu}c'\right) \circ \theta\right) = \varepsilon\,(T \circ \theta). \qquad \square$$

<u>1.10. Állítás.</u> A parametrizált görbék regularitása és biregularitása geometriai tulajdonság, érintőegyenese és simulósíkja geometriai fogalom.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^n$ reguláris parametrizált görbe, s tekintsük ennek egy $\tilde{c} := c \circ \theta : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ átparaméterezettjét, ahol $\theta : \tilde{I} \to I$ diffeomorfizmus. Az előző lemma szerint c és $\tilde{c}$ pályasebességének kapcsolatát a $\tilde{v} = |\theta'|(v \circ \theta)$ reláció adja. θ-nak létezik $\theta^{-1} : I \to \tilde{I}$ C^k-osztályú inverze. A $\theta \circ \theta^{-1} = 1_I$ relációból a láncszabály alkalmazásával $(\theta' \circ \theta^{-1})(\theta^{-1})' = 1_{\mathbb{R}}$ adódik, amiből következik, hogy θ' sehol sem nulla. c regularitása ekvivalens azzal, hogy a pályasebessége sehol sem tűnik el, így a $\tilde{v} = |\theta'|(v \circ \theta)$ reláció jobboldalán álló függvény sehol sem zérus. Ezzel beláttuk, hogy $\tilde{c}$ pályasebessége sehol sem tűnik el, $\tilde{c}$ tehát szintén reguláris: a regularitás az átparaméterezés során megőrződik.

$\tilde{c}$ érintőegyenese $t \in \tilde{I}$-ban $:= \tilde{c}(t) + \mathrm{span}(\tilde{c}'(t)) = \tilde{c}(t) + \mathrm{span}(\theta'(t)c'(\theta(t)))$
$= \tilde{c}(t) + \mathrm{span}(c'(\theta(t))) =$ c érintőegyenese $\theta(t) \in I$-ben

- érintőegyenes átparaméterezés után is érintőegyenes marad.

A többi észrevétel igazolása hasonlóan egyszerű. □

1.11. Definíció. Egy $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe ívhosszán a pályasebessége $[a,b]$ fölötti integrálját, azaz az

$$L(c) := \int_a^b \|c'\|$$

valós számot értjük. A

$$s : [a,b] \to [0, L(c)],\quad t \mapsto s(t) := \int_a^t \|c'\|$$

függvényt az ívhosszfüggvénynek nevezzük.

1.12. Állítás. Ekvivalens parametrizált görbék ívhossza egyenlő.

Bizonyítás. Tekintsük a $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét s ennek $\tilde{c} := c \circ \theta : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^n$ átparaméterezettjét. Az előző bizonyítás során láttuk, hogy θ' sehol sem tűnik el, így θ' vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív.

1. eset: θ' mindenütt pozitív. Ekkor θ szigorúan monoton növekvő, $\theta(\bar{a}) = a$, $\theta(\bar{b}) = b$, és 1.9.-ből $\tilde{v} = \theta'(v \circ \theta)$. Így $\tilde{c}$ ívhossza

$$L(\bar c) := \int_{\bar a}^{\bar b} \tilde v = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} (v\circ\theta)\,\theta' \overset{(*)}{=} \int_a^b v =: L(c),$$

a (*)-gal jelölt lépésben a helyettesítéssel való integrálás tételét alkalmazva.

<u>2. eset: θ' mindenütt negatív.</u> Most θ szigorúan monoton növekvő, s ezért $\theta(\bar a) = b$, $\theta(\bar b) = a$. Így

$$L(\bar c) = \int_{\bar a}^{\bar b} \tilde v \overset{1.9.}{=} -\int_{\bar a}^{\bar b} (v\circ\theta)\,\theta' = -\int_{\theta^{-1}(b)}^{\theta^{-1}(a)} (v\circ\theta)\,\theta' = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} (v\circ\theta)\,\theta' = \int_a^b v = L(c). \quad \square$$

<u>1.13. Állítás.</u> <u>Minden reguláris paraméterezett görbének létezik egységpályasebességű átparaméterezettje</u>: ha $c:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris görbe, amelynek ívhosszfüggvénye $\sigma:[a,b]\longrightarrow[0,L(c)]$, akkor

$$\boxed{\bar c := c\circ\sigma^{-1}: [0,L(c)]\longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

egységpályasebességű, pozitív átparaméterezettje c-nek.

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsük a $v := \|c'\|$ pályasebességet. A

$$\sigma:[a,b]\longrightarrow[0,L(c)],\quad t\longmapsto \sigma(t) := \int_a^t v$$

ívhosszfüggvény v folytonossága miatt differenciálható, a derivált-függvénye $\sigma' = v$. c regularitása folytán így σ' mindenütt pozitív, következésképpen szigorúan monoton növekvő, ami biztosítja a σ^{-1} inverz függvény létezését. σ^{-1} szintén differenciálható, a deriváltja $\sigma^{-1\,\prime} = \frac{1}{\sigma'\circ\sigma^{-1}} = \frac{1}{v\circ\sigma^{-1}}$ mindenütt pozitív. Létezik tehát a $\bar c := c\circ\sigma^{-1}$ átparaméterezett, s átparaméterezés pozitív. $\bar c$ egységpályasebességű, ugyanis

$$\forall\, t\in[0,L(c)]:\quad \|\bar c'(t)\| = \|c'(\sigma^{-1}(t))\,(\sigma^{-1})'(t)\| = \left\|c'(\sigma^{-1}(t))\,\frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(t))}\right\| =$$

$$= \frac{1}{v(\sigma^{-1}(t))}\, v(\sigma^{-1}(t)) = 1. \quad \square$$

<u>1.14. Megjegyzések.</u> (1) Amennyiben a $c:[0,a]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ ($a\in\mathbb{R}^*_+$) paraméterezett görbe egységpályasebességű, úgy ívhosszfüggvénye a

$$\sigma:\ t\in[0,a]\longmapsto \sigma(t) := \int_0^t 1 = t \in [0,L(c)]$$

függvény. Ilyenkor tehát a t paraméter geometriai jelentéssel bír: megadja a $c(0)$ és a $c(t)$ pont közötti görbeszakasz ívhosszát. Erre

~~tekintettel az egységpályasebességű vagy természetes paraméterezésű görbéket~~ ívhossz-paraméterezésűeknek is mondjuk.

(2) Egyszerűen adódik, hogy ha két egységpályasebességű görbe ekvivalens, akkor közöttük a paramétertranszformáció $t \mapsto \pm t + t_0$ alakú, s megfordítva: az ilyen alakú paramétertranszformációk 1.9.-ből kiolvashatóan megőrzik a pályasebességet. Mivel ilyen paramétertranszformációval mindig elérhető, hogy a vizsgált görbe értelmezési tartomány tartalmazza a 0-t, ezt – szükség esetén – az általánosság sérelme nélkül föltehetjük.

1.15. Példák. (1) Tekintsük a

$$c : t \in [0, 2\pi] \mapsto c(t) := (r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2$$

$r \ (\in \mathbb{R}^+_+)$ sugarú parametrizált körvonalat. Ekkor

$$\forall t \in [0, 2\pi] : \ c'(t) = (-r\sin t, r\cos t), \quad v(t) = \|c'(t)\| = r,$$

$$\sigma(t) = \int_0^t r = rt .$$

σ inverze a

$$\sigma^{-1} : [0, 2r\pi] \longrightarrow [0, 2\pi], \quad t \mapsto \sigma^{-1}(t) = \frac{t}{r}$$

függvény, így c egységpályasebességű átparaméterezettje:

$$\tilde{c} : [0, 2r\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \tilde{c}(t) = c(\sigma^{-1}(t)) = c\left(\frac{t}{r}\right) = \left(r\cos\frac{t}{r}, r\sin\frac{t}{r}\right).$$

$\tilde{c}$ érintő-egységvektormezője

$$\tilde{T} : t \in [0, 2r\pi] \mapsto \tilde{T}(t) = \tilde{c}'(t) = \left(-\sin\frac{t}{r}, \cos\frac{t}{r}\right).$$

Vegyük észre, hogy ennek „változási sebessége" mindenütt ugyanakkora:

$$\forall t \in [0, 2r\pi] : \ \|\tilde{T}'(t)\| = \left\|\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{t}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{t}{r}\right)\right\| = \frac{1}{r} .$$

(2) Legyen adva az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ egyenletű ellipszis! Ennek egy paraméterezése a

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto c(t) := (2\cos t, \sin t)$$

leképezés. Tetszőleges $t \in [0, 2\pi]$-re $c'(t) = (-2\sin t, \cos t)$, így a pályasebesség a $v : t \in [0, 2\pi] \mapsto v(t) := \|c'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{4 - 3\cos^2 t}$ függvény, amelynek nincs elemi függvényként előállítható primitív függvénye.

A természetes paraméterre való áttérés így ebben az esetben gyakorlatilag nem valósítható meg.

(3) Tekintsük az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabolát! Ennek egy paraméterezése a

$$c : t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := \left(t, \frac{t^2}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

leképezés. Most

$$\forall\, t \in \mathbb{R}: \quad c'(t) = (1, t), \quad v(t) = \sqrt{1+t^2}, \quad \sigma(t) := \int_0^t \sqrt{1+\tau^2}\, d\tau = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$$

A következő lépés a természetes paraméter bevezetéséhez a σ^{-1} inverz függvény meghatározása, ez azonban jelen esetben szintén nem vihető keresztül explicit módon.

2. Görbület, torzió. A Frenet-formulák

2.1. Definíció. Egy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált görbe görbületfüggvényén a

$$\boxed{\varkappa := \frac{1}{\|c'\|} \, \|T'\| = \frac{1}{v} \, \|T'\|}$$

függvényt értjük $\left(T := \frac{1}{\|c'\|} c' \right)$; tetszőleges $t \in I$ esetén a $\varkappa(t)$ függvényértéket c t-beli görbületének mondjuk.

Megjegyzés. Ha c egységpályasebességű, akkor a görbületfüggvénye a $\varkappa = \|c''\|$ függvény, hiszen ebben az esetben $\|c'\| = 1$, $T = c'$.

2.2. Lemma. Ha $\tilde{c} = c \circ \theta$ átparaméterezettje a c reguláris görbének, akkor $\tilde{c}$ görbületfüggvénye $\tilde{\varkappa} = \varkappa \circ \theta$, következésképpen a görbületfüggvény paramétertranszformációval szemben invariáns.

Bizonyítás. $\tilde{\varkappa} := \frac{1}{\tilde{v}} \|\tilde{T}'\| \overset{1.9.}{=} \frac{1}{|\theta'|(v \circ \theta)} \|\varepsilon (T \circ \theta)'\| = \frac{|\theta'|}{|\theta'|(v \circ \theta)} \|T' \circ \theta\|$

$= \left(\frac{1}{v} \|T'\|\right) \circ \theta = \varkappa \circ \theta.$ □

2.3. Állítás. Egy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált görbe görbületfüggvénye kiszámítható a

$$\boxed{\varkappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}}$$

formula alapján.

<u>Bizonyítás.</u> A $T := \frac{1}{\nu} c'$ relációból $c' = \nu T$, innen $c'' = \nu' T + \nu T'$.

Így

$$\|c' \times c''\|^2 = \|\nu^2 (T \times T')\|^2 = \nu^4 \|T \times T'\|^2 \overset{(*)}{=} \nu^4 \left(\|T\|^2 \|T'\|^2 - \langle T, T' \rangle^2 \right)$$
$$\overset{1.1.(2)}{=} \nu^4 \|T\|^2 \|T'\|^2 = \nu^4 \|T'\|^2 = \nu^6 \left\| \frac{1}{\nu} T' \right\|^2 = \nu^6 \varkappa^2 ,$$

amiből a kívánt formulát kapjuk. A $(*)$-gal jelölt lépésben a Lagrange-azonosságot használtuk fel. □

<u>2.4. Állítás</u> (<u>a paraméterezett egyenesek jellemzése</u>). Egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű paraméterezett görbére a következő feltételek ekvivalensek:

<u>(1) $\varkappa = 0$; (2) $c'' = 0$; (3) c $\mathbb{R}^3$-beli egyenes affin paraméterezése.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Mivel c egységpályasebességű, $\varkappa = \|c''\|$. Így (1) és (2) ekvivalenciája evidens.

<u>(2) $\Rightarrow$ (3)</u> $c'' = 0$ folytán a $c': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés konstans, s ezért létezik olyan $e \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, hogy

$\forall\, t \in \mathbb{R} : c'(t) = e \implies \forall\, t \in \mathbb{R} : c(t) = a + te$ ($a \in \mathbb{R}^3$ tetszőlegesen rögzített).

Ez azt jelenti, hogy c egy $\mathbb{R}^3$-beli egyenes affin paraméterezése.

<u>(3) $\Rightarrow$ (2)</u> Most a feltétel értelmében tetszőleges $t \in \mathbb{R}$-re $c(t) = a + te$, ahol $a, e \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektorok, és c természetes paraméterezése miatt $\|e\| = 1$. Így kétszeri deriválás után azt kapjuk, hogy $c'' = 0$. □

<u>2.5. Állítás</u> (<u>a biregularitás jellemzése</u>). Egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe pontosan akkor bireguláris, ha reguláris és a görbületfüggvénye sehol sem tűnik el (s ennélfogva mindenütt pozitív).

<u>Bizonyítás.</u> (1) Ha c <u>bireguláris</u>, akkor automatikusan reguláris. Mivel tetszőleges $t \in I$ esetén $c'(t)$ és $c''(t)$ lineárisan független,

$$\forall\, t \in I : c'(t) \times c''(t) \neq \underline{0} \implies \forall\, t \in I : \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \overset{2.3.}{=} \varkappa(t) > 0 .$$

(2) Megfordítva, ha c reguláris és a $\varkappa$ görbületfüggvény mindenütt pozitív, akkor 2.3. alapján

$\forall t \in I: \quad \|c'(t) \times c''(t)\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall t \in I: \quad c'(t) \times c''(t) \neq \underline{0} \quad \Longrightarrow$

$\forall t \in I: \ (c'(t), c''(t))$ lineárisan független $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ c bireguláris. $\square$

<u>2.6. Definíció.</u> Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^3$ <u>bireguláris</u> parametrizált görbe. Ekkor azt mondjuk, hogy

(1) $F := \dfrac{1}{\|T'\|} T' = \dfrac{1}{\|c'\| \varkappa} T' = \dfrac{1}{v \varkappa} T'$ c <u>fönormális vektormezője</u>;

(2) $B := T \times F$ c <u>binormális vektormezője</u>;

(3) $\tau := -\dfrac{1}{\|c'\|} \langle B', F \rangle = -\dfrac{1}{v} \langle B', F \rangle$ c <u>torziófüggvénye</u>;

(4) (T, F, B) c <u>Frenet-féle háromélmezője</u>;

(5) $(\varkappa, \tau, T, F, B)$ c <u>Frenet-apparátusa</u>.

<u>2.7. Tétel.</u> Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe Frenet-apparátusával kapcsolatban érvényesek a következők:

(1) A T, F, B vektormezők <u>léteznek</u>, mindegyikük <u>egységvektor-mező</u> ($\|T\| = \|F\| = \|B\| = 1$) és <u>páronként ortogonálisak</u> ($\langle T, F \rangle = \langle F, B \rangle = \langle B, T \rangle = 0$), így tetszőleges $t \in I$ esetén $(T(t), F(t), B(t))$ ortonormált bázisa $\mathbb{R}^3$-nak.

(2) Ha $X : I \to \mathbb{R}^3$ egy leképezés, akkor X előállítható az

$$X = \langle X, T \rangle T + \langle X, F \rangle F + \langle X, B \rangle B$$

alakban.

(3) T, F és B deriváltja a Frenet-apparátus segítségével a

$$\boxed{\begin{aligned} T' &= \qquad\quad v\varkappa F \\ F' &= -v\varkappa T \qquad\quad + v\tau B \\ B' &= \qquad\quad -v\tau F \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(F1) \\ &(F2) \\ &(F3) \end{aligned}$$

formulák szerint fejezhető ki. Szimbolikus mátrix-alakban:

$$\begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v\varkappa & 0 \\ -v\varkappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}$$

($v := \|c'\|$ a pályasebesség).

<u>Bizonyítás.</u> (1) T létezését a biregularitásból adódó regularitás biztosítja. Ugyancsak a biregularitás folytán <u>2.5.</u> értelmében $\varkappa$ sehol sem zérus, így $F := \frac{1}{\|T'\|} T' = \frac{1}{v\varkappa} T'$ szintén létezik, s ezáltal $B := T \times F$ létezése is biztosítva van. $\|T\| = \|F\| = 1$ teljesülése kiolvasható a konstrukcióból.

A Lagrange-azonosság alkalmazásával

$$\forall t \in I: \quad \|B(t)\|^2 = \|T(t) \times F(t)\|^2 = \|T(t)\|^2 \|F(t)\|^2 - \langle T(t), F(t)\rangle^2 = 1 - \langle T(t), F(t)\rangle^2$$

és $\langle T(t), F(t)\rangle = \frac{1}{v(t)\varkappa(t)} \langle T(t), T'(t)\rangle \overset{1.1.(2)}{=} 0$, tehát $\|B\| = 1$ is fennáll.

A vektoriális szorzat merőleges a tényezőire, ezért $\langle T, B\rangle = \langle F, B\rangle = 0$.

Összegezve a tett észrevételeket, megállapíthatjuk:

<u>$\forall t \in I: \quad (T(t), F(t), B(t))$ ortonormált bázisa $\mathbb{R}^3$-nak.</u>

(2) Felhasználva a most nyert eredményt, s alkalmazva a Fourier-előállítást (Lin. alg.) tetszőleges $t \in I$ esetén

$$X(t) = \langle X(t), T(t)\rangle T(t) + \langle X(t), F(t)\rangle F(t) + \langle X(t), B(t)\rangle B(t) =$$
$$= \left(\langle X, T\rangle T + \langle X, F\rangle F + \langle X, B\rangle B\right)(t)$$

írható, ami igazolja a tétel második részét.

(3) (F1) helyessége evidens: ez csupán F definíciójának átírása.

(2) alapján

$$B' = \langle B', T\rangle T + \langle B', F\rangle F + \langle B', B\rangle B.$$

És <u>1.1.</u>(2) miatt $\langle B', B\rangle = 0$. A $\langle B, T\rangle = 0$ relációból

$$0 = \langle B, T\rangle' \overset{1.1.(1)}{=} \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle \overset{(F1)}{=} \langle B', T\rangle + v\varkappa \langle B, F\rangle = \langle B', T\rangle,$$

következésképpen

$$B' = \langle B', F\rangle F \overset{2.6.(3)}{=:} -v\tau F.$$

Ezzel (F3) igazolást nyert. Hasonló módon,

$$F' = \langle F', T\rangle T + \langle F', F\rangle F + \langle F', B\rangle B \overset{1.1(2)}{=} \langle F', T\rangle T + \langle F', B\rangle B.$$

Az $\langle F, T\rangle = 0$, ill. az $\langle F, B\rangle = 0$ relációból deriválással kapjuk, hogy

$$0 = \langle F, T\rangle' = \langle F', T\rangle + \langle F, T'\rangle \overset{(F1)}{=} \langle F', T\rangle + v\varkappa\langle F, F\rangle \Rightarrow \langle F', T\rangle = -v\varkappa,$$
$$0 = \langle F, B\rangle' = \langle F', B\rangle + \langle F, B'\rangle \overset{(F3)}{=} \langle F', B\rangle - v\tau\langle F, F\rangle \Rightarrow \langle F', B\rangle = v\tau.$$

Ezek alapján $F' = -v\varkappa T + v\tau B$, amivel (F2)-t is igazoltuk. ∎

Megjegyzések. (1) Az (F1)–(F3) relációkat a Frenet-formuláknak vagy a görbeelmélet derivációs formuláinak nevezzük. Ezek a görbeelmélet „alapegyenletei", amelyeket egymástól függetlenül fedezett fel két francia matematikus, J.-F. Frenet és J.A. Serret 1847-ben, ill. 1851-ben.

(2) Természetes paraméterezés esetén a Frenet-formulák az egyszerűbb

$$T' = \varkappa F, \quad F' = -\varkappa T + \tau B, \quad B' = -\tau F \quad \text{, ill.} \quad \begin{pmatrix} T' \\ F' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}$$

alakot öltik.

2.8. Állítás. Ha c és $\tilde{c} = c \circ \theta$ ekvivalens biregulráis paraméterezett görbék, akkor Frenet-apparátusaik kapcsolatát a

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa \circ \theta, \quad \tilde{\tau} = \tau \circ \theta, \quad \tilde{T} = \varepsilon(T \circ \theta), \quad \tilde{F} = F \circ \theta, \quad \tilde{B} = \varepsilon(B \circ \theta); \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{ha } \theta' > 0, \\ -1, & \text{ha } \theta' < 0 \end{cases}$$

relációk adják, következésképpen a Frenet-apparátus tagjai geometriai adatai a paraméterezett görbéknek.

Bizonyítás. 1.9.-ben, ill. 2.2.-ben már levezettük, hogy miként változik az érintő-egységvektormező, ill. a görbületfüggvény paramétertranszformáció során. A többi reláció igazolása hasonlóan egyszerű. □

2.9. Lemma. Tetszőleges $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris paraméterezett görbe gyorsulásvektormezője felbontható egy, az érintő menti, az ún. pályamenti, s egy, a főnormális menti, az ún. centripetális gyorsulás összegére a

$$c'' = v'T + v^2 \varkappa F$$

formula szerint, ahol $v = \|c'\|$ a pályasebesség.

Bizonyítás. T definíciójából $c' = vT$, innen deriválással

$$c'' = v'T + vT' \overset{(F1)}{=} v'T + v^2\varkappa F.$$ □

2.10. Állítás. Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris paraméterezett görbe binormális vektormezője, ill. torziófüggvénye kiszámítható a

$$B = \frac{1}{\|c' \times c''\|} c' \times c'', \quad \text{ill. a} \quad \tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$$

formula alapján. Természetes paraméterezés esetén $\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c''\|^2} = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\varkappa^2}$.

(1) $c'\times c'' \overset{2.9.}{=} \nu T \times (\nu' T + \nu^2\kappa F) = \nu^3\kappa\, T\times F = \nu^3\kappa B$; innen

$$B = \frac{1}{\nu^3\kappa}\, c'\times c'' \overset{2.3.}{=} \frac{1}{\|c'\times c''\|}\, c'\times c''.$$

(2) $\langle c'\times c'', c'''\rangle = \langle \nu^3\kappa B, (\nu' T + \nu^2\kappa F)'\rangle \overset{(F1),(F2)}{=} \nu^3\kappa\langle B, \nu'' T + \nu\nu'\kappa F\rangle +$

$$+\ \nu^3\kappa\langle B, (\nu^2\kappa)' F + \nu^2\kappa(\nu\kappa T + \nu\tau B)\rangle \overset{\langle B,T\rangle=\langle B,F\rangle=0}{=} \nu^6\kappa^2\tau$$

$$\overset{2.3.}{=} \|c'\|^6\, \frac{\|c'\times c''\|^2}{\|c'\|^6}\,\tau ,$$

így $\tau = \dfrac{\langle c'\times c'', c'''\rangle}{\|c'\times c''\|^2}$. Természetes paraméterezés esetén a Lagrange-azonosság alkalmazásával $\|c'\times c''\|^2 = \|c'\|^2\|c''\|^2 - \langle c', c''\rangle^2 \overset{1.1.(2)}{=} \|c''\|^2 = \kappa^2$. □

2.11. Állítás. Tegyük föl, hogy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris paraméterezett görbe. (1) c Frenet-apparátusa meghatározható a

$$\boxed{T = \frac{1}{\|c'\|}c', \quad B = \frac{1}{\|c'\times c''\|}\, c'\times c'', \quad F = B\times T \ ; \quad \kappa = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle c'\times c'', c'''\rangle}{\|c'\times c''\|^2}}$$

formulák alapján. – A gyakorlatban a számolásoknál célszerű a

$$\begin{tikzcd}
& c' \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] & & c'' \arrow[rr] \arrow[d] & & c'\times c'' \arrow[r] \arrow[d] & (c'\times c'')\times c' \arrow[d] \\
\nu & & T & c''' \arrow[dr] & & \kappa, B \arrow[dl] & F \\
& & & & \tau & &
\end{tikzcd}$$

sémát követni.

(2) A $t\in I$ paraméterhez tartozó $(T(t), F(t), B(t))$ Frenet-háromél síkjai:

simulósík $:= c(t) + \operatorname{span}(c'(t), c''(t)) = c(t) + \operatorname{span}(T(t), F(t))$,

egyenlete: $\langle (x,y,z) - c(t), c'(t)\times c''(t)\rangle = 0$;

normálsík $:= c(t) + \operatorname{span}(F(t), B(t))$, egyenlete: $\langle (x,y,z) - c(t), c'(t)\rangle = 0$;

rektifikáló sík: $c(t) + \operatorname{span}(B(t), T(t))$, egyenlete: $\langle (x,y,z) - c(t), (c'(t)\times c''(t))\times c'(t)\rangle =$

2.12. Definíció. Egy $\mathbb{R}^3$-beli paraméterezett görbét síkgörbének nevezünk, ha van $\mathbb{R}^3$-nak olyan síkja, amely a görbepontok mindegyikét tartalmazza.

2.13. Állítás. Egy $\mathbb{R}^3$-beli bireguláris paraméterezett görbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha a torziófüggvénye eltűnik.

Bizonyítás. Tekintsük a $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ~~bireguláris~~ görbét. Mivel a vizsgált tulajdonságok átparaméterezési során nem változnak, föltehetjük, hogy c egységpályasebességű. Ekkor

$$T = c', \quad \varkappa = \|c''\|, \quad F = \frac{1}{\varkappa} c'',$$

s így a Frenet-formulák a következő alakot öltik:

$$T' = \varkappa F = c'', \quad F' = -\varkappa T + \tau B, \quad B' = -\tau F.$$

(1) Tegyük föl, hogy c síkgörbe. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{R}^3$ egységvektor és $a \in \mathbb{R}^3$ pont, hogy $\operatorname{Im}(c)$ benne van az $\langle \underline{x} - a, N \rangle = 0$ egyenletű síkban, s így

$$\forall\, t \in I: \quad \langle c(t) - a, N \rangle = 0.$$

Innen kétszeri deriválással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, t \in I: \quad \langle c'(t), N \rangle = 0, \quad \langle c''(t), N \rangle = 0;$$

következésképpen

$$\langle T, N \rangle = \langle F, N \rangle = 0.$$

Másrészt $\langle T, B \rangle = \langle F, B \rangle = 0$ is fennáll, megállapíthatjuk tehát, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén a $B(t)$ vektor is és N is merőleges a $T(t)$ és $F(t)$ által kifeszített síkra. Így vagy $B(t) = N$, vagy pedig $B(t) = -N$ teljesül minden $t \in I$-re, ami azt jelenti, hogy B konstans, s ennélfogva $B' = 0$ – amiből $\tau = 0$ következik.

(2) Tegyük föl, hogy $\tau = 0$. Ekkor (F3) miatt B konstans leképezés, s ezért megadható olyan $N \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, hogy $B(t) = N$, minden $t \in I$-re. Rögzítve egy tetszőleges $t_0 \in I$ pontot, tekintsük az

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(t) := \langle c(t) - c(t_0), N \rangle$$

függvényt. Ez differenciálható, mégpedig

$$\forall\, t \in I: \quad f'(t) = \langle c'(t), N \rangle = \langle T(t), N \rangle = \langle T(t), B(t) \rangle = 0;$$

következésképpen f konstans függvény. Mivel $f(t_0) = 0$, f mindenütt 0-t vesz föl, s így $\forall\, t \in I: \langle c(t) - c(t_0), N \rangle = 0$. Ezzel beláttuk, hogy c síkgörbe. □

2.14. Állítás. Egy $\mathbb{R}^2$-beli természetes paraméterezésű, biregularis görbe akkor és csak akkor rendelkezik pozitív konstans $\varkappa_0$ görbülettel, ha a képe $\frac{1}{\varkappa_0}$ sugarú körre illeszkedik.

Bizonyítás. Jegyezzük meg először, hogy mivel $\mathbb{R}^2$-beli görbéről van szó, 2.13. értelmében a torziófüggvény eltűnik. Így, tekintettel a természetes paraméterezésre is, a Frenet-formulák a

$$(*) \qquad T' = \varkappa F \quad , \quad F' = -\varkappa T$$

relációkra redukálódnak.

(1) Tegyük föl, hogy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (természetes paraméterezésű és) $\varkappa_0 > 0$ értékű, konstans görbületfüggvénnyel rendelkezik. Tekintsük a

$$\gamma := c + \frac{1}{\varkappa_0} F : \; I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

leképezést! Ez konstans, ugyanis $\gamma' = c' + \frac{1}{\varkappa_0} F' = T + \frac{1}{\varkappa_0}(-\varkappa_0 T) = 0$. Létezik ezért olyan $q \in \mathbb{R}^2$ pont, hogy $\gamma(t) = q$ minden $t \in I$-re, azaz

$$\forall\, t \in I: \quad c(t) + \frac{1}{\varkappa_0} F(t) = q .$$

Innen azt kapjuk

$$\forall\, t \in I: \quad \|c(t) - q\| = \left\|\frac{1}{\varkappa_0} F(t)\right\| = \frac{1}{\varkappa_0} ,$$

ami azt jelenti, hogy c pontjai a q középpontú, $\frac{1}{\varkappa_0}$ sugarú körvonalra illeszkednek.

(2) Megfordítva, legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ olyan egységpályasebességű görbe, amelyhez létezik egy $q \in \mathbb{R}^2$ pont és egy $\varkappa_0 \in \mathbb{R}^*_+$ valós szám úgy, hogy

$$(**) \qquad \forall\, t \in I: \quad \|c(t) - q\| = \frac{1}{\varkappa_0} .$$

Ez ekvivalens azzal, hogy $\langle c(t) - q, c(t) - q \rangle = \frac{1}{\varkappa_0^2}$ minden $t \in I$-re. Innen differenciálással $0 = \langle c'(t), c(t) - q \rangle \overset{(*)}{=} \varkappa(t) \langle T(t), c(t) - q \rangle$ $(t \in I)$ adódik. A biregularitás miatt $\varkappa$ sehol sem tűnik el, így

$$\forall\, t \in I: \quad \langle T(t), c(t) - q \rangle = 0 .$$

Másrészt $\langle T(t), F(t) \rangle = 0$ is fennáll minden t-re, következésképpen $\forall\, t \in I$: $c(t) - q$ skalárszorosa $F(t)$-nek. $(**)$ és $\|F\| =$

folytán a skalárszorzó csakis $\frac{1}{x_0}$ vagy $-\frac{1}{x_0}$ lehet. Tehát:

$$\forall t \in I: \quad c(t) - q = \frac{1}{x_0} F(t) \quad \text{vagy} \quad c(t) - q = -\frac{1}{x_0} F(t).$$

Újbóli differenciálással innen

$$\forall t \in I: \quad T(t) = -\frac{1}{x_0} \varkappa(t) T(t) \quad \text{vagy} \quad T(t) = \frac{1}{x_0} \varkappa(t) T(t).$$

Mivel $\varkappa$ negatív értéket nem vehet föl, az első alternatíva nem teljesülhet. A második relációból azt kapjuk, hogy

$$\forall t \in I: \frac{1}{x_0} \varkappa(t) = 1,$$

következésképpen <u>$\varkappa$ a x_0 értékű konstans függvény.</u> □

3. A görbeelmélet alaptételei

<u>3.1. Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy a $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és a $\tilde{c}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált görbék <u>kongruensek</u>, ha van olyan $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ izometria, hogy $\tilde{c} = f \circ c$. Amennyiben – speciálisan – az f izometria transzláció, úgy <u>parallelgörbékről</u> szólunk.

<u>3.2. Megjegyzések.</u> (1) Mivel $\mathbb{R}^3$ izometriacsoportja egybeesik $\mathbb{R}^3$ euklideszi mozgásainak csoportjával, $IS(\mathbb{R}^3) = Euc(\mathbb{R}^3)$ (ld. <u>Geometria</u>), a definícióban izometria helyett euklideszi mozgásról is szólhatunk volna.

(2) Egy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett görbék halmazában a kongruencia ekvivalenciareláció. Azt mondjuk, hogy azok a fogalmak és tulajdonságok tartoznak egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe <u>euklideszi geometriájához</u>, amelyek paramétertranszformációval és izometriával szemben egyaránt invariánsak (úgy ha c P-tulajdonságú, akkor minden $f \in IS(\mathbb{R}^3)$ esetén $f \circ c$ is P-tulajdonságú).

(3) Általánosabban, egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált görbével kapcsolatos P tulajdonságot <u>affin invariánsnak</u> nevezzük, ha minden $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ affin transzformáció esetén $f \circ c$ is P tulajdonságú. Világos, hogy az affin invariáns tulajdonságok egyben izometr

szemben is invariánsak, tehát euklideszi invariánsak. Egyszerűen belátható, hogy a regularitás, a biregularitás, az „érintőegyenesnek lenni" és a „simulósíknak lenni" tulajdonságok affin invariánsak – s így egyben euklideszi invariánsak is.

3.3. Lemma. A kongruens parametrizált görbéknek megegyezik a pályasebessége, s ennélfogva az ívhossza is.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét és egy $f = \tau_a \circ \varphi$ izometriát, ahol τ_a az $a \in \mathbb{R}^3$ vektorral való transzláció, $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonális transzformáció. Legyen $\tilde{c} := f \circ c$. A 0.9.-ben mondottak alapján tetszőleges $p \in \mathbb{R}^3$ esetén $f'(p) = \varphi$, így

$$\tilde{c}' = (f \circ c)' = (f' \circ c) \cdot c' = \varphi \circ c'.$$

Innen $\tilde{c}$ pályasebessége

$$\tilde{v} := \|\tilde{c}'\| = \|\varphi \circ c'\| = \|c'\| =: v. \qquad \square$$

3.4. Lemma. (1) Ha $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció, akkor

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3: \quad \langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \det\varphi \langle a \times b, c \rangle.$$

(2) Amennyiben $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonális transzformáció, úgy

$$\varphi(a) \times \varphi(b) = \varepsilon\, \varphi(a \times b), \qquad \varepsilon := \det\varphi \in \{-1, 1\}.$$

Bizonyítás. (1) igazolását mellőzzük (ld. [BD], I. 2.11.). Ha – speciálisan – φ ortogonális transzformáció, akkor adott $a, b \in \mathbb{R}^3$ mellett

$$\forall v \in \mathbb{R}^3: \quad \langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(v) \rangle \overset{(1)}{=} \det\varphi \langle a \times b, v \rangle = \langle \varepsilon\, \varphi(a \times b), \varphi(v) \rangle,$$

amiből következik, hogy $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varepsilon\, \varphi(a \times b)$. $\square$

3.5. Állítás. Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe, $f := \tau_a \circ \varphi$ $(a \in \mathbb{R}^3,\ \varphi \in O(\mathbb{R}^3))$ euklideszi mozgás. A c görbe és a $\tilde{c} := f \circ c$ görbe Frenet-apparátusának kapcsolatát a

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa, \quad \tilde{\tau} = \varepsilon \tau, \quad \tilde{T} = \varphi \circ T, \quad \tilde{F} = \varphi \circ F, \quad \tilde{B} = \varepsilon(\varphi \circ B)$$

relációk adják, ahol $\varepsilon := \det\varphi \in \{-1, 1\}$.

Bizonyítás. (1) $\tilde{c}$ érintő-egységvektormezője $\tilde{T} := \frac{1}{\tilde{v}} \tilde{c}' \overset{3.3.}{=} \frac{1}{v}(\varphi \circ c') = \varphi \circ \frac{1}{v} c' = \varphi \circ T.$

(2) $\bar{c}$ görbületfüggvénye $\bar{\kappa} := \frac{1}{\bar{\nu}}\|\bar{T}'\| \overset{3.3.,(1)}{=} \frac{1}{\nu}\|(\varphi\circ T)'\| =$
$= \frac{1}{\nu}\|(\varphi'\circ T)\circ T'\| = \frac{1}{\nu}\|\varphi\circ T'\| \overset{(*)}{=} \frac{1}{\nu}\|T'\| =: \kappa$, a (*)-gal jelölt lépésben azt használva föl, hogy φ ortogonális transzformáció, s ennélfogva normatartó.

(3) $\bar{c}$ főnormális vektormezője $\bar{F} := \frac{1}{\bar{\nu}\bar{\kappa}}\bar{T}' \overset{3.3.,(2)}{=} \frac{1}{\nu\kappa}\bar{T}' \overset{(1)}{=} \frac{1}{\nu\kappa}(\varphi\circ T)'$
$= \frac{1}{\nu\kappa}(\varphi'\circ T)\circ T' = \frac{1}{\nu\kappa}\varphi\circ T' = \varphi\circ\frac{1}{\nu\kappa}T' = \varphi\circ F$.

(4) $\bar{c}$ binormális vektormezője $\bar{B} := \bar{T}\times\bar{F} \overset{(1),(3)}{=} (\varphi\circ T)\times(\varphi\circ F) \overset{3.4.(2)}{=}$
$= \varepsilon\,\varphi\circ(T\times F) = \varepsilon(\varphi\circ B)$.

(5) $\bar{c}$ torziófüggvénye $\bar{\tau} := -\frac{1}{\bar{\nu}}\langle\bar{B}',\bar{F}\rangle \overset{3.3.,(5),(4)}{=} -\frac{1}{\nu}\langle\varepsilon(\varphi\circ B)',\varphi\circ F\rangle$
$= \varepsilon\cdot -\frac{1}{\nu}\langle\varphi\circ B',\varphi\circ F\rangle \overset{(*)}{=} \varepsilon\cdot -\frac{1}{\nu}\langle B',F\rangle = \varepsilon\tau$, fölhasználva a (*)-gal jelölt lépésnél, hogy φ megtartja a skaláris szorzatot.

Ezzel valamennyi összefüggést igazoltuk. □

3.6. Lemma. Ha $c: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ és $\bar{c}: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ olyan parametrizált görbék, amelyekre teljesül, hogy $c'=\bar{c}'$, akkor c és $\bar{c}$ parallelgörbék. Amennyiben – ráadásul – van olyan $t_0\in I$ paraméter, hogy $c(t_0)=\bar{c}(t_0)$, úgy c és $\bar{c}$ egyenlő.

Bizonyítás. A $c'=\bar{c}'$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $(\bar{c}-c)'=0$, amiből $\bar{c}-c$ konstans volta adódik. Létezik tehát olyan $a\in\mathbb{R}^3$ vektor, hogy $\bar{c}(t)=c(t)+a$, minden $t\in I$-re. Ez azt jelenti, hogy az a-val való eltolás a c görbét a $\bar{c}$ görbébe viszi át. Amennyiben $\bar{c}(t_0)=c(t_0)$, úgy $a=0$ és $\bar{c}=c$ következik. □

3.7. Tétel (a görbeelmélet unicitás-tétele). Tegyük föl, hogy

$$c: I\longrightarrow\mathbb{R}^3 \quad\text{és}\quad d: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

egységpályasebességű bireguláris görbék, amelyeknek megegyezik a görbületfüggvénye, a torziófüggvényük pedig legfeljebb előjelben különbözik. Ekkor c és d kongruens görbék. △

3.8. Következmény. Ha $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és $d: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan paraméterezett görbék, amelyek közös pályasebességgel és görbületfüggvénnyel rendelkeznek, a torziófüggvényeik pedig legfeljebb előjelben térnek el, akkor c és d kongruens.

Bizonyítás. A pályasebességek megegyezése folytán c és d ívhossz-függvénye is közös, legyen ez ϑ. Ekkor $\bar{c} := c \circ \vartheta^{-1}$ és $\bar{d} := d \circ \vartheta^{-1}$ egységpályasebességű, pozitív átparaméterezettje c-nek, ill. d-nek, közös értelmezési tartománnyal. Mivel 2.8. szerint az átparaméterezés során sem a görbület, sem a torzió nem változik, 3.7. alapján létezik olyan $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ izometria, hogy $\bar{d} = f \circ \bar{c}$. Ekkor azonban

$$\forall t \in I: \quad f(c(t)) = f(\bar{c}(\vartheta(t))) = (f \circ \bar{c})(\vartheta(t)) = \bar{d}(\vartheta(t)) = d(t),$$

tehát $d = f \circ c$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy c és d kongruens.

3.9. Tétel (a görbeelmélet egzisztencia-tétele). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, s tegyük fel, hogy adva van egy $\varkappa: I \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1-osztályú, mindenütt pozitív függvény, valamint egy $\tau: I \to$ C^1-osztályú függvény. Létezik olyan egységpályasebességű, szükségképpen bireguláris paraméterezett görbe, amelynek görbületfüggvénye a megadott $\varkappa$, torziófüggvénye a megadott τ függvény.

Bizonyítás. Ld. [BD], 84–86. oldal.

II. FELÜLETEK LOKÁLIS ELMÉLETE

4. Paraméterezett felületek és felületek

4.1. Definíció. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nemüres nyílt halmaz.

(1) Egy $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^k-osztályú leképezést *C^k-osztályú paraméterezett felületnek* is mondunk, s ilyenkor $\mathcal{U}$ pontjait *paraméterekként*, f általi képeiket *felületpontokként* említjük. – A továbbiakra nézve *megállapodunk abban, hogy $k \geq 3$*, s C^k-osztályú paraméterezett felület helyett rendszerint *paraméterezett felületről*, olykor – pontatlanul – *felületről* szólunk.

(2) Az $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület *reguláris* egy $q \in \mathcal{U}$ pontban, ha a

$$D_1 f(q) = \begin{pmatrix} D_1 f^1(q) \\ D_1 f^2(q) \\ D_1 f^3(q) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad D_2 f(q) = \begin{pmatrix} D_2 f^1(q) \\ D_2 f^2(q) \\ D_2 f^3(q) \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan függetlenek. Amennyiben ez a tulajdonság minden $q \in \mathcal{U}$ pontban teljesül, úgy *reguláris paraméterezett felület*ről beszélünk. Ha valamely $q \in \mathcal{U}$ esetén $D_1 f(q) \parallel D_2 f(q)$, akkor azt mondjuk, hogy f *szinguláris* q-ban.

4.2. Állítás. Egy $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett felületre a következő feltételek ekvivalensek:

(1) f reguláris $q \in \mathcal{U}$-ban.

(2) $D_1 f(q) \times D_2 f(q) \neq \mathbf{0}$.

(3) A $J_q f = \begin{pmatrix} D_1 f^1(q) & D_2 f^1(q) \\ D_1 f^2(q) & D_2 f^2(q) \\ D_1 f^3(q) & D_2 f^3(q) \end{pmatrix}$ Jacobi-mátrix 2-rangú.

(4) Az $f'(q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ derivált injektív, s így 2-rangú lineáris leképezés.

Bizonyítás. Ismert a lineáris algebrából, hogy két $\mathbb{R}^3$-beli vektor lineáris függetlensége ekvivalens azzal, hogy a vektoriális szorzatuk nem a zérusvektor; ezért (1) $\Longleftrightarrow$ (2) teljesül.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Mivel a 3×2-es $J_f(q)$ mátrix oszlopait a $D_1f(q)$ és a $D_2f(q)$ vektor alkotja, a mátrixok rangjának definíciója alapján evidens, hogy $D_1f(q)$ és $D_2f(q)$ lineáris függetlensége esetén $J_f(q)$ 2-rangú.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $J_f(q)$ az $f'(q): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés kanonikus bázisokra vonatkozó mátrixa. Az is ismert a lineáris algebrából, hogy egy lineáris leképezés rangja megegyezik tetszőleges mátrix-reprezentációjának rangjával. Így a nullitás + rang tétel figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{rang} J_f(q) = \operatorname{rang} f'(q) := \dim \operatorname{Im} f'(q) = 2 - \dim \operatorname{Ker} f'(q).$$

$\operatorname{rang} J_f(q) = 2$ esetén innen $\dim \operatorname{Ker} f'(q) = 0$, ebből pedig $\operatorname{Ker} f'(q) = \{\underline{0}\}$ következik, ami ekvivalens azzal, hogy $f'(q)$ injektív.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Ha $f'(q)$ injektív, akkor megőrzi a lineáris függetlenséget, s így az $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ bázisvektorok $f'(q)$ általi képei, az $f'(q)(e_1) =: D_1f(q)$, $f'(q)(e_2) =: D_2f(q)$ vektorok lineárisan függetlenek. □

4.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és az $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^k-osztályú parametrizált felület ekvivalens, ha van olyan $\varphi: \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{U}$ C^k-izomorfizmus, hogy $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Ekkor a φ leképezést (megengedett) paramétertranszformációnak hívjuk, az $\tilde{f}$ parametrizált felületet pedig f φ általi átparaméterezettjeként említjük.

4.4. Megjegyzések. (1) Ellentétben a görbeelmélettel, a felületelméletben nem áll rendelkezésre az egységpályasebességű (vagy természetes) paraméterezéssel analóg, kitüntetett paraméterezés.

(2) A C^k-osztályú parametrizált felületek halmazában bevezetett ekvivalencia valóban ekvivalenciareláció, az ekvivalenciaosztályokat szokás nem-parametrizált elemi felületeknek is nevezni. Egy parametrizált felületnek csak azokat a tulajdonságait tekintjük geometriaiaknak, amelyekkel

az általa reprezentált ekvivalenciaosztály valamennyi tagja rendelkezik, vagyis amelyek (megengedett) <u>paramétertranszformációval szemben invariánsak</u> (v.ö. <u>1.8.</u>).

<u>4.5. Lemma.</u> Tegyük föl, hogy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ C^k-osztályú parametrizált felület. Legyen $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ C^k-izomorfizmus, s tekintsük az f felület $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^3$ átparaméterezettjét. Ekkor

$$\forall a \in \tilde{\mathcal{U}} : \quad (D_1 \tilde{f} \times D_2 \tilde{f})(a) = (\det J_\varphi(a))\, D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a)) .$$

<u>Bizonyítás.</u> Tekintve $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisát, tetszőleges $i \in \{1,2\}$ esetén

$$D_i \tilde{f}(a) =: \tilde{f}'(a)(e_i) = (f \circ \varphi)'(a)(e_i) \overset{0.8.(3)}{=} f'(\varphi(a))(\varphi'(a)(e_i)) = f'(\varphi(a))(\varphi^{1\prime}(a)(e_i), \varphi^{2\prime}(a)(e_i))$$

$$= f'(\varphi(a))(D_i\varphi^1(a), D_i\varphi^2(a)) = f'(\varphi(a))(D_i\varphi^1(a)e_1 + D_i\varphi^2(a)e_2) = D_i\varphi^1(a)\, f'(\varphi(a))(e_1) +$$

$$+ D_i\varphi^2(a)\, f'(\varphi(a))(e_2) = D_i\varphi^1(a)\, D_1 f(\varphi(a)) + D_i\varphi^2(a)\, D_2 f(\varphi(a)),$$

így – fölhasználva a vektoriális szorzás elemi tulajdonságait –

$$D_1\tilde{f}(a) \times D_2\tilde{f}(a) = \big(D_1\varphi^1(a) D_1 f(\varphi(a)) + D_1\varphi^2(a) D_2 f(\varphi(a))\big) \times \big(D_2\varphi^1(a) D_1 f(\varphi(a)) + D_2\varphi^2(a) D_2 f(\varphi(a))\big)$$

$$= \big(-D_1\varphi^2(a) D_2\varphi^1(a) + D_1\varphi^1(a) D_2\varphi^2(a)\big)\, D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a))$$

$$= \begin{vmatrix} D_1\varphi^1(a) & D_2\varphi^1(a) \\ D_1\varphi^2(a) & D_2\varphi^2(a) \end{vmatrix} D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a)) = (\det J_\varphi(a))\, D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a)). \quad \square$$

<u>4.6. Következmény.</u> A parametrizált felületek regularitása paramétertranszformációval szemben invariáns tulajdonság.

<u>Bizonyítás.</u> Alkalmazzuk a Lemma feltételeit és jelöléseit. Mivel $\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ C^k-diffeomorfizmus, a definíció (<u>0.11.</u>(3)) értelmében létezik $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ C^k-osztályú inverze. A $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\tilde{\mathcal{U}}}$ relációból a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy

$$\forall a \in \tilde{\mathcal{U}} : \quad (\varphi^{-1})'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a) = 1_{\mathbb{R}^2} ,$$

amiből $\varphi'(a)$ bijektív volta, és így $\det \varphi'(a) = \det J_\varphi(a) \neq$ következik. Így a <u>4.5.</u>-ben nyert relációból kiolvasható, hogy $D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a)) \neq \underline{0}$ esetén $D_1\tilde{f}(a) \times D_2\tilde{f}(a) \neq \underline{0}$ is fennáll. $\square$

4.7. Következmény. Végrehajtva egy $\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ paramétertranszformációt, az $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület parciális deriváltjai a

$$D_i\tilde{f} = \sum_{j=1}^{2} D_i\varphi^j \left(D_j f \circ \varphi\right) \qquad (i \in \{1,2\})$$

összefüggés szerint transzformálódnak, ahol $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Szimbolikus mátrixalakban:

$$\left(D_1\tilde{f} \quad D_2\tilde{f}\right) = \left(D_1 f \circ \varphi \quad D_2 f \circ \varphi\right) \begin{pmatrix} D_1\varphi^1 & D_2\varphi^1 \\ D_1\varphi^2 & D_2\varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. A felírt összefüggést megkaptuk 4.5. bizonyítása során.

4.8. Megjegyzés. 4.6. bizonyítása során kiderült, hogy egy $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix} : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ paramétertranszformáció Jacobi-mátrixának determinánsa sehol sem tűnik el. Amennyiben $\tilde{\mathcal{U}}$ összefüggő, úgy ebből a

$$\det J_\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \det J_\varphi(a)$$

függvény folytonossága alapján következik, hogy $\det J_\varphi$ vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív értéket vesz fel. Az első esetben a paramétertranszformációt irányítástartónak, a második esetben irányításváltónak nevezzük.

4.9. Definíció. (1) Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület beágyazás, ha reguláris, injektív, és az

$$f^{-1} : f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$$

inverz leképezés folytonos. ($f(\mathcal{U})$-t az $\mathbb{R}^3$ tér természetes topológiája által indukált topológiával látjuk el.)

(2) $\mathbb{R}^3$ egy nemüres részhalmazát felületnek nevezzük, ha fel van ruházva az indukált topológiával és minden pontjának van olyan környezete, amely megkapható egy beágyazás képeként. Az egyetlen beágyazás képeként előálló felületeket egyszerű (vagy elemi) felületeknek hívjuk.

4.10. Lemma és definíció. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nemüres nyílt halmaz, s tegyük föl, hogy $h: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ C^k-osztályú függvény ($k \geq 3$). Ekkor az

$$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := (s, t, h(s,t))$$

leképezés beágyazás, amelyet Monge-beágyazásnak nevezünk, s amelynek

$$M := f(\mathcal{U}) = \{(s,t,h(s,t)) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \mathcal{U}\} =: \mathrm{graf}(h)$$

képhalmazát Monge- (vagy Euler-Monge) felületnek hívjuk.

Bizonyítás. f C^k-osztályú (hiszen a koordinátafüggvényei ilyenek), s nyilvánvalóan injektív. Tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}$-ban f Jacobi-mátrixa

$$J_f(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1h(s,t) & D_2h(s,t) \end{pmatrix};$$

ez láthatóan 2-rangú. Így 4.2. alapján f reguláris paraméterezett felület. Azt ellenőrizzük végül, hogy az $f^{-1}: M \to \mathcal{U}$ inverz leképezés folytonos. Tekintsük ebből a célból a

$$pr: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (p^1, p^2, p^3) \longmapsto (p^1, p^2)$$

vetítést. Ez lineáris leképezés, ennélfogva sima – és speciálisan folytonos. Közvetlenül látható, hogy $pr \restriction M = f^{-1}$, amiből következik f^{-1} folytonossága, ugyanis egy folytonos leképezésnek egy topologikus altérre való leszűkítése (az indukált topológiára nézve) folytonos. □

4.11. Példa. Tekintsük az $\mathcal{U} := B_1(0,0) := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 + t^2 < 1\}$ nyílt körlemezt, s ezen a $h: (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto h(s,t) := \sqrt{1 - s^2 - t^2}$ függvényt. h nyilvánvalóan sima, és meghatározza az

$$f: (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t) := (s, t, \sqrt{1-s^2-t^2}) \in \mathbb{R}^3$$

Monge-beágyazást, amelynek képe az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0$$

relációkkal leírható peremmentes félgömbfelület.

4.12. Definíció. Legyen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, $F: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ pedig differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy egy $\alpha \in F(\mathcal{V})$ valós szám reguláris értéke F-nek, ha az $F^{-1}(\alpha) \subset \mathcal{V}$ őskép pontjaiban az F függvény parciális deriváltjai nem tűnnek el egyidejűleg:

$\forall p \in F^{-1}(\alpha): \sum_{i=1}^{n} (D_i F(p))^2 > 0$, ill. – ekvivalens módon – $\operatorname{grad} F(p) \neq 0$.

4.13. Állítás és definíció. Legyen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ nemüres nyílt halmaz, s tegyük föl, hogy $F: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ C^k-osztályú függvény ($k \geq 3$). Ha $\alpha \in F(\mathcal{V})$ reguláris értéke F-nek, akkor $M := F^{-1}(\alpha)$ felület. Ezt a felület implicit megadású felületnek vagy szintfelületnek nevezzük, és formálisan $F(x,y,z) = \alpha$ (röviden $F = \alpha$) alakú egyenlettel adjuk meg.

Bizonyítás. Tekintve egy tetszőleges $p \in M$ pontot, a feltétel értelmében a $D_1F(p)$, $D_2F(p)$, $D_3F(p)$ parciális deriváltak nem tűnnek el egyidejűleg; tegyük föl, hogy például $D_3F(p) \neq 0$. Az analízisből ismert implicit-függvény-tétel biztosítja, hogy a

$$pr(p) = pr((p^1, p^2, p^3)) := (p^1, p^2) \in \mathbb{R}^2$$

pontnak van olyan $\mathcal{U}$ nyílt környezete, valamint megadható egy $h: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ C^k-osztályú függvény úgy, hogy

$$h(p^1, p^2) = p^3 \quad \text{és} \quad \forall (s,t) \in \mathcal{U}: F(s,t,h(s,t)) = \alpha .$$

Ekkor $(s,t,h(s,t)) \in M$, és az

$$f: (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t) := (s,t,h(s,t)) \in M \subset \mathbb{R}^3$$

leképezés Monge-beágyazás. – Beláttuk ezzel, hogy M minden pontjának van olyan nyílt környezete, amely előállítható egy Monge-beágyazás képeként. $\square$

4.14. Példák. (1) Gömbfelület. Legyen $r \in \mathbb{R}^*_+$, s tekintsük az

$$S^2(r) := \{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r \} \subset \mathbb{R}^3$$

origó középpontú, r sugarú gömbfelületet. $S^2(r)$ egyenlete a hagyományos írásmóddal

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 .$$

Megmutatjuk, hogy $S^2(r)$ megkapható egy sima függvény reguláris értékének ősképeként, s így 4.13. értelmében felület.

Tekintsük az

$$F := (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 - r^2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényt, ahol (e^1, e^2, e^3) $\mathbb{R}^3$ kanonikus koordinátarendszer, s r^2-et az ilyen értékű konstans függvénnyel azonosítjuk. Világos, hogy $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

A 0.10. -beli példa figyelembevételével, a szorzatszabály alkalmazásaival $(D_1 F = 2e^1,\ D_2 F = 2e^2,\ D_3 F = 2e^3) \Rightarrow (\operatorname{grad} F(p) = \underline{0} \iff 2(e^1(p), e^2(p), e^3(p)) = 2p = \underline{0})$ adódik, F gradiense tehát csak az origóban tűnik el. Mivel (nyilvánvalóan) $S^2(r) = F^{-1}(0)$ és $\underline{0} \notin S^2(r)$, a 0 reguláris értéke F-nek, $S^2(r)$ pedig felület.

(2) Egyenes körhenger. Tekintsük az

$$M := \{ p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (p^1)^2 + (p^2)^2 = r^2 \} \subset \mathbb{R}^3$$

ponthalmazt, ahol $r \in \mathbb{R}^*_+$ rögzített. M egyenlete

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(hangsúlyozottan $\mathbb{R}^3$-ban!). Ha

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (s,t,u) \longmapsto F(s,t,u) := s^2 + t^2 - r^2,$$

akkor $M = F^{-1}(0)$. F a természetes koordinátafüggvények segítségével az $F = (u^1)^2 + (u^2)^2 - r^2$ alakban állítható elő, s ebből is láthatóan sima. A parciális deriváltjai tetszőleges $(s,t,u) \in \mathbb{R}^3$ pontban

$$D_1 F(s,t,u) = 2s, \quad D_2 F(s,t,u) = 2t, \quad D_3 F(s,t,u) = 0 ;$$

így $\operatorname{grad} F(s,t,u) = \underline{0} \iff s = t = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{grad} F$ zérushelyeinek halmaza

$$\{ (0,0,v) \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}(e_3) =: z\text{-tengely}.$$

Mivel a z-tengely egyik pontja sem illeszkedik M-re, megállapíthatjuk, hogy a 0 reguláris értéke F-nek ; M tehát felület. – Jegyezzük meg, hogy az $f : (s,t) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longmapsto f(s,t) := (r\cos s, r\sin s, t) \in \mathbb{R}^3$ leképezés reguláris parametrizált felület $\left(J_f(s,t) = \begin{pmatrix} -r\sin s & 0 \\ r\cos s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$ mindenütt 2-rangú $\Big)$, sőt beágyazás, amelynek képe $M \setminus l$, ahol l az $(r,0,0) + \mathcal{L}((0,0,1)) = \{ (r,0,v) \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R} \}$ alkotóegyenes.

5. Érintősík. A metrikus tenzor

5.1. Definíció és lemma. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület. (1) Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : I \to \mathcal{U}$ pedig parametrizált görbe, akkor

$$c := f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2) : \quad I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$$

leképezés szintén parametrizált görbe, amelyet f egy felületi görbéjének hívunk. Ennek tetszőleges $t \in I$-beli érintővektora megadható a

$$c'(t) = \gamma^{1\prime}(t)\, D_1 f(\gamma(t)) + \gamma^{2\prime}(t)\, D_2 f(\gamma(t))$$

alakban, következésképpen ha f reguláris parametrizált felület és γ reguláris görbe, akkor a $c = f \circ \gamma$ felületi görbe is reguláris.

(2) Rögzítve egy $q \in \mathcal{U}$ pontot, tekintsük az $\mathbb{R}^2$ koordinátasík

$$\gamma_{(i)} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma_{(i)}(t) := q + t e_i \,, \quad i \in \{1, 2\}$$

parametrizált egyeneseit ((e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisa). A segítségükkel képzett $c_{(1)} := f \circ \gamma_{(1)}$ és $c_{(2)} := f \circ \gamma_{(2)}$ felületi görbét f q-beli első, ill. második paramétervonalának hívjuk. Ezek érintővektora a 0 helyen

$$c'_{(1)}(0) = D_1 f(q), \quad \text{ill.} \quad c'_{(2)}(0) = D_2 f(q) \;;$$

erre tekintettel egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület esetén a $D_1 f(q)$, $D_2 f(q)$ $(q \in \mathcal{U})$ parciális deriváltakat paramétervonal-érintőknek is mondjuk.

Bizonyítás. c differenciálható, hiszen differenciálható leképezések kompozíciója. Deriváltja tetszőleges $t \in I$ helyen a láncszabály alkalmazásával

$$c'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = f'(\gamma(t))\left(\gamma^{1\prime}(t) e_1 + \gamma^{2\prime}(t) e_2\right) =$$

$$= \gamma^{1\prime}(t)\, f'(\gamma(t))(e_1) + \gamma^{2\prime}(t)\, f'(\gamma(t))(e_2) = \gamma^{1\prime}(t)\, D_1 f(\gamma(t)) + \gamma^{2\prime}(t)\, D_2 f(\gamma(t)).$$

Ha f reguláris, akkor $D_1 f(\gamma(t))$ és $D_2 f(\gamma(t))$ minden $t \in I$-re lineárisan független, így $c'(t) = \underline{0}$ csak akkor teljesülhet, ha $\gamma^{1\prime}(t) = \gamma^{2\prime}(t) = 0$, ami γ regularitása esetén nem következhet be.

Speciálisan

$$c'_{(1)}(0) = \gamma^{1\prime}_{(1)}(0)\, D_1 f(q) + \gamma^{2\prime}_{(1)}(0)\, D_2 f(q) = D_1 f(q),$$

hiszen $\gamma_{(1)}(t) = q + te^1 = (q^1 + t, q^2)$, így $\gamma^1_{(1)}(t) = q^1 + t$, $\gamma^2_{(1)}(t) = q^2$, s ezért $\gamma^{1\prime}_{(1)}(t) = 1$, $\gamma^{2\prime}_{(1)}(t) = 0$. Ugyanígy kapjuk, hogy $c'_{(2)}(0) = D_2 f(q)$. □

<u>5.2. Lemma és definíció.</u> Ha $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, akkor tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén

$$f(q) + \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$$

kétdimenziós lineáris sokaság $\mathbb{R}^3$-nak, amelyet f <u>q-beli érintősíkjának</u> nevezünk. $\operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$ elemeit f q-beli <u>érintővektorainak</u>, az ortogonális komplementerének nemzérus vektorait f q-beli <u>normálvektorainak</u> hívjuk.

$$\forall q \in \mathcal{U}: \quad N(q) := \frac{1}{\| D_1 f(q) \times D_2 f(q) \|} D_1 f(q) \times D_2 f(q)$$

egységhosszúságú normálvektora f-nek q-ban, s így $N(q) \in S^2$. Az $N : q \in \mathcal{U} \longmapsto N(q) \in S^2$ leképezést <u>Gauss-leképezésnek</u>, a $(D_1 f, D_2 f, N)$ hármast f <u>Gauss-féle háromélmerőjének</u> mondjuk. △

<u>Jelölés</u> $T_q f := f(q) + \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$ – f q-beli érintősíkja (T – tangens = érintő).

<u>5.3. Állítás.</u> Ha $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület és $c = f \circ \gamma : I \to f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ felületi görbe, akkor tetszőleges $t \in I$ esetén $c'(t)$ $\gamma(t)$-beli érintővektora f-nek.

Megfordítva, f minden érintővektora megkapható egy felületi görbe érintővektoraként.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Tetszőleges $t \in I$ esetén, <u>5.1.</u>-re tekintettel, $c'(t) \in \operatorname{span}(D_1 f(\gamma(t)), D_2 f(\gamma(t)))$.

(2) Legyen, megfordítva, $v \in \mathcal{L}(D_1 f(q), D_2 f(q))$ ($q \in \mathcal{U}$) tetszőleges. Ekkor v egyértelműen előállítható

$$v = \lambda^1 D_1 f(q) + \lambda^2 D_2 f(q) \; ; \quad \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$$

alakban. Tekintsük a

$$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : t \in I \longmapsto \gamma(t) := (q^1 + a^1 t, q^2 + a^2 t) \in \mathbb{R}^2$$

$(q = (q^1, q^2))$ $\mathbb{R}^2$-beli görbét, s legyen $c := f \circ \gamma$. Ekkor

$$c'(0) \overset{5.1.}{=} \gamma^{1\prime}(0) D_1 f(\gamma(0)) + \gamma^{2\prime}(0) D_2 f(\gamma(0)) = a^1 D_1 f(q) + a^2 D_2 f(q) = v,$$

ami igazolja az állítást. $\square$

<u>5.4. Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy $v \in \mathbb{R}^3$ vektor <u>érintővektora egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felületnek</u> egy $p \in M$ pontban, ha van olyan $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe, hogy

$$\forall t \in I : c(t) \in M \; ; \; c(0) = p \text{ és } c'(0) = v.$$

Azt a p-re illeszkedő síkot, amelynek irányterét M összes p-beli érintővektorai alkotják, a felület <u>p-beli érintősíkjának</u> nevezzük és $T_p M$-mel jelöljük.

<u>5.5. Következmény.</u> Ha $M \subset \mathbb{R}^3$ felület, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ pedig olyan beágyazás, amelyre $f(\mathcal{U}) \subset M$ teljesül, akkor

$$\forall q \in \mathcal{U} : \; T_{f(q)} M = T_q f = f(q) + \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q)). \qquad \Delta$$

<u>5.6. Állítás.</u> Ha $M := F^{-1}(\alpha)$ szintfelület, akkor ennek tetszőleges p pontbeli érintősíkja a p-re illeszkedő, $\operatorname{grad} F(p)$ normálvektorú sík.

<u>Bizonyítás.</u> Azt kell megmutatnunk, hogy

$$T_p M = p + (\operatorname{span}(\operatorname{grad} F(p)))^\perp.$$

Mivel mind a bal, mind a jobb oldalon kétdimenziós lineáris sokaság áll, elég azt ellenőrizni, hogy $(\operatorname{span}(\operatorname{grad} F(p)))^\perp$ tartalmazza $T_p M$ irányterét. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy ha v érintővektora M-nek p-ben, akkor

$$\langle v, \operatorname{grad} F(p) \rangle = 0.$$

Tekintsünk ebből a célból egy olyan $c : I \to \mathbb{R}^3$ görbét, amelynek képe M-ben van ($c(I) \subset M$), és amelyre $c(0) = p$, $c'(0) = v$ teljesül. Ekkor

$$\forall t \in I : \; F(c(t)) = \alpha,$$

így az $F \circ c : I \to \mathbb{R}$ függvény konstans, s ezért

$$0 = (F \circ c)'(0) = F'(c(0))(c'(0)) = F'(p)(v) \overset{0.13.}{=} \langle \operatorname{grad} F(p), v \rangle .$$

Ezt kellett belátnunk. $\square$

Megállapodás. A következőkben az $\mathbb{R}^2$ valós vektortéren értelmezett összes szimmetrikus bilineáris formák vektorterére az $L^2_{sym}(\mathbb{R}^2)$ jelölést fogjuk használni. $L^2_{sym}(\mathbb{R}^2)$-nek részhalmazát képezik a pozitív definit szimmetrikus bilineáris formák, ezt a részhalmazt $\mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2)$-vel jelöljük.

5.7. Definíció. Az $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület metrikus tenzorán vagy 1. alapformáján a

$$\boxed{\begin{array}{l} g: \ a \in \mathcal{U} \longmapsto g_a \in L^2_{sym}(\mathbb{R}^2) \\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^2: \ g_a(v,w) := \langle f'(a)(v), f'(a)(w) \rangle \end{array}}$$

leképezést értjük. A

$$g_{ij}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto g_{ij}(a) := g_a(e_i, e_j) = \langle f'(a)(e_i), f'(a)(e_j) \rangle = \langle D_i f(a), D_j f(a) \rangle$$

$(i, j \in \{1,2\})$ függvényeket g (természetes) komponens-függvényeinek vagy f 1. alapmennyiségeinek nevezzük.

5.8. Megjegyzések. (1) A definícióból kiolvasható az $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület 1. alapmennyiségei a

$$g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ i, j \in \{1,2\}$$

függvények.

↯ (2) A metrikus tenzor fogalma speciális esete az ún. Riemann-metrikák általános fogalmának. Akkor mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon egy Riemann-metrikát adtunk meg, ha megadtunk egy

$$g: \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2), \quad a \longmapsto g_a$$

leképezést oly módon, hogy a

$$g_{ij}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto g_{ij}(a) := g_a(e_i, e_j) \ ; \ i, j \in \{1,2\}$$

függvények differenciálhatók. Az általunk vizsgált esetben a Riemann-metrika az $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés segítségével az $\mathbb{R}^3$-beli kanonikus skaláris szorzattól származik.

A Riemann-geometriában a Riemann-metrika fogalma a most jelzettnél jóval általánosabb szituációban kerül bevezetésre.

5.9. Lemma. Legyen $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület.

(1) f metrikus tenzora pozitív definit abban az értelemben, hogy g_a minden $a \in U$ esetén pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma, azaz $g_a \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2)$.

(2) A $g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle$ 1. alapmennyiségek rendelkeznek a $g_{ij} = g_{ji}$ $(i,j \in \{1,2\})$ szimmetriatulajdonsággal.

(3) Tetszőleges $a \in U$ esetén

$$\det(g_{ij}(a)) = \| D_1 f(a) \times D_2 f(a) \|^2 .$$

Bizonyítás. (1) Legyen $v \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges.

$$g_a(v,v) := \langle f'(a)(v), f'(a)(v) \rangle = \| f'(a)(v) \|^2 = 0 \iff f'(a)(v) = 0$$
$$\iff v = \underline{0},$$

tekintettel a norma tulajdonságaira és $f'(a)$ injektivitására.

(2) $g_{ij} = g_{ji}$ teljesülése evidens a $\langle\, , \rangle$ skaláris szorzat szimmetriája miatt.

(3)
$$\det(g_{ij}(a)) = \begin{vmatrix} g_{11}(a) & g_{12}(a) \\ g_{21}(a) & g_{22}(a) \end{vmatrix} = g_{11}(a) g_{22}(a) - (g_{12}(a))^2$$

$$= \| D_1 f(a) \|^2 \| D_2 f(a) \|^2 - \langle D_1 f(a), D_2 f(a) \rangle^2 = \| D_1 f(a) \times D_2 f(a) \|^2 . \qquad \square$$

5.10. Megjegyzés. 5.9 (3)-ból 4.2. figyelembevételével következik, hogy a $(g_{ij}(a)) \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix tetszőleges $a \in U$ esetén invertálható, hiszen $\det(g_{ij}(a)) \neq 0$. Az inverz mátrixra a $(g^{ij}(a)) := (g_{ij}(a))^{-1}$ jelölést használjuk. Hasonlóképpen, $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ (itt már függvények alkotta mátrixról van szó!).

5.11. Állítás. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület.

(1) Megadva egy $\varphi: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmust, tekintsük f $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^3$ átparaméterezettjét. Ha $\tilde{f}$ metrikus tenzora $\tilde{g}$, az 1. alapmennyiségei a $\tilde{g}_{ij}$ függvények, akkor

(1a) $\forall\, \tilde{a} \in \tilde{\mathcal{U}}$; $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^2$: $\tilde{g}_{\tilde{a}}(v, w) = g_{\varphi(\tilde{a})}(\varphi'(\tilde{a})(v), \varphi'(\tilde{a})(w))$

(a metrikus tenzor paramétertranszformációval szemben invariáns);

(1b) $\forall\, i, j \in \{1, 2\}$: $\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} (D_i \varphi^k)(D_j \varphi^l)\, g_{kl} \circ \varphi$

(az 1. alapmennyiségek transzformációs szabálya).

(2) Ha $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ izometria, akkor $\bar{f} := F \circ f$ is reguláris paraméterezett felület, amelynek metrikus tenzora megegyezik f metrikus tenzorával, a metrikus tenzor tehát izometriával szemben invariáns. Δ

5.12. Állítás. Egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület $c = f \circ \gamma = f \circ \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ felületi görbéjének ívhossza kiszámítható az

$$L(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} (g_{ij} \circ \gamma)\, \gamma^{i\prime} \gamma^{j\prime}}$$

formula alapján.

Bizonyítás. $L(c) \overset{1.11.}{:=} \int_\alpha^\beta \|c'\| = \int_\alpha^\beta \langle c', c' \rangle^{1/2}$. Az 5.1.(1) alkalmazásával

$$\langle c', c' \rangle^{1/2} = \left\langle \sum_{i=1}^{2} \gamma^{i\prime} (D_i f \circ \gamma), \sum_{j=1}^{2} \gamma^{j\prime} (D_j f \circ \gamma) \right\rangle^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{2} \gamma^{i\prime} \gamma^{j\prime} (\langle D_i f, D_j f \rangle \circ \gamma \right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{2} (g_{ij} \circ \gamma) \gamma^{i\prime} \gamma^{j\prime} \right)^{1/2}. \quad \square$$

5.13. Definíció. Egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület *felszínén* az

$$A(f) := \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})} \overset{5.9.(3)}{=} \int_{\mathcal{U}} \|D_1 f \times D_2 f\|$$

integrált értjük.

5.14. Állítás. Ekvivalens paraméterezett felületek felszíne egyenlő.

Bizonyítás. Tekintsük az $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felületet, s ennek egy $\tilde{f} := f \circ \varphi = f \circ \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezettjét. Ekkor

$$A(\tilde{f}) := \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \overset{5.12(14)}{=} \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \Big(\det\Big(\sum_{k,l=1}^{2} (D_i\varphi^k)(D_j\varphi^l)(g_{kl}\circ\varphi)\Big)\Big)^{1/2}$$

$$= \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \Big(\det\Big(\sum_{k,l=1}^{2} ({}^t J_\varphi)^i_k\,(g_{kl}\circ\varphi)(J_\varphi)^l_j\Big)\Big)^{1/2} = \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \big(\det({}^tJ_\varphi(g_{ij}\circ\varphi)J_\varphi)\big)^{1/2}$$

$$= \int_{\tilde{\mathcal{U}}} \sqrt{\det(g_{ij}\circ\varphi)}\,|\det J_\varphi| \overset{(*)}{=} \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(g_{ij})} =: A(f),$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben az integráltranszformáció tételét alkalmazva. □

5.15. Következmény. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $h : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, s tekintsük az

$$f : (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t) := (s, t, h(s,t)) \in \mathbb{R}^3$$

Monge-beágyazást. Ekkor

$$\boxed{A(f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + (D_1h)^2 + (D_2h)^2}}\,.$$

Bizonyítás. $D_1f(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1h(s,t) \end{pmatrix}$, $D_2f(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2h(s,t) \end{pmatrix}$, így

$$(g_{ij}(s,t)) = \begin{pmatrix} 1 + (D_1h(s,t))^2 & D_1h(s,t)D_2h(s,t) \\ D_1h(s,t)D_2h(s,t) & 1 + (D_2h(s,t))^2 \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$\det(g_{ij}(s,t)) = 1 + (D_1h(s,t))^2 + (D_2h(s,t))^2 + (D_1h(s,t))^2(D_2h(s,t))^2 -$$
$$- (D_1h(s,t))^2(D_2h(s,t))^2 = 1 + (D_1h(s,t))^2 + (D_2h(s,t))^2,$$

tehát f felszínének kiszámításához valóban a $\sqrt{1 + (D_1h)^2 + (D_2h)^2}$ függvényt kell integrálni $\mathcal{U}$ fölött. □

5.16. Példák. (1) *r sugarú gömb felszíne.* Legyen $\mathcal{U} :=]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, s tekintsük az $S^2(r)$ gömb

$$f : (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t) := r(\cos s\cos t, \sin s\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^3$$

ún. *geografikus paraméterezését.* Ekkor $\operatorname{Im}(f) = S^2(r) \setminus C$, ahol $C = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in S^2(r) \mid \beta = 0, \alpha \leq 0\}$. Tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}$-ban

$D_1f(s,t) = r(-\sin s\cos t, \cos s\cos t, 0)$, $D_2f(s,t) = r(-\cos s\sin t, -\sin s\sin t, \cos t)$;

$(D_1f \times D_2f)(s,t) = r^2 \cos t\,(\cos s \cos t,\ \sin s \cos t,\ \sin t)$,

így $\|D_1 f \times D_2 f\|(s,t) = r^2 \cos t$. Innen leolvasható, hogy $\mathcal{U}$ fölött $D_1 f \times D_2 f$ sehol sem $\underline{0}$, tehát f reguláris paraméterezett felület.

$$\underline{\underline{A(f)}} := \int_{\mathcal{U}} \|D_1 f \times D_2 f\| = \int_{\mathcal{U}} r(\cos \circ e^2) = r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \right) =$$

$$= r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^2 \int_{-\pi}^{\pi} 2 = \underline{\underline{4r^2\pi}}.$$

Jelezzük, hogy $\operatorname{Im}(f) \neq S^2(r)$, de a kimaradó halmaz a felszín szempontjából nullmértékű. Erre és a bevezetett felszín-fogalom paramétertranszformációval szembeni invarianciájára tekintettel megállapodhatunk abban, hogy

$$\underline{S^2(r) \text{ felszíne} := A(f) = 4r^2\pi}.$$

(2) <u>Paraméterezett forgástórusz felszíne.</u> Legyen $\mathcal{U} :=]0, 2\pi[^2$, s legyenek r és R rögzített pozitív valós számok, $r < R$. Az

$$f : (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t) := ((R + r\cos s)\cos t,\ (R + r\cos s)\sin t,\ r \sin s) \in \mathbb{R}^3$$

leképezést <u>paraméterezett forgástórusznak</u> nevezzük. Tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}$ helyen

$D_1 f(s,t) = (-r\sin s \cos t,\ -r \sin s \sin t,\ r\cos s)$,

$D_2 f(s,t) = (R + r\cos s)(-\sin t,\ \cos t,\ 0)$;

$g_{11}(s,t) = r^2$, $g_{12}(s,t) = g_{21}(s,t) = 0$, $g_{22}(s,t) = (R + r\cos s)^2$,

$\det(g_{ij}(s,t)) = r^2 (R + r\cos s)^2$,

így

$$\underline{\underline{A(f)}} = \int_{\mathcal{U}} r(R + r(\cos \circ e^1)) = rR \int_{\mathcal{U}} 1 + r^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos \right)$$

$$= rR \int_{[0,2\pi]^2} 1 = \underline{\underline{4rR\pi^2}}.$$

(3) <u>Felszínképlet forgásfelületekre.</u> Legyen φ az $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon értelmezett, pozitív értékű differenciálható függvény, $\mathcal{U} := [\alpha, \beta] \times [0, 2\pi]$, s tekintsük az

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) := (s, \varphi(s)\cos t, \varphi(s)\sin t)$
leképezést. Ekkor $\operatorname{Im}(f)$ a φ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatottja, úgyhogy f-et (x-tengelyű) <u>paraméterezett forgásfelületnek</u> hívjuk. Tetszőleges $(s,t) \in U$ pontot tekintve,

$D_1 f(s,t) = (1, \varphi'(s)\cos t, \varphi'(s)\sin t), \quad D_2 f(s,t) = (0, -\varphi(s)\sin t, \varphi(s)\cos t),$

$g_{11}(s,t) = 1 + (\varphi'(s))^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22}(s,t) = (\varphi(s))^2,$

$\det(g_{ij}(s,t)) = (\varphi(s))^2(1+(\varphi'(s))^2)$

következésképpen

$$\boxed{A(f) = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi \sqrt{1+(\varphi')^2}}\ .$$

<u>6. A 2. alapmennyiségek. A Weingarten-operátor</u>

<u>6.1. Lemma.</u> Tekintsük az $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezettjét. Ha N és $\tilde{N}$ f, ill. $\tilde{f}$ Gauss-leképezése, akkor $\tilde{N} = \varepsilon (N \circ \varphi)$, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint az átparaméterezés irányítástartó, ill. irányításváltó, speciálisan irányítástartó paraméter-transzformációval szemben a Gauss-leképezés invariáns.

<u>Bizonyítás.</u> Tetszőleges $\vec{a} \in \tilde{U}$ esetén

$$\tilde{N}(\vec{a}) := \frac{1}{\|D_1\tilde{f}(\vec{a}) \times D_2\tilde{f}(\vec{a})\|} D_1\tilde{f}(\vec{a}) \times D_2\tilde{f}(\vec{a}) \overset{4.5.}{=} \frac{\det(J\varphi(\vec{a}))}{|\det(J_\varphi(\vec{a}))|} N(\varphi(\vec{a}))$$

$$= \varepsilon (N \circ \varphi)(\vec{a}).$$

□

<u>Megjegyzés.</u> Közvetlenül adódik a lemmából, hogy egy reguláris paraméterezett felület érintősíkjai paraméter-transzformáció során nem változnak.

<u>6.2. Definíció és lemma.</u> Egy $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület <u>2. alapmennyiségein</u> a

$$b_{ij} := \langle D_i D_j f, N \rangle = \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} \langle D_i D_j f, D_1 f \times D_2 f \rangle \ ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

függvényeket értjük. Ezek rendelkeznek a $b_{ij} = b_{ji}$

szimmetriatulajdonsággal, és kiszámíthatók a

(6.2) $$b_{ij} = -\langle D_i f, D_j N\rangle \qquad (i,j \in \{1,2\})$$

formula alapján is.

Bizonyítás. Mivel f C^3-osztályú (ld. 4.1), a 0.12.-beli (B) tétel feltételei bőven teljesülnek, s így $D_i D_j f = D_j D_i f$ ($i,j \in \{1,2\}$), ebből pedig a 2. alapmennyiségek alkotta (b_{ij}) 2×2-es függvénymátrix szimmetriája következik.

(6.2) igazolásához induljunk ki abból, hogy

$$\langle D_i f, N\rangle = 0, \quad i \in \{1,2\},$$

hiszen a vektoriális szorzat merőleges a tényezőire. Képezve mindkét oldal j-edik parciális deriváltját, azt kapjuk, hogy

$$0 = D_j \langle D_i f, N\rangle = \langle D_j D_i f, N\rangle + \langle D_i f, D_j N\rangle = \langle D_i D_j f, N\rangle + \langle D_i f, D_j N\rangle;$$

innen $b_{ij} = -\langle D_i f, D_j N\rangle$. □

6.3. Állítás. Ha $\tilde{f} = f \circ \begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}$ átparaméterezése az f reguláris paraméterezett felületnek, akkor ezek $\tilde{b}_{ij}$, ill. b_{ij} 2. alapmennyiségei között a

$$\tilde{b}_{ij} = \varepsilon \sum_{k,l=1}^{2} (D_i \varphi^k)(D_j \varphi^l)(b_{kl} \circ \varphi) \quad ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

összefüggés áll fenn, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint a paramétertranszformáció irányítástartó, ill. irányításváltó. Δ

6.4. Tétel. Egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület $N : \mathcal{U} \longrightarrow S^2$ Gauss-leképezésének parciális deriváltjai előállíthatók $D_1 f$ és $D_2 f$ (függvény-) lineáris kombinációiként a

(6.4a) $$\boxed{D_j N = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j D_i f \ ; \ j \in \{1,2\}}$$

ún. Weingarten-formulák szerint, ahol

(6.4b) $$\boxed{b^i_j = \sum_{r=1}^{2} g^{ir} b_{rj} \ ; \ i,j \in \{1,2\}}.$$

Bizonyítás. Mivel az $\langle N, N\rangle : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény konstans (hiszen értékkészlete az $\{1\}$ halmaz),

$$\forall j \in \{1,2\}: \quad 0 = D_j \langle N, N\rangle = 2\langle D_j N, N\rangle .$$

Így tetszőleges $q \in U$, $j \in \{1,2\}$ esetén

$$D_j N(q) \in \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q)),$$

hiszen $(\operatorname{span} N(q))^\perp = \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$. Egyértelműen léteznek ezért olyan $b^i_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i,j \in \{1,2\}$ függvények, hogy

$$(*) \qquad D_j N = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j \, D_i f \quad ; \quad j \in \{1,2\}.$$

((*)-ban a $-$ előjel részben tradicionális, részben praktikus okokból szerepel.) Azt kell még igazolnunk, hogy a (b^i_j) mátrix kiszámítható (6.4 b) alapján. Képezve ebből a célból (*) mindkét oldalának skaláris szorzatát $D_r f$-fel ($r \in \{1,2\}$), azt kapjuk, hogy

$$\langle D_r f, D_j N\rangle = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j \langle D_r f, D_i f\rangle = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j \, g_{ri} = -\sum_{k=1}^{2} b^k_j \, g_{rk}.$$

Eredményünk (6.2) figyelembevételével a

$$b_{rj} = \sum_{k=1}^{2} b^k_j \, g_{rk}$$

alakba is írható. Balról szorozva e reláció mindkét oldalát g^{ir}-rel, és összegezve r-re 1-től 2-ig, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{2} g^{ir} b_{rj} = \sum_{k=1}^{2}\Big(\sum_{r=1}^{2} g^{ir} g_{rk}\Big) b^k_j = \sum_{k=1}^{2} \delta^i_k \, b^k_j = b^i_j$$

– és ez kellett belátnunk. $\square$

<u>6.5. Következmény.</u> Ha $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület és $N: U \longrightarrow S^2$ a hozzátartozó Gauss-leképezés, akkor

$$\forall q \in U: \quad \operatorname{Im}(N'(q)) \subset \operatorname{Im}(f'(q)).$$

<u>Bizonyítás.</u> Egy lineáris leképezés képterét a bázisvektorok képei generálják, így

$$\operatorname{Im}(N'(q)) = \operatorname{span}(N'(q)(e_1), N'(q)(e_2)) = \operatorname{span}(D_1 N(q), D_2 N(q)).$$

Mivel a Tétel értelmében $D_1 N(q)$ és $D_2 N(q)$ lineárisan kombinálható az $\operatorname{Im} f'(q)$ alteret kifeszítő $D_1 f(q)$ és $D_2 f(q)$ vektoroktól, következik az állítás. $\square$

<u>Megjegyzés.</u> A most tett észrevétel lehetővé teszi, hogy a

következő definícióban értelmesen szólhassunk az $(f'(q))^{-1}\circ N'(q)$ kompozícióról.

6.6. Definíció és állítás. Egy $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület $q \in U$-beli **Weingarten-operátorán** vagy **formaoperátorán** a

$$(6.6) \qquad \boxed{W_q := -(f'(q))^{-1}\circ N'(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$$

transzformációt értjük. A W_q Weingarten-operátor

(1) lineáris transzformációja $\mathbb{R}^2$-nek;

(2) önadjungált az f metrikus tenzora által meghatározott $g_q \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2)$ skaláris szorzatra nézve:

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^2: \quad g_q(W_q(v), w) = g_q(v, W_q(w));$$

(3) W_q mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan a

$$\left(b^i_j(q)\right) = \left(\sum_{r=1}^{2} g^{ir}(q)\, b_{rj}(q)\right) \in M_2(\mathbb{R})$$

mátrix.

Bizonyítás. (1) W_q lineáris leképezések kompozíciója, így maga is lineáris.

(2) Az önadjungáltság igazolásához elegendő azt ellenőriznünk, hogy tetszőleges $i, j \in \{1,2\}$ esetén $g_q(W_q(e_i), e_j) = g_q(e_i, W_q(e_j))$. Ez egyszerű számolással adódik:

$$\begin{aligned}
g_q(W_q(e_i), e_j) &\overset{(6.6)}{=} -g_q\left((f'(q))^{-1}(N'(q))(e_i), e_j\right) \overset{5.7.}{=} -\langle N'(q)(e_i), f'(q)(e_j)\rangle \\
&= -\langle D_j f(q), D_i N(q)\rangle \overset{(6.2)}{=} b_{ji}(q) = b_{ij}(q) = \\
&\overset{(6.2)}{=} -\langle D_i f(q), D_j N(q)\rangle = -\langle f'(q)(e_i), N'(q)(e_j)\rangle \\
&= -\langle f'(q)(e_i), f'(q)\left((f'(q))^{-1}\circ N'(q)(e_j)\right)\rangle \\
&\overset{(6.6)}{=} \langle f'(q)(e_i), f'(q)(W_q(e_j))\rangle \overset{5.7.}{=} g_q(e_i, W_q(e_j)).
\end{aligned}$$

(3) Tetszőleges $j \in \{1,2\}$ esetén

$$\begin{aligned}
W_q(e_j) &:= -(f'(q))^{-1}(N'(q)(e_j)) = -(f'(q))^{-1}(D_j N(q)) \\
&\overset{(6.4a)}{=} (f'(q))^{-1}\left(\sum_{i=1}^{2} b^i_j(q)\, D_i f(q)\right) = \sum_{i=1}^{2} b^i_j(q)(f'(q))^{-1}(f'(q)(e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{2} b^i_j(q)(e_i).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy W_q mátrixa az (e_1, e_2) bázisban $\left(b^i_j(q)\right)$. □

6.7. Megjegyzések. (1) A Weingarten-operátort az (e_1, e_2) bázisban reprezentáló $(b^i_j(q))$ mátrix általában nem szimmetrikus. Ez nincs ellentmondásban azzal, hogy önadjungált lineáris transzformációt ortonormált bázisra vonatkozóan szimmetrikus mátrix reprezentál, ugyanis $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisa a g_q skaláris szorzatra nézve általában nem ortonormált.

(2) Ha $\tilde{f} = f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezettje az f reguláris paraméterezett felületnek; $\tilde{q} \in \tilde{\mathcal{U}}$, $q := \varphi(\tilde{q})$, akkor $\tilde{f}$ $\tilde{q}$-beli és f q-beli Weingarten-operátorának kapcsolatát a

$$\widetilde{W}_{\tilde{q}} = \varepsilon (\varphi'(\tilde{q}))^{-1} \circ W_q \circ \varphi'(\tilde{q})$$

reláció adja, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint az átparaméterezés irányítástartó, ill. irányításváltó.

Valóban, $\widetilde{W}_{\tilde{q}} := -(\tilde{f}'(\tilde{q}))^{-1} \circ \tilde{N}'(\tilde{q}) \overset{6.1.}{=} -\varepsilon (\tilde{f}'(\tilde{q}))^{-1} \circ (N \circ \varphi)'(\tilde{q}) =$

$= -\varepsilon ((f\circ\varphi)'(\tilde{q}))^{-1} \circ N'(q) \circ \varphi'(\tilde{q}) = -\varepsilon (f'(q) \circ \varphi'(\tilde{q}))^{-1} \circ N'(q) \circ \varphi'(\tilde{q})$

$= -\varepsilon (\varphi'(\tilde{q}))^{-1} \circ (f'(q))^{-1} \circ N'(q) \circ \varphi'(\tilde{q}) = \varepsilon (\varphi'(\tilde{q}))^{-1} \circ W_q \circ \varphi'(\tilde{q})$.

(3) Egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület Weingarten-tenzorán vagy formatenzorán a

$$W : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^2),\ q \longmapsto W_q := -(f'(q))^{-1} \circ N'(q)$$

leképezést értjük, vagyis azt a leképezést, amely minden $q \in \mathcal{U}$ paraméterhez a q-beli Weingarten-tenzort rendeli hozzá.

6.8. Példák. (1) Síkfelület formatenzora. Tekintsük az

$$f : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(s,t) := a + sv + tw \in \mathbb{R}^3$$

paraméterezett síkot, ahol „a" rögzített pontja, v és w lineárisan független vektora $\mathbb{R}^3$-nak. Ekkor

$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 :\quad D_1 f(s,t) = v,\ D_2 f(s,t) = w,\ N(s,t) = \frac{1}{\|v \times w\|} v \times w,$

a Gauss-leképezés tehát konstans. Így

$\forall q \in \mathcal{U} :\quad N'(q) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \implies \forall q \in \mathbb{R}^2 :\ W_q = 0 \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2);$

a síkfelületek formatenzora tehát a zérustenzor (abban az értelemben, hogy W minden $q \in \mathbb{R}^2$-höz $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ zéruselemét rendeli).

(2) <u>Gömbfelület formatenzora.</u> Tekintsük az $S^2(r)$ gömbfelület

$$\begin{cases} f: (s,t) \in U \longmapsto f(s,t) := r(\cos s \cos t,\ \sin s \cos t,\ \sin t) \in \mathbb{R}^3 ; \\ U := \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

geografikus paraméterezését. Alkalmazva az <u>5.16. (1)</u> elvégzett számolások eredményeit,

$$\left(g_{ij}(s,t)\right) = \left(\langle D_i f, D_j f\rangle(s,t)\right) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(g^{ij}(s,t)\right) := \left(g_{ij}(s,t)\right)^{-1} = \frac{1}{r^2\cos^2 t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 t \end{pmatrix};$$

$D_1 D_1 f(s,t) = r(-\cos s \cos t, -\sin s \cos t, 0)$, $D_1 D_2 f(s,t) = r(\sin s \sin t, -\cos s \sin t, 0)$,

$D_2 D_2 f(s,t) = r(-\cos s \cos t, -\sin s \cos t, -\sin t)$;

$b_{11}(s,t) = \langle D_1 D_1 f(s,t), N(s,t)\rangle = -r\cos^2 t$,

$b_{12}(s,t) = b_{21}(s,t) = \langle D_1 D_2 f(s,t), N(s,t)\rangle = 0$,

$b_{22}(s,t) = \langle D_2 D_2 f(s,t), N(s,t)\rangle = -r$.

$W_{(s,t)}$ mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan a

$$\left(b^i_j(s,t)\right) = \left(g^{ij}(s,t)\right)\left(b_{kl}(s,t)\right) = \frac{1}{r^2\cos^2 t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r\cos^2 t & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{r\cos^2 t}\begin{pmatrix} \cos^2 t & 0 \\ 0 & \cos^2 t \end{pmatrix} = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall (s,t) \in U: \quad W_{(s,t)} = -\frac{1}{r} 1_{\mathbb{R}^2} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2),$$

tehát <u>gömb esetén a Weingarten-operátor mindenütt ugyanúgy hat: a $-\frac{1}{r}$-rel való nyújtás operátora.</u>

(3) <u>Egyenes körhenger formatenzora.</u> Legyen $r \in \mathbb{R}^*_+$, $U := \left]0, 2\pi\right[\times \mathbb{R}$, s tekintsük az

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (s,t) \longmapsto f(s,t) := r(\cos s, \sin s, t)$$

parametrizált körhengert. Tetszőleges $(s,t) \in U$ paraméternél

$D_1 f(s,t) = r(-\sin s, \cos s, 0)$

$D_2 f(s,t) = r\ (0, 0, 1)$,

$(D_1 f \times D_2 f)(s,t) = r^2 (\cos s, \sin s, 0)$,

$N(s,t) = (\cos s, \sin s, 0)$;

$D_1 D_1 f(s,t) = r(-\cos s, -\sin s, 0)$,

$D_1 D_2 f(s,t) = D_2 D_1 f(s,t) = (0,0,0)$,

$D_2 D_2 f(s,t) = (0,0,0)$.

Ezek alapján

$$\left(g_{ij}(s,t)\right) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(g^{ij}(s,t)\right) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(b_{ij}(s,t)\right) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

következésképpen $W_{(s,t)}$ mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan

$$\left(b^i_j(s,t)\right) = \left(g^{ij}(s,t)\right)\left(b_{kl}(s,t)\right) = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Innen kiolvasható, hogy

$$W_{(s,t)}(e_1) = -\frac{1}{r}e_1, \quad W_{(s,t)}(e_2) = \underline{0}.$$

Ez az eredmény úgy interpretálható, hogy egy egyenes körhenger formaterzora a keresztmetszet-körök mentén úgy hat, mint a gömbé, az alkotók mentén pedig úgy, mint a síké.

7. A 2. alapforma. Normálgörbület, Meusnier tétele

7.1. Definíció és lemma. Megtartva az előzőekben bevezetett jelöléseket, tekintsünk egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felületet. f 2. alapformáján a

$$(7.1a)\quad \begin{cases} b: \mathcal{U} \longrightarrow L^2_{sym}(\mathbb{R}^2), \quad q \longmapsto b_q \\ \forall\, v, w \in \mathbb{R}^2: \quad b_q(v,w) := g_q\left(W_q(v), w\right) \end{cases}$$

leképezést értjük. Ekkor

$$(7.1b)\quad \forall q \in \mathcal{U};\ v,w \in \mathbb{R}^2: \quad b_q(v,w) = -\left\langle N'(q)(v), f'(q)(w)\right\rangle.$$

b_q mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan a 2. alapmennyiségek q-beli értékei által alkotott $\left(b_{ij}(q)\right) \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix.

Bizonyítás. W_q önadjungáltsága és g_q szimmetriája alapján közvetlenül adódik, hogy W_q valóban szimmetrikus.

A megfelelő definíciók alkalmazásával kapjuk, hogy

$$b_q(v,w) := g_q(W_q(v), w) = \langle f'(q)(W_q(v)), f'(q)(w)\rangle =$$
$$= -\langle N'(q)(v), f'(q)(w)\rangle,$$

tehát (7.1b) teljesül. Ezt felhasználva, b_q (e_1,e_2)-re vonatkozó mátrixának (i,j)-indexű eleme

$$b_q(e_i,e_j) = -\langle N'(q)(e_i), f'(q)(e_j)\rangle = -\langle D_iN(q), D_jf(q)\rangle \overset{(6.2)}{=} b_{ji}(q) =$$
$$= b_{ij}(q).$$

□

<u>7.2. Definíció.</u> Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, az 1. és a 2. alapformáját jelölje g, ill. b.

(1) Kiválasztva egy $q \in \mathcal{U}$ pontot, a

$$k_q : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto k_q(v) := \frac{b_q(v,v)}{g_q(v,v)} = \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)}$$

függvény f q-beli <u>normálgörbület-függvényének</u> nevezzük.

(2) Egy $c = f\circ\gamma : I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ reguláris <u>felületi görbe normálgörbület-függvényén</u> a

$$\varkappa_n(t) := k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \quad t \in I$$

előírással értelmezett függvényt értjük.

<u>7.3. Lemma</u> (<u>Meusnier tétele (1776) – 1. verzió</u>). Legyen $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $c = f\circ\gamma = f\circ\begin{pmatrix}\gamma^1\\ \gamma^2\end{pmatrix} : I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje f-nek. c tetszőleges $t\in I$-beli normálgörbülete megadható a

(7.3a) $$\varkappa_n(t) = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} (b_{ij}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}}{\sum_{k,l=1}^{2} (g_{kl}\circ\gamma)\gamma^{k\prime}\gamma^{l\prime}}(t)$$

formulával, következésképpen <u>egy felület egy adott pontján átmenő, közös érintőegyenessel rendelkező felületi görbéknek megegyezik a normálgörbülete az illető pontban.</u>

Ha speciálisan c egységpályasebességű, akkor

(7.3b) $$\varkappa_n(t) = b_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)), \quad t \in I.$$

<u>Bizonyítás.</u> $\gamma(t) = \sum_{i=1}^{2} \gamma^{i\prime}(t) e_i$, s így

$$\varkappa_n(t) := k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) := \frac{b_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))}{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t))} = \frac{b_{\gamma(t)}\left(\sum_{i=1}^{2}\gamma^{i\prime}(t)e_i, \sum_{j=1}^{2}\gamma^{j\prime}(t)e_j\right)}{g_{\gamma(t)}\left(\sum_{k=1}^{2}\gamma^{k\prime}(t)e_k, \sum_{l=1}^{2}\gamma^{l\prime}(t)e_l\right)}$$
$$= \frac{\sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}(t)\gamma^{j\prime}(t)\, b_{\gamma(t)}(e_i,e_j)}{\sum_{k,l=1}^{2}\gamma^{k\prime}(t)\gamma^{l\prime}(t)\, g_{\gamma(t)}(e_k,e_l)} = \frac{\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}}{\sum_{k,l=1}^{2}(g_{kl}\circ\gamma)\gamma^{k\prime}\gamma^{l\prime}}(t),$$

ez éppen a (7.3a) formula. Ha c egységpályasebességű, akkor

$$g_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) = \langle f'(\gamma(t))(\gamma'(t)), f'(\gamma(t))(\gamma'(t))\rangle =$$
$$= \|(f\circ\gamma)'(t)\|^2 = \|c'(t)\|^2 = 1,$$

s így (7.3b)-t kapjuk. □

<u>7.4. Állítás</u> (Meusnier tétele - 2. verzió). Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tegyük fel, hogy $c = f\circ\gamma : I \to f(U) \subset \mathbb{R}^3$ <u>egységpályasebességű, bireguláris</u> felületi görbe. Ekkor

(7.4a) $\quad b_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) = \varkappa(t)\langle F(t), N(\gamma(t))\rangle = \varkappa(t)\cos\theta(t) \quad (t\in I),$

ahol $\varkappa$ c görbületfüggvénye, $\theta(t)$ pedig az $N(\gamma(t))$ felületi normálisnak és a görbe $F(t)$ főnormálisának a szöge, következésképpen c normálgörbület-függvénye előállítható a

(7.4b) $\quad \varkappa_n = \varkappa(\cos\circ\theta)$

alakban.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Azt mutatjuk meg először, hogy ha $c = f\circ\gamma : I \to f(U)\subset\mathbb{R}^3$ tetszőleges felületi görbe, akkor

(*) $\quad \forall t\in I:\ b_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) = \langle c''(t), N(\gamma(t))\rangle.$

Valóban,

$$b_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) \overset{(7.1b)}{=} -\langle N'(\gamma(t))(\gamma'(t)), f'(\gamma(t))(\gamma'(t))\rangle =$$
$$= -\langle (N\circ\gamma)'(t), (f\circ\gamma)'(t)\rangle = -\langle (N\circ\gamma)', c'\rangle(t).$$

Mivel $\langle c', N\circ\gamma\rangle = 0$, s innen deriválással

$$0 = \langle c', N\circ\gamma\rangle' = \langle c'', N\circ\gamma\rangle + \langle c', (N\circ\gamma)'\rangle,$$

következik, hogy

$$\langle c'', N\circ\gamma\rangle(t) = -\langle (N\circ\gamma)', c'\rangle(t) = b_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)).$$

(2) Tegyük fel ezután, hogy c egységpályasebességű és bireguláris. Ekkor

$$c' = T, \quad c'' = T' \overset{(F1)}{=} \varkappa F,$$

így

<u>(*) jobb oldala</u> $= \langle \varkappa(t) F(t), N(\gamma(t)) \rangle = \varkappa(t) \langle F(t), N(\gamma(t)) \rangle =$
$= \varkappa(t) \cos\theta(t)$,

amivel (7.4a) igazolást nyert. Mivel az egységpályasebességű esetben (7.3b) értelmében $\varkappa_n(t) = b_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))$, (7.4b) valóban közvetlen következménye (7.4a)-nak. □

<u>7.5. Definíció.</u> Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tekintsünk egy $c := f \circ \gamma : I \to f(U) \subset \mathbb{R}^3$ bireguláris felületi görbét. Ha valamely $t_0 \in I$ helyen $F(t_0) = \pm N(\gamma(t_0))$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy c a t_0-beli <u>normálmetszetben</u> van.

<u>7.6. Következmény.</u> Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, $q \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$, s tegyük fel, hogy

$$\|v\|_{g_q} := (g_q(v,v))^{1/2} = 1 .$$

Ekkor $|k_q(v)|$ megkapható egy olyan $c := f \circ \gamma : I \to f(U) \subset \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű, bireguláris felületi görbe t_0-beli görbületeként, amelyre $\gamma(t_0) = q$, $\gamma'(t_0) = v$ teljesül, s amely a t_0-beli normálmetszetben van.

<u>Bizonyítás.</u> $|k_q(v)| = |b_q(v,v)| = |b_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))| =$
$\overset{(7.4a)}{=} |\varkappa(t_0) \langle F(t_0), N(\gamma(t_0)) \rangle| = \varkappa(t_0) |\pm \langle N(\gamma(t_0)), N(\gamma(t_0)) \rangle|$
$= \varkappa(t_0)$. □

<u>7.7. Példa.</u> Tekintsük az $S^2(r)$ gömbfelület <u>6.8.</u> (2)-ben alkalmazott $f: U \to f(U) \subset S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ geografikus paraméterezését. A <u>6.8.</u> (2)-ben nyert eredmény alkalmazásával tetszőleges $q \in U$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ esetén

$$k_q(v) = \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)} = -\frac{1}{r} \frac{g_q(v,v)}{g_q(v,v)} = -\frac{1}{r},$$

tehát a normálgörbület értéke minden pontban, minden irányban ugyanaz: $-\frac{1}{r}$. 7.6. alapján ebből az is következik, hogy $S^2(r)$ egy biregulár̈is felületi görbéje akkor és csak akkor van normálmetszetben, ha főkör parametrezése.

Valóban, egy normálmetszetbeli $c: I \longrightarrow S^2(r)$ (bireguláris) görbe görbületfüggvényére 7.6.-ra tekintettel

$$\forall t \in I: \quad \varkappa(t) = |\varkappa_n(t)| = \frac{1}{r}$$

kell, hogy teljesüljön, így (v.ö. 2.14.) c r-sugarú gömbi körnek, azaz főkörnek parametrezése.

Később látni fogjuk, hogy egy gömbfelület reguláris felületi görbéi automatikusan biregulárisak.

8. A Gauss- és a Minkowski-görbület. Rodrigues tétele

8.1. Definíció. Tekintsünk egy $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felületet.

(1) Tetszőleges $q \in U$ esetén a q-beli Weingarten-operátor determinánsát f q-beli Gauss-görbületének, a Weingarten-operátor nyomának felét f q-beli Minkowski-görbületének nevezzük. A q-beli Gauss-, ill. Minkowski-görbületet $K(q)$-val, ill. $H(q)$-val jelöljük, tehát

$$\boxed{K(q) := \det W_q \,, \quad H(q) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} W_q}\,.$$

A $K: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $q \longmapsto K(q)$, ill. a $H: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $q \longmapsto H(q)$ függvényt a felület Gauss-, ill. Minkowski-görbületének hívjuk.

(2) Azt mondjuk, hogy az f parametrizált felület egy $q \in U$ pontban

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{elliptikus, ha } K(q) > 0, \\ \text{hiperbolikus, ha } K(q) < 0, \\ \text{parabolikus, ha } K(q) = 0, \text{ de } H(q) \neq 0 \end{array}}\,.$$

(3) Egy $q \in U$ pontot umbilikus pontnak (köldökpontnak) nevezünk, ha a q-beli Weingarten-operátor skalárral való szorzásként hat (homotécia), azaz van olyan λ valós szám, hogy $W_q = \lambda 1_{\mathbb{R}^2}$. Ha speciálisan $\lambda = 0$, s így W_q a zérustranszformáció, síkpontról beszélünk. Egy olyan umbilikus pontot, amely nem síkpont, valódi umbilikus pontként is említünk.

(4) A q-beli Weingarten-operátor sajátvektorait q-beli főirányoknak, a megfelelő sajátértékeket a q-beli fő-görbületeknek hívjuk. Ha $v = (v^1, v^2) = v^1 e_1 + v^2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ vektor q-beli főirány, akkor az $f'(q)(v) = v^1 D_1 f(q) + v^2 D_2 f(q)$ érintővektorra is használjuk a főirány elnevezést. A q-beli főgörbületekre a $k_1(q)$ és a $k_2(q)$ jelöléseit használjuk, megállapodva abban, hogy $k_1(q) \leq k_2(q)$. A $k_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $q \longmapsto k_i(q)$ ($i \in \{1, 2\}$) függvényeket főgörbület-függvényeknek mondjuk.

8.2. Megjegyzés. Tekintsük az $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület egy $\tilde{f} = f \circ \varphi : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezettjét. 6.7(2) értelmében f és $\tilde{f}$ formatenzora között a

$$\widetilde{W}_{\tilde{q}} = \varepsilon (\varphi'(\tilde{q}))^{-1} \circ W_q \circ \varphi'(\tilde{q}); \quad \tilde{q} \in \tilde{U},\ q := \varphi(\tilde{q}),\ \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

kapcsolat áll fenn. Innen leolvasható:

(1) $\forall\, \tilde{q} \in \tilde{U}$: $\det \widetilde{W}_{\tilde{q}} = \det W_q$, s így $\tilde{K} = K \circ \varphi$, tehát a Gauss-görbület paramétertranszformációval szemben invariáns;

(2) $\forall\, \tilde{q} \in \tilde{U}$: $\operatorname{tr} \widetilde{W}_{\tilde{q}} = \varepsilon \operatorname{tr} W_q$, s így $\tilde{H} = \varepsilon (H \circ \varphi)$ – a Minkowski-görbület irányítástartó paramétertranszformációval szemben invariáns, irányításváltó átparaméterezés során előjelet vált.

8.3. Tétel (O. Rodrigues). Legyen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $q \in U$.

(1) f q-beli főgörbületei léteznek, s ezek éppen a q-beli normálgörbület-függvény szélsőértékei.

(2) $\mathbb{R}^2$-nek létezik a q-beli főirányok által alkotott, a g_q skaláris szorzatra nézve ortonormált bázisa.

(3) Ha q umbilikus pont, akkor $\mathbb{R}^2$ minden nemzérus vektora főirány és a 2. alapforma q-beli értéke skalárszorosa az 1. alapforma q-beli értékének:

$$b_q = \lambda g_q , \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) A Gauss-görbület a főgörbületek szorzatával, a Minkowski-görbület azok számtani közepével egyenlő.

(5) A q-beli Gauss-, ill. Minkowski-görbület kiszámítható a

$$\underline{K(q) = \det\left(b^i_j(q)\right) = \frac{\det(b_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))}}, \text{ ill. a } \underline{H(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} b^i_i(q)}$$

formula alapján.

(6) $H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1-k_2)^2$, következésképpen a H^2-K függvény seholsem vesz fel negatív értéket. A Gauss- és a Minkowski-görbület ismeretében a főgörbületfüggvények a

$$\underline{k_1 = H - \sqrt{H^2-K}}, \text{ ill. a } \underline{k_2 = H + \sqrt{H^2-K}}$$

formulával nyerhetők.

<u>Bizonyítás.</u> (1) W_q önadjungált lineáris transzformációja a g_q skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^2$ euklideszi vektortérnek (<u>6.6</u> (2)), ezért <u>0.21</u> alapján a

$$k_q : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto k_q(v) := \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)}$$

függvény, f q-beli normálgörbületfüggvénye, az

$$S^1 := \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid g_q(p,p) = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$$

egységkörön felveszi a szélsőértékeit, s ezek W_q-nak sajátértékei, azaz q-beli főgörbületek.

(2) A spektráltételből (<u>0.22</u>) következik, hogy $\mathbb{R}^2$-nek létezik olyan, g_q-ra nézve ortonormált bázisa, amelyet W_q sajátvektorai, tehát q-beli főirányok alkotnak.

(3) Ha q umbilikus pont, akkor a definíció értelmében $W_q = \lambda 1_{\mathbb{R}^2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben min-

den $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vektor sajátvektora W_q-nak, s így főirány.
Tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$b_q(v,w) := g_q(W_q(v), w) = g_q(\lambda v, w) = \lambda g_q(v,w),$$

tehát $b_q = \lambda g_q$.

(4) A q-beli főirányok alkotta (g_q-ra nézve ortonormált) bázisra vonatkozóan a Weingarten-operátort a $\begin{pmatrix} k_1(q) & 0 \\ 0 & k_2(q) \end{pmatrix}$ diagonálmátrix reprezentálja, következésképpen

$$K(q) := \det W_q = k_1(q) k_2(q), \quad H(q) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} W_q = \frac{1}{2}(k_1(q) + k_2(q)).$$

(5) Mivel W_q mátrixa az (e_1, e_2) kanonikus bázisban a $(b^i_j(q)) = (g^{ij}(q))(b_{ij}(q))$ mátrix, a $K(q)$-ra és $H(q)$-ra felírt formulák közvetlenül adódnak.

(6) A (4)-ben mondottak figyelembevételével

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0.$$

Tetszőleges $q \in U$ esetén W_q karakterisztikus polinomja

$$P_{W_q}(t) \overset{0.18(5)}{=} t^2 - (\operatorname{tr} W_q)t + \det W_q = t^2 - 2H(q)t + K(q);$$

ennek zérushelyei, a q-beli főgörbületek tehát

$$k_1(q) = \frac{2H(q) - \sqrt{4(H(q))^2 - 4K(q)}}{2} = H(q) - \sqrt{(H(q))^2 - K(q)},$$

$$k_2(q) = \frac{2H(q) + \sqrt{4(H(q))^2 - 4K(q)}}{2} = H(q) + \sqrt{(H(q))^2 - K(q)},$$

ami igazolja a k_1 és a k_2 függvény K-val és H-val való kifejezésére vonatkozó észrevételt. □

<u>8.4. Megjegyzések.</u> (1) Tekintettel a most nyert $K = k_1 k_2$, ill. $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ összefüggésekre, a Gauss-görbületet szokás <u>szorzatgörbületnek</u>, a Minkowski-görbületet pedig <u>középgörbületnek</u> is nevezni.

(2) Ha $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ főirányai f-nek q-ban, s így merőlegesek a g_q skaláris szorzatra nézve, akkor

$$0 = g_q(v_1, v_2) = \langle f'(q)(v_1), f'(q)(v_2) \rangle$$

miatt $f'(q)(v_1)$ és $f'(q)(v_2)$ $\mathbb{R}^3$ kanonikus skaláris szorzatára nézve, s így „euklideszi értelemben" merőleges érintővektorai f-nek.

8.5. Következmény (Euler formulája a normálgörbületre).
Legyen $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tegyük fel, hogy (v_1, v_2) $q \in \mathcal{U}$-beli főirányok alkotta ortonormált bázisa a g_q skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^2$ euklideszi vektortérnek. Ha $v = (\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2$, akkor a q-beli normálgörbületfüggvény v-ben felvett értékét megadja a

$$\underline{k_q(v) = k_1(q)\cos^2\alpha + k_2(q)\sin^2\alpha}$$

ún. Euler-formula, ahol $k_i(q) = k_q(v_i)$ $(i \in \{1,2\})$ a q-beli főgörbületek.

Bizonyítás. Mivel $g_q(v,v) = \cos^2\alpha\, g_q(v_1,v_1) + 2\sin\alpha\cos\alpha\, g_q(v_1,v_2)$
$+ \sin^2\alpha\, g_q(v_2,v_2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$k_q(v) = g_q(W_q(v), v) = g_q(W_q((\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2, v) =$$
$$= g_q((\cos\alpha)k_1(q)v_1 + (\sin\alpha)k_2(q)v_2, v) =$$
$$= k_1(q)\cos\alpha\, g_q(v_1,v) + k_2(q)\sin\alpha\, g_q(v_2,v)$$
$$\overset{(0.19)}{=} k_1(q)\cos^2\alpha + k_2(q)\sin^2\alpha .$$ □

9. Néhány speciális felületosztály

9.1. Definíció. Tekintsük a kanonikus skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^3$ valós vektorteret. Legyen adva egy $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nemzérus önadjungált lineáris transzformáció, egy $a \in \mathbb{R}^3$ vektor és egy α valós szám. Ha

(9.1) $\quad F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto F(v) := \langle \varphi(v), v\rangle + 2\langle a, v\rangle + \alpha$,

akkor az $M := F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmazt *másodrendű felületnek* nevezzük. Amennyiben van olyan $p_0 \in M$ pont, hogy $\varphi(p_0) + a = \underline{0}$, úgy azt mondjuk, hogy p_0 *csúcspontja* M-nek, maga M pedig *másodrendű kúp*.

9.2. Lemma. Ha egy másodrendű felület nem kúp, akkor felület a szó differenciálgeometriai értelmében (ld. 4.9 (2)).

Bizonyítás. Megtartva a definíció jelöléseit, a (9.1)-gyel megadott F függvény differenciálható, hiszen egy kvadratikus, egy lineáris és egy konstans függvény összege. A lineáris tag deriváltja minden pontban önmaga, a konstans tagé 0. Kiszámítjuk az

$$F_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto F_1(v) := \langle \varphi(v), v \rangle$$

kvadratikus függvény deriváltját. Tetszőleges $p \in \mathbb{R}^3$ pont, $h \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén, felhasználva φ önadjungáltságát is,

$$F_1'(p)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{F_1(p+th) - F_1(p)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big(\langle \varphi(p+th), p+th \rangle - \langle \varphi(p), p \rangle \Big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \Big(\langle \varphi(p), p \rangle + 2t \langle \varphi(p), h \rangle + t^2 \langle \varphi(h), h \rangle - \langle \varphi(p), p \rangle \Big)$$

$$= \lim_{t \to 0} \Big(2 \langle \varphi(p), h \rangle + t \langle \varphi(h), h \rangle \Big) = 2 \langle \varphi(p), h \rangle .$$

Ezek alapján

$$\forall p \in \mathbb{R}^3, \forall h \in \mathbb{R}^3 : \quad F'(p)(h) = 2\langle \varphi(p), h \rangle + 2\langle a, h \rangle = \langle 2(\varphi(p) + a), h \rangle,$$

következésképpen (ld. 0.13)

$$\forall p \in \mathbb{R}^3 : \quad \operatorname{grad} F(p) = 2\,(\varphi(p) + a)\,.$$

Ha $M := F^{-1}(0)$ nem kúp, akkor így $\operatorname{grad} F$ seholsem tűnik el M pontjaiban, tehát a 0 reguláris értéke F-nek, s így 4.13. értelmében M felület. □

9.3. Definíció. Az $\mathbb{R}^3$ euklideszi vektortér két másodrendű felületét metrikusan ekvivalensnek nevezzük, ha $\mathbb{R}^3$-nak van olyan izometriája, amely a másodrendű felületek egyikét a másikba transzformálja.

9.4. Állítás. Ha $\mathbb{R}^3$ egy másodrendű felülete nem kúp, akkor metrikusan ekvivalens az alábbi egyenletekkel megadott másodrendű felületek egyikével, de csakis egyikével:

(1) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $\alpha\geqq\beta\geqq\gamma>0$ – α,β,γ tengelyű ellipszoid;

(2) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $\alpha\geqq\beta>0,\ \gamma\neq 0$ – α,β,γ tengelyű egyköpenyű hiperboloid;

(3) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, $\alpha\beta\gamma\neq 0$ – α,β,γ tengelyű kétköpenyű hiperboloid;

(4) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\alpha\geqq\beta$ – α,β tengelyű elliptikus henger;

(5) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ – α,β tengelyű hiperbolikus henger;

(6) $x=\pm\alpha$, $\alpha\neq 0$ – 2α távolságú párhuzamos síkpár;

(7) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2z$, $\alpha\geqq\beta$ – α,β tengelyű elliptikus paraboloid;

(8) $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=2z$ – α,β tengelyű hiperbolikus paraboloid;

(9) $\frac{x^2}{\alpha^2}=2z$, $\alpha\neq 0$ – parabolikus henger. Δ

9.5. Definíció. Legyen $I\subset\mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $\gamma: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ és $\delta: I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe, s hogy δ sehol sem veszi fel a zérusvektort. Az

(9.5) $f: I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (s,t)\longmapsto f(s,t):=\gamma(s)+t\delta(s)$

leképezést paraméterezett vonalfelületnek nevezzük, amelynek γ az alapgörbéje, δ a vezető görbéje. Tetszőlegesen rögzített $s_0\in I$ esetén a

$$t\in\mathbb{R}\longmapsto f(s_0,t)=\gamma(s_0)+t\delta(s_0)$$

paraméterezett egyenest a vonalfelület egy alkotóegyenesének hívjuk.

9.6. Megjegyzés. Tekintve a (9.5)-tel megadott vonalfelületet, tetszőleges $(s,t)\in I\times\mathbb{R}$ esetén

$$D_1 f(s,t) = \gamma'(s) + t\delta'(s), \quad D_2 f(s,t) = \delta(s),$$

$$D_1 f(s,t) \times D_2 f(s,t) = \gamma'(s) \times \delta(s) + t\delta'(s) \times \delta(s).$$

f akkor és csak akkor reguláris $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$-ben, ha $\gamma'(s) \times \delta(s) + t\delta'(s) \times \delta(s) \neq \underline{0}$; $\gamma'(s)$ és $\delta(s)$ lineáris függetlensége esetén elegendően kis abszolút értékű t-re ez biztosan teljesül.

9.7. Speciális vonalfelületek

(1) Érintőfelület Tetszőleges $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett görbe esetén az

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := \gamma(s) + t\gamma'(s)$$

leképezés vonalfelület, amelyet γ érintőfelületének hívunk.

Tegyük fel, hogy γ bireguláris, s legyen $U := I \times \mathbb{R}^*$. Ekkor

$$\forall (s,t) \in U: \ (D_1 f \times D_2 f)(s,t) = (\gamma'(s) + t\gamma''(s)) \times \gamma'(s) = t(\gamma''(s) \times \gamma'(s)) \neq \underline{0},$$

következésképpen $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület. Ennek képe két összefüggő, diszjunkt halmaz uniója, amelyeknek $\mathrm{Im}(\gamma)$ a közös határhalmaza.

(2) Általánosított kúpok Legyen $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ reguláris, $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ sehol sem $\underline{0}$ paraméterezett görbe, s tekintsük az

$$\tilde{f} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto \tilde{f}(s,t) := \alpha(s) + t\beta(s)$$

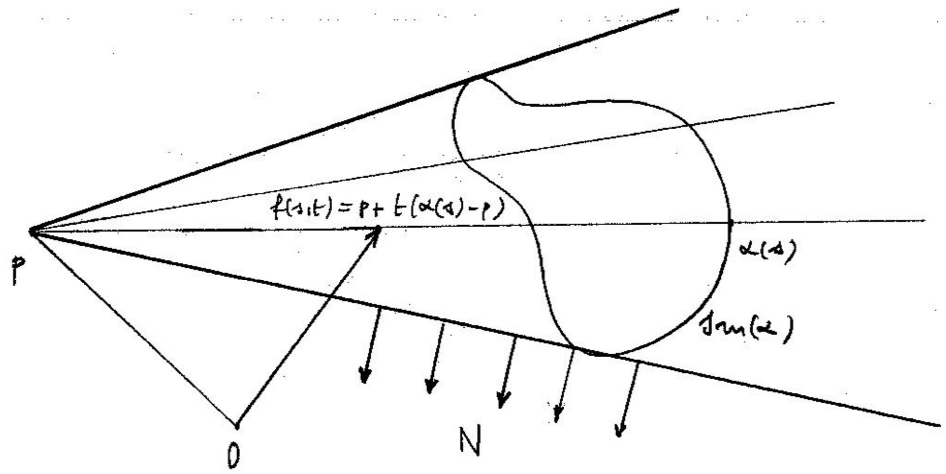
vonalfelületet. Tegyük fel, hogy az $\ell_s := \alpha(s) + \mathrm{span}(\beta(s))$ generátoregyenes minden $s \in I$ esetén átmegy egy rögzített $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Im}(\alpha)$ ponton. (Ha α síkgörbe, azt kívánjuk meg, hogy a p pont nincs a görbe síkjában.) Ekkor minden $s \in I$-hez megadható olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy $\underline{p = \alpha(s) + t\beta(s)}$, következésképpen $\mathrm{span}(\beta(s)) = \mathrm{span}(p - \alpha(s)) = \mathrm{span}(\alpha(s) - p)$ $(s \in I)$, és $\mathrm{Im}\,\tilde{f}$ paraméterezhető az

$$f : (s,t) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto f(s,t) := p + t(\alpha(s) - p) \qquad (*)$$

leképezéssel is. Az így paraméterezhető felületeket általánosított kúpoknak nevezzük, a $(*)$-ban szereplő p pontot a kúp csúcspontjának hívjuk. Mivel tetszőleges $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$ esetén

$$D_1 f(s,t) = t\alpha'(s), \quad D_2 f(s,t) = \alpha(s) - p,$$

f akkor és csak akkor reguláris egy (s,t) pontban, ha $t \neq 0$, és az $(\alpha'(s), \alpha(s) - p)$ vektorpár lineárisan független. Tegyük fel a továbbiakban f regularitását!



$$\forall\,(s,t)\in I\times\mathbb{R}^* :\quad N(s,t)\parallel \alpha'(s)\times(\alpha(s)-p)\,,\qquad \text{így}$$

$$W_{(s,t)}(e_2) = -\left(f'(s,t)\right)^{-1}\circ N'(s,t)(e_2) = -\left(f'(s,t)\right)^{-1} D_2 N(s,t) =$$

$$= -\left(f'(s,t)\right)^{-1}(\underline{0}) = \underline{0} = 0\cdot e_2\,.$$

Ez azt jelenti, hogy e_2 minden $(s,t)\in I\times\mathbb{R}^*$ pontban főirányt reprezentál, amelyhez 0 főgörbület tartozik; így f Gauss-görbülete mindenütt eltűnik.

A zérus Gauss-görbülettel rendelkező felületeket **lapos** (flat) felületeknek hívjuk.

(3) **Általánosított hengerek** Általánosított hengeren olyan vonalfelületet értünk, amelynek generátoregyenesei párhuzamosak. Közvetlenül adódik, hogy ezek

$$f : I\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad (s,t)\longmapsto f(s,t) := \gamma(s)+t\vec{v}$$

alakú parametrizált felületek, ahol $\gamma : I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ reguláris görbe, $\vec{v}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\underline{0}\}$.

$$\forall\,(s,t)\in I\times\mathbb{R} :\quad D_1 f(s,t)\times D_2 f(s,t) = \gamma'(s)\times\vec{v}\ ,$$

így f akkor és csak akkor reguláris, ha $\gamma'(s)\times\vec{v}$ sehol sem zérus. Mivel

$$\forall\,(s,t)\in I\times\mathbb{R} :\quad N(s,t)\parallel\gamma'(s)\times\vec{v}\quad\Longrightarrow\quad D_2 N(s,t) = \underline{0}\,,$$

az előbb látott módon következik, hogy f Gauss-görbülete mindenütt eltűnik, tehát a (reguláris) általánosított hengerek is lapos felületek.

(4) A másodrendű felületek közül az <u>egyköpenyű hiperboloid</u> és a <u>hiperbolikus paraboloid vonalfelület</u>, mégpedig <u>kétszeres vonalfelület</u>: paraméterezhetők úgy, hogy az alapgörbe minden pontjára pontosan két generátoregyenes illeszkedik. Valóban, az

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

egyenletű egyköpenyű hiperboloidnak

$$f_1:(s,t)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R}\longmapsto f_1(s,t)=(\alpha\cos s,\beta\sin s,0)+$$
$$+t(-\alpha\sin s,\beta\cos s,\gamma)\in\mathbb{R}^3$$

és

$$f_2:(s,t)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R}\longmapsto f_2(s,t):=(\alpha\cos s,\beta\sin s,0)+t(\alpha\sin s,-\beta\cos s,\gamma)\in\mathbb{R}^3$$

egyaránt a kívánt tulajdonságú paraméterezése.

Az

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=2z$$

egyenletű hiperbolikus paraboloid esetén például az

$$f_1:(s,t)\in\mathbb{R}^2\longmapsto f_1(s,t):=(\alpha s,0,\tfrac{1}{2}s^2)+t(\alpha,\beta,s)\in\mathbb{R}^3$$

és az

$$f_2:(s,t)\in\mathbb{R}^2\longmapsto f_2(s,t):=(\alpha s,0,\tfrac{1}{2}s^2)+t(\alpha,-\beta,s)\in\mathbb{R}^3$$

leképezés ad kívánt tulajdonságú paraméterezést.

Klasszikus eredmény, hogy <u>minden olyan kétszeres vonalfelület, amelyre $K<0$ teljesül, másodrendű felület.</u>

<u>9. 8. Állítás.</u> Legyen $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $h:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ C^3-osztályú függvény, s tekintsük az

$$f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (s,t)\longmapsto f(s,t):=(s,t,h(s,t))$$

Monge-beágyazást.

(1) Bevezetve a $w:=\sqrt{1+(D_1h)^2+(D_2h)^2}$ jelölést, f Gauss-féle háromélmezője, 1. és 2. alapmennyiségei, valamint a Gauss-görbülete a

$$\boxed{\begin{gathered} D_1 f = (1, 0, D_1 h)\,,\quad D_2 f = (0, 1, D_2 h)\,,\quad N = \frac{1}{w}(-D_1 h, -D_2 h, 1)\,; \\ (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + (D_1 h)^2 & (D_1 h)(D_2 h) \\ (D_1 h)(D_2 h) & 1 + (D_2 h)^2 \end{pmatrix},\quad (b_{ij}) = \frac{1}{w}\begin{pmatrix} D_1 D_1 h & D_1 D_2 h \\ D_2 D_1 h & D_2 D_2 h \end{pmatrix}, \\ K = \frac{1}{w}\det(D_i D_j h) \end{gathered}}$$

formulával adható meg.

(2) Tegyük fel, hogy az f Monge-beágyazás eleget tesz a következő feltételeknek:

(i) $\underline{0} = (0,0) \in \mathcal{U}$; $h(\underline{0}) = D_1 h(\underline{0}) = D_2 h(\underline{0}) = 0$;

(ii) $e_1 = (1,0)$ és $e_2 = (0,1)$ főirányai f-nek $\underline{0}$-ban.

Ekkor az f-et a $\underline{0}$-ban másodrendben approximáló felület a

$$\boxed{k_1(\underline{0})\,x^2 + k_2(\underline{0})\,y^2 = 2z},$$

egyenletű másodrendű felület, ahol $k_1(\underline{0})$ és $k_2(\underline{0})$ a $\underline{0}$-beli főgörbületek. Ez a másodrendű felület

<u>elliptikus paraboloid</u> $\Leftrightarrow K(\underline{0}) = k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) > 0 \Longleftrightarrow$ a $\underline{0}$ <u>elliptikus pont</u> ;

<u>hiperbolikus paraboloid</u> $\Leftrightarrow K(\underline{0}) = k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) < 0 \Leftrightarrow$ a $\underline{0}$ <u>hiperbolikus pont</u> ;

<u>parabolikus henger</u> $\Longleftrightarrow \begin{cases} k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) = 0 \\ k_1(\underline{0}) + k_2(\underline{0}) \neq 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ a $\underline{0}$ <u>parabolikus pont</u>.

<u>Bizonyítás.</u> Az (1)-beli formulák közvetlen, egyszerű számolással adódnak. Ezek és (2)/(i) figyelembevételével

$$(g_{ij}(\underline{0})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad (b_{ij}(\underline{0})) = \begin{pmatrix} D_1 D_1 h(\underline{0}) & D_1 D_2 h(\underline{0}) \\ D_2 D_1 h(\underline{0}) & D_2 D_2 h(\underline{0}) \end{pmatrix} = (b^i_j(\underline{0})).$$

($(g_{ij}(\underline{0})) = 1_2$ folytán a (2)/(ii) feltétel konzisztens: e_1 és e_2 valóban merőleges a $(g_{ij}(\underline{0}))$-lal megadott skaláris szorzatra nézve.) $(b^i_j(0))$ ismeretében leírhatjuk a $W_{\underline{0}}$ Weingarten-operátor hatását:

$$W_{\underline{0}}(e_1) = b^1_1(\underline{0})e_1 + b^2_1(\underline{0})e_2 = D_1D_1h(\underline{0})e_1 + D_2D_1h(\underline{0})e_2,$$
$$W_{\underline{0}}(e_2) = b^1_2(\underline{0})e_1 + b^2_2(\underline{0})e_2 = D_1D_2h(\underline{0})e_1 + D_2D_2h(\underline{0})e_2.$$

Mivel a (2)/(iii) feltétel értelmében mind e_1, mind pedig e_2 főirány, ezek a vektorok sajátvektorai $W_{\underline{0}}$-nak, s így a most felírt relációkból

$$D_2D_1h(\underline{0}) = D_1D_2h(\underline{0}) = 0, \quad D_1D_1h(\underline{0}) = k_1(\underline{0}), \quad D_2D_2h(\underline{0}) = k_2(\underline{0})$$

adódik. Ily módon az függvény $\underline{0}$-beli másodfokú Taylor-polinomja

$$\begin{aligned} T(x^1,x^2) &= h(\underline{0}) + D_1h(\underline{0})x + D_2h(\underline{0})y + \\ &+ \frac{1}{2}\left(D_1D_1h(\underline{0})x^2 + 2D_1D_2h(\underline{0})xy + D_2D_2h(\underline{0})y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(k_1(\underline{0})x^2 + k_2(\underline{0})y^2\right), \end{aligned}$$

Ez másodrendben approximálja f-et; a grafikonja az

$$z = \frac{1}{2}\left(k_1(\underline{0})x^2 + k_2(\underline{0})y^2\right)$$

egyenletű másodrendű felület, amely a 9.4.-ben leírt osztályozás figyelembevételével elliptikus paraboloid, hiperbolikus paraboloid, ill. parabolikus henger aszerint, amint $k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) > 0$, $k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) < 0$, ill. $k_1(\underline{0})k_2(\underline{0}) = 0$, de $k_1(\underline{0})+k_2(\underline{0}) \neq 0$. □

<u>9. 9. Tétel.</u> Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő nyílt halmaz, s legyen $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. <u>Akkor és csak akkor teljesül, hogy U minden pontja umbilikus pont, ha $\mathrm{Im}(f)$ egy síknak vagy egy gömbfelületnek része.</u>

<u>Bizonyítás.</u> (1) A 6. 8 /(1), (2) példákban látottak szerint parametrizált síkfelület esetén minden U-beli pont síkpont, parametrizált gömbfelület esetén pedig valódi umbilikus pont. Ebben a két esetben tehát U pontjai umbilikusak.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $q \in U$ pont umbilikus pont. Ekkor van olyan $\lambda: U \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\forall q \in U: \quad W_q = \lambda(q) 1_{\mathbb{R}^2}.$$

Mivel $W_q := -(f'(q))^{-1} \circ N'(q)$, ez a reláció átírható az

$$N'(q) = -\lambda(q)\, f'(q) \quad , \quad q \in U$$

alakba. Figyelembe véve, hogy

$$N'(q)(e_i) = D_i N(q), \quad f'(q)(e_i) = D_i f(q) \quad , \quad i \in \{1,2\},$$

ez utóbbi összefüggés a

(*) $$D_1 N = -\lambda D_1 f \ , \quad D_2 N = -\lambda D_2 f$$

relációkkal ekvivalens. Innen kiolvasható, hogy a λ függvény differenciálható. (*)-ból az első reláció D_2, a második D_1 szerinti deriválásával kapjuk, hogy

$$D_2 D_1 N = -(D_2 \lambda) D_1 f - \lambda D_2 D_1 f \ , \quad D_1 D_2 N = -(D_1 \lambda) D_2 f - \lambda D_1 D_2 f .$$

f C^3-osztályú volta miatt N C^1-osztályú, ezért $D_2 D_1 N = D_1 D_2 N$, (és persze $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$), s így

$$(D_1 \lambda) D_2 f - (D_2 \lambda) D_1 f = \underline{0}$$

következik. Mivel $D_1 f$ és $D_2 f$ pontonként lineárisan független, ez csak úgy teljesülhet, hogy $D_1 \lambda = D_2 \lambda = 0$, ebből pedig U összefüggősége miatt az adódik, hogy <u>a λ függvény konstans.</u>

(i) Ha λ a $\{0\}$ értékkészletű konstans függvény, akkor (*)-ból azt kapjuk, hogy $D_1 N = D_2 N = 0$, s így az N leképezés is konstans, s ezért ekkor $\mathrm{Im}(f)$ sík, vagy annak része.

(ii) Ha λ nemzérus konstans függvény, akkor (*) a

$$D_1\left(\frac{1}{\lambda} N + f\right) = D_2\left(\frac{1}{\lambda} N + f\right) = 0$$

alakba rendezhető át, amiből az $\frac{1}{\lambda} N + f$ leképezés konstans volta következik. Ekkor tehát van olyan $p_0 \in \mathbb{R}^3$ pont, hogy

$$\forall q \in U : \left(\frac{1}{\lambda} N + f\right)(q) = p_0 \implies \forall q \in U : \ \| f(q) - p_0 \| = \left\| -\frac{1}{\lambda} N(q) \right\| = \frac{1}{|\lambda|} .$$

Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben $\mathrm{Im}(f)$ p_0 középpontú, $\frac{1}{|\lambda|}$ sugarú gömbfelület része. □

10. Geodetikusok

10.1. Definíció. Egy reguláris paraméterezett felület egy reguláris felületi görbéjét *geodetikusnak* nevezzük, ha tetszőleges pontbeli gyorsulásvektora merőleges a felület illető pontbeli érintősíkjára. Egy reguláris felületi görbét *pregeodetikusnak* mondunk, ha átparaméterezhető geodetikussá.

10.2. Állítás. Az $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület egy $c = f \circ \gamma : I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje pontosan akkor geodetikus, ha eleget tesz a

(G) $$\boxed{c'' - \langle c'', N \circ \gamma \rangle N \circ \gamma = 0}$$

feltételnek.

Bizonyítás. c geodetikusa f-nek $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall t \in I: c''(t) \perp \operatorname{span}(D_1 f(\gamma(t)), D_2 f(\gamma(t)))$ $\Longleftrightarrow \forall t \in I: c''(t) \parallel N(\gamma(t)) \Longleftrightarrow$ van olyan $h: I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy $c'' = h(N \circ \gamma)$. Ha ez utóbbi relációban vesszük mindkét oldal $N \circ \gamma$-val való skaláris szorzatát, azt kapjuk, hogy $h = \langle c'', N \circ \gamma \rangle$, tehát c valóban akkor és csak akkor geodetikus, ha eleget tesz a (G) relációnak. □

10.3. Következmény. A geodetikusok pályasebessége konstans.

Bizonyítás. Megtartva 10.2. jelöléseit,
$$(\|c'\|^2)' = \langle c', c' \rangle' = 2\langle c', c'' \rangle \overset{(G)}{=} 2\langle c', \langle c'', N \circ \gamma \rangle N \circ \gamma \rangle = 0,$$
hiszen $c' \perp N \circ \gamma$. Ebből következik, hogy a $\|c'\|^2$ függvény konstans, s így a $\|c'\|$ pályasebesség is az. □

10.4. Állítás. (1) Ha egy reguláris paraméterezett felület egy felületi görbéje konstans pályasebességű egyenes, akkor geodetikus.

(2) A (reguláris, paraméterezett) síkfelületek geodetikusai a konstans pályasebességű, paraméterezett egyenesek és csakis ezek.

Bizonyítás. Az (1) megállapítás és részben a (2) adódik abból, hogy a konstans pályasebességű paraméterezett egyenesek gyorsulása $\underline{0}$, s így (G) automatikusan teljesül. Azt kell még belátnunk, hogy ha

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := a + sv + tw$$

paraméterezett sík és $c = f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ geodetikusa f-nek, akkor c paraméterezett egyenes.

Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy v és w merőleges egységvektorok; ekkor f Gauss-leképezése az

$$N : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto N(s,t) = v \times w \in S^2$$

konstans leképezés. c geodetikussága miatt egyrészt

(*) $$c'' \parallel N \circ \gamma,$$

a definíció értelmében. Másrészt a $\langle c', N \circ \gamma \rangle = 0$ relációból deriválás után, N konstans volta miatt azt kapjuk, hogy

(**) $$\langle c'', N \circ \gamma \rangle = 0.$$

(*) és (**) alapján $c'' = \underline{0}$ következik, ami (ld. 2.4) ekvivalens azzal, hogy c paraméterezett egyenes. □

<u>10. 5. Lemma.</u> Legyen $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tegyük fel, hogy $c := f \circ \gamma : I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű, bireguláris geodetikusa f-nek. Ha c Frenet-féle háromélmezője (T, F, B), görbülete és torziója $\varkappa$, ill. τ, akkor

$$\forall\, t \in I : \quad f'(\gamma(t)) \circ W_{\gamma(t)} = \pm (\varkappa T - \tau B)(t).$$

<u>Bizonyítás.</u> Mivel c egységpályasebességű, az első Frenet-formula azt adja, hogy $c'' = T' = \varkappa F$. c geodetikussága miatt $c'' \parallel N \circ \gamma$, így $F \parallel N \circ \gamma$ következik, ami csak úgy lehetséges, hogy $F = \pm (N \circ \gamma)$, hiszen az $F : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és az $N \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ függvény egyaránt egységvektorokat vesz föl.
Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I : \quad W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &:= -\left(f'(\gamma(t))\right)^{-1} \circ N'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \\ &= -\left(f'(\gamma(t))\right)^{-1}\left(N \circ \gamma\right)'(t) = \mp \left(f'(\gamma(t))\right)^{-1}(F'(t)) \\ &\overset{(F2)}{=} \pm \left(f'(\gamma(t))\right)^{-1}\left(\varkappa T - \tau B\right)(t),\end{aligned}$$

ahonnan $$f'(\gamma(t)) \circ W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \pm (\varkappa T - \tau B)(t).$$ □

<u>10.6. Lemma.</u> Egy r sugarú gömbfelület reguláris felületi görbéinek görbületfüggvényére $\varkappa \geqq \frac{1}{r}$ teljesül, következésképpen a reguláris gömbi görbék automatikusan bireguláris ak.

<u>Bizonyítás.</u> Az általánosság sérelme nélkül föltehetjük, hogy az adott gömbfelület az origó középpontú $S^2(r)$ gömbfelület, s hogy a vizsgált $c: I \longrightarrow S^2(r)$ felületi görbe egységpálya-sebességű. Ekkor $T = c'$, és $\mathrm{Im}(c) \subset S^2(r)$ miatt a $\langle c, c\rangle$ függvény konstans: $\langle c, c\rangle(t) = \langle c(t), c(t)\rangle = \|c(t)\|^2 = r^2$, minden $t \in I$-re. Így

$$0 = \langle c, c\rangle' = 2\langle c', c\rangle = 2\langle T, c\rangle \implies 0 = \langle T, c\rangle' = \langle T', c\rangle + \langle T, T\rangle$$

$$\implies \langle T', c\rangle = -1 \implies 1 = |\langle T', c\rangle| \overset{(CBS)}{\leqq} \|T'\|\,\|c\| = \|\varkappa F\|\, r = \varkappa r$$

$$\implies \varkappa \geqq \frac{1}{r}.$$

Ebből c biregularitása azonnal adódik, hiszen a biregularitás 2.5. értelmében ekvivalens azzal, hogy a görbe reguláris és a görbületfüggvénye sehol sem tűnik el. □

<u>10.7. Állítás.</u> Az $S^2(r)$ gömbfelület geodetikusai a konstans pályasebességű paraméterezett főkörök, és csakis ezek.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Tekintsünk egy $k \subset S^2(r)$ főkört. Ekkor k előállítható egy, az origóra illeszkedő, $\vec{n}$ normálvektorú sík és $S^2(r)$ metszeteként, azaz $k = \{P \in S^2(r) \mid \langle P, \vec{n}\rangle = 0\}$. Válasszunk olyan $P, Q \in k$ pontokat, hogy $(\vec{n}, P, Q)$ alkossa $\mathbb{R}^3$-nak egy ortogonális bázisát, s tekintsük a

$$c: [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c(t) := (\cos t)P + (\sin t)Q$$

leképezést. Ekkor $\mathrm{Im}(c) = k$, ugyanis

$$\forall t \in [0, 2\pi[: \ \langle c(t), \vec{n}\rangle = (\cos t)\langle P, \vec{n}\rangle + (\sin t)\langle Q, \vec{n}\rangle = 0,$$

$$\|c(t)\|^2 = (\cos^2 t)\|P\|^2 + (\sin^2 t)\|Q\|^2 = r^2.$$

Mivel $c'(t) = (-\sin t)P + (\cos t)Q$, s így $\|c'(t)\| = r$ $(t \in [0, 2\pi[)$, c konstans pályasebességű paraméterezése a k körvonalnak.

<u>c geodetikus</u>, mert tetszőleges $t \in [0, 2\pi[$ esetén

$$c''(t) = -(\cos t)P - (\sin t)Q = -c(t) \implies c''(t) \parallel \frac{1}{r}c(t) = N(\gamma(t)),$$

ahol $\gamma := f^{-1} \circ c$, s itt f $S^2(r)$-nek például a geografikus paraméterezése.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy $c := f \circ \gamma : I \to S^2(r)$ egységpályasebességű geodetikus, ahol f az $S^2(r)$ gömb geografikus paraméterezése. $\mathrm{Im}(c) \subset S^2(r)$ miatt 10.6. alapján c biregulális, s így mód nyílik 10.5. alkalmazására. Ennek értelmében

$$\forall t \in I : \quad f'(\gamma(t)) \circ W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \pm(\varkappa T - \tau B)(t).$$

Mivel $W_{\gamma(t)} = -\frac{1}{r} 1_{\mathbb{R}^2}$ (6.8(2)), következik, hogy

$$\forall t \in I : \quad \pm(\varkappa T - \tau B)(t) = f'(\gamma(t))\left(-\frac{1}{r}\gamma'(t)\right) = -\frac{1}{r} f'(\gamma(t))(\gamma'(t)) =$$
$$= -\frac{1}{r}(f \circ \gamma)'(t) = -\frac{1}{r} c'(t) = -\frac{1}{r} T(t).$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy $\varkappa = \frac{1}{r}$, $\tau = 0$, ami azt jelenti (ld. 2.13, 2.14), hogy $\mathrm{Im}(c) \subset S^2(r)$ r sugarú körvonal, azaz főköre $S^2(r)$-nek. $\square$

10.8. Állítás. Egy egyenes körhenger geodetikusai a konstans pályasebességű paraméterezett alkotóegyenesek, keresztmetszetkörök és csavarvonalak, s csakis ezek.

Bizonyítás. Legyen adva az

$$f : (s,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto f(s,t) := (r\cos s, r\sin s, t) \in \mathbb{R}^3$$

paraméterezett körhenger, s tekintsük a

$$\gamma = (\varphi, h) : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) = (\varphi(t), h(t)) \in \mathbb{R}^2$$

görbe segítségével képzett

$$c := f \circ \gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = f(\gamma(t)) = (r\cos\varphi(t), r\sin\varphi(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3$$

felületi görbét. c akkor és csak akkor geodetikusa f-nek, ha konstans pályasebességű és

$$(*) \qquad \forall t \in \mathbb{R} : \quad c''(t) \parallel N(\gamma(t)).$$

Mivel tetszőleges $(s,t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ esetén

$$\left.\begin{aligned} D_1 f(s,t) &= (-r\sin s, r\cos s, 0) \\ D_2 f(s,t) &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow N(s,t) = (\cos s, \sin s, 0),$$

c'' 3. komponensfüggvénye pedig h'', a $(*)$ feltétel azt adja, hogy $h'' = 0$, amiből az következik, hogy $h(t) = \lambda t + \mu$ $(t \in \mathbb{R})$, ahol λ, μ valós paraméterek. c pályasebessége akkor és csak akkor konstans, ha a

$$\|c'\|^2 = \|(-r\varphi'(\sin\circ\varphi), r\varphi'(\cos\circ\varphi), \lambda)\|^2 = r^2(\varphi')^2 + \lambda^2$$

függvény konstans, ami akkor és csak akkor teljesül, ha a v' függvény konstans, s így

$$\forall t\in\mathbb{R}:\quad v(t)=\alpha t+\beta\,,$$

ahol α és β valós paraméterek.

Mindezek alapján f geodetikusai a

$$t\in\mathbb{R}\longmapsto c(t)=\big(r\cos(\alpha t+\beta)\,,\ r\sin(\alpha t+\beta),\ \lambda t+\mu\big)\in\mathbb{R}^3$$

alakú reguláris felületi görbék, ahol a regularitás miatt $(\alpha)^2+(\lambda)^2\neq 0$. A paraméterektől függően ezek a görbék a következő típusúak:

(1) $\alpha=0,\ \lambda\neq 0$ $\Rightarrow$ c paraméterezett alkotóegyenes;

(2) $\alpha\neq 0,\ \lambda=0$ $\Rightarrow$ c paraméterezett keresztmetszetkör;

(3) $\alpha\neq 0,\ \lambda\neq 0$ $\Rightarrow$ c henger csavarvonal (v.ö. 16.6 (5)). □

11. Felületek belső geometriája

__11.0. Megállapodások.__ Ebben a fejezetben egy $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^3$ C^3-osztályú, reguláris paraméterezett felület alapulvételével dolgozunk. Az eddigieknek megfelelően $(g_{ij})=(\langle D_if, D_jf\rangle)$ az 1. alapmennyiségek mátrixa, $N=\frac{1}{\|D_1f\times D_2f\|}D_1f\times D_2f:\ U\longrightarrow S^2$ a Gauss-leképezés, $(b_{ij})=(\langle D_iD_jf, N\rangle)$ a 2. alapmennyiségek mátrixa; $(g^{ij}):=(g_{ij})^{-1}$.

__11.1. Lemma és definíció.__ Ha $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^3$ (C^3-osztályú, reguláris) paraméterezett felület, akkor a D_iD_jf második parciális deriváltak a (D_1f, D_2f, N) Gauss-féle háromélmező segítségével egyértelműen előállíthatók a

(11.1a) $$\boxed{D_iD_jf=\sum_{k=1}^{2}\Gamma^k_{ij}D_kf+b_{ij}N\,;\quad i,j\in\{1,2\}}$$

alakban, ahol a $\Gamma^k_{ij}:U\longrightarrow\mathbb{R}$ függvények megadhatók a

(11.1b) $$\Gamma^k_{ij}=\sum_{l=1}^{2}\langle D_iD_jf, D_lf\rangle g^{kl}\,;\quad i,j,k\in\{1,2\}$$

formulával. A (11.1a) relációkat a Gauss-formuláknak, a Γ^k_{ij} függvényeket az f paraméterezett felület Christoffel-szimbólumai-nak hívjuk. Ezek két alsó indexükben szimmetrikusak:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \; ; \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $q \in U$ esetén $(D_1 f(q), D_2 f(q), N(q))$ bázisa $\mathbb{R}^3$-nak, egyértelműen léteznek olyan

$$\gamma^k_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \; \beta_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \quad i,j,k \in \{1,2\}$$

függvények, hogy

$$(*) \qquad D_i D_j f = \sum_{k=1}^{2} \gamma^k_{ij} D_k f + \beta_{ij} N \; ; \quad i,j \in \{1,2\}.$$

A feladat csupán annak ellenőrzése, hogy a $(*)$-beli γ^k_{ij} függvények a (11.16) által megadott Γ^k_{ij} függvényekkel, a β_{ij} függvények pedig f 2. alapmennyiségeivel egyeznek meg.

Képezve $(*)$ mindkét oldalának N-nel való skaláris szorzatát,

$$\langle D_1 f, N \rangle = \langle D_2 f, N \rangle = 0 \quad \text{és} \quad \langle N, N \rangle = 1$$

miatt azonnal kapjuk, hogy

$$\beta_{ij} = \langle D_i D_j f, N \rangle =: b_{ij} \; ; \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Legyen ezután $l \in \{1,2\}$, s vegyük $(*)$ mindkét oldalának a $D_l f$-fel való skaláris szorzatát. Ekkor a

$$\langle D_i D_j f, D_l f \rangle = \sum_{k=1}^{2} \gamma^k_{ij} \langle D_k f, D_l f \rangle = \sum_{k=1}^{2} \gamma^k_{ij} g_{kl} = \sum_{m=1}^{2} \gamma^m_{ij} g_{ml}$$

összefüggéshez jutunk. Megszorozva ennek bal és jobb oldalát g^{kl}-lel ($k \in \{1,2\}$), majd l-re összegezve, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{l=1}^{2} \langle D_i D_j f, D_l f \rangle g^{kl} = \sum_{l=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \gamma^m_{ij} g_{ml} g^{kl} = \sum_{m=1}^{2} \gamma^m_{ij} \delta^k_m = \gamma^k_{ij}.$$

Mivel itt a bal oldal éppen Γ^k_{ij}, a bizonyítás kész. □

11.2. Állítás. Az $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület Christoffel szimbólumai kifejezhetők az 1. alapmennyiségek és ezek parciális deriváltjai segítségével a

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} (D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij})}$$

$(i,j,k \in \{1,2\})$ formula szerint.

Bizonyítás (a Christoffel-trükk). Legyen $i,j,l \in \{1,2\}$ tetszőleges. Képezzük a $D_i g_{jl}$, $D_j g_{li}$, $D_l g_{ij}$ parciális deriváltakat, majd a $D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij}$ összeget:

$$D_i g_{jl} = D_i \langle D_j f, D_l f\rangle = \langle D_i D_j f, D_l f\rangle + \langle D_j f, D_i D_l f\rangle ,$$

$$D_j g_{li} = D_j \langle D_l f, D_i f\rangle = \langle D_j D_l f, D_i f\rangle + \langle D_l f, D_j D_i f\rangle ,$$

$$D_l g_{ij} = D_l \langle D_i f, D_j f\rangle = \langle D_l D_i f, D_j f\rangle + \langle D_i f, D_l D_j f\rangle ;$$

így, felhasználva a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlőségét,

$$D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij} = 2\langle D_i D_j f, D_l f\rangle .$$

Megszorozva a kapott reláció mindkét oldalát $\frac{1}{2} g^{kl}$-lel és összegezve l-re, a Γ^k_{ij} függvények kívánt előállításához jutunk. □

11.3. Belső geometriai adatok. Egy reguláris paraméterezett felületnek azokat a geometriai adatait, amelyeket teljesen meghatároz a felület metrikus tenzora, vagyis amelyek kifejezhetők az 1. alapmennyiségek és parciális deriváltjaik segítségével, a felület belső geometriájához tartozó, röviden belső geometriai vagy belső (intrinsic) adatainak nevezzük. (Képletesen szólva, ezeket az adatokat a felület képzeletbeli, kétdimenziós geométerei meg tudják határozni a saját világukban elvégzett mérésekkel.) Az előző állítás értelmében a Christoffel-szimbólumok belső geometriai adatok.

11.4. Lemma. Legyen $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, $c = f\circ\gamma = f\circ(\gamma^1,\gamma^2): I \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^3$ pedig felületi görbéje f-nek. Ekkor

$$(11.4a)\quad (D_i f\circ\gamma)' = \sum_{j=1}^{2} \gamma^{j\prime}(D_i D_j f\circ\gamma) , \quad i \in \{1,2\};$$

$$(11.4b)\quad c'' = \sum_{k=1}^{2}\Big(\gamma^{k\prime\prime} + \sum_{i,j=1}^{2} \gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\Big)(D_k f\circ\gamma) + \sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(N\circ\gamma) .$$

Bizonyítás. (1) Tetszőleges $t \in I$-re

$$(D_i f\circ\gamma)'(t) = (D_i f)'(\gamma(t))(\gamma'(t)) =$$
$$= (D_i f)'(\gamma(t))(\gamma^{1\prime}(t)e_1+\gamma^{2\prime}(t)e_2) =$$
$$= \gamma^{1\prime}(t)\,D_1D_i f(\gamma(t)) + \gamma^{2\prime}(t)\,D_2D_i f(\gamma(t))$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\gamma^{j\prime}(t)\,D_jD_i f(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{2}\gamma^{j\prime}(t)\,D_iD_j f(\gamma(t)).$$

(2) 5.1(1)-ből tudjuk, hogy $c' = \sum_{i=1}^{2}\gamma^{i\prime}(D_i f\circ\gamma)$. Innen (11.4a) és (11.1a) figyelembevételével

$$c'' = \sum_{i=1}^{2}\gamma^{i\prime\prime}(D_i f\circ\gamma) + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(D_iD_j f\circ\gamma) = \sum_{k=1}^{2}\gamma^{k\prime\prime}(D_k f\circ\gamma) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}\Big(\sum_{k=1}^{2}(\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma)(D_k f\circ\gamma) + (b_{ij}\circ\gamma)N\circ\gamma\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\Big(\gamma^{k\prime\prime} + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma)\Big)(D_k f\circ\gamma) + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(b_{ij}\circ\gamma)N\circ\gamma\ . \ \square$$

<u>11.5. Állítás.</u> Az $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület $c = f\circ\gamma = f\circ(\gamma^1,\gamma^2): I \longrightarrow f(U)\subset\mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje pontosan akkor geodetikusa f-nek, ha

$$(11.5)\qquad \boxed{\gamma^{k\prime\prime} + \sum_{i,j=1}^{2}(\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime} = 0}$$

($k\in\{1,2\}$). Így az a tulajdonság, hogy egy reguláris felületi görbe geodetikus, belső geometriai tulajdonság.

<u>Bizonyítás.</u> <u>10.2.</u> értelmében c pontosan akkor geodetikus, ha $c'' - \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma = 0$. (11.4b)-ből

$$\langle c'', N\circ\gamma\rangle = \sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime},$$

így

$$\underline{0 = c'' - \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma} \iff 0 = c'' - \sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}\circ\gamma)\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(N\circ\gamma) \overset{(11.4b)}{\iff}$$
$$\iff \sum_{k=1}^{2}\Big(\gamma^{k\prime\prime} + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma)\Big)(D_k f\circ\gamma) = 0$$
$$\iff \gamma^{k\prime\prime} + \sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{i\prime}\gamma^{j\prime}(\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma) = 0\ ;\quad k\in\{1,2\}.$$

$\square$

11.6. Állítás. Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület. f Christoffel-szimbólumai segítségével képezzük az

$$R^{m}_{ijk} := D_i \Gamma^m_{jk} - D_j \Gamma^m_{ik} + \sum_{r=1}^{2} \Gamma^m_{ir} \Gamma^r_{jk} - \sum_{r=1}^{2} \Gamma^m_{jr} \Gamma^r_{ik} \quad ; \quad i,j,k,m \in \{1,2\}$$

függvényeket, ezek felhasználásával pedig az

$$R_{ijkl} := \sum_{m=1}^{2} R^m_{ijk} g_{ml} \quad ; \quad i,j,k,l \in \{1,2\}$$

függvényeket. Ekkor érvényesek az

(11.6) $$\boxed{R_{ijkl} = b_{jk} b_{il} - b_{ik} b_{jl}} \quad (i,j,k,l \in \{1,2\})$$

relációk, az ún. Gauss-egyenletek.

A bizonyítás hosszadalmassága miatt mellőzzük. Δ

11.7. Következmény. Megtartva az állítás feltételeit és jelöléseit, az R_{ijkl} függvények rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

(11.7a) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ – ferdeszimmetria az 1. és a 2., valamint a 3. és a 4. indexben;

(11.7b) $R_{ijkl} = R_{klij}$ – párok szerinti szimmetria.

Így módon az R_{ijkl} függvények közül csak

$$R_{1221}, \quad R_{1212}, \quad R_{2112} \quad \text{és} \quad R_{2121}$$

nem feltétlenül zérus, s ezek között fennáll a

(11.7c) $$R_{1221} = -R_{1212} = R_{2112} = -R_{2121} = \det(b_{ij})$$

reláció.

Bizonyítás. (1) $R_{jikl} \overset{(11.6)}{=} b_{ik} b_{jl} - b_{jk} b_{il} = -(b_{jk} b_{il} - b_{ik} b_{jl}) \overset{(11.6)}{=} -R_{ijkl}$, ami igazolja a (11.7a)-beli első relációt, és a második helyessége ugyanígy adódik.

(2) $R_{klij} \overset{(11.6)}{=} b_{li} b_{kj} - b_{ki} b_{lj} = b_{jk} b_{il} - b_{ik} b_{jl} \overset{(11.6)}{=} R_{ijkl}$, tehát a párok szerinti szimmetria is teljesül.

(3) A ferdeszimmetria miatt $R_{iikl} = R_{ijkk} = 0$ (hiszen például $R_{iikl} = R_{iikl}$ és $R_{iikl} = -R_{iikl}$ egyaránt fennáll). Így csak a felsorolt függvények lehetnek nem nullák. $R_{1221} \overset{(11.6)}{=} b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21} = \det(b_{ij})$, a (11.7c)-beli többi reláció pedig adódik a ferdeszimmetriából. $\square$

11.8. Tétel (a „theorema egregium"). Egy reguláris paraméterezett felület Gauss-görbületét megadja a

$$\boxed{K = \frac{R_{1221}}{\det(g_{ij})}}$$

formula, s így a Gauss-görbület belső geometriai adata a felületeknek.

Bizonyítás. $K \overset{8.3(5)}{=} \dfrac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} \overset{(11.7c)}{=} \dfrac{R_{1221}}{\det(g_{ij})}$.

Mivel az R_{1221} függvény kifejezhető a Christoffel-szimbólumok és azok parciális deriváltjai, valamint az 1. alapmennyiségek segítségével, a Christoffel-szimbólumok pedig, mint már tudjuk, belső geometriai adatok, következik, hogy a Gauss-görbület szintén a belső geometriához tartozik. □

11.9. Megjegyzés. A „theorema egregium" latin kifejezés jelentése: „kimagasló tétel". Mind a jelző, mind pedig a valóban kiemelkedő és messzire mutató eredmény Carl Friedrich GAUSStól származik.

FELADATOK

1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^4- osztályú leképezés. Számítsuk ki a következő függvények, ill. leképezések deriváltját:

(1) $\|f'\|^2$; (2) $f' \times f''$; (3) $\langle f' \times f'', f''' \rangle$;

(4) $(f' \times f'') \times f'''$; (5) $\|f \times g\|^2$; $\|f\|^2 \|g\|^2 - \langle f, g \rangle^2$.

2. Tekintsük azt az

$$F : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto F(s,t) := (s + s^2 f(s,t),\ t + t^2 f(s,t)) \in \mathbb{R}^2$$

leképezést, ahol $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1-osztályú függvény. Számítsuk ki a $J_F((0,0))$ Jacobi-mátrixot!

3. Számítsuk ki az

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ,\ (s,t) \longmapsto (\sin s,\ e^s \cos t,\ \sin t)$$

leképezés $\underline{0} := (0,0)$-beli Jacobi mátrixát!

4. $f(t) := \left(t - e^t, -\cos t, \frac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Mely $t \in \mathbb{R}$ pontokban teljesül, hogy $f'(t) = \underline{0}$?

5. $f(t) := (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t \sin t,\ t+1)$, $t \in \mathbb{R}$. A t paraméter mely értékeire párhuzamos $f'(t)$ a $\mathrm{span}(e_2, e_3)$ yz- koordinátasíkkal ?

6. Számítsuk ki az alábbi parametrizált görbék ívhosszát a kijelölt intervallumon!

(1) $c(t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$ $(\alpha\beta \neq 0)$; $[0, t_0]$ $(t_0 \in \mathbb{R}^*_+)$;

(2) $c(t) := (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$, $[0, t_0]$;

(3) $c(t) := (\alpha(\cos t - \sin t), \alpha(\sin t + \cos t), \beta(t+1))$ $(\alpha\beta \neq 0)$, $[0, t_0]$;

(4) $c(t) := \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2}\right)$, $[0, t_0]$;

(5) $c(t) := (t^2, t^3)$, $[0, 2]$;

(6) $c(t) := (t, \ln t)$, $[1, 2]$;

(7) $c(t) := (t, 2t, t^2)$, $[1, 3]$;

(8) $c(t) := (\cos t, \sin t, \cos t, \sin t)$, $[0, 2\pi]$.

7. Határozzuk meg a $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ görbe t_0-beli érintőegyenesének egyenletrendszerét és a $t := 0$-beli simulósíkjának egyenletét, ha

(1) $c(t) := (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$, $t_0 := 0$;

(2) $c(t) := (3^t,\ \ln 3^t,\ \sqrt{t^2+1})$, $t_0 := \frac{1}{2}$;

(3) $c(t) := (e^{3t},\ e^{-3t},\ 3\sqrt{2}\, t)$, $t_0 := 1$;

(4) $c(t) := (\cos 4t,\ \sin 4t,\ t)$, $t_0 := \frac{\pi}{8}$;

(5) $c(t) := (\alpha \cos t,\ \alpha \sin t,\ \beta t)$ $(\alpha\beta \neq 0)$; $t_0 := \frac{\pi}{6}$.

8. Határozzuk meg a $c(t) := \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel adott görbe azon érintőegyeneseinek egyenletrendszerét, amelyek párhuzamosak az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletű síkkal!

9. Határozzuk meg a $c(t) := (\cos t + t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ 1+t^2)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel adott görbe azon érintőegyeneseinek egyenletrendszerét, amelyek párhuzamosak a $\mathrm{span}(e_2, e_3)$ („yz-koordináta-") síkkal!

10. Határozzuk meg a $c: t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (t\cos t,\ -t\sin t,\ t) \in \mathbb{R}^3$ görbe origóra illeszkedő simulósíkjainak egyenletét!

11. Írjuk fel a simulósík egyenletét a $c(t) := (\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \sin 2t) \in \mathbb{R}^3$ $(t \in \mathbb{R})$ formulával adott görbe tetszőleges t paraméterű pontjában!

12. Határozzuk meg a $c: t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$ görbe azon simulósíkjainak egyenletét, amelyek illeszkednek a $(2, -\frac{1}{3}, -6) \in \mathbb{R}^3$ pontra!

13. Van-e a $c(t) := (t^3 - 2t^2 + 2t,\ t^2 + t,\ \frac{1}{2}t^2 + t + 1)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel adott görbének olyan $c(1)$-től különböző pontja, amelyben az érintőegyenes párhuzamos a $c(1)$-beli simulósíkkal?

14. Határozzuk meg a $c: t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3) \in \mathbb{R}^3$ görbe azon simulósíkjait, amelyek merőlegesek a $2x - 2y + z - 3 = 0$ egyenletű síkra!

15. Vezessünk be természetes paraméterezést a $c(t) := (t\cos(3\ln t),\ t\sin(3\ln t),\ 2t)$ $(t \in \mathbb{R}^*_+)$ képlettel adott görbénél!

16. Ellenőrizzük, hogy az alábbi képletekkel adott görbék természetes paraméterezésűek:

(1) $c(t) := \left(\sin\frac{t}{3}, \cos\frac{t}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}t\right)$;

(2) $c(t) := \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$.

17. Számítsuk ki a $c(t) := (\cos^2 t, \frac{1}{2}\sin 2t, \cos t)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel megadott görbe 0 paraméterű pontjához tartozó simulósík és az origó ($(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$) távolságát.

18. Számítsuk ki a c görbe t_0-beli görbületét és torzióját, ha

(1) $c(t) := (t^2-1, t+2, t^3-t)$, $t_0 := 1$ $\left(\varkappa(1) = \frac{2\sqrt{26}}{27}, \tau(1) = -\frac{3}{26}\right)$

(2) $c(t) := (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t_0 := 0$ $\left(\varkappa(0) = -\tau(0) = \frac{1}{2}\right)$

(3) $c(t) := (2t, \ln t, t^2)$, $t_0 := 1$ $\left(\varkappa(1) = -\tau(1) = \frac{2}{9}\right)$

(4) $c(t) := (t\cos t, t\sin t, \alpha t)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$, $t_0 := 0$ $\left(\varkappa(0) = \frac{2}{\alpha^2+1}, \tau(0) = \frac{3\alpha}{2(\alpha^2+1)}\right)$

(5) $c(t) := (\sin 2t, 1-\cos 2t, 2\cos t)$, $t_0 := \frac{\pi}{2}$ $\left(\varkappa(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}, \tau(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{8}\right)$

19. Ellenőrizzük, hogy a $c : t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3) \in \mathbb{R}^3$ görbe esetén $\varkappa(t) = \tau(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$-re teljesül.

20. Mely paraméterekben van lokális minimuma a $c(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel adott görbe görbületfüggvényének? $\left(t \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$

21. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola görbületét a csúcspontjában.

22. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ (kanonikus) egyenletű ellipszis görbületét a tengelypontokban.

23. Számítsuk ki a c görbe görbületét a P pontban, ha

(1) $c(t) := (3t^2-2t, t^3, 1-t)$, $P = (8, 8, -1)$;

(2) $c(t) := (3t^2, 2t+3, 3t^3)$, $P = (3, 1, -3)$;

(3) $c(t) := (3t, 3t^2, 2t^3)$, $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

24. Számítsuk ki a c görbe t_0 paraméterű pontjához tartozó Frenet-féle háromél élegyeneseinek egyenletrendszerét, valamint a t_0-beli simulósík, normálsík és rektifikáló sík egyenletét, ha

(1) $c(t) := \left(\frac{1}{2}t^2, -\frac{2}{3}(1+t)^3, -\frac{1}{2}t^4\right)$, $t_0 := 1$;

(2) $c(t) := (t, t^2, t^3)$, $t_0 := 0$;

(3) $c(t) := (e^t - t, e^{2t}, -(2+e^{-t}))$, $t_0 := 0$;

(4) $c(t) := (2\cos 2t, 2\sin 2t, 3t)$, $t_0 := \frac{\pi}{6}$.

25. Adott a $c: t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (2t - \sin 2t, \cos 2t, 4\sin t) \in \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe. Határozzuk meg a $T'(\frac{\pi}{2})$, $F'(\frac{\pi}{2})$, $B'(\frac{\pi}{2})$ vektorokat!

26. (1) Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan biregulárisz görbe, amelynek seholsem 0 a torziója. Igazoljuk, hogy
$$\forall t \in I: \ \measuredangle\left(T'(t), B'(t)\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \tau(t) < 0; \\ \pi, & \text{ha } \tau(t) > 0. \end{cases}$$

(2) Felhasználva az (1)-ben nyert eredményt, számítsuk ki $T'(t)$ és $B'(t)$ szögét, ha

(a) $c(t) := (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{2}t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(b) $c(t) := (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

27. Írjuk fel a Frenet formulákat a
$c(t) := \left(\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{4}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel adott görbe 1 paraméterű pontjában (konkrét számadatokkal)!

28. $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű biregulárisz görbe. (1) Állítsuk elő a (T, F, B) Frenet-féle háromélmező (függvényekkel képzett) lineáris kombinációjaként a T'', F'', B'', T''', F''', B''' deriváltakat!

(2) Tegyük fel, hogy c C^5-osztályú és a torziója seholsem tűnik el. Fejezzük ki κ, τ és a deriváltjaik segítségével a következő skaláris szorzatokat:

$\langle T\times F, F'\rangle$, $\langle T\times B, B'\rangle$, $\langle F\times B, B'\rangle$, $\langle B\times T, T'\rangle$, $\langle F\times T, T'\rangle$,
$\langle B\times F, F'\rangle$, $\langle T\times T', T''\rangle$, $\langle T'\times T'', T'''\rangle$, $\langle F\times F', F''\rangle$, $\langle B\times F, F'\rangle$.

29. Egy kúp csúcspontja a $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ pont, vezérvonalának egyenletrendszere $x^2+y^2=4$, $z=0$. Állítsuk elő a kúpot egy paraméterezett felület képeként, és adjuk meg $F(x,y,z)=0$ alakú egyenlettel, azaz implicit módon is. Felület-e a vizsgált alakzat?

30. Írjuk fel annak a kúpnak az implicit egyenletét, amelynek csúcspontja $\mathbb{R}^3$ origója, vezérvonala pedig az a kör, amelyet az $y=3$ egyenletű sík metsz ki az $x^2+(y-6)^2+z^2=25$ egyenletű gömbből!

31. Egy henger vezérvonalának egyenletrendszere $x^2+y^2=2y$, $z=0$; alkotóegyeneseinek közös irányvektora $\vec{v}=(2,1,2)$. Adjuk meg a henger egy paraméteres előállítását és implicit egyenletét!

32. Oldjuk meg az előző feladatot a következő adatokkal: a vezérvonal egyenletrendszere $x^2-y^2=1$, $z=0$; az alkotók irányvektora $\vec{v}=(0,0,1)$.

33. Írjuk fel az f paraméterezett felület T_qf érintősíkjának egyenletét, q-beli felületi normálisának egyenletrendszerét és számítsuk ki az $f(q)$-ra illeszkedő paramétervonalak szögét (ill. annak koszinuszát), ha

(1) $f(s,t) := (s^2-t^2,\ 2st,\ s^2+t^2)$, $q=(1,2)$;

(2) $f(s,t) := (\cos s - t\sin s,\ \sin s + t\cos s,\ t)$, $q:=(0,1)$;

(3) $f(s,t) := (s,\ (1+s)\cos t,\ (1+s)\sin t)$, $q:=(1,\frac{\pi}{3})$;

(4) $f(s,t) := (s\cos t,\ s\sin t,\ 2t)$, $q:=(1,\frac{\pi}{3})$.

34. Határozzuk meg az alábbi implicit megadású felületek kijelölt pontjában az érintősík egyenletét:

(1) $M:\ xy^2+z^3=12$, $P=(1,2,2)$;

(2) $M:\ 6xy^2-2x^2y-z=0$, $P=(2,3,84)$;

(3) $M:\ x^2-2y^2-3z^2-4=0$, $P=(3,1,-1)$;

(4) $M:\ \frac{x^2}{(\alpha)^2}-\frac{y^2}{(\beta)^2}=2z$, $P=(p^1,p^2,p^3)$.

35. Határozzuk meg az M felület S síkkal párhuzamos érintősíkjának egyenletét, ha

(1) M egyenlete $xyz = 1$, S egyenlete $x+y+z-5=0$;

(2) M egyenlete $x^2+y^2-2z^2 = 18$, S egyenlete $x+2y+z+1=0$.

36. Határozzuk meg az

$$f: (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(s,t) := (s+t,\ s-t,\ st) \in \mathbb{R}^3$$

parametrizált felületnek azt az érintősíkját, amely párhuzamos az $x+2y+2z = 32$ egyenletű síkkal.

37. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2+y^2+z^2 = 18$ és az $xy = 9$ egyenletű felületek közös pontjaikban egybeeső érintősíkokkal rendelkeznek.

38. Számítsuk ki kétféleképpen az $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált felület $c = f\circ\gamma$ felületi görbéjének ívhosszát, ha

(1) $f(s,t) := (t\cos s,\ t\sin s,\ t)$, $\gamma(\tau) := (\tau,\ e^\tau)$, $\tau \in [0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$;

(2) $f(s,t) := (e^s\cos t,\ e^s\sin t,\ e^s)$, $\gamma(\tau) := (-\tau,\ 2\tau)$, $\tau \in [0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$;

(3) $f(s,t) := (s^2-t^2,\ 2st,\ s^2+t^2)$, $\gamma(\tau) := (\sin\tau,\ \sin\tau)$, $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

39. Számítsuk ki az $A(f)$ felszínt, ha

(1) $f(s,t) := (\cos s - t\sin s,\ \sin s + t\cos s,\ s+t)$, $(s,t) \in [0,2\pi]\times[0,1]$;

(2) $f(s,t) := \left(\frac{1}{3}(s-2)\cos t,\ s,\ \frac{1}{3}(s-2)\sin t\right)$, $(s,t) \in [-1,8]\times[0,2\pi]$.

40. Mutassuk meg, hogy az

$$f: (s,t) \in U \longmapsto f(s,t) = (s,\ t,\ h(s,t)) \in \mathbb{R}^3$$

Monge-beágyazás 2. alapmennyiségei a

$$b_{11} = \frac{1}{w} D_1D_1h,\quad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{w} D_1D_2h,\quad b_{22} = \frac{1}{w} D_2D_2h$$

függvények, ahol

$$w := \left(1 + (D_1h)^2 + (D_2h)^2\right)^{1/2}.$$

41. Adott az
$$f: (s,t) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\longmapsto f(s,t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, s) \in \mathbb{R}^3$$
parametrizált felület, ahol α rögzített pozitív valós szám. Számítsuk ki a $k_{(s,t)}(v)$, $v := (\alpha, 1)$ normálgörbületet!

42. Tekintsük az $f: (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(s,t) := (s, t, s^2+t^2) \in \mathbb{R}^3$ parametrizált felület $c := f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ felületi görbéjét, ahol $\gamma(t) := (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki c normálgörbületét az 1 paraméterű pontban közvetlenül és a Meusnier-tétel alkalmazásával is!

43. Számítsuk ki az $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület q-beli, v irányú $k_q(v)$ normálgörbületét, ha

(1) $f(s,t) := (s^2+t^2, s^2-t^2, st)$, $q = (1,1)$, $v = (1,2)$;

(2) $f(s,t) := (s^2-2st, s^2t^2-t^3, s^4-2t^2)$, $q = (1,-1)$, $v = (2,3)$.

44. Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel adott felületek kijelölt pontjában a Weingarten-operátor egy mátrix-reprezentánsát, a Gauss- és a Minkowski-görbületet és a főgörbületeket!

(1) $4x^2y - 2xy^2 - z = 0$, $P = (-1, 2, 0)$;

(2) $x^2 - 4y^2 - 8z = 0$, $P = (4, 2, 0)$;

(3) $xy = z$, $P = (2, 2, 4)$;

(4) $x^2 - y^2 - z = 0$, $P = (3, 2, 5)$;

(5) $x^2 - y^2 - z = 0$, $P = (2, -1, 9)$;

(6) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 2z$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$, $P = (0, 0, 0)$.

45. Határozzuk meg az alábbi parametrizált felületek kijelölt pontjában a főirányokat!

(1) $f(s,t) := (s^2+t^2, 2st, s-t)$ $((s,t) \in \mathbb{R}^2)$, $q := (-1, -1)$;

(2) $f: (s,t) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longmapsto f(s,t) := (s \cos t, s \sin t, t) \in \mathbb{R}^3$; $q := (1, \frac{\pi}{4})$;

(3) $f: (s,t) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longmapsto f(s,t) := (e^s \cos t, e^s \sin t, e^t) \in \mathbb{R}^3$; $q := (0,0)$;

(4) $f: (s,t) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}_+ \longmapsto f(s,t) := (t \cos s, \sqrt{t} \sin \frac{s}{2}, \frac{t}{2}(1 + \cos s)) \in \mathbb{R}^3$, $q := (\frac{\pi}{3}, 1)$.