Szilasi József

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA

2013 – 14, őszi félév

Tartalom

Differenciálgeometria

2013–14. őszi félév

BEVEZETÉS

B1 SZÍNTÉR: a rendezett valós szám n-esek $\mathbb{R}^n$ valós vektortere ($n \geq 2$); ennek elemeire az

$$a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n), \quad \alpha^i \in \mathbb{R} \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

jelölést használjuk, tehát a vektor-koordinátákat felső indexekkel látjuk el.

Az $\mathbb{R}^n$-beli vektortér-műveletek:

ÖSSZEADÁS

$$a + b = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) + (\beta^1, \dots, \beta^n) := (\alpha^1 + \beta^1, \dots, \alpha^n + \beta^n)$$

SKALÁRRAL VALÓ SZORZÁS

$$\lambda a = \lambda(\alpha^1, \dots, \alpha^n) := (\lambda\alpha^1, \dots, \lambda\alpha^n) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$\dim \mathbb{R}^n = n$; $\mathbb{R}^n$-nek egy bázisa

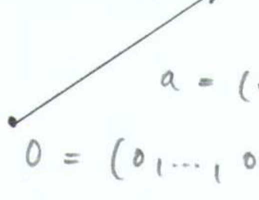
$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \; e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Röviden – és pontosabban –:

$$(e_i)_{i=1}^n, \qquad e_i := (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0).$$

Ezt a bázist $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisának hívjuk.

$\mathbb{R}^n$ elemeit vektorokként és pontokként is említjük; a kétféle elnevezéshez kétféle szemléltetési kapcsolódik:



$A = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ – „pont"

$a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ – nyíl $\leftrightarrow$ „vektor"

$O = (0, \dots, 0)$ – „pont" (ez az „origó") szemléltetései során „legálisan" csak az origóból indulhatnak nyilak!

Megjegyzés. $\mathbb{R}^n$ elemeire következetesebb lenne az

$$a = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$$

oszlopvektor jelölés. Ezt csak akkor fogjuk alkalmazni, ha elkerülhetetlen.

B2 Koordinátafüggvények

(a) (Emlékeztető) Legyen V és W valós vektortér. Egy $\varphi : V \to W$ leképezést lineárisnak nevezünk, ha

(i) $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ minden $v, w \in V$ esetén (additivitás);

(ii) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ minden $v \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (homogenitás).

(b) Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az

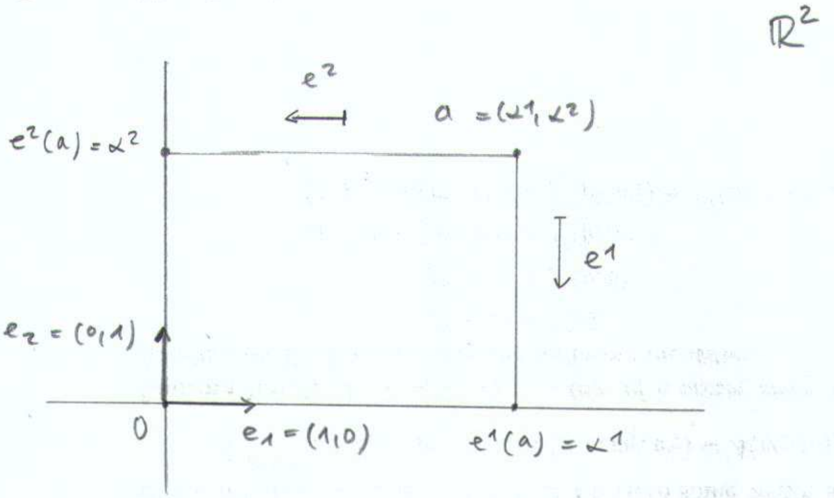
$$e^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \longmapsto e^i(a) := \alpha^i$$

függvény lineáris. Ezeket a függvényeket $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátafüggvényeinek hívjuk, és azt mondjuk, hogy $(e^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere.

A kanonikus koordinátarendszer és a kanonikus bázis kapcsolata:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (\text{Kronecker-delta}).$$

Szemléltetés



~ o ~

<u>Megjegyzés.</u> Amit a <u>Halmazok és függvények</u> c. tárgyban „függvény"-nek neveztek, azt rendszerint <u>leképezésnek</u> (map / mapping) fogjuk hívni. A függvény elnevezést akkor a speciális esetben alkalmazzuk, amikor a leképezés a valós számok halmazába történik.

<u>Definíció.</u> Legyen S tetszőleges nemüres halmaz, és legyen adva egy $f: S \to \mathbb{R}^n$ leképezés. Az

$$f^i := e^i \circ f : \quad S \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

függvényeket f (természetes vagy euklideszi) <u>koordinátafüggvényeinek</u> hívjuk.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f^i"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "e^i"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Megjegyzés. Koordinátafüggvényei segítségével egy $f : S \to \mathbb{R}^n$ leképezés az

$$f = (f^1, \dots, f^n)$$

alakban írható, ui. tetszőleges $s \in S$ esetén

$$f(s) = \left(e^1(f(s)), \dots, e^n(f(s)) \right)$$
$$= \left(e^1 \circ f(s), \dots, e^n \circ f(s) \right)$$
$$= \left(f^1(s), \dots, f^n(s) \right) =: (f^1, \dots, f^n)(s) .$$

B3 Mátrixok

$M_n(\mathbb{R})$ – az $n \times n$-es valós elemű mátrixok vektortere

$M_n(\mathbb{R})$ elemeit

$$A = (\alpha^i_j) := \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \dots & \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \dots & \alpha^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^n_1 & \alpha^n_2 & \dots & \alpha^n_n \end{pmatrix}$$

alakban írjuk, tehát:

felső index – sorindex
alsó index – oszlopindex

.

Minden $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrix meghatározza $\mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformációját a

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longmapsto Av = A \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \dots & \alpha^1_n \\ \vdots & & & \\ \alpha^n_1 & \alpha^n_2 & \dots & \alpha^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 v^1 + \dots + \alpha^1_n v^n \\ \vdots \\ \alpha^n_1 v^1 + \dots \ \alpha^n_n v^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha^1_j v^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha^n_j v^j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j v^j \Big) e_i \in \mathbb{R}^n$$

előírás szerint. Ilyenkor „kötelező" $\mathbb{R}^n$ elemeit oszlopvektorokként írni!

Megfordítva: ismert a lineáris algebrából, hogy $\mathbb{R}^n$ minden lineáris transzformációja a fenti a módon, tehát egy (egyértelműen meghatározott) mátrixszal való szorzás formájában írható le.

<u>Megjegyzés:</u> A „transzformáció" elnevezést az olyan leképezésekre alkalmazzuk, amelyek egy halmazt <u>önmagába</u> képeznek le.

<u>B4 $\mathbb{R}^n$ euklideszi struktúrája</u>

(a) (<u>Emlékeztető</u>) Legyen V véges dimenziójú (nemtriviális, azaz a $\{0\}$ vektortértől különböző) valós vektortér. Egy

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto B(u,v)$$

függvényt <u>bilineárisnak</u> mondunk, ha mindkét változójában lineáris, azaz:

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1,v) + \lambda_2 B(u_2,v),$$
$$B(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 B(u,v_1) + \lambda_2 B(u,v_2)$$

teljesül minden $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ és minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén. Bilineáris függvény helyett **bilineáris formáról** is szólunk.

Egy $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris forma **szimmetrikus**, ha

$$B(u,v) = B(v,u) \; ; \quad (u,v) \in V \times V .$$

Egy V-n adott szimmetrikus bilineáris formát **skaláris szorzatnak** is nevezünk.

Egy $B : V \times V \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat **pozitív definit**, ha

$$B(v,v) > 0 \quad \text{minden } v \in V \setminus \{0\} \text{ esetén.}$$

Euklideszi vektortéren pozitív definit skaláris szorzattal ellátott véges (de legalább 1) dimenziójú valós vektorteret értünk.

Megjegyzés (a) A Lineáris algebra tárgyban a pozitív definit skaláris szorzatra a **belső szorzat** elnevezést használták.

(b) Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren pozitív definit skaláris szorzat az

$$(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle a,b \rangle := \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i = (\alpha^1 \dots \alpha^n) \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

függvény, ezt $\mathbb{R}^n$ **kanonikus skaláris szorzatának** hívjuk. A továbbiakban föltesszük, hogy $\mathbb{R}^n$ el van látva a kanonikus skaláris szorzattal.

A kanonikus skaláris szorzatból származó fogalmak:

$\langle , \rangle \rightsquigarrow \|\cdot\|$ <u>euklideszi norma</u>

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2} = \sqrt{(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2}$$

$$(v = (v^1, \dots, v^n))$$

$\rightsquigarrow$ d <u>euklideszi távolság</u>

$$d(a,b) := \|a - b\| = \sqrt{(\alpha^1 - \beta^1)^2 + \dots + (\alpha^n - \beta^n)^2}$$

$$(a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n), \ b = (\beta^1, \dots, \beta^n))$$

$\rightsquigarrow$ nemzérus vektorok <u>szöge</u>: ha $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, akkor a szögük az a $\theta \in [0, \pi]$ valós szám, amelyre

$$\cos\theta = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}$$

teljesül

(c) Euklideszi vektortérben két vektort <u>ortogonális</u>nak (<u>merőlegesnek</u>) mondunk, ha a skaláris szorzatuk nulla. Két nemzérus vektor pontosan akkor ortogonális, ha az előbbi módon értelmezett szögük $\frac{\pi}{2}$.
Ha $(V, \langle , \rangle)$ n-dimenziós euklideszi vektortér és a $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorok páronként ortogonális, egységhosszúságú vektorok, azaz

$$\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \ ; \ i, j \in \{1, \dots, n\},$$

akkor $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek. Egy ilyen bázist <u>ortonormáltnak</u> nevezzük. Ha $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa V-nek, akkor minden $v \in V$ vektor egyértelműen előállítható

$$\boxed{v = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + \dots + \langle v, b_n\rangle b_n}$$

alakban. Ezt az előállítást a v vektor $(b_i)_{i=1}^n$ bázisra vonatkozó <u>Fourier-előállításának</u> hívjuk.

<u>Példa</u> Az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisa ortonormált a kanonikus skaláris szorzatra nézve.

<u>B5</u> <u>Vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ban</u>

Az $a = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $b = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$ vektorok <u>vektoriális szorzatán</u> az

$$a \times b := \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha^3 \\ \beta^1 & \beta^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \beta^1 & \beta^2 \end{vmatrix} e_3$$
$$=: \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix}$$

vektort értjük. Itt a jobb oldali „harmadrendű determinánst" formálisan, az első sor szerinti kifejtési szabályával értelmezzük. A vektoriális szorzás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(VP$_1$) <u>Ferdeszimmetrikus</u>: $a \times b = - b \times a$, minden $a, b \in \mathbb{R}^3$ esetén.

(VP$_2$) <u>Bilineáris</u>.

(VP$_3$) <u>Ortogonális mindkét tényezőjére</u>:
$$\langle a \times b, a\rangle = \langle a \times b, b\rangle = 0.$$

(VP$_4$) $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$ – <u>Lagrange-azonosság</u>

$\Rightarrow$ ha $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, akkor
$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\theta \; ; \quad \theta = \sphericalangle(a, b).$$

(VP$_5$) $a \times b = \underline{0} \Longleftrightarrow$ a és b lineárisan függő.

(VP$_6$) Ha $a \times b \neq \underline{0}$, akkor $(a, b, a \times b)$ bázisa $\mathbb{R}^3$-nak.

B 6 Egyenesek és síkok $\mathbb{R}^3$-ban

Jelölés-elnevezés Ha $v_1, \dots, v_k$ vektorai egy V valós vektortérnek, akkor

$$\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) := \{ \lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^k v_k \in V \mid \lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R} \}$$

altere V-nek, amelyet a $v_1, \dots, v_k$ vektorok által kifeszített altérnek vagy az illető vektorok lineáris lezártjának nevezzük.

Emlékeztető Legyen H altere, $\underline{a}$ egy vektora egy V vektortérnek. Az

$$a + H := \{ a + h \in V \mid h \in H \}$$

vektorhalmazt a H altér a-val való eltoltjának vagy egy H iránytérű lineáris sokaságának nevezzük. Egy lineáris sokaság dimenzióján az iránytérének dimenzióját értjük. Az 1-dimenziós lineáris sokaságokat a vektortér egyeneseinek, a 2-dimenziós lineáris sokaságokat a vektortér síkjainak hívjuk.

(a) Egyenesek $\mathbb{R}^3$-ban

$$\ell = a + \mathrm{span}(v) = a + \{ \lambda v \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$

$v \neq 0$

Ekkor: $a \in \ell$, mert $a = a + 0 \cdot v$.

$\mathrm{span}(v)$ nemzérus vektorai: az egyenes irányvektorai.

A

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad t \longmapsto \gamma(t) := a + tv$$

leképezés bijekciója $\mathbb{R}$-nek $\ell = a + \operatorname{span}(v)$-re, amelyet az ℓ egyenes egy <u>paraméteres előállítás</u>ának vagy <u>paraméterezésének</u> hívunk. Közelebbről, a megadott paraméterezést <u>affin</u>nak mondjuk, mert egy

<u>lineáris leképezés</u> : $t \in \mathbb{R} \longmapsto tv \in \mathbb{R}^3$ (v rögzített)

és egy

<u>transzláció</u> $w \in \mathbb{R}^3 \longmapsto a + w \in \mathbb{R}^3$ („a" rögzített)

kompozíciója.

Legyen $a = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $v = (v^1, v^2, v^3)$, $\gamma^i := e^i \circ \gamma$; $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} \gamma^1(t) = \alpha^1 + t v^1 , \\ \gamma^2(t) = \alpha^2 + t v^2 , \\ \gamma^3(t) = \alpha^3 + t v^3 ; \end{cases}$$

ezeket az egyenlőségeket a paraméteres előállítás <u>koordinátafüggvényeinek</u> hívjuk. Áttérve formálisan az

$$\begin{aligned} x &= \alpha^1 + t v^1 \\ y &= \alpha^2 + t v^2 \\ z &= \alpha^3 + t v^3 \end{aligned} \qquad (*)$$

írásmódra, és innen kiküszöbölve a „t" paramétert, $v^1 v^2 v^3 \neq 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\frac{x - \alpha^1}{v^1} = \frac{y - \alpha^2}{v^2} = \frac{z - \alpha^3}{v^3}} . \qquad (**)$$

(**) az l egyenes egyenletrendszere abban az értelemben, hogy egy pont akkor és csak akkor illeszkedik l-re, ha koordinátái eleget tesznek (**)-nak.

Azt mondjuk, hogy (**) az $\mathbb{R}^3$-beli egyenesek kanonikus egyenletrendszere.

Ha például $v^1 = 0$, $v^2 v^3 \neq 0$, akkor (*)-tól azt kapjuk, hogy

$$x = \alpha^1 , \quad \frac{y - \alpha^2}{v^2} = \frac{z - \alpha^3}{v^3} .$$

Most tehát $v = (0, v^2, v^3) = v^2 e_2 + v^3 e_3$, így az egyenes párhuzamos a $\mathrm{span}(e_2, e_3)$ „xz-koordinátasík" -kal.

(f) Síkok $\mathbb{R}^3$-ban

$S = a + \mathrm{span}(v, w)$, ahol $a \in \mathbb{R}^3$, (v, w) lineárisan független vektorpár - a-ra illeszkedő (mert $a = a + 0 \cdot v + 0 w$) $\mathrm{span}(v, w)$ irányterű - vagy v és w által kifeszített - sík. Az

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \quad (s, t) \longmapsto f(s, t) := a + sv + tw$$

leképezés bijekciója $\mathbb{R}^2$-nek S-re; ezt az S sík egy paraméteres előállításának vagy parameterezésének hívjuk. Ha

$a = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $v = (v^1, v^2, v^3)$, $w = (w^1, w^2, w^3)$ és $f^i := e^i \circ f$ $(i \in \{1, 2, 3\})$, akkor

$$f^1(s,t) = \alpha^1 + s v^1 + t w^1,$$
$$f^2(s,t) = \alpha^2 + s v^2 + t w^2,$$
$$f^3(s,t) = \alpha^3 + s v^3 + t w^3;$$

ezek a sík tekintett paraméteres elő-állításainak koordinátakifejezései.

Definíció. Egy sík normálvektorán a síkot kifeszítő vektorokra (s ezáltal a sík irány-terének minden vektorára) merőleges nem-zérus vektort értünk.

Példa Ha $S = a + \operatorname{span}(v, w)$ sík, akkor $n = v \times w$ normálvektora S-nek.

B1. Lemma. Legyen $n \in \mathbb{R}^3$ egységvektor ($\|n\| = 1$). Megadható olyan v és w vektor, hogy az (n, v, w) vektorhármas ortonormált bázisa $\mathbb{R}^3$-nak.

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}^3$ $\pm n$-től különböző, egyébként tetszőleges egységvektor. Legyen

$$v := \frac{n \times a}{\|n \times a\|}, \quad w := n \times v.$$

Ekkor $v \perp n$ és v egységvektor; $w \perp n$, $w \perp v$, és w is egységvektor, mert

$$\|w\|^2 \overset{(VP4)}{=} \|n\|^2 \|v\|^2 - \langle n, v \rangle^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1. \qquad \square$$

B2. Állítás. Ha n nemzérus vektora, a pedig egy rögzített vektora $\mathbb{R}^3$-nak, akkor a

$$\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - a, n \rangle = 0 \} \qquad (*)$$

ponthalmaz sík. Minden sík megadható ilyen alakban.

Bizonyítás. Föltehetjük, hogy $\|n\| = 1$, mert a $(*)$-gal megadott ponthalmaz nem változik, ha az ottani n vektort egy nemzérus skalárszorosával helyettesítjük.

(a) Megmutatjuk, hogy a $(*)$ ponthalmaz n normálvektorú sík.

A lemma alapján van olyan v és w vektor, hogy (n, v, w) ortonormált bázisa $\mathbb{R}^3$-nak. Ekkor tetszőleges $p \in \mathbb{R}^3$ pont esetén a Fourier-előállítás alapján

$$p - a = \langle p-a, n\rangle n + \langle p-a, v\rangle v + \langle p-a, w\rangle w$$

írható. Ebből következik, hogy

$$\langle p-a, n\rangle = 0 \iff p - a \in \mathrm{span}(v, w) \iff p \in a + \mathrm{span}(v, w),$$

tehát a $(*)$ ponthalmaz az $a + \mathrm{span}(v, w)$ sík.

(b) Megfordítva, legyen adva egy $S = a + \mathrm{span}(v, w)$ sík. Föltehetjük, hogy itt $\|v\| = \|w\| = 1$ és $\langle v, w\rangle = 0$. Ha $n = v \times w$, akkor n normálegységvektora S-nek és

$$p \in S \iff p - a \in \mathrm{span}(v, w) \overset{(a)}{\iff} \langle p - a, n\rangle = 0.$$

□

1. következmény. $\mathbb{R}^3$ minden síkjának egyenlete megadható $\boxed{\langle \underline{x} - a, n\rangle = 0}$ alakban, ahol „a" a sík egy pontja, n a sík egy normálvektora, $\underline{x}$ pedig egy szimbólum. Megfordítva, minden ilyen alakú egyenlet (ahol $n \neq 0$) egy sík egyenlete. □

<u>2. következmény.</u> $\mathbb{R}^3$ minden síkjának egyenlete megadható $\boxed{\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta}$ alakban. Itt $n=(\alpha,\beta,\gamma)$ a sík egy normálvektora, $\delta=\langle n,a\rangle$ a sík egy „a" pontja segítségével képzett skalár; x,y,z szimbólumok. Megfordítva, minden $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ alakú egyenlet, ahol $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$, egy $\mathbb{R}^3$-beli sík egyenlete. □

I. GÖRBEELMÉLET

0. Analízisbeli háttér: valós változós, vektor-értékű leképezések differenciálása

<u>Jelölések</u>

$\mathbb{N}$ – a természetes számok halmaza ($0\in\mathbb{N}$)

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\setminus\{0\}$ – a pozitív egészek halmaza

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ – a nemzérus valós számok halmaza

$\mathbb{R}^*_+ := \{t\in\mathbb{R} \mid t>0\}$ – a pozitív valós számok halmaza

⋮

<u>A1</u> Legyen $a\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$. Ekkor a

$$B_\varepsilon(a) := \{p\in\mathbb{R}^n \mid d(a,p)<\varepsilon\}\subset\mathbb{R}^n$$

ponthalmaz az „a" középpontú, ε sugarú <u>nyílt gömb</u>,

$$S_\varepsilon(a) := \{p\in\mathbb{R}^n \mid d(a,p)=\varepsilon\}$$

az „a" középpontú, ε sugarú <u>szféra</u>.

Egy $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$ halmazt <u>nyíltnak</u> nevezünk, ha minden $p\in\mathcal{U}$ ponthoz van olyan $\varepsilon\in\mathbb{R}^*_+$, hogy $B_\varepsilon(p)\subset\mathcal{U}$. $\mathbb{R}^n$ egy rész-halmazát zártnak mondjuk, ha a komplementere nyílt halmaz.

Ismertnek tételezzük fel az $\mathbb{R}^n$-beli nyílt és zárt halmazok alapvető tulajdonságait.

A2 A továbbiakban $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, amely nyílt, zárt, félig nyílt, továbbá korlátos vagy nem korlátos egyaránt lehet, nem zsugorodhat azonban egyetlen pontra.

Definíció. Legyen adva egy $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés.

(a) f differenciálható egy $t \in I$ belső pontban, ha az

$$f'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

határérték létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy $f'(t)$ az f leképezés t-beli deriváltja.

(b) f differenciálható egy I nyílt intervallumon, ha annak minden pontjában differenciálható. Ekkor f deriváltja az

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto f'(t)$$

leképezés.

(1) f folytonosan differenciálható vagy C^1-osztályú, ha az f' derivált létezik és folytonos.

(2) f C^2-osztályú, ha az

$$f'' := (f')' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

második derivált létezik és folytonos.

(c) Teljes indukcióval folytatva, tetszőleges $k \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezhető f <u>C^k-osztályú</u> volta. Megállapodunk abban, hogy a folytonos leképezés C^0-osztályúak. Ha f minden $k \in \mathbb{N}$ esetén C^k-osztályú, akkor azt mondjuk, hogy f <u>C^∞-osztályú</u>, <u>végtelen sokszor differenciálható</u> vagy <u>sima</u>.

<u>Megjegyzés</u> Az analízisben olykor a C^1-osztályú leképezéseket említik sima leképezésekként; mi nem ezt a megállapodást követjük.

<u>0. 1. lemma.</u> Egy $f = (f^1, \dots, f^n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés akkor és csak akkor differenciálható egy $t \in I$ belső pontban, ha koordinátafüggvényeinek mindegyike differenciálható t-ben. Ekkor $f'(t) = ((f^1)'(t), \dots, (f^n)'(t))$. Δ

<u>0. 2. lemma.</u> Tegyük fel, hogy I nyílt intervallum, s hogy $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és $g: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés. Ekkor:

(1) Az

$$f+g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ t \longmapsto (f+g)(t) := f(t) + g(t)$$

leképezés differenciálható, a deriváltja

$$(f+g)' = f' + g'.$$

(2) Ha $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor a

$$\lambda f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ t \longmapsto (\lambda f)(t) := \lambda(t) f(t)$$

leképezés differenciálható; a deriváltja

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'.$$

(3) Az

$$\langle f,g\rangle : I \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \langle f,g\rangle(t) := \langle f(t), g(t)\rangle$$

függvény differenciálható; a deriváltja az

$$\langle f,g\rangle' = \langle f',g\rangle + \langle f,g'\rangle$$

függvény.

(4) Ha az f leképezés

$$\|f\| : I \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \|f\|(t) := \|f(t)\|$$

normafüggvénye konstans, akkor

$$\langle f,f'\rangle = 0 \quad (= \text{zérusfüggvény}),$$

és így az $f'(t)$ derivált minden $t \in I$ esetén ortogonális $f(t)$-re.

(5) Az $n=3$ esetben az

$$f\times g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad t \longmapsto (f\times g)'(t) := f(t)\times g(t)$$

leképezés differenciálható, a deriváltja

$$(f\times g)' = f'\times g + f\times g'.$$

(3) igazolása Legyen $f=(f^1,\dots,f^n)$, $g=(g^1,\dots,g^n)$. Ekkor $\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f^i g^i$, így az ismert differenciálási szabályok alapján

$$\langle f,g\rangle' = \Big(\sum_{i=1}^{n} f^i g^i\Big)' = \sum_{i=1}^{n} (f^i g^i)' = \sum_{i=1}^{n} \big((f^i)' g^i + f^i (g^i)'\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f^i)' g^i + \sum_{i=1}^{n} f^i (g^i)' = \langle f',g\rangle + \langle f,g'\rangle.$$

(4) igazolása Ha $\|f\| : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konstans függvény, akkor az $\langle f,f\rangle$ függvény is konstans, így

$$0 = \langle f,f\rangle' \overset{(3)}{=} \langle f',f\rangle + \langle f,f'\rangle = 2\langle f,f'\rangle.$$

Δ

1. Parametrizált görbék $\mathbb{R}^n$-ben

Megállapodások (1) A következőkben $\mathbb{R}^n$-ről szólva feltesszük, hogy $n \geq 2$.

(2) $I \subset \mathbb{R}$ továbbra is olyan intervallum, amelyről A2-ben szóltunk.

A 0. pontban tárgyalt típusú leképezéseknek most új nevet adunk, és ennek kapcsán bevezetünk néhány további elnevezést is.

Definíció. Egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ sima leképezést $\mathbb{R}^n$-beli parametrizált görbének, röviden görbének nevezünk.

Megjegyzések.

(1) Ha I nem nyílt intervallum, akkor tisztáznunk kell, hogy mit is értünk egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ leképezés simaságán. Egy lehetséges definíció a következő:

Létezik olyan $\tilde{I}$ nyílt intervallum és $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ sima leképezés, hogy $I \subset \tilde{I}$ és $\tilde{c} \mid I = c$.

(2) Egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ görbe esetén a t „változót" paraméternek, tetszőleges $t \in I$ esetén a $c(t) \in \mathbb{R}^n$ pontot t-paraméterű görbepontnak hívjuk. Egy görbéről jó intuitív képet ad egy „térben mozgó tömegpont". Ilyenkor azt mondjuk, hogy $c(t)$ a tömegpont helyzetvektora a t időpontban.

(3) Értelmezésünk szerint egy parametrizált görbe egy leképezés, nem pedig a görbe-

pontok halmaza, azaz különbséget teszünk egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ görbe és annak

$$c(I) = \operatorname{Im}(c) = \{c(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$$

képhalmaza / értékkészlete között. Látni fogjuk: különböző görbék rendelkezhetnek közös képhalmazzal.

(3) Ha $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy ponthalmaz és $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ olyan görbe, hogy $\operatorname{Im}(c) = \Gamma$, akkor azt mondjuk, hogy c egy <u>paraméteres előállítása</u> vagy <u>paraméterezése</u> Γ-nak.

<u>Példa</u> az $\mathbb{R}^3$-beli egyenesek paraméteres előállítása, ld. <u>B6</u>/(a).

(4) Azt mondjuk, hogy egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ görbe <u>átmegy</u> egy $P \in \mathbb{R}^n$ ponton, vagy hogy P <u>rajta van</u> a c görbén, ha $P \in \operatorname{Im}(c)$, azaz van olyan $t \in I$, hogy $c(t) = P$.

(5) Koordinátafüggvényei segítségével egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ görbe a

$$c = (c^1, \dots, c^n) \; ; \quad c^i := e^i \circ c \; , \; i \in \{1, \dots, n\}$$

alakban adható meg. „c" simasága azzal ekvivalens, hogy a c^i függvények mindegyike sima.

<u>Definíció.</u> Legyen adva egy $c = (c^1, \dots, c^n): I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbe.

(1) c <u>érintővektormezője</u> vagy <u>sebesség-vektormezője</u> a

$$c': I \longrightarrow \mathbb{R}^n \; , \; t \longmapsto c'(t) = ((c^1)'(t), \dots, (c^n)'(t))$$

derivált leképezés; tetszőleges $t \in I$ esetén $c'(t)$ a görbe <u>érintő-</u> vagy <u>sebességvektora</u> t-ben.

A görbét <u>regulárisnak</u> mondjuk, ha a sebesség-vektormezője sehol sem tűnik el, azaz

$$c'(t) \neq 0, \quad \text{minden } t \in I \text{ esetén.}$$

(2) A c görbe <u>pályasebessége</u> a sebesség-vektormezőjének normafüggvénye, azaz a

$$v := \|c'\| : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto v(t) := \|c'\|(t) := \|c'(t)\|$$

függvény. A görbe <u>konstans pályasebességű</u>, ha a pályasebesség konstans függvény; <u>egységpálya-sebességű</u> vagy <u>természetes paraméterezésű</u>, ha a pályasebessége az 1-értékű konstans függvény.

(3) A $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ görbe <u>gyorsulásvektormezője</u> a sebességvektormezőjének deriváltja, azaz a

$$c'' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto c''(t) = ((c^1)''(t), \dots, (c^n)''(t))$$

leképezés. Tetszőleges $t \in I$ esetén a $c''(t)$ vektor a görbe <u>gyorsulása</u> $t \in I$-ben. Ha a $c'(t)$ és a $c''(t)$ vektor minden $t \in I$ esetén lineárisan független, akkor a görbét <u>bireguláris</u>nak nevezzük.

(4) Tegyük fel, hogy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>reguláris</u> parametrizált görbe. Ekkor:

(a) Tetszőleges $t_0 \in I$ esetén a

$$c(t_0) + \operatorname{span}(c'(t_0)) = \{ c(t_0) + \lambda c'(t_0) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

egyenes a görbe $c(t_0)$-beli – vagy a t_0 paraméterhez tartozó – <u>érintőegyenese</u>.

(b) A $T := \frac{1}{\|c'\|} c' = \frac{1}{v} c' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

leképezés a c görbe <u>érintő-egységvektormezője</u>.

($T = c'$, ha a görbe természetes paraméterezésű).

(5) Tegyük fel, hogy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>bireguláris</u> görbe. Ekkor tetszőleges $t_0 \in I$ esetén a

$$c(t_0) + \operatorname{span}(c'(t_0), c''(t_0)) = \{c(t) + \lambda c'(t_0) + \mu c''(t_0) \in \mathbb{R}^3 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

sík a görbe $c(t_0)$-beli – vagy a t_0 paraméterhez tartozó – <u>simulósíkja</u>.

<u>Példák</u>

(1) Tekintsük az $\ell = a + \operatorname{span}(v) \subset \mathbb{R}^3$ $(v \neq 0)$ egyenes

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(t) := a + tv \in \mathbb{R}^3$$

affin paraméterezését (<u>B6</u>/(a)). Ekkor γ sima leképezés, így $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\gamma'(t) = v \neq 0, \quad \gamma''(t) = 0,$$

tehát γ <u>reguláris</u>, de nem <u>bireguláris</u>.

γ érintő egységvektormezője a

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto T(t) = \frac{1}{\|v\|} v$$

konstans leképezés.

(2) <u>$\mathbb{R}^3$ „x-tengelyének" paraméterezései</u>

$$x\text{-tengely} := \operatorname{span}(e_1) = \{(t, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

<u>(2)/1.</u> $c_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c_1(t) := (t, 0, 0)$

c_1 sima, egységnyi pályasebességű

<u>(2)/2.</u> $c_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto c_2(t) := (t^3, 0, 0)$

c_2 sima, $\operatorname{Im}(c_2) = \operatorname{span}(e_1)$

$c_2'(t) = (3t^2, 0, 0)$, $c_2'(0) = 0$ – c_2 <u>nem reguláris</u>

(2)/3. $c_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto c_3(t) := (t^3+t, 0, 0)$

c_3 sima, $\mathrm{Im}(c_3) = \mathrm{span}(e_1)$

$c_3'(t) = (3t^2+1, 0, 0) \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow c_3$ reguláris

$c_3''(t) = (6t, 0, 0), \ c_3''(0) = 0 \Rightarrow c_3$ nem biereguláris

(2)/4. $c_4 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto c_4(t) := (\mathrm{tg}\, t, 0, 0)$

c_4 sima, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$c_4'(t) = \left(\left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(t), 0, 0\right) = \left(\frac{1}{\cos^2(t)}, 0, 0\right)$

c_4 reguláris

(3) Valós-valós függvény $\rightsquigarrow$ paraméterezett görbe

Legyen $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvény. A

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto c(t) := (t, h(t))$$

leképezés sima; tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$c'(t) = (1, h'(t)) \neq (0, 0),$$

így c reguláris paraméterezett görbe.

Mivel

$$\mathrm{Im}(c) = c(\mathbb{R}) := \{ c(t) \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (t, h(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \} =: \mathrm{graf}(h),$$

c a h függvény grafikonjának paraméterezése. c $t_0 \in \mathbb{R}$-beli érintőegyenese

$$c(t_0) + \mathrm{span}(c'(t_0)) = (t_0, h(t_0)) + \mathrm{span}(1, h'(t_0));$$

ennek egy irányvektora $(1, h'(t_0))$. $h'(t_0) \neq 0$ esetén az érintőegyenes egyenlete

$$\frac{x-t_0}{1} = \frac{y-h(t_0)}{h'(t_0)} \iff \underline{y-h(t_0) = h'(t_0)(x-t_0)}\ ;$$

ez az adott ponton átmenő, adott meredekségű egyenes középiskolából jól ismert egyenlete.

(4) <u>Parametrizált görbék</u>

<u>(4)/1.</u> A $c : [0,2\pi[\ \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto c(t) := (\cos t, \sin t)$ leképezés számra, így parametrizált görbe. Tetszőleges $t \in [0,2\pi[$ esetén

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|c'(t)\| = 1,$$

tehát c reguláris, mégpedig egységpályasebességű.

$$T = c' \ ; \quad c''(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az

$$S := \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + \eta^2 = 1 \}$$

„egységszférát". S egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Mivel bármely $t \in [0,2\pi[$ esetén

$$\|c(t)\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

következik, hogy $\mathrm{Im}(c) \subset S$. Belátható, hogy – megfordítva – minden $p \in S$ ponthoz létezik egyetlenegy olyan $t \in [0,2\pi[$ valós szám, hogy $p = (\cos t, \sin t)$, így $\underline{\mathrm{Im}(c) = S}$.

<u>Megjegyzés.</u> A $\tilde{c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \tilde{c}(t) := (\cos t, \sin t)$ leképezés szintén egységpályasebességű görbe és $\mathrm{Im}(\tilde{c}) = \mathrm{Im}(c)$. $\tilde{c} \neq c$; a $\tilde{c}$ görbe „végtelen sokszor futja be az $S \subset \mathbb{R}^2$ egységszférát".

(viii) Legyen $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ rögzített pont, ϱ rögzített pozitív valós szám. A

$$c : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto c(t) := (\alpha + \varrho\cos t, \beta + \varrho\sin t)$$

leképezés görbe. Mivel

$$c'(t) = (-\varrho\sin t, \varrho\cos t) \text{ és } v(t) := \|c'(t)\| = \varrho,$$

c konstans – mégpedig ϱ – pályasebességű reguláris görbe. Mint ként az előbb, valójában a bireguláritás is fennáll: a

$$c''(t) = (-\varrho\cos t, -\varrho\sin t)$$

gyorsulás sehol sem párhuzamos a sebességgel.
Az érintő-egységvektormező:

$$T : t \in [0, 2\pi[\longmapsto T(t) = (-\sin t, \cos t) \in \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Im}(c) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \varrho^2\},$$

tehát c az $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$ egyenletű $\mathbb{R}^2$-beli körvonal egy paraméterezése.

(5) **Ellipszis**

$$E := \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\xi^2}{(\alpha)^2} + \frac{\eta^2}{(\beta)^2} = 1\right\}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+ \text{ rögzített.}$$

E egyenlete: $\dfrac{x^2}{(\alpha)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta)^2} = 1$; E egy paraméterezése:

$$c : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto c(t) := (\alpha\cos t, \beta\sin t).$$

A sebesség-vektormező, ill. a pályasebesség:

$$c' : t \in [0, 2\pi[\longmapsto c'(t) = (-\alpha\sin t, \beta\cos t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v(t) := \|c'(t)\| = \sqrt{(\alpha)^2\sin^2 t + (\beta)^2\cos^2 t}\;; \quad t \in [0, 2\pi[.$$

(6) **Hengeres csavarvonal**

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ rögzített. A

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto c(t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t) \in \mathbb{R}^3$$

leképezés $\mathbb{R}^3$-beli paraméterezett görbe.

Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$c'(t) = (-\alpha \sin t, \alpha \cos t, \beta), \quad \|c'(t)\| = \sqrt{(\alpha)^2 + (\beta)^2};$$

$$c''(t) = (-\alpha \cos t, -\alpha \sin t, 0),$$

$$c'(t) \times c''(t) = (\alpha\beta \sin t, -\alpha\beta \cos t, \alpha^2) \neq (0,0,0),$$

így c konstans pályasebességű biregúláris paraméterezett görbe.

Mivel

$$(c^1(t))^2 + (c^2(t))^2 = (\alpha)^2, \quad t \in \mathbb{R};$$

$\mathrm{Im}(c)$ merőleges vetülete a $\mathrm{span}(e_1, e_2)$ koordinátasíkra az $S_\alpha((0,0))$ körvonal. Ebből következik, hogy $\mathrm{Im}(c)$ rajta van az

$$x^2 + y^2 = (\alpha)^2$$

térbeli egyenletű egyenes körhengeren, amelynek tengelye a $\mathrm{span}(e_3)$ z-tengely.

Mindezre tekintettel nevezzük a c görbét hengeres csavarvonalnak.

~ o ~

Definíció. Egy $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbe ívhosszán pályasebességének $[a,b]$ fölötti integrálját, azaz az $L(c) := \int_a^b \|c'\|$ valós számot értjük. A

$$s : [a,b] \longrightarrow [0, L(c)],\ t \longmapsto s(t) := \int_a^t \|c'\|$$

függvényt ívhosszfüggvénynek mondjuk.

Példák (7) Logaritmikus spirális:

$$c:\ t\in\mathbb{R} \longmapsto c(t):=(e^t\cos t,\ e^t\sin t)\in\mathbb{R}^2.$$

Ekkor $c'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t)\right)$,

$\|c'(t)\| = \sqrt{2}\,e^t$, így a $0\in\mathbb{R}$ alapponttól számított ívhosszfüggvény

$$s:\ t\in[0,\infty[\ \longmapsto s(t) = \sqrt{2}\int_0^t \exp = \sqrt{2}\,(e^t-1).$$

(8) Függvény-grafikon ívhossza. Legyen $h\in C^\infty(\mathbb{R})$, s tekintsük a

$$c:\ [t_1,t_2]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ t\longmapsto c(t):=(t,h(t))$$

parametrizált görbét (v.ö. (3)). c ívhossza $[t_1,t_2]$ fölött

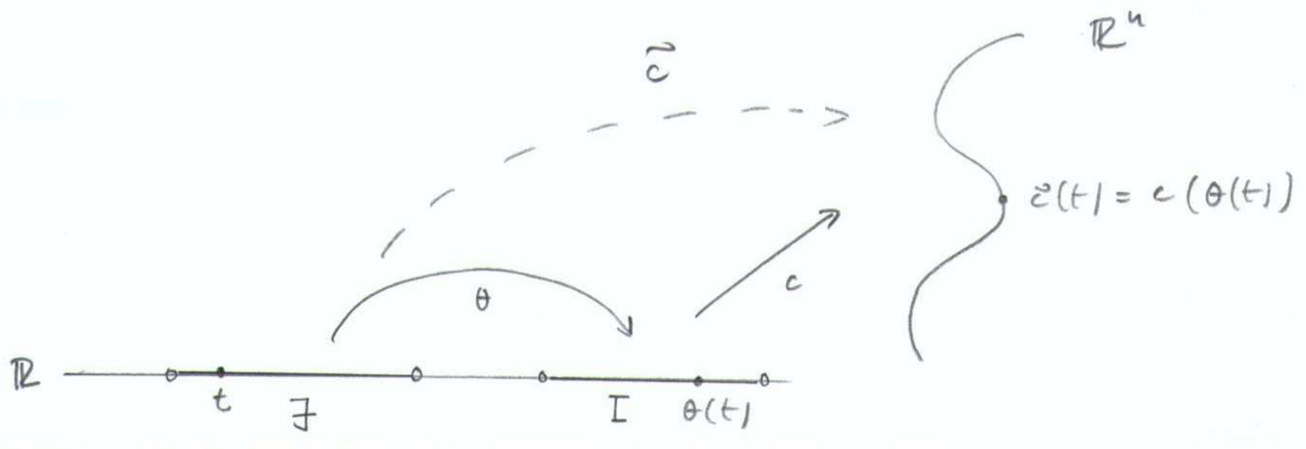
$$L(c) = \int_{t_1}^{t_2}\|c'\| \overset{(3)}{=} \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+(h')^2}.$$

2. Átparaméterezés

2.1. Lemma-definíció. Legyen adva egy $c: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ görbe. Legyen $J\subset\mathbb{R}$ egy intervallum, s tegyük fel, hogy $\theta: J\longrightarrow I$ olyan bijektív sima függvény, amelynek $\theta^{-1}: I\longrightarrow J$ inverze is sima. Ekkor

$$\tilde{c} := c\circ\theta\ :\ J\longrightarrow I\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

szintén görbe, amelyet a c görbe egy átparaméterezettjének nevezünk. Ilyenkor a θ függvényt paramétertranszformációnak hívjuk. □



Példa $c :]0,4[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \; t \longmapsto c(t) := (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$

$\theta :]0,2[\longrightarrow]0,4[\;, \; t \longmapsto \theta(t) := t^2 .$

Ha $\tilde{c} := c \circ \theta$, akkor

$$\tilde{c} :]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \;, \; t \longmapsto c(\theta(t)) = c(t^2) = (t, t^3, 1-t^2).$$

2.2. Megjegyzések. (1) Általánosan, egy $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ sima leképezést diffeomorfizmusnak mondunk, ha bijektív és az inverze is sima. Így a paramétertranszformációk diffeomorfizmusok.

(2) Egy paramétertranszformáció deriváltja sehol sem tűnik el. Valóban, legyen $\theta : J \longrightarrow I$ egy paramétertranszformáció. Ekkor

$$\theta \circ \theta^{-1} = 1_I \quad \text{(identikus transzformáció)},$$

így tetszőleges $t \in I$ esetén

$$1 = (1_I)'(t) = (\theta \circ \theta^{-1})'(t) \overset{\text{láncszabály}}{=} \theta'(\theta^{-1}(t))((\theta^{-1})'(t)),$$

θ' tehát valóban sehol sem tűnhet el. Következik ily módon, hogy a paramétertranszformációknak két típusa lehetséges:

(i) θ' mindenütt pozitív; ekkor θ szigorúan monoton növekvő;

(ii) θ' mindenütt negatív; ebben az esetben θ szigorúan monoton csökkenő.

Az első esetben irányítástartó, a második esetben irányításváltó átparaméterezésről beszélünk.

2.3. Definíció - lemma. Két (nem feltétlenül különböző) $\mathbb{R}^n$-beli parametrizált görbét ekvivalensnek nevezünk, ha egyikük megkapható a másik átparaméterezettjeként. Az $\mathbb{R}^n$-beli parametrizált görbék halmazában így bevezetett reláció <u>ekvivalenciareláció</u>; az ekvivalenciaosztályokat <u>geometriai görbéknek</u> vagy egyszerűen szintén csak <u>görbéknek</u> nevezzük. ⚠

---

1. ELV Egy parametrizált görbének csak azokat az adatait tekintjük „GEOMETRIAI ADATOK"-nak, amelyek irányítástartó átparaméterezés során nem változnak, irányítástartó átparaméterezés során pedig legfeljebb előjelváltást szenvednek.

---

2. 4. Állítás. Legyen adva egy $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, s tekintsünk egy $\theta : J \longrightarrow I$ paramétertranszformációt. Legyen $\tilde{c} := c \circ \theta$, $J \to I \to \mathbb{R}^n$. Ekkor:

(1) $\tilde{c}$ és c pályasebességének kapcsolatát a

$$\tilde{v} = |\theta'|(v \circ \theta)$$

összefüggés adja.

(2) Ha c reguláris, akkor a $\tilde{c}$ átparaméterezett görbe is reguláris. Ebben az esetben az érintő-egységvektormezők kapcsolata a

$$\tilde{T} = \varepsilon\,(T \circ \theta)$$

formulával adható meg, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint az átparaméterezés irányítástartó, ill. irányításváltó.

(3) $\tilde{c}$ és c ívhossza egyenlő.

<u>Bizonyítás.</u>

(1) $\tilde{c} = c \circ \theta$; innen a láncszabály alapján $\tilde{c}' = (c' \circ \theta)\theta'$, így

$$\tilde{\nu} := \|\tilde{c}'\| = \|\theta'(c' \circ \theta)\| = |\theta'|\,\|c' \circ \theta\| = |\theta'|(\nu \circ \theta).$$

(2) 2.2./(2) miatt θ' sehol sem nulla, és a reguláris esetben ugyanez igaz $\nu \circ \theta$-ra is. Így (1) alapján következik, hogy c regularitása esetén $\tilde{c}$ is az. Ekkor tehát képezhető a $\tilde{T} := \frac{1}{\|\tilde{c}'\|}\tilde{c}'$ érintő-egységvektormező, és

$$\tilde{T} = \frac{1}{|\theta'|(\nu \circ \theta)}\theta'(c' \circ \theta) = \frac{\theta'}{|\theta'|}\left(\left(\frac{1}{\nu}c'\right) \circ \theta\right) = \varepsilon(T \circ \theta).$$

(3) Legyen $J = [\bar{a}, \bar{b}]$, $I = [a, b]$.

(i) Ha az átparaméterezés <u>irányítástartó</u>, akkor $\theta(\bar{a}) = a$, $\theta(\bar{b}) = b$, $\tilde{\nu} = \theta'(\nu \circ \theta)$, és így

$$L(\tilde{c}) := \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\tilde{c}'\| = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \tilde{\nu} = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} (\nu \circ \theta)\theta'$$

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b \nu =: L(c);$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben a helyettesítéssel való integrálás formuláját alkalmazva.

(ii) <u>Irányításváltó</u> átparaméterezés esetén

$$\theta(\bar{a}) = b, \quad \theta(\bar{b}) = a, \quad \tilde{\nu} = -\theta'(\nu \circ \theta),$$

ezért

$$L(\tilde{c}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \tilde{\nu} = -\int_{\theta^{-1}(b)}^{\theta^{-1}(a)} (\nu \circ \theta)\theta' = \int_{\theta^{-1}(a)}^{\theta^{-1}(b)} (\nu \circ \theta)\theta'$$

$$\overset{(*)}{=} \int_a^b \nu = L(c).$$

□

<u>Megjegyzés.</u> Az állítás értelmében az érintő-egységvektormező, az érintőegyenes és az ívhossz geometriai adata a parametrizált görbének. A regularitás – az 1. elv szerinti értelemben – <u>geometriai tulajdonság</u>. Ugyancsak geometriai tulajdonság a biregularitás (ez az előbbiekhez hasonlóan ellenőrizhető, de a későbbiekből következni is fog), és geometriai adat a simulósík.

<u>2.5. Tétel.</u> Ha $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ <u>reguláris</u> parametrizált görbe, akkor irányítástartó paramétertranszformációval átparaméterezhető egységpályasebességűvé. Nevezetesen, ha $a \in I$ egy rögzített pont,

$$\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \sigma(t) := \int_a^t \|c'\|$$

az ‚a' alappontú ívhosszfüggvény és $J := \sigma(I)$, akkor a $\sigma^{-1} : J \longrightarrow I$ inverz függvény létezik, irányítástartó paramétertranszformáció, és a $\tilde{c} := c \circ \sigma^{-1}$ görbe egységpályasebességű.

<u>Bizonyítás.</u> Mivel a $\|c'\|$ pályasebesség-függvény folytonos, az analízis egyik alaptétele szerint a σ függvény differenciálható és a deriváltja $\sigma' = \|c'\|$, így – c' regularitását figyelembe véve – következik a σ függvény simasága. Ugyancsak a regularitás miatt σ' mindenütt pozitív, ezért σ szigorúan monoton növekvő, s így speciálisan injektív. Létezik ezért a σ^{-1} inverz függvény, amely

szintén differenciálható. A deriváltja

$$(\sigma^{-1})' = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} = \frac{1}{\|c'\| \circ \sigma^{-1}}.$$

Világos innen, hogy $(\sigma^{-1})'$ mindenütt pozitív. Így σ^{-1} irányítástartó paraméter-transzformáció. A $\tilde{c} := c \circ \sigma^{-1}$ átparaméterezett görbe egységpályasebességű, ugyanis tetszőleges $t \in J = \sigma(I)$ esetén

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|(c \circ \sigma^{-1})'(t)\| = \|(c' \circ \sigma^{-1})(\sigma^{-1})'(t)\|$$

$$= \left\| c'(\sigma^{-1}(t)) \frac{1}{\|c'\|(\sigma^{-1}(t))\|} \right\|$$

$$= \frac{1}{\|c'\|(\sigma^{-1}(t))\|} \|c'(\sigma^{-1}(t))\| = 1. \qquad \square$$

<u>Megjegyzések.</u> (1) Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^n$ egységpályasebességű paraméterezett görbe. Rögzítünk egy $a \in I$ pontot, és legyen $a < s \in I$ tetszőleges. Ekkor

$$L(c \restriction [a,s]) = \int_a^s \|c'\| = \int_a^s 1 = s - a,$$

tehát egy <u>egységpályasebességű görbeszakasz ívhossza a paraméterintervallum hosszával egyenlő.</u> Erre tekintettel az egységpályasebességű vagy természetes paraméterezésű görbéket gyakran <u>ívhossz paraméterezésű</u> görbéknek is mondani.

(2) Bár a tétel értelmében minden reguláris paraméterezett görbének <u>létezik</u> egységpályasebességű átparaméterezése, ez gyakran nagyon komplikált alakú, és általában explicit formulával nem is állítható elő. – Példákat illetően ld. a Gyakorlatot!

<u>2.6. Következmény.</u> Egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ egységpályasebességű paraméterezett görbe akkor és csak akkor ekvivalens egy szintén egységpályasebességű $\tilde{c}: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbével, ha közöttük

$$\theta: J \longrightarrow I, \quad t \longmapsto \theta(t) := \pm t + t_0 \qquad (*)$$

alakú paramétertranszformáció adható meg, ahol t_0 tetszőlegesen rögzített valós szám.

<u>Bizonyítás.</u> Ha a két görbe <u>ekvivalens</u>, akkor a pályasebességükre

$$\nu := \|c'\| = \mathbf{1}, \text{ ill. } \tilde{\nu} = \|\tilde{c}'\| \overset{2.4.(1)}{=} |\theta'|(\nu \circ \theta) = \mathbf{1}$$

teljesül, ahol $\theta \in C^\infty(J, I)$, az $\mathbf{1}$ pedig 1-értékű konstans függvényt jelöl. A két feltételből

$$\theta' = \mathbf{1} \quad \text{vagy} \quad \theta' = -\mathbf{1}$$

következik, így bármely $t \in J$-re

$$\theta(t) = t + t_0 \quad \text{vagy} \quad \theta(t) = -t + t_0$$

($t_0 \in \mathbb{R}$ rögzített).

Megfordítva, ha $c: I \to \mathbb{R}^n$ egységpályasebességű és θ a $(*)$ szabállyal adott függvény, akkor 2.4 (1) alapján $\tilde{c} := c \circ \theta$ is egységpályasebességű. $\square$

3. $\mathbb{R}^3$-beli görbék Frenet-apparátusa

Definíció. Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált görbe görbületfüggvénye a

$$\varkappa := \frac{1}{\|c'\|}\|T'\| = \frac{1}{v}\|T'\|$$

függvény, ahol $T = \frac{1}{\|c'\|}c' = \frac{1}{v}c'$ a görbe érintő-egységvektormezője. Tetszőleges $t \in I$ esetén a $\varkappa(t)$ függvényérték a görbe t-beli görbülete.

Megjegyzés. Ha c egységpályasebességű, akkor $T = c'$, így $\varkappa = \|T'\| = \|c''\|$. Tehát: egységpályasebességű görbe görbületfüggvénye a gyorsulás-vektormezőjének normafüggvénye.

3.1. Lemma. Legyen $c: I \to \mathbb{R}^3$ reguláris görbe és $\tilde{c} := c \circ \theta$ egy átparaméterezése c-nek. Ekkor $\tilde{c}$ és c görbületfüggvényeinek kapcsolatát a $\boxed{\tilde{\varkappa} = \varkappa \circ \theta}$ egyenlőség adja, következésképpen a görbületfüggvény paramétertranszformációval szemben invariáns, és így geometriai adata a görbéknek.

Bizonyítás.
$$\tilde{\varkappa} := \frac{1}{\tilde{v}}\|\tilde{T}'\| \overset{2.4./(1),(2)}{=} \frac{1}{|\theta'|(v\circ\theta)}\|(T\circ\theta)'\|$$
$$= \frac{1}{|\theta'|(v\circ\theta)}\|\theta'(T'\circ\theta)\| = \frac{1}{v\circ\theta}\|T'\circ\theta\| = \left(\frac{1}{v}\|T'\|\right)\circ\theta$$
$$= \varkappa\circ\theta.$$

□

3.2. Állítás. Egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett görbe görbületfüggvénye kiszámítható a

$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

formula alapján.

Bizonyítás. $T := \frac{1}{\nu} c'$; innen $c' = \nu T$, így 0.2/(2) alkalmazásával $c'' = \nu' T + \nu T'$.
Ezek alapján

$$c' \times c'' = \nu T \times (\nu' T + \nu T') = \nu^2 (T \times T'),$$

$$\|c' \times c''\|^2 = \nu^4 \|T \times T'\|^2 \overset{(VP_4)}{=} \nu^4 (\|T'\|^2 - \langle T, T' \rangle^2)$$

$$\overset{0.2./(4)}{=} \nu^4 \|T'\|^2 = \nu^6 \|\tfrac{1}{\nu} T'\|^2 = \nu^6 \kappa^2 .$$

Innen

$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\nu^3} = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} . \qquad \square$$

3.3. Állítás (a zérus görbületű görbék jellemzése).
Egy $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű paraméterezett görbére a következők ekvivalensek:
(1) c görbületfüggvénye eltűnik;
(2) c gyorsulásvektormezője a zérus vektormező;
(3) c egy $\mathbb{R}^3$-beli egyenes affin paraméterezése.

Bizonyítás. (1) ⟺ (2), mert a természetes paraméterezés miatt $\kappa = \|c''\|$.
(2) ⟹ (3) $c'' = 0$ (zérusfüggvény) esetén a $c': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés konstans, ezért létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, hogy

$$c'(t) = v, \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Így a c leképezés

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) = a + t v \in \mathbb{R}^3 \qquad (*)$$

alakú, ahol $a \in \mathbb{R}^3$ tetszőlegesen rögzített vektor. Ez azt jelenti, hogy c $\mathbb{R}^3$-beli egyenes affin paraméterezése.

(3) ⇒ (2) Ha a $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ leképezést a (*) szabály értelmezi, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $c'(t) = v$, $c''(t) = 0$, tehát $c'' = 0$. □

3.4. Állítás (a biregularitás jellemzése). Egy $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbe pontosan akkor bireguláris, ha reguláris és a görbületfüggvénye sehol sem tűnik el (s emiatt így mindenütt pozitív).

Bizonyítás. Tekintsünk egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét.

(1) Ha c bireguláris, akkor nyilvánvalóan reguláris. S így tetszőleges $t \in I$ esetén $c'(t) \neq 0$, $c'(t) \times c''(t) \neq 0$, következésképpen

$$\varkappa(t) = \frac{\| c'(t) \times c''(t) \|}{\| c'(t) \|^3} > 0.$$

(2) Megfordítva, ha c reguláris és $\varkappa$ mindenütt pozitív, akkor bármely $t \in I$ esetén

$$\| c'(t) \times c''(t) \| > 0 \implies c'(t) \times c''(t) \neq 0 \overset{(VP_5)}{\implies} c'(t), c''(t) \text{ lineárisan függetlenek} \overset{\text{def.}}{\implies} c \text{ bireguláris.}$$

□

Definíció. Legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe. Ekkor:

(1) $$F = \frac{1}{\|T'\|} T' = \frac{1}{\varkappa \|c'\|} T' = \frac{1}{\varkappa v} T'$$

c főnormális vektormezője;

(2) $B := T \times F$ c binormális vektormezője;

(3) $\tau := -\frac{1}{\|c'\|}\langle B', F\rangle = -\frac{1}{\nu}\langle B', F\rangle$

c torziófüggvénye;

(4) (T, F, B) – c Frenet-féle háromélmezője;

(5) $(\varkappa, \tau, T, F, B)$ – c Frenet-apparátusa.

3.5. Tétel-definíció. Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ biregulráris térgörbe Frenet-apparátusával kapcsolatban érvényesek a következők:

(1) A (T, F, B) Frenet-féle háromélmező létezik.

(2) A Frenet-féle háromélmezőt páronként ortogonális egységvektormezők alkotják, azaz
$\langle T, F\rangle = \langle F, B\rangle = \langle B, T\rangle = 0$, $\|T\| = \|F\| = \|B\| = 1$.

(3) Minden $t \in I$ esetén $(T(t), F(t), B(t))$ ortonormált bázisa $\mathbb{R}^3$-nak; ezt a bázist a t-hez tartozó Frenet-bázisnak is hívjuk.

(4) Bármely $X: I \to \mathbb{R}^3$ leképezés egyértelműen előállítható (T, F, B) segítségével az

$$X = \langle X, T\rangle T + \langle X, F\rangle F + \langle X, B\rangle B$$

alakban; ez az X leképezés (T, F, B)-re vonatkozó Fourier-előállítása.

(5) A Frenet-féle háromélmező tagjainak deriváltjai a Frenet-féle háromélmező segítségével a

$$T' = \nu\varkappa F \qquad (F1)$$

$$F' = -\nu\varkappa T + \nu\tau B \qquad (F2)$$

$$B' = -\nu\tau F \qquad (F3)$$

formulák szerint állíthatók elő, ahol $\nu := \|c'\|$, $\varkappa$ és τ rendre c pályasebessége, görbületfüggvénye és torziófüggvénye. Ezeket a formulákat **Frenet-formuláknak**, **Frenet-Serret formuláknak** vagy **a görbeelmélet derivációs formuláinak** hívjuk. Szimbolikus mátrix-alakjuk:

$$\begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \nu\varkappa & 0 \\ -\nu\varkappa & 0 & \nu\tau \\ 0 & -\nu\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. (1) A bireguláritás folytán $\|c'\| (= \nu)$ és $\varkappa$ sehol sem zérus (ld. 3.4. állítás), így képezhető $T := \frac{1}{\|c'\|} c'$, $F := \frac{1}{\nu\varkappa} T' = \frac{1}{\|T'\|} T'$ és $B := T \times F$.

(2) Tudjuk, ill. evidens, hogy $\|T\| = \|F\| = 1$. A pontonként érvényes Lagrange-azonosság alkalmazásával

$$\|B\| = \|T \times F\| = \sqrt{\|T\|^2 \|F\|^2 - \langle T, F\rangle^2} = \sqrt{1 - \langle T, F\rangle^2}.$$

Itt $\langle T, F\rangle = \langle T, \frac{1}{\nu\varkappa} T' \rangle = \frac{1}{\nu\varkappa} \langle T, T'\rangle \overset{0.2.(4)}{=} 0$, tehát $\|B\| = 1$. (VP_3) miatt fennáll végül az is, hogy $\langle B, T\rangle = \langle B, F\rangle = 0$.

(3) – közvetlen következménye (2)-nek.

(4) Tetszőleges $t \in I$ esetén

$$X(t) \overset{\text{B4 (Fourier)}, (3)}{=} \langle X(t), T(t)\rangle T(t) + \langle X(t), F(t)\rangle F(t) + \langle X(t), B(t)\rangle B(t),$$

így X egyértelműen előállítható a kívánt alakban.

(5) $\underline{\underline{(F1)}}$ – ez F definíciójának átírása

$\underline{\underline{(F3)}}$ igazolása: $B' \overset{(4)}{=} \langle B', T\rangle T + \langle B', F\rangle F + \langle B', B\rangle B$

$$\overset{(0.2)/(4) + \tau \text{ definíciója}}{=} \langle B', T\rangle T - \nu\tau F$$

Mivel $\langle B, T\rangle = 0$, azt kapjuk, hogy

$$0 = \langle B, T\rangle' \overset{0.2.(3)}{=} \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle \overset{(F1)}{=} \langle B', T\rangle + \nu\varkappa \langle B, T\rangle = \langle B', T\rangle;$$

tehát $B' = -\nu\tau F$.

(F2) igazolása:

$$F' \overset{(4)}{=} \langle F', T\rangle T + \langle F', F\rangle F + \langle F', B\rangle B \overset{0.2.(3)}{=}$$
$$= \langle F', T\rangle T + \langle F', B\rangle B.$$

ÁH:

$$0 = \langle F, T\rangle \Rightarrow 0 = \langle F, T\rangle' = \langle F', T\rangle + \langle F, T'\rangle \overset{(F1)}{=} \langle F', T\rangle + \nu\kappa,$$

így $\langle F', T\rangle = -\nu\kappa$;

$$0 = \langle F, B\rangle \Rightarrow 0 = \langle F, B\rangle' = \langle F', B\rangle + \langle F, B'\rangle \overset{(F3)}{=} \langle F', B\rangle - \nu\tau;$$

innen $\langle F', B\rangle = \nu\tau$. Így $F' = -\nu\kappa T + \nu\tau B$. □

Megjegyzések. (1) Jean Frédéric FRENET és Joseph Alfred SERRET francia matematikusok; az (F1)–(F3) formulákat egymástól függetlenül fedezték fel (Frenet 1847-ben, a disszertációjában adta meg ezeket, Serret 1851-ben publikálta a formulákat).

(2) Ha a görbe egységpályasebességű, akkor a Frenet-formulák a

$$\begin{aligned} T' &= \kappa F \\ F' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau F \end{aligned}, \quad \text{ill. a} \quad \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ F \\ B \end{pmatrix}$$

alakot öltik.

3.6. Állítás. Ha c és $\tilde{c} := c \circ \theta$ ekvivalens parametrizált görbék, akkor a Frenet-apparátusaik kapcsolatát a

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \theta, \quad \tilde{\tau} = \tau \circ \theta, \quad \tilde{T} = \varepsilon (T \circ \theta), \quad \tilde{F} = F \circ \theta, \quad \tilde{B} = \varepsilon (B \circ \theta)$$

összefüggések adják, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint a paramétertranszformáció irányítástartó, ill. irányításváltó.

3.7. Állítás. Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ biregulárisan parametrizált görbe gyorsulásvektormezője felbontható egy, az érintő-egységvektormező menti komponens, az ún. pályamenti gyorsulás, és egy, a főnormális vektormező menti komponens, az ún. centripetális gyorsulás összegére a

$$c'' = \|c'\|' T + \|c'\|^2 \varkappa F = \nu' T + \nu^2 \varkappa F$$

formula szerint.

Bizonyítás. Miként 3.2 bizonyításában, a $T := \frac{1}{\nu} c'$ definiáló összefüggésből $c' = \nu T$, innen

$$c'' = \nu' T + \nu T' \overset{(F1)}{=} \nu' T + \nu^2 \varkappa F = \|c'\|' T + \|c'\|^2 \varkappa F. \quad \square$$

3.8. Állítás. Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ biregulárisan parametrizált görbe binormális vektormezője, ill. torziófüggvénye kiszámítható a

$$B = \frac{1}{\|c' \times c''\|} c' \times c'', \quad \text{ill. a} \quad \tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$$

formula alapján. Természetes paraméterezés esetén

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c''\|^2} = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\varkappa^2} \qquad (\|c'\| = 1)$$

írható.

Bizonyítás. (1) $c' \times c'' \overset{3.7.}{=} \nu T \times (\nu' T + \nu^2 \varkappa F) = \nu^3 \varkappa B$, innen

$$B = \frac{1}{\nu^3 \varkappa} c' \times c'' \overset{3.2.}{=} \frac{1}{\|c' \times c''\|} c' \times c''. \qquad (*)$$

(2) $\langle c' \times c'', c''' \rangle \overset{(*),\,3.7}{=} \nu^3 \varkappa \langle B, (\nu' T + \nu^2 \varkappa F)' \rangle$

$\overset{(F1),(F2)}{=} \nu^3 \varkappa \langle B, \nu'' T + \nu\nu' \varkappa F + (\nu^2 \varkappa)' F + \nu^2 \varkappa(-\nu \varkappa T + \nu \tau B) \rangle$

$= \nu^3 \varkappa^2 \tau$.

Mivel $\quad \varkappa = \dfrac{\|c' \times c''\|}{v^3}$, ezért $v^6 \varkappa^2 = \|c' \times c''\|^2$,

így $\quad \tau = \dfrac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}$.

Természetes paraméterezés esetén

$$\|c' \times c''\|^2 \overset{\text{Lagrange}}{=} \|c'\|^2 \|c''\|^2 - \langle c', c'' \rangle^2 = \|c''\|^2 = \varkappa^2,$$

és ezért $\quad \tau = \dfrac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\varkappa^2} = \dfrac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c''\|^2}$. □

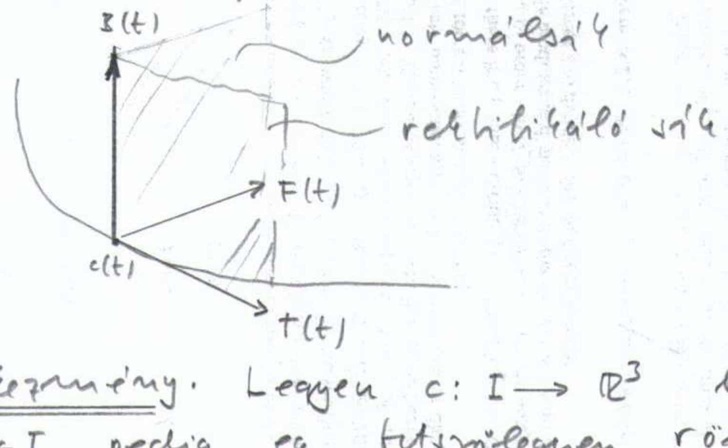
3.9. Következmény. Ha $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe, akkor tetszőleges $t \in I$ esetén az $F(t)$ főnormális vektor pozitív skalárszorosa a $(c'(t) \times c''(t)) \times c'(t)$ vektornak.

Bizonyítás. A $B(t) = T(t) \times F(t)$ egyenlőségből következik, hogy $F(t) = B(t) \times T(t)$. Itt $B(t)$ a $c'(t) \times c''(t)$ vektor, $T(t)$ a $c'(t)$ vektor pozitív skalárszorosa. □

Definíció. Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris görbe. Tetszőleges $t \in I$ esetén

$c(t) + \operatorname{span}(F(t), B(t))$ a görbe t-beli normálsíkja,

$c(t) + \operatorname{span}(B(t), T(t))$ a görbe t-beli rektifikáló síkja.



3.10. Következmény. Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris térgörbe, $t \in I$ pedig egy tetszőlegesen rögzített paraméter. A t-hez tartozó Frenet-bázis síkjainak egyenletei megadhatók az alábbi módon:

simulósík: $\langle \underline{x} - c(t), c'(t) \times c''(t) \rangle = 0$; $\quad$ ($\underline{x} := (x^1, x^2, x^3)$

normálsík: $\langle \underline{x} - c(t), c'(t) \rangle = 0$; $\quad$ vagy $\underline{x} := (x, y, z)$

rektifikáló sík: $\langle \underline{x} - c(t), (c'(t) \times c''(t)) \times c'(t) \rangle = 0$. $\quad$ egy szimbólummal) □

Megjegyzések. (1), (2) – a 38. oldalról.

(3) Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris görbe Frenet-apparátusának meghatározását célszerű a következő séma szerint végezni:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, squiggly] & c' \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & c'' \arrow[r] \arrow[d] & c' \times c'' \arrow[r] \arrow[d] & (c' \times c'') \times c' \arrow[d] \\
\nu := \|c'\| & T = \frac{1}{\nu} c' & c''' \arrow[dr, dash] & \varkappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}, \; B = \frac{1}{\|c' \times c''\|} c' \times c'' & F \\
 & & & \tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2} &
\end{tikzcd}
$$

4. A síkgörbék és a körvonalak jellemzése

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe síkgörbe, ha van olyan $\mathbb{R}^3$-beli sík, amely tartalmazza a görbe $\mathrm{Im}(c) = \{ c(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I \}$ képhalmazát.

4.1. Tétel. Egy $\mathbb{R}^3$-beli bireguláris parametrizált görbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha a torziófüggvénye eltűnik (azaz minden pontban zérust vesz föl).

Bizonyítás. Legyen $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris görbe. Mivel a vizsgált tulajdonságok átparaméterezés során nem változnak, föltehetjük, hogy c egységpályasebességű. Ekkor

$$T = c', \quad \varkappa = \|c''\|, \quad F = \frac{1}{\varkappa} c'',$$

és a Frenet-formulák a

$$T' = \varkappa F = c'' \qquad (F1)$$

$$F' = -\varkappa T + \tau B \qquad (F2)$$

$$B' = -\tau F \qquad (F3)$$

alakot öltik.

(1) Tegyük föl, hogy c síkgörbe. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{R}^3$ egységvektor és $a \in \mathbb{R}^3$ pont, hogy

$$\mathrm{Im}(c) \subset \langle \underline{x} - a, n \rangle = 0 \text{ egyenletű sík},$$

azaz:

$$\forall\, t \in I: \quad \langle c(t) - a, n \rangle = 0.$$

Innen differenciálással:

$$\forall\, t \in I: \quad \langle c'(t), n \rangle = 0, \quad \langle c''(t), n \rangle = 0;$$

következésképpen

$$\forall\, t \in I: \quad \langle T(t), n \rangle = 0 \quad \text{és} \quad \langle F(t), n \rangle = 0.$$

így $\quad n = T(t) \times F(t) \quad$ vagy $\quad n = -T(t) \times F(t), \quad t \in I;$

tehát $B(t) = n$ vagy $B(t) = -n$, minden $t \in I$-re. Így módon a B leképezés konstans, ezért $B' = 0$, és így (F3) alapján $\tau = 0$ $(\in C^\infty(I))$. Ezt állítottuk.

(2) Megfordítva, tegyük föl, hogy $\tau = 0$ $(\in C^\infty(I))$. Ekkor (F3)-ból következően a B leképezés konstans, így létezik olyan $n \in \mathbb{R}^3$ egységvektor, hogy

$$B(t) = n, \text{ minden } t \in I\text{-re}.$$

Rögzítsünk egy tetszőlegesen választott $t_0 \in I$ paramétert, és tekintsük az

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) := \langle c(t) - c(t_0), n \rangle$$

függvényt. Ez differenciálható; tetszőleges $t \in I$-re

$$f'(t) = \langle c'(t), n \rangle = \langle T(t), n \rangle = \langle T(t), B(t) \rangle = 0.$$

Ebből következően az f függvény konstans. Mivel $f(t_0) = 0$, f mindenütt zérust vesz föl:

$$\forall\, t \in I: \quad 0 = f(t) = \langle c(t) - c(t_0), n \rangle.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(c)$ benne van az $\langle \underline{x} - c(t_0), n \rangle = 0$ egyenletű síkban. □

4.2. Tétel (a körvonalak differenciálgeometriai jellemzése). Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű, biregulráris síkgörbe akkor és csak akkor rendelkezik konstans, pozitív $\varkappa_0$ görbülettel, ha a képe egy $\frac{1}{\varkappa_0}$ sugarú körvonalra illeszkedik.

Bizonyítás. $\tau = 0$ ($\in C^\infty(I)$) és $v = \|c'\| = 1$ miatt a Frenet-formulák a következőkre redukálódnak:

$$T' = \varkappa F, \quad F' = -\varkappa T. \qquad (*)$$

(1) Tegyük fel, hogy $\varkappa$ pozitív konstans függvény:

$$\forall t \in I: \quad \varkappa(t) = \varkappa_0 \in \mathbb{R}^*_+.$$

Tekintsük a

$$\gamma := c + \frac{1}{\varkappa_0} F : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

leképezést! Mivel

$$\gamma' = c' + \frac{1}{\varkappa_0} F' = T + \frac{1}{\varkappa_0} F' \overset{(*)}{=} T - T = 0,$$

a γ leképezés konstans. Így létezik olyan $q \in \mathbb{R}^3$ pont, hogy

$$\forall t \in I: \quad \gamma(t) = c(t) + \frac{1}{\varkappa_0} F(t) = q.$$

Innen

$$\forall t \in I: \quad \|c(t) - q\| = \frac{1}{\varkappa_0}. \qquad (**)$$

Mivel $\tau = 0$ miatt c síkgörbe, innen következik, hogy $\mathrm{Im}(c)$ q középpontú, $\frac{1}{\varkappa_0}$ sugarú körvonalra illeszkedik.

(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy van olyan $\varkappa_0 \in \mathbb{R}^*_+$, hogy $(**)$ teljesül. Ekkor, ekvivalens módon,

$$\forall t \in I: \quad \langle c(t) - q, c(t) - q \rangle = \frac{1}{(\varkappa_0)^2}.$$

Ennek differenciálásával

$$\forall t \in I: \quad 0 = \langle c'(t), c(t)-q \rangle = \langle T(t), c(t)-q \rangle .$$

Másrészt:

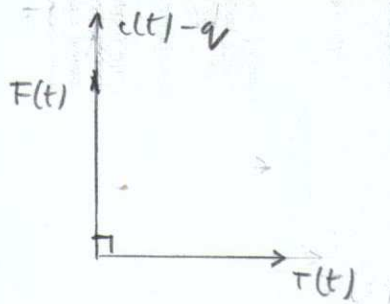
$$\forall t \in I: \quad 0 = \langle T(t), F(t) \rangle .$$

Mivel c síkgörbe,

$T(t)$, $F(t)$ és $c(t)-q$ minden $t \in I$-re komplanárisak.

A két utóbbi egyenlőségből így az következik, hogy

$\forall t \in I:$ $c(t)-q$ skalárszorosa $F(t)$-nek.



Mivel $\|F(t)\| = 1$, $(**)$ miatt ez a skalárszorzó csak $\frac{1}{\varkappa_0}$ vagy $-\frac{1}{\varkappa_0}$ lehet. Tehát

$$\forall t \in I: \quad c(t) - q = \frac{1}{\varkappa_0} F(t) \quad \text{vagy} \quad c(t) - q = -\frac{1}{\varkappa_0} F(t) .$$

Ennek differenciálásával azt kapjuk, hogy

$$\forall t \in I: \quad T(t) = \frac{1}{\varkappa_0} F'(t) \overset{(*)}{=} -\frac{\varkappa(t)}{\varkappa_0} T(t) \quad \text{vagy}$$

$$T(t) = -\frac{1}{\varkappa_0} F'(t) \overset{(*)}{=} \frac{\varkappa(t)}{\varkappa_0} T(t) .$$

Mivel $\varkappa$ mindenütt pozitív, csak a második lehetőség teljesülhet. Ennek azt kapjuk, hogy

$$\forall t \in I: \quad \varkappa(t) = \varkappa_0 ,$$

és ezt kellett belátni. $\square$

5. A görbeelmélet alaptételei

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $c: I \to \mathbb{R}^n$ és egy $\tilde{c}: I \to \mathbb{R}^n$ paraméterezett görbe egybevágó (vagy kongruens), ha van olyan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometria, hogy $\tilde{c} = f \circ c$. Amennyiben – speciálisan – ez az izometria transzláció, úgy parallelgörbékről beszélünk.

2. ELV Azokat a geometriai adatokat és tulajdonságokat tekintjük az $\mathbb{R}^n$-beli paraméterezett görbék euklideszi geometriájához tartozóknak, amelyek irányítástartó izometriával szemben invariánsak, irányításváltó izometria alkalmazása esetén pedig legfeljebb előjelváltozást szenvednek.

5.1. Lemma. Ha $f := T_b \circ L_A$ ($b \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$), akkor az f transzformáció $\mathbb{R}^n$ minden pontjában differenciálható, és deriváltja az L_A lineáris rész: $f'(p) = L_A$, $p \in \mathbb{R}^n$.

Bizonyítás. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(f(p+h) - f(p) - L_A(h)\right)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(L_A(p+h) + b - L_A(p) - b - L_A(h)\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(Ap + Ah - Ap - Ah\right) = \underline{0},$$

így a p-beli derivált definíciója (ld. HP 0.7) alapján $f'(p) = L_A$. □

5.2. Állítás. A pályasebesség és az ívhossz az $\mathbb{R}^n$-beli paraméterezett görbék euklideszi geometriájához tartozó adat.

Bizonyítás. Legyen adva egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, és tekintsünk egy $f = T_b \circ L_A$ ($b \in \mathbb{R}^n$, $A \in O_n(\mathbb{R})$) izometriát. Legyen $\tilde{c} := f \circ c$. Ekkor bármely $t \in I$-re

$$\tilde{c}'(t) = (f \circ c)'(t) = f'(c(t))(c'(t)) \overset{5.1.L.}{=} L_A(c'(t)) = A\,c'(t),$$

így

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|A\,c'(t)\| = \|c'(t)\|,$$

alkalmazva az AG/1. tételt. Ily módon a pályasebesség invariáns izometriával szemben, amiből következik az ívhossz invarianciája. □

5.3. Állítás. Egy $\mathbb{R}^3$-beli görbe Frenet-apparátusának adatai a görbe euklideszi geometriájához tartoznak. Nevezetesen: ha $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris görbe, amelynek Frenet-apparátusa $(\varkappa, \tau, T, F, B)$ és $f = T_b \circ L_A \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3)$, akkor $\tilde{c} := f \circ c$ is bireguláris görbe, amelynek $(\tilde{\varkappa}, \tilde{\tau}, \tilde{T}, \tilde{F}, \tilde{B})$ Frenet-apparátusa a c görbe Frenet-apparátusával a

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa, \quad \tilde{\tau} = \tau, \quad \tilde{T} = L_A \circ T, \quad \tilde{F} = L_A \circ F, \quad \tilde{B} = L_A \circ B$$

kapcsolatban van, ha $\det(A) = 1$, és így f irányítástartó; $\det(A) = -1$ – azaz irányításváltás – esetén pedig a kapcsolatot a

$$\tilde{\varkappa} = \varkappa, \quad \tilde{\tau} = -\tau, \quad \tilde{T} = L_A \circ T, \quad \tilde{F} = L_A \circ F, \quad \tilde{B} = -L_A \circ B$$

egyenlőségek adják. ⚠

Megjegyzés. Ha $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és $\tilde{c}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan parametrizált görbék, amelyekre $c' = \tilde{c}'$ teljesül, akkor c és $\tilde{c}$ parallelgörbék. Amennyiben – ráadásul – van olyan $t_0 \in I$ paraméter, hogy $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$, úgy c és $\tilde{c}$ egyenlő.

Bizonyítás. $c' = \tilde{c}' \iff (\tilde{c} - c)' = 0 \ (\in C^\infty(I))$
$\Rightarrow \tilde{c} - c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konstans leképezés:
$\exists\, b \in \mathbb{R}^3 : \quad \tilde{c}(t) = c(t) + b = T_b \circ c(t), \quad t \in I.$
Tehát $\tilde{c} = T_b \circ c$, azaz $\tilde{c}$ és c parallel-görbék. Ha valamely $t_0 \in I$ pontban $\tilde{c}(t_0) = c(t_0)$, akkor $b = 0$, és így $\tilde{c} = c$. □

5.4. Tétel (a görbeelmélet unicitási-tétele).

Ha $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és $d : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olyan egységpályasebességű bireguláris görbék, amelyeknek a görbületfüggvénye megegyezik, a torziófüggvénye pedig legfeljebb előjelben különbözik, akkor c és d egybevágó. Δ

5.5. Tétel (a görbeelmélet egzisztencia-tétele).

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum. Legyen adva egy $\varkappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitív értékeket felvevő sima függvény és egy $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvény. Jelöljünk ki egy p pontot és egy olyan (b_1, b_2, b_3) ortonormált bázist $\mathbb{R}^3$-ban, amelyre $\langle b_1 \times b_2, b_3 \rangle = 1$ teljesül.

Létezik egy és csak egy olyan $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű bireguláris görbe, amelynek görbület- és torziófüggvénye a megadott $\varkappa$, ill. τ függvény, és amely eleget tesz a

$$c(0) = p; \quad T(0) = b_1, \quad F(0) = b_2, \quad B(0) = b_3$$

kezdeti feltételeknek. Δ

5.8. Megjegyzés. Az 5.5. tételben az a feltétel, hogy „c és d egységpályasebességű" helyettesíthető azzal, hogy „c és d közös pályasebességű".

Valóban, ekkor c és d ívhossz-függvénye is közös; legyen ez a $\sigma : [a,b] \longrightarrow [0, L(c)]$ függvény (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $I = [a,b]$). Ekkor

$$\bar{c} := c \circ \sigma^{-1} : [0, L(c)] \longrightarrow [a,b]$$

és

$$\bar{d} := d \circ \sigma^{-1} : [0, L(c)] \longrightarrow [a,b]$$

egységpályasebességű, irányítástartó átparaméterezésje c-nek, ill. d-nek. Mivel átparaméterezés során sem a görbület-, sem a torziófüggvény nem változik (3.6. állítás), az 5.5. tétel értelmében létezik $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3)$ oly módon, hogy $\bar{d} = f \circ \bar{c}$. Ekkor bármely $t \in [0, L(c)]$-re

$$f \circ c(t) = f \circ \bar{c} \circ \sigma(t) = \bar{d} \circ \sigma(t) = d(t),$$

tehát $f \circ c = d$ is fennáll. Ez azt jelenti, hogy c és d egybevágó. $\square$

II. FELÜLETELMÉLET

0.⁺ Analízisbeli háttér: vektorváltozós, vektorértékű leképezések differenciálása

A következőkben $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jelöli az $\mathbb{R}^n$ valós vektortérből az $\mathbb{R}^m$ valós vektortérbe történő lineáris leképezések vektorterét. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ maga is valós vektortér, ha tetszőleges $L, L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az $L_1 + L_2$ összeget, ill. a αL skalárszorost az
$$(L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v), \quad (\alpha L)(v) := \alpha L(v) \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$
előírás értelmezi. Az $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér azonosítható az $m \times n$-es valós mátrixok $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ vektorterével a következő lineáris izomorfizmus révén:

(*)
$$L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \longmapsto A = (\alpha^i_j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \text{ ha}$$
$$L(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_j E_i, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$
ahol $(e_1, \dots, e_n)$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér, $(E_1, \dots, E_m)$ az $\mathbb{R}^m$ vektortér kanonikus bázisa.

Ekkor tetszőleges $v = (v^1, \dots, v^n) = \sum_{j=1}^{n} v^j e_j$ esetén
$$L(v) = L_A(v) = Av = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j v^j \Big) E_i ;$$

lásd AG 3.

Mivel $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ izomorf vektorterek, következik, hogy
$$\dim L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn.$$

A3 (1) Definíciók. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, p egy pontja $\mathcal{U}$-nak, és tekintsünk egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést.

(1) Megadva egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektort, azt mondjuk, hogy f-nek létezik a v szerinti iránymenti deriváltja a p pontban, ha létezik a

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

határérték. Speciálisan az $\mathbb{R}^n$ tér $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázisának tagjai szerint képzett

$$D_i f(p) := D_{e_i} f(p) \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

iránymenti deriváltakat – ha léteznek – f p-beli parciális deriváltjainak hívjuk. Amennyiben $D_i f(p)$ minden $p \in \mathcal{U}$ pontban létezik, úgy a

$$D_i f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad p \longmapsto D_i f(p)$$

leképezést az f leképezés $\mathcal{U}$ fölötti, i-edik parciális deriváltjának nevezzük.

(2) Azt mondjuk, hogy f differenciálható a $p \in \mathcal{U}$ pontban, ha létezik olyan $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left(f(p+h) - f(p) - L(h) \right) = 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Ebben az esetben az L lineáris leképezés egyértelmű; ezt az f leképezés p-beli deriváltjának nevezzük és $f'(p)$-vel jelöljük. Az $f'(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ deriváltnak a $(*)$ izomorfizmus révén megfelelő mátrixot (azaz $f'(p)$-nek az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ vektortér kanonikus bázisaira vonatkozó mátrixát) az f leképezés

p pontbeli Jacobi-mátrixának hívjuk és rá a $J_f(p)$ jelölést használjuk.

Megjegyzés. Abban az esetben, amikor $n = 1$ és az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz szerepét egy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum játssza, A2-ben már értelmeztük a differenciálhatóságot és a deriváltat. Azt mondtuk, hogy egy $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható egy $t \in I$ pontban és a deriváltja a $w \in \mathbb{R}^m$ vektor, ha létezik a

$$w := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(t+h) - f(t) \right)$$

határérték. A $w \in \mathbb{R}^m$ vektor meghatároz egy

$$L_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \lambda \longmapsto L_w(\lambda) := \lambda w$$

lineáris leképezést. Egyszerűen megmutatható, hogy ez az L_w leképezés eleget tesz a t-beli deriváltra most adott definíció feltételének, így a korábbi értelemben vett pontbeli derivált (amely vektort jelentett) azonosítható az új, általános értelemben vett pontbeli deriválttal (amely lineáris leképezést jelent).

A3.1. Lemma. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és legyen adva egy $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés. Ha f differenciálható egy $p \in U$ pontban, akkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik a $D_v f(p)$ iránymenti derivált és

$$D_v f(p) = f'(p)(v);$$

speciálisan

$$D_i f(p) = f'(p)(e_i) \ ; \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ha $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$, akkor

$$D_v f(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i D_i f(p).$$

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsük a

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \gamma(t) := p + tv$ és a $c := f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezést. Ekkor γ nyilvánvalóan differenciálható $\mathbb{R}$ fölött, $c(0) = f(\gamma(0)) = f(p)$ miatt pedig, a láncszabály alapján, c differenciálható a 0 helyen.

Egyrészt

$$c'(0) \overset{A2}{\underset{1.5}{=}} \lim_{t \to 0} \frac{c(t) - c(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(p + tv) - f(p) \right) =: D_v f(p),$$

másrészt

$$c'(0) = (f \circ \gamma)'(0) \overset{\text{láncszabály}}{=} f'(\gamma(0))(\gamma'(0)) = f'(p)(v),$$

következésképpen $D_v f(p) = f'(p)(v)$. A v vektort a $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ alakban állítva elő, így azt kapjuk, hogy

$$D_v f(p) = f'(p)(v) = f'(p)\left(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i\right) \overset{\text{linearitás}}{=} \sum_{i=1}^{n} v^i f'(p)(e_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v^i D_i f(p).$$

$\square$

<u>A3. 2. Lemma.</u> Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és legyen adva egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés. Írjuk ezt az $f^i := E^i \circ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, m\})$ koordinátafüggvények segítségével (ahol $(E^j)_{j=1}^{m}$ $\mathbb{R}^m$ kanonikus koordinátarendszere) az

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix}$$

alakban. Az f leképezés akkor és csak akkor differenciálható egy $p \in \mathcal{U}$ pontban, ha $f^1, \dots, f^m$ koordinátafüggvényeinek mindegyike differenciálható p-ben, és ekkor bármely $v \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f'(p)(v) = \begin{pmatrix} (f^1)'(p)(v) \\ \vdots \\ (f^m)'(p)(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Δ

A3.3. Következmény. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

egy $p \in \mathcal{U}$ pontban differenciálható leképezés. Ekkor az $f'(p) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ deriváltat reprezentáló Jacobi-mátrix megadható a

$$\begin{pmatrix} D_1 f^1(p) & D_2 f^1(p) & \cdots & D_n f^1(p) \\ D_1 f^2(p) & D_2 f^2(p) & \cdots & D_n f^1(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f^m(p) & D_2 f^m(p) & \cdots & D_n f^m(p) \end{pmatrix}$$

alakban; röviden:

$$J_f(p) = \left(D_j f^i(p) \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Bizonyítás. A $J_f(p)$ mátrix j-edik oszlopa (*) és **A.3.2.** alapján

$$f'(p)(e_j) = \begin{pmatrix} (f^1)'(p)(e_j) \\ \vdots \\ (f^m)'(p)(e_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_j f^1(p) \\ \vdots \\ D_j f^m(p) \end{pmatrix}$$

– és ezt állítottuk. $\square$

A4 Definíciók. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz.

(a) Tekintsünk egy $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt.

(1) Azt mondjuk, hogy f C^1-osztályú $\mathcal{U}$-n, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén a $D_i f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ parciális derivált létezik és folytonos.

(2) Legyen $k > 1$ egész szám. Az f függvényt C^k-osztályúnak nevezzük $\mathcal{U}$ fölött, ha

$D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ parciális deriváltjai C^{k-1}-osztályúak. (Így a teljes indukció elve alapján f C^k-osztályúsága minden k pozitív egészre értelmezve van.)

(3) Az f függvény <u>C^∞-osztályú</u> vagy <u>sima</u> $\mathcal{U}$ fölött, ha minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén C^k-osztályú.

(4) Akkor mondjuk, hogy egy $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ <u>leképezés</u> <u>C^k-osztályú</u> ($k \in \mathbb{N}^*$), ill. <u>sima</u>, ha valamennyi koordinátafüggvénye C^k-osztályú, ill. sima. Amennyiben $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz és $F: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ olyan bijektív sima leképezés, amelynek $F^{-1}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ inverze is sima, úgy az F leképezést ($\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ közötti) <u>diffeomorfizmusnak</u> nevezzük (ld. 2.2. / (1)).

<u>A4.1. Állítás</u>. Legyen H $\mathbb{R}^n$-nek egy részhalmaza, és legyen adva egy

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix} : H \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

leképezés. Tegyük föl, hogy p egy belső pontja H-nak. Ha a

$$D_j f^i \quad ; \quad i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}$$

parciális deriváltak mindegyike értelmezve van a p pont egy környezetében és folytonos a p pontban, akkor az f leképezés differenciálható p-ben.

Δ

6. Parametrizált felületek

<u>Definíció.</u> Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz. Egy

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sima leképezést <u>parametrizált felületnek</u> is nevezünk. Ilyenkor $\mathcal{U}$ pontjait <u>paraméterekként</u>, f általi képeiket <u>felületpontokként</u> említjük. Azt mondjuk, hogy az f parametrizált felület <u>reguláris</u> egy $q \in \mathcal{U}$ pontban, ha a

$$D_1f(q) = \begin{pmatrix} D_1f^1(q) \\ D_1f^2(q) \\ D_1f^3(q) \end{pmatrix} \text{ és } D_2f(q) = \begin{pmatrix} D_2f^1(q) \\ D_2f^2(q) \\ D_2f^3(q) \end{pmatrix}$$

vektorok lineárisan függetlenek. Amennyiben ez a tulajdonság minden $q \in \mathcal{U}$ pontban teljesül, úgy <u>reguláris parametrizált felületről</u> beszélünk. Ha valamely $q \in \mathcal{U}$ esetén $D_1f(q) \parallel D_2f(q)$, akkor azt mondjuk, hogy az f parametrizált felület <u>szinguláris</u> <u>q-ban</u>.

<u>6.1. Állítás.</u> Egy $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizált felületre a következő feltételek ekvivalensek:

(1) f reguláris a $q \in \mathcal{U}$ pontban.

(2) $D_1f(q) \times D_2f(q) \neq \underline{0}$.

(3) A

$$J_f(q) = \begin{pmatrix} D_1f^1(q) & D_2f^1(q) \\ D_1f^2(q) & D_2f^2(q) \\ D_1f^3(q) & D_2f^3(q) \end{pmatrix}$$

Jacobi-mátrix 2 rangú.

(4) Az $f'(q) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ derivált injektív, és ennélfogva 2-rangú lineáris leképezés.

Bizonyítás. (1) $\Leftrightarrow$ (2) (VP_5) -ből következően (ld. 35).

(1) $\Longrightarrow$ (3) Mivel a 3×2 -es $J_f(q)$ mátrix oszlopait a $D_1f(q)$ és $D_2f(q)$ vektorok alkotják, a mátrixok rangjának definíciója alapján evidens, hogy $D_1f(q)$ és $D_2f(q)$ lineáris függetlensége esetén $J_f(q)$ 2-rangú.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $J_f(q)$ az $f'(q): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa az $\mathbb{R}^2$ tér (e_1, e_2) és az $\mathbb{R}^3$ tér (E_1, E_2, E_3) bázisára vonatkozóan. Ismert a lineáris algebrából, hogy egy lineáris leképezés rangja - ami definíció szerint a képterének dimenziója - megegyezik tetszőleges mátrix-reprezentánsának rangjával. Így a nullitás + rang tétel (nulltér dimenziója + képtér dimenziója = leképezett vektortér dimenziója) figyelembevételével

$$\operatorname{rang} J_f(q) = \dim(\operatorname{Im} f'(q)) = 2 - \dim(\operatorname{Ker}(f'(q))).$$

Most a feltétel miatt $\operatorname{rang} J_f(q) = 2$, következésképpen $\dim(\operatorname{Ker}(f'(q))) = 0$, s ennélfogva $\operatorname{Ker}(f'(q)) = \{0\}$, ami ekvivalens azzal, hogy $f'(q)$ injektív lineáris leképezés.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Injektív lineáris leképezés lineárisan független vektorokat lineárisan független vektorokba visz át. Így $f'(q)$ injektívsége esetén az $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ bázisvektorok $f'(q)$ általi képei, az $f'(q)(e_1) \overset{A3.1.}{=} D_1f(q)$ és $f'(q)(e_2) = D_2f(q)$ vektorok lineárisan függetlenek, tehát f reguláris a q pontban. □

6.2. Lemma - definíció. Legyen adva egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület. Ha $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmus, akkor $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ szintén parametrizált felület, amelyet az f parametrizált felület egy *átparaméterezettjének* nevezünk. Ilyenkor a φ diffeomorfizmust (*megengedett*) *paramétertranszformációnak* hívjuk. Két – nem feltétlenül különböző – parametrizált felületet *ekvivalensnek* mondunk, ha egyikük megkapható a másik átparaméterezettjeként. Az $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált felületek halmazában az így bevezetett reláció ekvivalenciareláció. ⚠

6.3. Lemma. Legyenek $\mathcal{U}$ és $\tilde{\mathcal{U}}$ $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazai. Ha $\varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmus, akkor $\det(J_\varphi(a))$ egyetlen $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ esetén sem zérus. Speciálisan, ha $\tilde{\mathcal{U}}$ összefüggő, akkor a

$$\det(J_\varphi) : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \det(J_\varphi(a))$$

függvény vagy mindenütt pozitív, vagy mindenütt negatív értéket vesz föl.

Bizonyítás. Mivel φ diffeomorfizmus, létezik $\varphi^{-1} : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ sima inverze. A $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\tilde{\mathcal{U}}}$ egyenlőségből a láncszabály alapján azt kapjuk, hogy tetszőleges $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ esetén

$$1_{\mathbb{R}^n} = (1_{\tilde{\mathcal{U}}})'(a) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(a) = (\varphi^{-1})'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a).$$

Ebből következik, hogy $\varphi'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertálható lineáris transzformáció, így az ezt reprezentáló $J_\varphi(a)$ mátrix is invertálható, s ennélfogva $\det(J_\varphi(a)) \neq 0$. Az $\tilde{\mathcal{U}}$ halmaz összefüggősége esetén így a $\det(J_\varphi)$ függvény folytonosságából következik, hogy ez a függvény nem válthat előjelet (ellenkező esetben ui. valahol eltűnne). □

<u>Definíció.</u> Egy $\mathbb{R}^3$-beli paraméterezett felület egy átparaméterezését <u>irányítástartónak</u>, ill. <u>irányításváltónak</u> mondjuk aszerint, amint Jacobi-mátrixának determinánsa mindenütt pozitív, ill. mindenütt negatív.

> <u>1.$^+$ ELV</u> Egy paraméterezett felületnek csak azokat az adatait tekintjük „GEOMETRIAI ADATOK"-nak, amelyek irányítástartó átparaméterezései során nem változnak, irányításváltó átparaméterezésénél pedig legfeljebb előjelváltást szenvednek.

<u>6.4. Lemma-definíció.</u> (1) Ha $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület és $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ izometria, akkor $F \circ f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ szintén paraméterezett felület.
(2) Azt mondjuk, hogy egy $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és egy $\tilde{f}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület <u>egybevágó</u> (<u>kongruens</u>) ha van olyan $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ izometria, hogy $\tilde{f} = F \circ f$.

> <u>2.$^+$ ELV</u> Azokat a geometriai adatokat és tulajdonságokat tekintjük az $\mathbb{R}^3$-beli paraméterezett felületek <u>euklideszi geometriájához tartozóknak</u>, amelyek irányítástartó izometriával szemben invariánsak, irányításváltó izometria alkalmazásakor pedig legfeljebb előjelváltást szenvednek.

<u>Megjegyzés.</u> Ellentétben a görbeelmélettel, a felületelméletben nem áll rendelkezésre az egységpálya-sebességű paraméterezéssel analóg, kitüntetett paraméterezés.

6.5. Állítás. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmus, s tekintsük f-nek a φ általi $\tilde{f} := f \circ \varphi$ átparaméterezettjét.

(1) Az átparaméterezés során a $D_i f$ parciális deriváltak a

$$D_i \tilde{f} = \sum_{j=1}^{2} D_i \varphi^j (D_j f \circ \varphi) \; ; \quad i \in \{1, 2\} \qquad (*)$$

szabály szerint transzformálódnak. Szimbolikus mátrixalakban:

$$(D_1 \tilde{f} \;\; D_2 \tilde{f}) = (D_1 f \circ \varphi \;\; D_2 f \circ \varphi) \begin{pmatrix} D_1 \varphi^1 & D_1 \varphi^2 \\ D_2 \varphi^1 & D_2 \varphi^2 \end{pmatrix}.$$

(2) Tetszőleges $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ esetén

$$(D_1 \tilde{f} \times D_2 \tilde{f})(a) = \det(J_\varphi(a))\, D_1 f(\varphi(a)) \times D_2 f(\varphi(a)), \qquad (**)$$

következésképpen a paraméterezett felületek regularitása paramétertranszformációval szemben invariáns, és így geometriai tulajdonság.

Bizonyítás. Jelentse (e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisát. Tetszőleges $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ és $i \in \{1, 2\}$ esetén

$$D_i \tilde{f}(a) \overset{A3.1.}{=} \tilde{f}'(a)(e_i) = (f \circ \varphi)'(a)(e_i) = f'(\varphi(a))(\varphi'(a)(e_i))$$

$$\overset{A3.2.}{=} f'(\varphi(a))\big((\varphi^1)'(a)(e_i), (\varphi^2)'(a)(e_i)\big)$$

$$= f'(\varphi(a))\big(D_i \varphi^1(a), D_i \varphi^2(a)\big) = f'(\varphi(a))\big(D_i \varphi^1(a) e_1 + D_i \varphi^2(a)(e_2)\big)$$

$$\overset{\text{linearitás}}{=} D_i \varphi^1(a)\, f'(\varphi(a))(e_1) + D_i \varphi^2(a)\, f'(\varphi(a))(e_2)$$

$$= D_i \varphi^1(a)\, D_1 f(\varphi(a)) + D_i \varphi^2(a)\, D_2 f(\varphi(a)),$$

amiből – $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ tetszőlegessége folytán – következik $(*)$.

Ennek alapján

$$D_1 \tilde{f}(a) \times D_2 \tilde{f}(a) = \big(D_1 \varphi^1(a) D_1 f(\varphi(a)) + D_1 \varphi^2(a) D_2 f(\varphi(a))\big) \times$$
$$\times \big(D_2 \varphi^1(a) D_1 f(\varphi(a)) + D_2 \varphi^2(a) D_2 f(\varphi(a))\big)$$

$$= \left(-D_1\varphi^2(a)\,D_2\varphi^1(a) + D_1\varphi^1(a)\,D_2\varphi^2(a)\right) D_1f(\varphi(a)) \times D_2f(\varphi(a))$$

$$= \begin{vmatrix} D_1\varphi^1(a) & D_2\varphi^1(a) \\ D_1\varphi^2(a) & D_2\varphi^2(a) \end{vmatrix} D_1f(\varphi(a)) \times D_2f(\varphi(a))$$

$$= \det\left(\mathcal{J}_\varphi(a)\right) D_1f(\varphi(a)) \times D_2f(\varphi(a)).$$

Ezzel (**) is igazolást nyert, amiből a 6.3. lemma alapján következik, hogy a parametrizált felületek regularitása átparaméterezés során megőrződik. □

<u>6.6. Lemma-definíció.</u> Legyen $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület.

(1) Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén létezik az egységhosszúságú

$$N(q) := \frac{1}{\|D_1f(q) \times D_2f(q)\|} D_1f(q) \times D_2f(q) \in S^2$$

vektor (itt $S^2 := \{ a \in \mathbb{R}^3 \mid \|a\| = 1 \}$ az $\mathbb{R}^3$-beli, origó középpontú, 1 sugarú szféra, röviden az $\mathbb{R}^3$-beli egységszféra.) Az

$$N : \mathcal{U} \to S^2,\ q \mapsto N(q)$$

leképezést <u>Gauss-leképezésének</u>, a (D_1f, D_2f, N) hármast f <u>Gauss-féle háromélmezőjének</u> nevezzük.

(2) Ha $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ átparaméterezettje f-nek, akkor f és $\tilde{f}$ N, ill. $\tilde{N}$ Gauss-leképezése között az $\tilde{N} = \varepsilon(N \circ \varphi)$ kapcsolat áll fenn, ahol ε 1, ill. -1 aszerint, amint az átparaméterezés irányítástartó, ill. irányításváltó. Így módon a Gauss-leképezés geometriai adata a parametrizált felületeknek.

<u>Bizonyítás.</u> A regularitás biztosítja, hogy az $N(q) \in S^2$ vektor minden $q \in \mathcal{U}$ esetén létezik.

Tetszőleges $a \in \tilde{\mathcal{U}}$ esetén

$$\tilde{N}(a) := \frac{1}{\|D_1\tilde{f}(a) \times D_2\tilde{f}(a)\|} D_1\tilde{f}(a) \times D_2\tilde{f}(a)$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{\det(J_\varphi(a))}{|\det(J_\varphi(a))|} N(\varphi(a)) = \varepsilon(N \circ \varphi)(a) . \qquad \square$$

7. Felületek $\mathbb{R}^3$-ban

Analízisbeli háttér: ε-környezetek, folytonosság, gradiens

A5 Definíciók Legyen adva $\mathbb{R}^3$-nak egy M részhalmaza. (1) Egy $a \in M$ pont egy ε-környezetén, ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, azon $p \in M$ pontok halmazát értjük, amelyekre $d(a,p) < \varepsilon$ (d az $\mathbb{R}^3$-beli euklideszi távolság). Ekvivalens módon, az $a \in M$ pont ε-környezete $B_\varepsilon(a) \cap M$ (ld. A1).

(2) Egy $F: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést folytonosnak mondunk egy $a \in M$ pontban, ha az $F(a) \in \mathbb{R}^2$ pontot tartalmazó minden $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazhoz van olyan $\mathcal{U} \subset M$ ε-környezete a-nak, hogy $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

A6 Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz ($n \geqq 2$), és tekintsünk egy $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt. Egyértelműen létezik olyan

$$\operatorname{grad} f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \longmapsto \operatorname{grad} f(p)$$

leképezés, hogy

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = f'(p)(v) \text{ minden } v \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Ezt a leképezést az f függvény gradiensének nevezzük. – Valóban, tetszőleges $p \in \mathcal{U}$ esetén $f'(p): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineáris függvény, és ismert a a lineáris algebrából, hogy egy euklideszi vektortéren adott minden lineáris függvény egy egyértelműen meghatározott vektorral való skaláris szorzataként hat. Jelen esetben ezt a vektort $\operatorname{grad} f(p)$ -vel jelöljük. Tekintve $\mathbb{R}^n$ $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázisát, a Fourier-előállítás alapján

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad} f(p), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} f'(p)(e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) e_i$$

adódik, következésképpen a $\operatorname{grad} f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ leképezés koordinátafüggvényei a $D_1 f, \dots, D_n f$ parciális deriváltak. Így

$$\operatorname{grad} f = (D_1 f, \dots, D_n f)$$

írható.

~ ∘ ~

Definíció. (1) Azt mondjuk, hogy egy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület beágyazás (embedding), ha reguláris, injektív és az

$$f^{-1} : \operatorname{Im}(f) = f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$$

inverz leképezés folytonos (az A5/(2) szerinti értelemben).

(2) Egy $M \subset \mathbb{R}^3$ részhalmazt felületnek nevezünk, ha minden $p \in M$ pontnak van olyan ε-környezete, amely megkapható egy beágyazás képeként. Az egyetlen beágyazás képeként előállítható felületeket egyszerű (vagy elemi) felületeknek hívjuk.

7.1. Lemma-definíció. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ pedig sima függvény. Ekkor az

$$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3, \ (s,t) \mapsto f(s,t) := (s, t, h(s,t))$$

leképezés beágyazás, amelyet Monge-beágyazásnak, s amelynek

$$M := f(\mathcal{U}) = \{(s,t,h(s,t)) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \mathcal{U}\} =: \mathrm{graf}(h)$$

képhalmazát <u>Monge</u> - (vagy <u>Euler-Monge</u>) <u>felületnek</u> hívjuk.

<u>Bizonyítás.</u> Az f leképezés sima (hiszen a koordinátafüggvényei simák), és közvetlenül látható módon injektív. Tetszőleges $(s,t) \in \mathcal{U}$ pontban f Jacobi-mátrixa

$$J_f((s,t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1h(s,t) & D_2h(s,t) \end{pmatrix};$$

ez láthatóan 2-rangú. Így a 6.1. állítás alapján f reguláris paraméterezett felület.

Tekintsük a

$$pr : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad a = (a^1, a^2, a^3) \longmapsto (a^1, a^2)$$

projekciót. Ez lineáris leképezés, így - speciálisan - folytonos. $pr \restriction M = f^{-1}$, amiből következik, hogy f^{-1} folytonos. Ezzel beláttuk, hogy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ beágyazás; így $M = f(\mathcal{U})$ (egyszerű) felület. □

<u>7.2. Példa.</u> Legyen adva az

$$\mathcal{U} := B_1((0,0)) := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid (s)^2 + (t)^2 < 1\}$$

(nyílt) körlemez, és ezen a

$$h : (s,t) \in \mathcal{U} \longmapsto h(s,t) := \sqrt{1 - (s)^2 - (t)^2}$$

függvény. Közvetlenül látható, hogy h sima, így az

$$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto (s, t, \sqrt{1 - (s)^2 - (t)^2})$$

leképezés Monge-beágyazás. Ennek képe (egyszerű) felület, mégpedig az

$$(x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = 1, \quad z > 0$$

relációval leírható <u>peremmentes félgömbfelület.</u>

<u>Definíció.</u> Legyen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, s legyen adva egy $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvény.

Azt mondjuk, hogy egy $\lambda \in \mathrm{Im}(F) = F(\mathcal{V})$ valós szám *reguláris értéke* F-nek, ha az $F^{-1}(\lambda) \subset \mathcal{V}$ ősképpontjaiban F parciális deriváltjai nem tűnnek el egyidejűleg, illetve – ekvivalens módon – ha

$$\forall p \in F^{-1}(\lambda): \operatorname{grad} F(p) \neq \underline{0}.$$

7.3. Állítás-definíció. Legyen $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz, $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ sima függvény, s tegyük fel, hogy $\lambda \in F(\mathcal{V})$ *reguláris értéke* F-nek. Ekkor az

$$M_\lambda := F^{-1}(\lambda) = \{ p \in \mathcal{V} \mid F(p) = \lambda \} \subset \mathbb{R}^3$$

halmaz felület, amelyet az függvény *λ-hoz tartozó* vagy *λ-magasságú szintfelületének* nevezzük, de *implicit megadású* vagy *az $F(x,y,z) = \lambda$ egyenlettel megadott felületnek* is mondunk.

Bizonyítás. Válasszunk ki tetszőlegesen egy $p \in M_\lambda$ pontot. A feltétel értelmében a

$$D_1F(p),\ D_2F(p),\ D_3F(p)$$

parciális deriváltak nem tűnnek el egyidejűleg; tegyük fel, hogy például $D_3F(p) \neq 0$. Ekkor az Analízisből ismert implicitfüggvény-tétel alapján *„az $F(x,y,z) = \lambda$ egyenlet lokálisan megoldható z-re"*. Precízen szólva ez azt jelenti, hogy $p = (p^1, p^2, p^3)$ pont $\mathbb{R}^2$-beli $(p^1, p^2, 0) \cong (p^1, p^2)$ vetületének van olyan $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt környezete, valamint megadható egy olyan $h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sima függvény, hogy

$h(p^1, p^2) = p^3$, és bármely $(s,t) \in \mathcal{U}$ esetén

$$F(s,t,h(s,t)) = \lambda.$$

Ekkor

$$\forall (s,t) \in \mathcal{U}: F(s,t,h(s,t)) \in M_\lambda$$

és az

$$f:\ (s,t)\in \mathcal{U} \longmapsto f(s,t):=(s,t,h(s,t))\in M_\lambda \subset \mathbb{R}^3$$

leképezés Monge beágyazás. Ez igazolja az állítást.

□

<u>7. 4. Példák</u> (1) <u>$\mathbb{R}^3$ síkjai, mint felületek</u>

Legyen „a" egy pontja, v és w lineárisan független vektora $\mathbb{R}^3$-nak, és tekintsük az

$$M := a + \operatorname{span}(v,w) \subset \mathbb{R}^3$$

síkot (ld. <u>B6/(4)</u>). Mint már láttuk, az

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (s,t)\longmapsto f(s,t):=a+sv+tw$$

leképezés bijekciója $\mathbb{R}^2$-nek M-re, ezt M egy <u>affin paraméterezésének</u> is hívjuk. Ez valóban <u>affin leképezés</u>: előállítható

$$f = T_a \circ \varphi$$

kompozícióként, ahol T_a az „a" vektorral való transzláció (ld. <u>A64</u>), φ pedig az

$$\begin{pmatrix} s\\ t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \longmapsto \varphi(s,t):=sv+tw = s\begin{pmatrix} v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} w^1\\ w^2\\ w^3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

lineáris leképezés. f minden $q\in\mathbb{R}^2$ pontban differenciálható, q-beli deriváltja az

$$f'(q) = \varphi \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$$

lineáris rész. Így az is közvetlenül adódik, hogy f ténylegesen sima leképezés.

$$\forall\ q\in\mathbb{R}^2:\quad J_f(q) = (v,w) = \begin{pmatrix} v^1 & w^1\\ v^2 & w^2\\ v^3 & w^3\end{pmatrix},$$

ezért v és w lineáris függetlensége folytán $J_f(q)$ minden $q\in\mathbb{R}^2$ pontban 2-rangú. f tehát bijektív, reguláris paraméterezett felület és $\operatorname{Im}(f)=M$. Mivel az $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow M$ leképezés inverze az $f^{-1}=\varphi^{-1}\circ T_{-a}$ leképezés, világos, hogy f^{-1} folytonos (valójában sima). Így módon M <u>felület</u>, mégpedig egyszerű felület.

(2) Szférák. Legyen r pozitív valós szám, és tekintsük az

$$S^2(r) := \{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r \}$$

origó középpontú, r sugarú szférát $\mathbb{R}^3$-ban. Ennek egyenlete a szokásos jelölésmóddal

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 .$$

Az

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (s,t,u) \longmapsto F(s,t,u) := s^2 + t^2 + u^2 - r^2$$

függvény sima és $S^2(r) = F^{-1}(0)$. Tetszőleges $(s,t,u) \in \mathbb{R}^3$ esetén

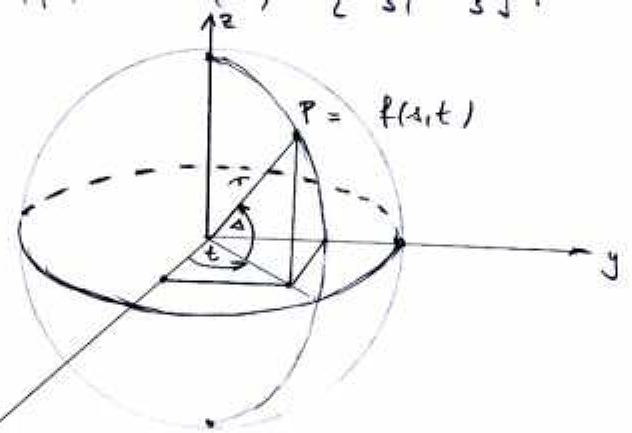
$$\operatorname{grad} F(s,t,u) = 2(s,t,u),$$

így $\operatorname{grad} F(p) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p = \underline{0} = (0,0,0)$. Mivel $\underline{0} \notin S^2(r)$, következik, hogy a $0 \in \mathbb{R}$ reguláris értéke F-nek, s így 7.3. alapján $S^2(r) = F^{-1}(0)$ felület.

Megadjuk $S^2(r)$ egy tartományának egy reguláris paraméterezését. Legyen $U := \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$ és tekintsük az

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) = r(\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)$$

leképezést. f sima, hiszen a komponensfüggvényei simák; $\operatorname{Im}(f) = S^2(r) \setminus \{e_3, -e_3\}$.



Ezt a paraméterezést $S^2(r)$ geografikus paraméterezésének hívjuk: az s paraméter kijelöli, hogy a $P=f(s,t)$ pont melyik szélességi körön van, a t paraméter pedig a P-t tartalmazó hosszúsági kört adja meg. Az f paraméterezés nem injektív: tetszőleges $(s,t)\in \mathcal{U}$ esetén pl. $f(s,t)=f(s,t+2\pi)$.

$$D_1f(s,t) = r(-\sin s\cos t, -\sin s\sin t, \cos s),$$
$$D_2f(s,t) = r(-\cos s\sin t, \cos s\cos t, 0),$$
$$D_1f\times D_2f(s,t) = r^2(-\cos^2 s\cos t, -\cos^2 s\sin t, -\sin s\cos s).$$

Mivel $s\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $D_1f\times D_2f$ sehol sem tűnik el $\mathcal{U}$ fölött, így f reguláris paraméterezett felület. A Gauss-leképezés:

$$N:(s,t)\in\mathcal{U}\longmapsto N(s,t)=-(\cos s\cos t, \cos s\sin t, \sin s)\in S^2.$$

(3) **Egyenes körhenger** Legyen r pozitív egész szám, és tekintsük az

$$M=\{p=(p^1,p^2,p^3)\in\mathbb{R}^3 \mid (p^1)^2+(p^2)^2-r^2=0\}\subset\mathbb{R}^3$$

ponthalmazt. Ennek egyenlete $x^2+y^2=r^2$, $z=0$.
Ha

$$F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\ (s,t,u)\longmapsto F(s,t,u):=s^2+t^2-r^2,$$

akkor F sima függvény és $M=F^{-1}(0)$. Tetszőleges $(s,t,u)\in\mathbb{R}^3$ pontban

$$D_1F(s,t,u)=2s,\ D_2F(s,t,u)=2t,\ D_3F(s,t,u)=0,$$

így $\operatorname{grad}F(s,t,u)=(0,0,0)\iff s=t=0$, tehát $\operatorname{grad}F$ zérushelyeinek halmaza

$$\{(0,0,\sigma)\in\mathbb{R}^3 \mid \sigma\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}(e_3)=\text{„}z\text{-tengely''}.$$

Mivel a z-tengely egyik pontja sem illeszkedik M-re, megállapíthatjuk, hogy a $0\in\mathbb{R}$ reguláris értéke F-nek, következésképpen M felület. Az

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (s,t)\longmapsto f(s,t)=(r\cos s, r\sin s, t)$$

sima leképezés paraméterezése M-nek. Tetszőleges $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ esetén $J_f(s,t)=\begin{pmatrix}-r\sin s & 0\\ r\cos s & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 2-rangú, így az f paraméterezés reguláris.

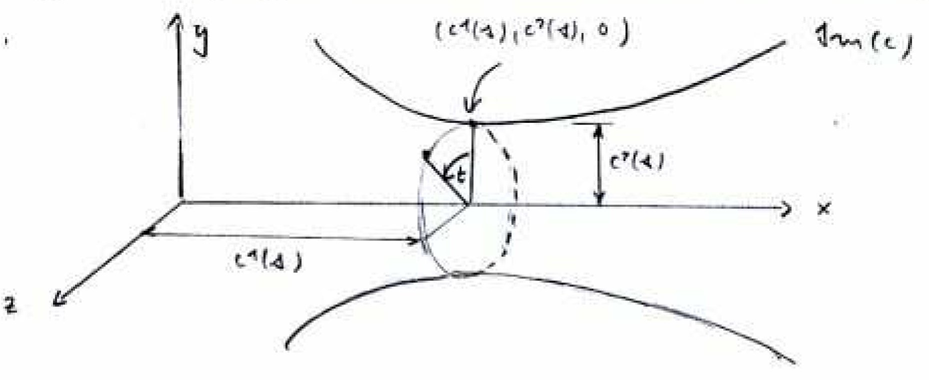
(4) <u>Parametrizált forgásfelületek</u> Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és legyen

$$c : s \in I \longmapsto c(s) = (c^1(s), c^2(s), 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{R}^2$$

olyan reguláris parametrizált görbe, amelyre teljesül, hogy minden $s \in I$ esetén $c^2(s) > 0$. A c görbe által generált forgásfelülethez szemléletesen úgy jutunk, hogy az $\mathrm{Im}(c)$ képhalmazt „megforgatjuk az x-tengely körül". E forgatás során minden $(c^1(s), c^2(s), 0) \in \mathrm{Im}(c)$ $(s \in I)$ pont egy $(c^1(s), 0, 0)$ középpontú, $c^2(s)$ sugarú körvonalat ír le, amely az yz-síkkal párhuzamos síkban van. Ennek a körvonalnak egy paraméterezése a

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (c^1(s), 0, 0) + (0, c^2(s)\cos t, c^2(s)\sin t)$$
$$= (c^1(s), c^2(s)\cos t, c^2(s)\sin t) \in \mathbb{R}^3$$

leképezés; a forgásalakzat ezeknek a köröknek az uniója.



Mindezekre tekintettel, <u>c profilgörbéjű</u> (vagy <u>generáló görbéjű</u>), az x-tengellyel mint <u>forgástengely</u>lyel rendelkező <u>parametrizált forgásfelületen</u> a

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) = (c^1(s), c^2(s)\cos t, c^2(s)\sin t)$$

leképezést értjük. Tetszőleges $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$ esetén

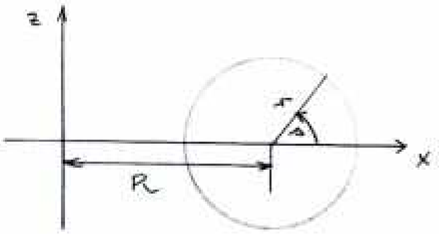
$$D_1 f(s,t) = (c^{1\prime}(s), c^{2\prime}(s)\cos t, c^{2\prime}(s)\sin t),$$
$$D_2 f(s,t) = (0, -c^2(s)\sin t, c^2(s)\cos t),$$
$$D_1 f \times D_2 f(s,t) = (c^2(s)c^{2\prime}(s), -c^{1\prime}(s)c^2(s)\cos t, -c^{1\prime}(s)c^2(s)\sin t),$$
$$\| D_1 f \times D_2 f \|(s,t) = c^2(s)\sqrt{(c^{1\prime}(s))^2 + (c^{2\prime}(s))^2} > 0, \text{ mert } c^2(s) > 0$$

és c reguláris. Így módon f <u>reguláris parametrizált felület</u>.

(5) <u>(Paraméterezett) forgástórusz</u> Legyen r és R pozitív szám, $r < R$. Az előző példa speciális eseteként – és annak néhány módosításával – profilgörbének az xz-síkbeli, $(R,0,0)$ középpontú, r sugarú körvonalat választjuk. Ennek egyenlete:

$$(x-R)^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0;$$

egy paraméterezése $s \in \mathbb{R} \longmapsto c(s) := (R + r\cos s,\ 0,\ r\sin s) \in \mathbb{R}^3$.



A profilgörbe z-tengely körüli forgatásával adódó forgásfelületet <u>forgástórusznak</u> nevezzük, ennek egy paraméterezése

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (s,t) \longmapsto ((R + r\cos s)\cos t,\ (R + r\cos s)\sin t,\ r\sin s).$$

$$D_1 f(s,t) = (-r\sin s\cos t,\ -r\sin s\sin t,\ r\cos s),$$

$$D_2 f(s,t) = (-(R + r\cos s)\sin t,\ (R + r\cos s)\cos t,\ 0);$$

a Gauss-leképezés

$$N: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow S^2,\ (s,t) \longmapsto N(s,t) = -(\cos s\cos t,\ \cos s\sin t,\ \sin s).$$

(6) <u>Vonalfelületek</u> (<u>ruled surfaces</u>) Szemléletesen szólva, egy paraméterezett görbe mentén mozgó egyenes vonalfelületet határoz meg. Precízen:

<u>Definíció.</u> Legyen adva egy $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és egy $X: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe, s tegyük fel, hogy X sehol sem veszi fel a zérusvektort. Ekkor az

$$f: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \longmapsto f(s,t) := c(s) + t\,X(s) \quad (*)$$

leképezést <u>paraméterezett vonalfelületnek</u> nevezzük, amelynek c az <u>alapgörbéje</u>, X a <u>vezető</u> görbéje. Tetszőlegesen rögzített $s \in I$ esetén a

$$\gamma_s: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma_s(t) := c(s) + t\,X(s)$$

paraméterezett egyenest a vonalfelület egy <u>alkotó-egyenesének</u> vagy <u>generátor-egyenesének</u> mondjuk.

Egy reguláris parametrizált vonalfelületet **lefejthetőnek** nevezünk, ha a Gauss-leképezése az alkotóegyenesek mentén konstans, azaz ha $D_2 N = 0$.

Megjegyzés. Tekintsük a (*) által megadott f vonalfelületet. Ekkor tetszőleges $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$-re

$$D_1 f(s,t) = c'(s) + t X'(s), \quad D_2 f(s,t) = X(s),$$

$$D_1 f \times D_2 f(s,t) = c'(s) \times X(s) + t X'(s) \times X(s),$$

így f akkor és csak akkor reguláris (s,t)-ben, ha $c'(s) \times X(s) + t X'(s) \times X(s) \neq \underline{0}$. Amennyiben $c'(s)$ és $X(s)$ lineárisan független, úgy elegendően kis abszolút értékű t mellett ez biztosan bekövetkezik.

Speciális parametrizált vonalfelületek

(a) Érintő lefejtések. Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált görbe. $X := c'$ választással az

$$f: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) := c(s) + t c'(s)$$

parametrizált vonalfelülethez jutunk, amelyet c **érintő lefejtésének** hívunk.

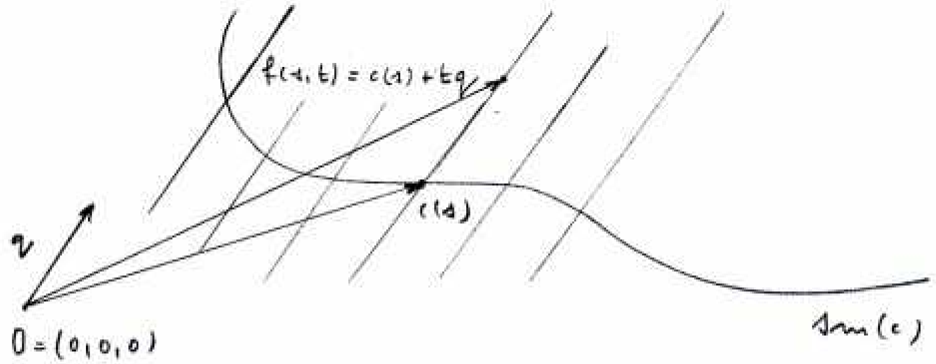
Állítás. Ha $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bireguláris görbe, akkor az érintő lefejtése $I \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ fölött reguláris vonalfelület és lefejthető.

Bizonyítás – feladat. ⚠

(b) Általánosított hengerek. Legyen $c: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe és legyen adva egy $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektor. X leképezés gyanánt a $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) := q \in \mathbb{R}$ konstans leképezést választva, az

$$f: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) := c(s) + tq$$

vonalfelülethez jutunk, amelyet **általánosított hengernek** (vagy a c görbe fölötti hengernek) nevezünk.



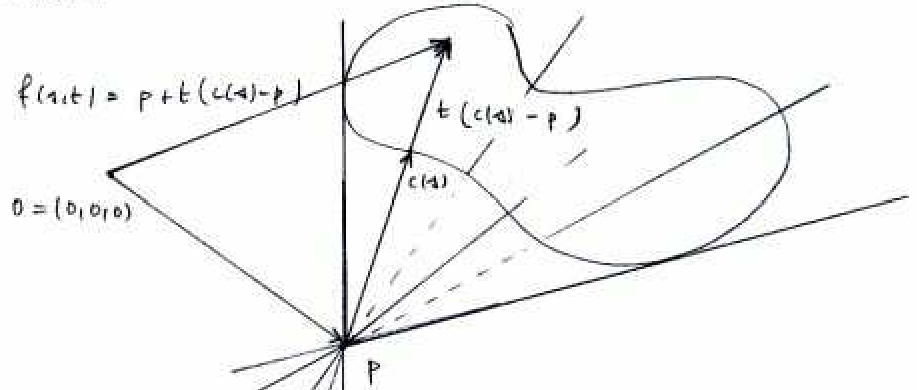
általánosított henger

<u>Állítás.</u> Az $f : (s,t) \in I \times \mathbb{R} \longmapsto f(s,t) := c(s) + tq \in \mathbb{R}^3$ általánosított henger akkor és csak akkor reguláris, ha $c'(s) \times q \neq \underline{0}$, minden $s \in I$-re. Ebben az esetben f lefejthető felület.
<u>Bizonyítás</u> – feladat. ⚠

(c) <u>Általánosított kúpok</u> Legyen $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, és legyen adva egy $p \in \mathbb{R}^3$ pont. Ha c síkgörbe, tegyük fel, hogy p nem illeszkedik c síkjára. Az

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := p + t(c(s) - p) \quad (**)$$

leképezést <u>általánosított (parametrizált) kúpnak</u> nevezzük.



<u>Állítás.</u> A $(**)$ előírással adott általánosított kúp akkor és csak akkor reguláris egy $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$ pontban, ha $c'(s) \times (c(s) - p) \neq 0$ és $t \neq 0$. Minden reguláris általánosított kúp lefejthető felület. ⚠

8. Érintősík. A metrikus tenzor

Definíció. Legyen adva egy $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület.

(1) Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és

$$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2): I \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$$

egy paraméterezett görbe, akkor azt mondjuk, hogy a

$$c := f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2): I \longrightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$$

görbe f-nek egy felületi görbéje.

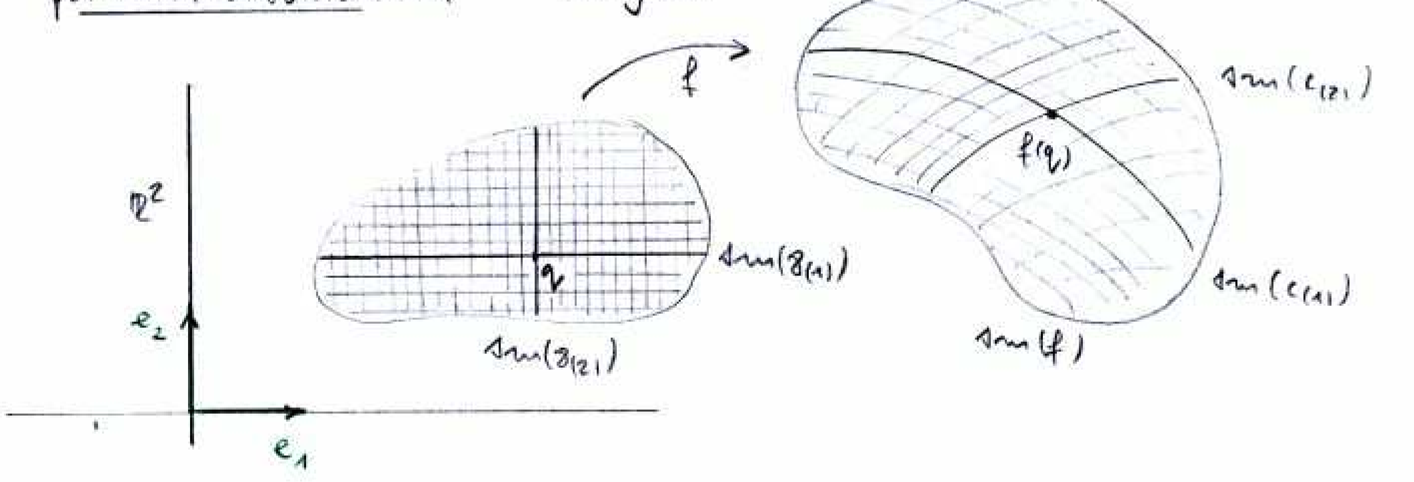
(2) Rögzítve egy $q \in \mathcal{U}$ pontot és véve $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisát, tekintsük speciálisan a

$$\gamma_{(1)}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \gamma_{(1)}(t) := q + te_1,$$
$$\gamma_{(2)}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \gamma_{(2)}(t) := q + te_2$$

paraméterezett egyeneseket. Ekkor a

$$c_{(1)} := f \circ \gamma_{(1)}, \quad c_2 := f \circ \gamma_{(2)}$$

felületi görbéket f q-beli első, ill. második paramétervonalának hívjuk.



8.1. Lemma Megtartva az előző definíció jelöléseit, a $c = f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbe tetszőleges $t \in I$-beli érintővektora előállítható a

$$c'(t) = (\gamma^1)'(t) D_1 f(\gamma(t)) + (\gamma^2)'(t) D_2 f(\gamma(t)) \qquad (8.1)$$

alakban. Speciálisan a q-beli paramétervonalak 0-beli érintővektorai

$$c_{(1)}'(0) = D_1 f(q), \quad c_{(2)}'(0) = D_2 f(q).$$

Bizonyítás.
$$c'(t) = (f\circ\gamma)'(t) \overset{CR}{=} f'(\gamma(t))(\gamma'(t))$$
$$= f'(\gamma(t))\left((\gamma^1)'(t)e_1 + (\gamma^2)'(t)e_2\right)$$
$$\overset{\text{linearitás}}{=} (\gamma^1)'(t)\, f'(\gamma(t))(e_1) + (\gamma^2)'(t)\, f'(\gamma(t))(e_2)$$
$$= (\gamma^1)'(t)\, D_1 f(\gamma(t)) + (\gamma^2)'(t)\, D_2 f(\gamma(t)).$$

Speciálisan:

$$(c_{(1)})'(0) = (\gamma_{(1)}^1)'(0)\, D_1 f(\gamma_{(1)}(0)) + (\gamma_{(1)}^2)'(0)\, D_2 f(\gamma_{(1)}(0)).$$

DE $\gamma_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} q^1+t \\ q^2 \end{pmatrix}$, így $\gamma_1(0) = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} = q$,

$$(\gamma_{(1)})'(t) = \begin{pmatrix} (\gamma_{(1)}^1)'(t) \\ (\gamma_{(1)}^2)'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

következésképpen $(c_{(1)})'(0) = D_1 f(q)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $(c_{(2)})'(0) = D_2 f(q)$. □

8.2. Következmény. Ha $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület és $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2): I \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ reguláris paraméterezett görbe, akkor a $c := f\circ\gamma$ felületi görbe is reguláris.

Bizonyítás. Tetszőleges $t \in I$ esetén f regularitása miatt $D_1 f(\gamma(t))$ és $D_2 f(\gamma(t))$ lineárisan független. Ebből (8.1) alapján következik, hogy $c'(t) \neq \underline{0}$, ellenkező esetben $(\gamma^1)'(t) = (\gamma^2)'(t) = 0$ adódna, amit γ regularitása kizár. □

8.3. Állítás. Legyen adva egy $c: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, és ennek egy

$$c = f\circ\gamma = f\circ(\gamma^1, \gamma^2): I \to f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$$

felületi görbéje. Ekkor

$$\forall\, t \in I: \quad c'(t) \in \operatorname{span}\left(D_1 f(\gamma(t)), D_2 f(\gamma(t))\right).$$

Megfordítva, kijelölve egy $q \in \mathcal{U}$ pontot és egy

$v \in \operatorname{span}(D_1f(q), D_2f(q))$ vektort, létezik f-nek olyan felületi görbéje, amelynek v érintővektora.

<u>Bizonyítás.</u> Az első megállapítás leolvasható (8.1)-ből. A második igazolása céljából tekintsünk egy $v \in \operatorname{span}(D_1f(q), D_2f(q))$ vektort, ahol $q = \binom{q^1}{q^2} \in U$. Ekkor egyértelműen meghatározott $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ skalárok segítségével

$$v = \alpha^1 D_1f(q) + \alpha^2 D_2f(q)$$

írható. Értelmezzünk egy $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ görbét a

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t)) := (q^1 + \alpha^1 t, q^2 + \alpha^2 t)$$

előírással. Ekkor $\gamma'(t) = (\alpha^1, \alpha^2)$ $(t \in \mathbb{R})$, így a $c := f \circ \gamma$ felületi görbe 0-beli érintővektora

$$c'(0) \overset{(8.1)}{=} (\gamma^1)'(0)\, D_1f(\gamma(0)) + (\gamma^2)'(0)\, D_2f(\gamma(0))$$
$$= \alpha^1 D_1f(q) + \alpha^2 D_2f(q) = v.$$

□

<u>Definíció.</u> (1) Egy $f : U \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett felület $q \in U$-beli <u>érintősíkjának</u> a

$$T_qf := f(q) + \operatorname{span}(D_1f(q), D_2f(q))$$

kétdimenziós lineáris sokaságot érjük. $\operatorname{span}(D_1f(q), D_2f(q))$ elemeit f q-beli <u>érintővektorainak</u>, a $(\operatorname{span}(D_1f(q), D_2f(q)))^\perp$ ortogonális komplementer nemzérus vektorait f q-beli <u>normálvektorainak</u> hívjuk.

(2) Tegyük fel, hogy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület. Akkor mondjuk, hogy egy $v \in \mathbb{R}^3$ vektor <u>érintővektora M-nek egy $p \in M$ pontban</u>, ha van olyan $c : I \to \mathbb{R}^3$ görbe, hogy

<u>$\forall t \in I : c(t) \in M$; $c(0) = p$ és $c'(0) = v$.</u>

8.4. Következmény. (1) Egy reguláris paraméterezett felület érintősíkjának fogalma geometriai adat.

(2) Egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület tetszőleges $p \in M$ pontbeli érintővektorai kétdimenziós alteret képeznek $\mathbb{R}^3$-ban, nevezetesen: ha $\mathcal{V} \subset M$ ε-környezete p-nek és $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$ beágyazás, akkor M p-beli érintővektorai az

$$\operatorname{Im}(f'(q)) = \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q)), \quad q = f^{-1}(p)$$

alteret alkotják.

Definíció. Egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület $p \in M$ pontbeli érintősíkján azt a p-re illeszkedő, T_pM-mel jelölt síkot értjük, amelynek irányterét M p-beli érintővektorai alkotják.

8.5. Állítás. Ha $M = F^{-1}(a)$ szintfelület $\mathbb{R}^3$-ban, akkor M tetszőleges $p \in M$ pontbeli érintősíkja a p-re illeszkedő, $\operatorname{grad} F(p)$ normálvektorú sík.

Bizonyítás. 7.3. értelmében $M \subset \mathbb{R}^3$ egy $F : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sima függvény $a \in \operatorname{Im}(F)$ reguláris értékének ősképe, így tetszőleges $p \in M$ esetén $\operatorname{grad} F(p) \neq 0$. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$T_pM = p + (\operatorname{span}(\operatorname{grad} F(p)))^{\perp}.$$

Mindkét oldalon a p pontot tartalmazó kétdimenziós lineáris sokaság áll, ezért elegendő azt ellenőrizni, hogy

$$T_pM \text{ iránytere} \subset \operatorname{span}(\operatorname{grad} F(p))^{\perp}.$$

Ennek igazolásához annyit kell belátni, hogy

ha v érintővektora M-nek p-ben, akkor
$$\langle v, \operatorname{grad} F(p) \rangle = 0.$$

Legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ olyan görbe, hogy
$$c(0) = p, \quad c'(0) = v, \quad \operatorname{Im}(c) \subset M = F^{-1}(\lambda).$$

Ekkor
$$\forall\, t \in I : \quad F(c(t)) = \lambda,$$
így az $F \circ c : I \to \mathbb{R}$ függvény konstans, következésképpen
$$0 = (F\circ c)'(0) = F'(c(0))(c'(0)) = F'(p)(v) \overset{A6}{=} \langle \operatorname{grad} F(p), v \rangle$$
– és ezt kellett belátni. □

Jelölések

(1) $L^2_{sym}(\mathbb{R}^2) := \{ B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid B$ skaláris szorzat (:= szimmetrikus bilineáris forma) $\}$

($L^2_{sym}(\mathbb{R}^2)$ valós vektortér.)

(2) $Euc(\mathbb{R}^2) := \{ B \in L^2_{sym}(\mathbb{R}^2) \mid B$ pozitív definit $\}$

($Euc(\mathbb{R}^2)$ nem altér $L^2_{sym}(\mathbb{R}^2)$-nek!)

Definíció. Egy $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület metrikus tenzorán vagy első alapformáján a

$$\boxed{\begin{array}{l} g : U \longrightarrow L^2_{sym}(\mathbb{R}^2), \quad a \mapsto g_a, \\ g_a(v, w) := \langle f'(a)(v), f'(a)(w) \rangle; \quad v, w \in \mathbb{R}^2 \end{array}}$$

leképezést értjük. A

$$\boxed{\begin{array}{l} g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \mapsto g_{ij}(a) := g_a(e_i, e_j) := \langle f'(a)(e_i), f'(a)(e_j) \rangle \\ \qquad\qquad = \langle D_i f(a), D_j f(a) \rangle \\ (\, i,j \in \{1,2\};\ (e_1, e_2)\ \mathbb{R}^2 \text{ kanonikus bázisa}) \end{array}}$$

függvényeket a metrikus tenzor (természetes) komponensfüggvényeinek vagy az f paraméterezett felület 1. alapmennyiségeinek nevezzük. Röviden:

$$\boxed{g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle; \quad i,j \in \{1,2\}}.$$

8. 6. Állítás. Legyen $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület.

(1) f metrikus tenzora pozitív definit abban az értelemben, hogy g_a minden $a \in \mathcal{U}$ esetén pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma:

$$\forall a \in \mathcal{U} : \; g_a \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2).$$

(2) A $g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle \in C^\infty(\mathcal{U})$ 1. alapmennyiségek rendelkeznek a $g_{ij} = g_{ji}$ ($i,j \in \{1,2\}$) szimmetriatulajdonsággal, és így a

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix szimmetrikus.

(3) Tetszőleges $a \in \mathcal{U}$ esetén

$$\det((g_{ij}(a))) = \| D_1 f(a) \times D_2 f(a) \|^2. \qquad (8.2)$$

Bizonyítás. (1) Bármely $v \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$g_a(v, v) := \langle f'(a)(v), f'(a)(v) \rangle = \| f'(a)(v) \|^2 \geqq 0.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $f'(a)(v) = 0$, ami $f'(a)$ injektivitása miatt (ld. 5.1.) akkor és csak akkor következik be, ha $v = \underline{0}$.

(2) A g_{ij} függvények szimmetriája ered a skaláris szorzat szimmetriája alapján.

(3) $$\det(g_{ij}(a)) = \begin{vmatrix} g_{11}(a) & g_{12}(a) \\ g_{21}(a) & g_{22}(a) \end{vmatrix} = g_{11}(a) g_{22}(a) - (g_{12}(a))^2$$

$$= \| D_1 f(a) \|^2 \, \| D_2 f(a) \|^2 - \langle D_1 f(a), D_2 f(a) \rangle^2$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{=} \| D_1 f(a) \times D_2 f(a) \|^2. \qquad \square$$

<u>Megjegyzés.</u> Legyen $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület. A metrikus tenzor pozitív definitségéből következik, hogy a $(g_{ij}(a))$ mátrix minden $a \in U$ esetén invertálható. (Ez adódik abból is, hogy (8.7) miatt $\det(g_{ij}(a)) \neq 0$.) A $(g_{ij}(a)) \in GL_2(\mathbb{R})$ mátrix inverzére a $(g^{ij}(a))$ jelölést használjuk, tehát

$$(g^{ij}(a)) := (g_{ij}(a))^{-1}.$$

Következik ily módon a $C^\infty(U)$ gyűrűbeli elemekkel rendelkező (g_{ij}) mátrix invertálhatósága is; ekkor a $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$ jelölést használjuk. Az inverz mátrix definíciója alapján

$$\sum_{k=1}^{2} g^{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{2} g_{jk} g^{ki} = \delta^{i}_{j} ; \quad i,j \in \{1,2\}.$$

<u>8.7. Állítás.</u> Legyen adva egy $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület. Tegyük fel, hogy $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} : \tilde{U} \to U$ diffeomorfizmus, és tekintsük az $\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{U} \to U \to \mathbb{R}^3$ átparaméterezettet. Jelölje $\tilde{f}$ metrikus tenzorát $\tilde{g}$.

(1) Tetszőleges $\tilde{a} \in \tilde{U}$ pont és $v, w \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén

$$\tilde{g}_{\tilde{a}}(v,w) = g_{\varphi(\tilde{a})}\big(\varphi'(\tilde{a})(v), \varphi'(\tilde{a})(w)\big),$$

következésképpen a metrikus tenzor geometriai adata a paraméterezett felületnek.

(2) Az átparaméterezés során az 1. alapmennyiségek a

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} (D_i \varphi^k)(D_j \varphi^l)(g_{kl} \circ \varphi) ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

szabály szerint transzformálódnak.

9. A 2. alapforma és a Weingarten-tenzor

9.1. Kulcslemma. Ha $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület és $N: \mathcal{U} \longrightarrow S^2$ a hozzá tartozó Gauss-leképezés, akkor

$$\forall q \in \mathcal{U}: \quad \operatorname{Im}(N'(q)) \subset \operatorname{Im}(f'(q)).$$

Bizonyítás. Legyen, a szokásos módon, (e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisa. Ekkor

$$\operatorname{Im}(N'(q)) = \operatorname{span}(N'(q)(e_1), N'(q)(e_2)) = \operatorname{span}(D_1N(q), D_2N(q)).$$

Mivel $\langle N, N \rangle = 1$ $(\in C^\infty(\mathcal{U}))$,

$$\forall i \in \{1,2\}: \qquad 0 = D_i \langle N, N \rangle = 2 \langle D_i N, N \rangle ;$$

így

$$D_i N(q) \in (\operatorname{span}(N(q)))^\perp = \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$$
$$= \operatorname{span}(f'(q)(e_1), f'(q)(e_2)) = \operatorname{Im}(f'(q)),$$

következésképpen $\operatorname{Im}(N'(q)) \subset \operatorname{Im}(f'(q))$. □

Jelölés $L^2(\mathbb{R}^2) := \{ B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid B \text{ bilineáris} \}$ — az $\mathbb{R}^2$ valós vektortéren értelmezett bilineáris formák vektortere.

9.2. Lemma-definíció. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület,

$$N := \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} D_1 f \times D_2 f : \mathcal{U} \longrightarrow S^2$$

a hozzá tartozó Gauss-leképezés.

(1) Ha tetszőleges $q \in \mathcal{U}$; $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$b_q(v,w) := -\langle N'(q)(v), f'(q)(w) \rangle,$$

akkor b_q bilineáris forma. A

$$b: \mathcal{U} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2), \quad q \longmapsto b_q$$

leképezést f 2. alapformájának nevezzük, a

$$b_{ij}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \; q \longmapsto b_{ij}(q) := b_q(e_i, e_j) = -\langle D_i N, D_j f \rangle (q)$$

$(i,j \in \{1,2\})$ függvényeket a 2. alapforma (komponensei) komponensfüggvényeinek vagy az f paraméterezett felület 2. alapmennyiségeinek nevezzük.

(2) A második alapmennyiségek kiszámíthatók a

$$b_{ij} = \langle D_i D_j f , N \rangle ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

formula alapján, következésképpen rendelkeznek a

$$b_{ij} = b_{ji} \quad ; \quad i,j \in \{1,2\}$$

szimmetriatulajdonsággal. Így módon a 2. alapforma pontbeli értékei szimmetrikus bilineáris formák:

$$\forall\, q \in U : \quad b_q \in L^2_{sym}(\mathbb{R}^2).$$

Bizonyítás. (1) Mivel $N'(q),\, f'(q) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, következik, hogy $b_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ minden $q \in U$ esetén bilineáris függvény.

(2) Tetszőleges $j \in \{1,2\}$ index esetén $\langle D_j f , N \rangle = 0$, így

$$0 = D_i \langle D_j f , N \rangle = \langle D_i D_j f , N \rangle + \langle D_j f , D_i N \rangle ,$$

ahonnan

$$b_{ij} = -\langle D_i N , D_j f \rangle = \langle D_i D_j f\, N \rangle .$$

Így

$$b_{ji} = \langle D_j D_i f , N \rangle = \langle D_i D_j f , N \rangle = b_{ij} .$$

Komponensfüggvényeik szimmetriája miatt a b_q bilineáris formák is szimmetrikusak. □

9.3. Tétel-definíció. Legyen adva egy $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tekintsük ennek

$$g : U \to \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2),\ a \mapsto g_a \quad \text{és} \quad b : U \to L^2_{sym}(\mathbb{R}^2),\ a \mapsto b_a$$

első, ill. második alapformáját. Jelöljünk ki és rögzítsünk egy $q \in U$ pontot.

(1) Létezik egy és csak egy olyan $W_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció, hogy

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^2: \quad g_q(W_q(v), w) = b_q(v, w). \qquad (9.1)$$

Ezt a lineáris transzformációt f q-beli Weingarten-operátorának vagy formaoperátorának nevezzük; a

$$W : U \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) = L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \; q \longmapsto W_q$$

leképezést pedig f Weingarten-tenzorának vagy formatenzorának mondjuk. W_q explicite megadható a

$$\boxed{W_q = -\left(f'(q)\right)^{-1} \circ \nu'(q)} \qquad (9.2)$$

formulával.

(2) A W_q Weingarten-operátor önadjungált lineáris transzformáció a $g_q \in \mathrm{Euc}(\mathbb{R}^2)$ skaláris szorzatra nézve:

$$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^2: \quad g_q(W_q(v), w) = g_q(v, W_q(w)).$$

(3) A W_q Weingarten-operátort az $\mathbb{R}^2$ valós vektortér (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan a

$$\left(b^i_j(q)\right) := \left(\sum_{k=1}^{2} g^{ik}(q)\, b_{kj}(q)\right) \in M_2(\mathbb{R}) \qquad (9.3)$$

mátrix reprezentálja.

Bizonyítás. (1) Tetszőlegesen rögzített $v \in \mathbb{R}^2$ vektor mellett az

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; w \longmapsto b_q(v, w)$$

függvény lineáris, így a Riesz-lemma alapján (v.ö. A6) létezik egy és csak olyan, v-től függő $W_q(v) \in \mathbb{R}^2$ vektor, hogy (9.1) teljesül:

$$g_q(W_q(v), w) = b_q(v, w).$$

Így egy jól definiált

$$W_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; v \longmapsto W_q(v)$$

leképezéshez jutunk, amely a W_q-t definiáló formulából kiolvashatóan lineáris (hiszen (9.1) jobb oldala lineáris v-ben (is)).

Levezetjük a (9.2) formulát. A megfelelő definíciók alapján (9.1) bal, ill. jobb oldala

$$g_q(W_q(v), w) = \langle f'(q)(W_q(v)), f'(q)(w)\rangle,$$

ill.

$$b_q(v, w) = -\langle N'(q)(v), f'(q)(w)\rangle.$$

Így, tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén,

$$\langle f'(q)(W_q(v)), f'(q)(w)\rangle = -\langle N'(q)(v), f'(q)(w)\rangle.$$

Ekvivalens módon:

$$\langle f'(q)(W_q(v)) + N'(q)(v), f'(q)(w)\rangle = 0;\ v, w \in \mathbb{R}^2. \qquad (*)$$

Itt a kulcslemma értelmében $N'(q)(v) \in \mathrm{Im}(f'(q))$, és így egyben

$$f'(q)(W_q(v)) + N'(q)(v) \in \mathrm{Im}(f'(q)).$$

A 6.1. állításaiból következően $f'(q)$ (lineáris) <u>bijekciója</u> $\mathbb{R}^2$-nek $\mathrm{Im}(f'(q))$-ra, ezért $\mathrm{Im}(f'(q))$ minden vektora előállítható $f'(q)(w)$, $w \in \mathbb{R}^2$ alakban. Így a $(*)$ reláció – a w vektor tetszőlegessége folytán – azt jelenti, hogy

<u>az $f'(q)(W_q(v)) + N'(q)(v) \in \mathrm{Im}(f'(q))$ vektor merőleges az $\mathrm{Im}(f'(q))$ altér minden vektorára.</u>

Ebből (a kanonikus skaláris szorzat pozitív definitsége folytán)

$$f'(q)(W_q(v)) + N'(q)(v) = \underline{0}$$

következik. Innen $W_q(v) = -(f'(q))^{-1}(N'(q)(v))$, ami v tetszőlegessége miatt (9.2) helyességét jelenti.

(2) W_q önadjungáltsága közvetlen következménye g_q és b_q szimmetriájának: tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^2$ vektorok esetén

$$g_q(W_q(v), w) \overset{(9.1)}{=} b_q(v, w) \overset{9.2(2)}{=} b_q(w, v) =: g_q(W_q(w), v)$$
$$= g_q(v, W_q(w)).$$

(3) Tegyük fel, hogy a W_q lineáris transzformációt $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan a $(b^i_j(q)) \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix reprezentálja. Megmutatjuk, hogy ez a (9.3) formulával állítható elő. — A mátrixreprezentáció definíciója szerint

$$W_q(e_j) = \sum_{r=1}^{2} b^r_j(q) e_r \quad , \quad j \in \{1, 2\}. \qquad (*)$$

A 2. alapmennyiségek és W_q definíciója alapján

$$b_{kj}(q) := b_q(e_k, e_j) = b_q(e_j, e_k) \overset{(9.1)}{=} g_q(W_q(e_j), e_k)$$
$$\overset{(*)}{=} g_q\Big(\sum_{r=1}^{2} b^r_j(q) e_r, e_k\Big) = \sum_{r=1}^{2} b^r_j(q) g_{rk}(q)$$
$$= \sum_{r=1}^{2} g_{rk}(q) b^r_j(q).$$

Megszorozva mindkét oldalt a $(g_{ij}(q))$ mátrix inverzének $g^{ik}(q)$ elemeivel, és összegezve k-ra 1-től 2-ig azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2} g^{ik}(q) b_{kj}(q) = \sum_{r=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} g^{ik}(q) g_{rk}(q) b^r_j(q) = \sum_{r=1}^{2} \delta^i_r b^r_j(q)$$
$$= b^i_j(q),$$

amivel (9.3) igazolást nyert. □

<u>9.4. Következmény</u> (<u>a Weingarten-formulák</u>). Egy $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület Gauss-leképezésének parciális deriváltjai előállíthatók $D_1 f$ és $D_2 f$ $C^\infty(U)$-lineáris kombinációiként a

$$D_j N = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j \, D_i f \quad , \quad j \in \{1,2\} \qquad (9.4)$$

alakban, ahol a $b^i_j \in C^\infty(U)$ függvények (9.3) által vannak adva (a így tetszőleges $q \in U$ esetén $(b^i_j(q))$ W_q mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan).

Bizonyítás. Válasszunk ki egy $q \in U$ pontot, és legyen $j \in \{1,2\}$. A q-beli Weingarten-operátor $W_q = -(f'(q))^{-1} \circ N'(q)$ előállításából $N'(q) = -f'(q) \circ W_q$, így

$$\begin{aligned} D_j N(q) &= -N'(q)(e_j) = -f'(q)(W_q(e_j)) = -f'(q)\Big(\sum_{i=1}^{2} b^i_j(q) e_i\Big) \\ &= -\sum_{i=1}^{2} b^i_j(q)\, f'(q)(e_i) = -\sum_{i=1}^{2} b^i_j(q) D_i f(q) \\ &= -\Big(\sum_{i=1}^{2} b^i_j D_i f\Big)(q), \end{aligned}$$

amiből q tetszőlegessége folytán következik (9.3). $\square$

10. Normálgörbület. Meusnier tétele

Definíció. Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület g 1., ill. b 2. alapformával.

(1) Kiválasztva egy $q \in U$ pontot, a

$$k_q : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ v \mapsto k_q(v) := \frac{b_q(v,v)}{g_q(v,v)} = \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)} \qquad (10.1)$$

függvényt f q-beli normálgörbület függvényének nevezzük. Tetszőleges $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ esetén a $k_q(v)$ valós számot f q-beli, v-irányú normálgörbületének mondjuk.

(2) Egy $c := f \circ \gamma : I \to f(U) \to \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbe normálgörbület függvényén a

$$\varkappa_n : I \to \mathbb{R} \ ,\ t \mapsto \varkappa_n(t) := k_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

függvényt értjük.

<u>10.1. Megjegyzés.</u> Megtartva a definíció feltételeit és jelöléseit, legyen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$k_q(\lambda v) := \frac{b_q(\lambda v, \lambda v)}{g_q(\lambda v, \lambda v)} = \frac{\lambda^2 b_q(v,v)}{\lambda^2 g_q(v,v)} = \frac{b_q(v,v)}{g_q(v,v)} =: k_q(v),$$

tehát

$$k_q(\lambda v) = k_q(v) = \lambda^0 k_q(v).$$

Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki, hogy a k_q függvény <u>nulladfokú homogén</u>. Így – speciálisan – $k_q(-v) = k_q(v)$ – „a v irányban és a $-v$ irányban vett q-beli normálgörbület megegyezik".

Amennyiben v egységvektor a g_q skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\|v\|_{g_q} := (g_q(v,v))^{1/2} = 1,$$

akkor $k_q(v) = b_q(v,v)$.

<u>10.2. Lemma.</u> Legyen $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tekintsük f-nek egy $c = f \circ \gamma : I \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbéjét. Ekkor

$$\underline{\forall t \in I: \quad b_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle c''(t), N(\gamma(t))\rangle} \quad (10.2)$$

ahol $b: U \longrightarrow L^2_{sym}(\mathbb{R}^2)$ f 2. alapformája.

<u>Bizonyítás.</u> $b_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = -\langle N'(\gamma(t))(\gamma'(t)), f'(\gamma(t))(\gamma'(t))\rangle$
$\overset{CR}{=} -\langle (N \circ \gamma)'(t), (f \circ \gamma)'(t)\rangle = -\langle (N\circ\gamma)', c'\rangle(t).$

Vegyük észre, hogy $\langle c', N\circ\gamma\rangle = 0$, hiszen egy felületi görbe érintővektorai a felületnek is érintővektorai (8.3. állítás). Így

$$0 = \langle c', N\circ\gamma\rangle' = \langle c'', N\circ\gamma\rangle + \langle c', (N\circ\gamma)'\rangle,$$

ahonnan $-\langle (N\circ\gamma)', c'\rangle = \langle c'', N\circ\gamma\rangle$. Összevetve ezt a kiinduló számolás eredményével, következik az állítás.

□

10. 3. Állítás (Jean Baptiste MEUSNIER, 1754 - 1793).

Legyen $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, s tegyük fel, hogy $c = f \circ \gamma : I \to U \to \mathbb{R}^3$ birreguláris felületi görbéje f-nek. Ekkor c normálgörbületét tetszőleges $t \in I$ pontban megadja a

$$\varkappa_n(t) = \varkappa(t) \langle F(t), N(\gamma(t)) \rangle$$

formula, ahol $\varkappa$ és F c görbületfüggvénye ill. főnormális vektormezője, N pedig f Gauss-leképezése.

Bizonyítás. A definíció értelmében

$$\varkappa_n(t) = k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{h_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} .$$

Itt

$$h_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \overset{(10.2)}{=} \langle c''(t), N(\gamma(t)) \rangle$$

$$\overset{3.7.\text{ állítás}}{=} \langle \nu'(t) T(t) + \nu^2(t) \varkappa(t) F(t), N(\gamma(t)) \rangle$$

$$= \nu^2(t) \varkappa(t) \langle F(t), N(\gamma(t)) \rangle ,$$

$$\nu^2(t) := \langle c'(t), c'(t) \rangle = \langle (f \circ \gamma)'(t), (f \circ \gamma)'(t) \rangle$$

$$= \langle f'(\gamma(t))(\gamma'(t)), f'(\gamma(t))(\gamma'(t)) \rangle$$

$$=: g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) ,$$

következésképpen

$$\varkappa_n(t) = \frac{1}{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \varkappa(t) \langle F(t), N(\gamma(t)) \rangle$$

$$= \varkappa(t) \langle F(t), N(\gamma(t)) \rangle .$$

$\square$

Definíció. Legyen $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tegyük fel, hogy

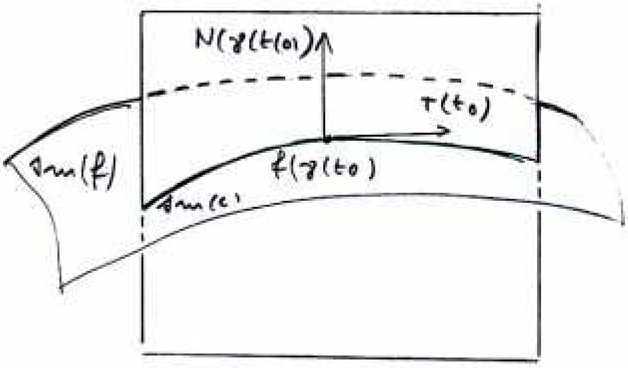
$$c = f\circ\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

bireguláris felületi görbe. Ha valamely $t_0 \in I$ esetén $F(t_0) = \pm N(\gamma(t_0))$, akkor azt mondjuk, hogy c a t_0-beli normálmetszetben van.

Megjegyzés. „Geometriaibb" nyelven, c akkor van a t_0-beli normálmetszetben, ha

$$\left(f(\gamma(t_0)) + \operatorname{span}\left(T(t_0), N(\gamma(t_0))\right) \right) \cap \operatorname{Im}(f)$$

paraméterezése az $f(\gamma(t_0))$ pont alkalmas környezetében.



10.4. Következmény (Meusnier tétele, 2. verzió). Legyen $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület; $q \in \mathcal{U}$, $v \in \mathbb{R}^2$, s tegyük fel, hogy $\|v\|_{g_q} = (g_q(v,v))^{1/2} = 1$. Ekkor a $k_q(v)$ normálgörbület abszolút értéke megkapható egy olyan $c = f\circ\gamma : I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ egységsebességű, bireguláris felületi görbe t_0-beli görbületeként, amely a t_0-beli normálmetszetben van, s amelyre $\gamma(t_0) = q$, $\gamma'(t_0) = v$ teljesül.

Bizonyítás. $|k_q(v)| = |k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))| =: |\varkappa_n(t_0)|$

$$\overset{10.3.\ \text{állítás}}{=} |\varkappa(t_0)\langle F(t_0), N(\gamma(t_0))\rangle| = \varkappa(t_0)|\langle F(t_0), N(\gamma(t_0))\rangle|$$

$$\overset{\text{feltétel}}{=} \varkappa(t_0)|\langle \pm N(\gamma(t_0)), N(\gamma(t_0))\rangle| = \varkappa(t_0).$$

□

11. A Gauss- és a Minkowski-görbület. Rodrigues tétele

<u>Definíció.</u> Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. (1) Tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén a q-beli Weingarten-operátor

$$K(q) := \det(W_q)$$

determinánsát f q-beli <u>Gauss-görbületének</u>, a Weingarten-operátor nyomának

$$H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W_q)$$

felét f q-beli <u>Minkowski-görbületének</u> nevezzük. A $K: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto K(q)$, ill. $H: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto H(q)$ függvényt f <u>Gauss-</u>, ill. <u>Minkowski-görbületének</u> mondjuk. Ha $K = 0$, akkor <u>lapos felületről</u>, $H = 0$ esetén pedig <u>minimálfelületről</u> beszélünk.

(2) Azt mondjuk, hogy az f parametrizált felület egy $q \in \mathcal{U}$ pontban

<u>elliptikus</u>, ha $K(q) > 0$; <u>hiperbolikus</u>, ha $K(q) < 0$;

<u>parabolikus</u>, ha $K(q) = 0$, de $H(q) \neq 0$.

Egy $q \in \mathcal{U}$ pont <u>umbilikus pontja</u> (<u>köldökpontja</u>) f-nek, ha a q-beli Weingarten-operátor skalárral való szorzásként hat: van olyan λ valós szám, hogy

$$\forall v \in \mathbb{R}^2: \quad W_q(v) = \lambda v \text{ ; röviden: } W_q = \lambda 1_{\mathbb{R}^2}.$$

Ha speciálisan $\lambda = 0$, és így W_q a zérus transzformáció, akkor <u>síkpontról</u> beszélünk. Egy umbilikus pontot <u>valódinak</u> mondunk, ha nem síkpont.

(3) f $q \in \mathcal{U}$-beli <u>főirányain</u> a W_q Weingarten-operátor sajátvektorait, q-beli <u>főgörbületein</u> az ezekhez tartozó sajátértékeket értjük. Ha a $v = v^1 e_1 + v^2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ vektor főiránya f-nek q-ban, akkor az $f'(q)(v) = v^1 D_1 f(q) + v^2 D_2 f(q) \in \mathbb{R}^3$ érintővektort is említjük főirányként.

<u>Megjegyzés.</u> f q-beli főgörbületeire a $k_1(q)$ és $k_2(q)$ jelölést használjuk, a $k_1(q) \leqq k_2(q)$ megállapodással. (Ki fog derülni: két, nem feltétlenül különböző q-beli főgörbület mindig létezik.) A

$$k_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q \longmapsto k_i(q) \quad ; \quad i \in \{1,2\}$$

függvényeket f <u>főgörbület-függvényeinek</u> nevezzük.

<u>11. 1. Tétel</u> (<u>O. Rodrigues</u>). Legyen $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $q \in \mathcal{U}$.

(1) f q-beli $k_1(q) \leqq k_2(q)$ főgörbületei <u>léteznek</u>, és éppen a <u>q-beli normálgörbület függvény szélsőértékei.</u>

(2) $\mathbb{R}^2$-nek megadható olyan, a <u>g_q skaláris szorzatra nézve ortonormált bázisa</u>, amelyet f q-beli főirányai alkotnak.

(3) Ha q <u>umbilikus pont</u>, akkor $\mathbb{R}^2$ minden nemzérus vektora főirány, és a 2. alapforma q-beli értéke skalárszorosa az 1. alapforma q-beli értékének:

$$h_q = \lambda g_q \,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) A Gauss-görbület a főgörbületek szorzatával, a Minkowski-görbület azok számtani közepével egyenlő.

(5) Ha $(g_{ij}(q))$, ill. $(h_{ij}(q))$ a q-beli 1., ill. 2. alapmennyiségek mátrixa, és $(h^i_j(q))$ a W_q Weingarten-operátor mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan, akkor a q-beli Gauss-, ill. Minkowski-görbület kiszámítható a

$$\underline{K(q) = \det\left(h^i_j(q)\right) = \frac{\det(h_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))}}\,, \quad \text{ill. a}$$

$$\underline{H(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} h^i_i(q)}$$

formula alapján.

(6) $$H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2,$$
ahol k_1 és k_2 a főgörbület-függvények, következésképpen a H^2-K függvény sehol sem vesz föl negatív értéket. A Gauss- és a Minkowski-görbület ismeretében a főgörbület-függvények a
$$k_1 = H - \sqrt{H^2-K}\ ,\ \text{ill. } k_2 = H + \sqrt{H^2-K}$$
formulák alapján nyerhetők.

Bizonyítás. (1) W_q önadjungált lineáris transzformációja az $(\mathbb{R}^2, g_q)$ euklideszi vektortérnek (10.3. tétel/(2)), ezért a
$$k_q : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R},\ v \mapsto k_q(v) \overset{(9.5)}{=} \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)}$$
normálgörbület függvény az
$$S^1_q := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid g_q(u,u) = 1\}$$
egységkörön felveszi szélsőértékeit, amelyek W_q-nak sajátértékei (AG 10, 4. tétel/(1)). Mivel ezek a sajátértékek – definíció szerint – f q-beli főgörbületei, az (1) megállapítás igazolást nyert.

(2) – ez adódik az idézett tétel második megállapításából.

(3) Ha $q \in U$ umbilikus pont, akkor a definíció értelmében van olyan λ valós szám, hogy $W_q = \lambda 1_{\mathbb{R}^2}$. Világos, hogy ekkor $\mathbb{R}^2$ minden nemzérus vektora λ sajátértékhez tartozó sajátvektora W_q-nak, és így főirány. Teljesül továbbá, hogy tetszőleges $v, w \in \mathbb{R}^2$ esetén
$$b_q(v,w) = g_q(W_q(v), w) = g_q(\lambda v, w) = \lambda g_q(v,w),$$
tehát $b_q = \lambda g_q$.

(4) A (2)-ben mondottak szerint létezik $\mathbb{R}^2$-nek q-beli főirányok által alkotott g_q-ortonormált bázisa. Egy ilyen bázisra vonatkozóan W_q-t az a $\begin{pmatrix} k_1(q) & 0 \\ 0 & k_2(q) \end{pmatrix}$ diagonálmátrix reprezentálja, ahol $k_1(q)$ és $k_2(q)$ a q-beli főgörbületek. Így

$$K(q) := \det(W_q) = \begin{vmatrix} k_1(q) & 0 \\ 0 & k_2(q) \end{vmatrix} = k_1(q)k_2(q)\,;$$

$$H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W_q) = \frac{1}{2}(k_1(q) + k_2(q)).$$

(5) W_q mátrixa $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan a

$$(b^i_j(q)) = (g^{ij}(q))(b_{ij}(q)) = (g_{ij}(q))^{-1}(b_{ij}(q))$$

mátrix. Ezt használva,

$$K(q) := \det(W_q) = \det((g_{ij}(q))^{-1})\det(b_{ij}(q)) = \frac{\det(b_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))}\,;$$

$$H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W_q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} b^i_i(q).$$

(6) $H^2 - K \overset{(4)}{=} \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2.$

W_q karakterisztikus polinomja

$$P_{W_q}(t) := \det(W_q - t\,1_{\mathbb{R}^2}) \overset{A6.7}{=} t^2 - (\operatorname{tr}(W_q))t + \det(W_q)$$

$$= t^2 - 2H(q)t + K(q),$$

így ennek zérushelyei, a főgörbületek,

$$k_1(q) = \frac{2H(q) + \sqrt{4(H(q))^2 - 4K(q)}}{2} = (H - \sqrt{H^2 - K})(q),$$

$$k_2(q) = (H + \sqrt{H^2 - K})(q).$$

□

<u>Megjegyzések.</u> (1) Olinde RODRIGUES (1794-1851) francia matematikus, bankár és utópista szocialista. Gyakran a $W_q = -(f'(q))^{-1} \circ N'(q)$ formula egy koordinátás változatát kötik a nevéhez (ami közelebb áll tényleges eredményeihez).

(2) Tekintettel a $K = k_1 k_2$, ill. a $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ összefüggésekre, a Gauss-görbületet szorzatgörbületnek, a Minkowski-görbületet középgörbületnek is szokás nevezni.

(3) Ha $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ különböző főgörbületekhez tartozó főirányok, akkor $g_q(v_1, v_2) = 0$, mert egy önadjungált lineáris transzformáció különböző saját-értékekhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak. Így egyben

$$\langle f'(q)(v_1), f'(q)(v_2) \rangle = g_q(v_1, v_2) = 0,$$

tehát $f'(q)(v_1)$ és $f'(q)(v_2)$ euklideszi értelemben merőleges érintővektorai f-nek.

11. 2. Következmény (Euler formulája a normálgörbületre).
Legyen $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tegyük fel, hogy (v_1, v_2) egy $q \in U$ pontbeli főirányok által alkotott, g_q-ortonormált bázisa $\mathbb{R}^2$-nek. Ha $v = (\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2$, akkor a q-beli normálgörbület-függvény v-beli értéke kiszámítható a

$$k_q(v) = k_1(q)\cos^2\alpha + k_2(q)\sin^2\alpha$$

ún. Euler-formula alapján, ahol $k_i(q) = k_q(v_i)$, $i \in \{1,2\}$, a q-beli főgörbületek.

Bizonyítás. $k_q(v) := \dfrac{h_q(v,v)}{g_q(v,v)} = \dfrac{g_q(W_q(v),v)}{g_q(v,v)}$.

Itt
$$g_q(v,v) = g_q((\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2, (\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$g_q(v_1,v) = g_q(v_1, (\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2) = \cos\alpha, \quad g_q(v_2, v) = \sin\alpha,$$

így

$$k_q(v) = g_q(W_q((\cos\alpha)v_1 + (\sin\alpha)v_2), v) = \cos\alpha\, g_q(W_q(v_1), v)$$
$$+ \sin\alpha\, g_q(W_q(v_2), v) = k_1(q)\cos\alpha\, g_q(v_1, v)$$
$$+ k_2(q)\sin\alpha\, g_q(v_2, v) = k_1(q)\cos^2\alpha + k_2(q)\sin^2\alpha. \qquad \square$$

11.3. Tétel (az umbilikus felületek jellemzése). Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, s tegyük fel, hogy $\mathcal{U}$ összefüggő nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^2$-nek. Akkor és csak akkor teljesül, hogy $\mathcal{U}$ minden pontja umbilikus pontja f-nek, ha az $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ képhalmaz egy síknak vagy egy gömbfelületnek részhalmaza. Δ

11.4. Definíció. Egy reguláris parametrizált felület azon geometriai adatait, amelyeket teljesen meghatároz a metrikus tenzor, vagyis amelyek kifejezhetők az 1. alapmennyiségek és ezek parciális deriváltjai segítségével belső geometriai adatoknak nevezzük.

11.5. Állítás - definíció. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. A $D_i D_j f$ 2. parciális deriváltak a $(D_1 f, D_2 f, N)$ Gauss-féle háromélmenő segítségével a

$$D_i D_j f = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} D_k f + b_{ij} N \quad ; \quad i,j \in \{1,2\} \tag{11.1}$$

alakban állíthatók elő, ahol a $\Gamma_{ij}^{k} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvények kifejezhetők az 1. alapmennyiségek segítségével a

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2} g^{kl} \left(D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij} \right) \tag{11.2}$$

formulák szerint, és így belső geometriai adatok. Ezeket a függvényeket az f parametrizált felület (másodfajú) Christoffel-szimbólumainak nevezzük.

Bizonyítás. Tetszőleges $q \in U$ esetén $D_iD_jf(q)$ egyértelműen előállítható $D_1f(q)$, $D_2f(q)$ és $N(q)$ lineáris kombinációjaként, hiszen $(D_1f(q), D_2f(q), N(q))$ bázisa $\mathbb{R}^3$-nak. Egyértelműen léteznek ezért olyan

$$\Gamma^k_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \beta_{ij} : U \to \mathbb{R} \quad ; \quad i,j,k \in \{1,2\}$$

függvények, hogy

$$D_iD_jf = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} D_kf + \beta_{ij} N \qquad (*)$$

$(i,j \in \{1,2\})$. Feladatunk így annak megmutatása, hogy a Γ^k_{ij} függvények a (11.2) formulával állíthatók elő, és hogy $\beta_{ij} = \ell_{ij} = f$ 2. alapmennyiségei $(i,j \in \{1,2\})$.

1. lépés Képezve $(*)$ mindkét oldalának skaláris szorzatát N-nel, $\langle D_1f, N\rangle = \langle D_2f, N\rangle = 0$ és $\langle N, N\rangle = 1$ miatt miatt azt kapjuk, hogy

$$\beta_{ij} = \langle D_iD_jf, N\rangle \overset{9.7./(2)}{=} \ell_{ij} \quad ; \quad i,j \in \{1,2\}.$$

2. lépés Legyen $\ell \in \{1,2\}$, és vegyük $(*)$ mindkét oldalának $D_\ell f$-fel való skaláris szorzatát. Azt kapjuk, hogy

$$\langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} \langle D_kf, D_\ell f\rangle = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} g_{k\ell}$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{ij} g_{m\ell} .$$

Szorozzuk meg itt mindkét oldalt (balról) $g^{k\ell}$-lel, és összegezzünk ℓ-re 1-től 2-ig:

$$\sum_{\ell=1}^{2} g^{k\ell} \langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle = \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{ij} g^{k\ell} g_{m\ell} =$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Gamma^m_{ij} \delta^k_m = \Gamma^k_{ij} ,$$

tehát

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_{\ell=1}^{2} g^{k\ell} \langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle \qquad (**)$$

$(i,j,k \in \{1,2\})$.

<u>3. lépés</u> A $\langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle$ skaláris szorzatot kifejezzük az 1. alapmennyiségek és parciális deriváltjaik segítségével. Az erre szolgáló alábbi fogást <u>Christoffel-trükk</u>ént is szokás említeni:

$$D_i g_{j\ell} = D_i\langle D_jf, D_\ell f\rangle = \langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle + \langle D_jf, D_iD_\ell f\rangle,$$

$$D_j g_{\ell i} = D_j\langle D_\ell f, D_i f\rangle = \langle D_jD_\ell f, D_if\rangle + \langle D_\ell f, D_jD_if\rangle,$$

$$D_\ell g_{ij} = D_\ell\langle D_if, D_jf\rangle = \langle D_\ell D_if, D_jf\rangle + \langle D_if, D_\ell D_jf\rangle.$$

Felhasználva a vegyes 2. parciális deriváltak egyenlőségét, az első két sor összegéből kivonva a 3. sort azt kapjuk, hogy

$$D_i g_{j\ell} + D_j g_{\ell i} - D_\ell g_{ij} = 2\langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle.$$

Innen $\langle D_iD_jf, D_\ell f\rangle$-et (**)-ba helyettesítve, a kívánt (11.2) összefüggéshez jutunk. □

<u>11.6. Tétel</u> (<u>C.F. Gauss „theorema egregium"-a</u>). <u>A reguláris parametrizált felületek Gauss-görbülete belső geometriai adat.</u>

A <u>bizonyítás</u> során azt mutatjuk meg, hogy a Gauss-görbületet megadó $K = \dfrac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}$ formulában a számláló kifejezhető a Christoffel-szimbólumok és deriváltjaik segítségével, és így belső geometriai adat. Ehhez további előkészületekre és elég hosszadalmas számolásra van szükség. △

12. Geodetikusok

Definíció. Egy reguláris parametrizált felület *geodetikusán* olyan reguláris felületi görbét értünk, amelynek tetszőleges pontbeli gyorsulásvektora merőleges a felület illető pontbeli érintősíkjára.

12.1. Állítás. Egy $f: U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület $c = f\circ\gamma : I \to U \to \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje pontosan akkor geodetikus, ha eleget tesz a

$$c'' - \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma = 0 \qquad (12.1)$$

feltételnek.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} c \text{ geodetikusa } f\text{-nek} &\overset{\text{def.}}{\iff} \forall t\in I: c''(t) \perp \operatorname{span}(D_1f(\gamma(t)), D_2f(\gamma(t))) \\ &\iff \forall t\in I: c''(t) \parallel N(\gamma(t)) \\ &\iff \exists\, h: I\to\mathbb{R} \text{ függvény, hogy } c'' = h(N\circ\gamma). \end{aligned}$$

Véve a $c'' = h(N\circ\gamma)$ egyenlőség mindkét oldalának $N\circ\gamma$-val való skaláris szorzatát, $h = \langle c'', N\circ\gamma\rangle$ adódik, és így következik az állítás. □

12.2. Következmény. A geodetikusok pályasebessége konstans.

Bizonyítás. Megtartva a bevezetett jelöléseket, tegyük fel, hogy $c = f\circ\gamma$ geodetikus. Ekkor

$$\begin{aligned}(\|c'\|^2)' &= \langle c', c'\rangle' = 2\langle c', c''\rangle \overset{(12.1)}{=} 2\langle c', \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma\rangle \\ &= 2\langle c'', N\circ\gamma\rangle\langle c', N\circ\gamma\rangle = 0,\end{aligned}$$

hiszen $c' \perp N\circ\gamma$. Így a $\|c'\|^2$ függvény konstans, s ezért a $\|c'\|$ pályasebesség is az. □

12.3. Lemma. Legyen $f: U\to\mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $c := f\circ\gamma = f\circ(\gamma^1,\gamma^2) : I \to U \to \mathbb{R}^3$ pedig felületi görbéje f-nek. Ekkor

$$(D_i f \circ \gamma)' = \sum_{j=1}^{2} (\gamma^j)'(D_i D_j f \circ \gamma) \quad , \quad i \in \{1,2\} \; ; \qquad (12.2)$$

$$c'' = \sum_{k=1}^{2} \Big((\gamma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\gamma^i)'(\gamma^j)' (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) \Big) D_k f \circ \gamma$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} (b_{ij} \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)' \, N \circ \gamma . \qquad (12.3)$$

Bizonyítás. Tetszőleges $t \in I$ esetén

$$(D_i f \circ \gamma)'(t) = (D_i f)'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = (D_i f)'(\gamma(t))\big((\gamma^1)'(t) e_1 + (\gamma^2)'(t) e_2\big)$$
$$= (\gamma^1)'(t) D_1 D_i f(\gamma(t)) + (\gamma^2)'(t) D_2 D_i f(\gamma(t))$$
$$= \sum_{j=1}^{2} (\gamma^j)'(t) D_j D_i f(\gamma(t)) = \Big(\sum_{j=1}^{2} (\gamma^j)'(D_i D_j f \circ \gamma) \Big)(t) ,$$

ami igazolja (12.2)-t.

(8.1) értelmében $c' = \sum_{i=1}^{2} (\gamma^i)'(D_i f \circ \gamma)$, így

$$c'' = \sum_{i=1}^{2} (\gamma^i)''(D_i f \circ \gamma) + \sum_{i=1}^{2} (\gamma^i)'(D_i f \circ \gamma)' \overset{(12.2)}{=} \sum_{i=1}^{2} (\gamma^i)''(D_i f \circ \gamma)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} (\gamma^i)'(\gamma^j)'(D_i D_j f \circ \gamma) \overset{(11.1)}{=} \sum_{k=1}^{2} (\gamma^k)''(D_k f \circ \gamma)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} (\gamma^i)'(\gamma^j)' \Big(\sum_{k=1}^{2} (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma)(D_k f \circ \gamma) + (b_{ij} \circ \gamma) N \circ \gamma \Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \Big((\gamma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\gamma^i)'(\gamma^j)'(\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) \Big)(D_k f \circ \gamma) + \sum_{i,j=1}^{2} (\gamma^i)'(\gamma^j)'(b_{ij} \circ \gamma) N \circ \gamma . \qquad \square$$

12.4. Állítás. Egy $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület $c = f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2) : I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéje pontosan akkor geodetikusa f-nek, ha

$$(\gamma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)' = 0 \; ; \quad i,j \in \{1,2\}. \qquad (12.4)$$

Így az a tulajdonság, hogy egy reguláris felületi görbe geodetikus, belső geometriai tulajdonság.

Bizonyítás. Tudjuk (ld. (12.1)), hogy c pontosan akkor geodetikus, ha $c'' - \langle c'', N \circ \gamma \rangle N \circ \gamma = 0$. Ez (12.3) figyelembevételével

$$\langle c'', N\circ\gamma\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} (\ell_{ij}\circ\gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)'$$

(ez adódik a 10.2. lemmából is), így

$$c'' - \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma = 0 \iff c'' - \sum_{i,j=1}^{2} (\ell_{ij}\circ\gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)' N\circ\gamma = 0$$

$$\overset{(17.3)}{\iff} \sum_{k=1}^{2}\Big((\gamma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma_{ij}^{k}\circ\gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)'\Big) D_k f\circ\gamma = 0$$

$\iff$ (12.4) teljesül.

□

12.5. Állítás. (1) Ha egy reguláris paraméterezett felület egy felületi görbéje konstans pályasebességű egyenes, akkor geodetikus.

(2) A reguláris paraméterezett síkfelületek geodetikusai a konstans pályasebességű egyenesek és csakis ezek.

Bizonyítás. Az (1) megállapítás adódik abból, hogy a konstans pályasebességű egyenesek gyorsulásvektormezője a zérus vektormező, így (12.1) automatikusan teljesül.

(2) igazolása céljából legyenek v és w $\mathbb{R}^3$ lineárisan független vektorai, $a \in \mathbb{R}^3$ pedig egy rögzített pont. Ekkor

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto f(s,t) := a + sv + tw$$

reguláris paraméterezett síkfelület, hiszen

$$\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2 :\ D_1 f(s,t) \times D_2 f(s,t) = v \times w \neq \underline{0}.$$

Az általánosság sérelme nélkül föltehetjük, hogy v és w merőleges egységvektorok; ekkor az f-hez tartozó Gauss-leképezés a

$$N : (s,t)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto N(s,t) = v\times w \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

konstans leképezés. Tekintünk egy

$$c = f\circ\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

reguláris felületi görbét. Mivel $\langle c', N\circ\gamma\rangle = 0$ és $N\circ\gamma$ konstans leképezés,

$$0 = \langle c', N\circ\gamma\rangle' = \langle c'', N\circ\gamma\rangle + \langle c', (N\circ\gamma)'\rangle = \langle c'', N\circ\gamma\rangle,$$

így

$$c \text{ geodetikus} \overset{(12.1)}{\iff} c'' - \langle c'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma = 0 \iff c''=0$$
$$\underset{3.3.\text{ állítás}}{\iff} c \text{ egy } \mathbb{R}^3\text{-beli egyenes affin paraméterezése.} \qquad \square$$

<u>**12.6. Lemma**</u> (<u>a Weingarten-operátor geodetikus mentén</u>). Ha $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület és $c := f\circ\gamma : I \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ egységpályasebességű, bireguláris geodetikusa f-nek, akkor (a szokásos jelölésekkel)

$$\forall t\in I: \quad f'(\gamma(t))\circ W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \pm(\varkappa T - \tau B)(t).$$

<u>Bizonyítás.</u> Mivel c egységpályasebességű,
$$c'' = (c')' = T' \overset{(F1)}{=} \varkappa F.$$
A geodetikusság feltétele alapján
$$c'' \parallel N\circ\gamma \quad (\text{pontonként}),$$
így az következik, hogy
$$F \parallel N\circ\gamma \quad (\text{pontonként}).$$
Mivel mind az $F: I \to \mathbb{R}^3$, mind az $N\circ\gamma: I\to\mathbb{R}^3$ leképezései egységvektorokat vesz föl, az utóbbi reláció csak úgy lehetséges, hogy $F = \pm(N\circ\gamma)$. Ezt felhasználva, tetszőleges $t\in I$ esetén,
$$\begin{aligned} f'(\gamma(t))\circ W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &\overset{(9.2)}{=} -f'(\gamma(t))\circ(f'(\gamma(t)))^{-1}\circ N'(\gamma(t))(\gamma'(t)) \\ &= -N'(\gamma(t))(\gamma'(t)) = -(N\circ\gamma)'(t) \\ &= \mp F'(t) \overset{(F2)}{=} \mp(-\varkappa T + \tau B)(t) \\ &= \pm(\varkappa T - \tau B)(t). \end{aligned}$$
$\square$

<u>**12.7. Lemma.**</u> Egy r-sugarú gömbfelület reguláris gömbfelület reguláris felületi görbéinek görbület-függvényére $\varkappa(t) \geq \frac{1}{r}$ teljesül minden t paraméter esetén, következésképpen a reguláris gömbi görbék automatikusan biregulárisak.

<u>Bizonyítás.</u> Az általánosság sérelme nélkül tekinthetjük az origó középpontú

$$S^2(r) := \{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1 \}$$

gömbfelületet, ahol r pozitív valós szám. Azt is föltehetjük, hogy a vizsgált $c : I \to S^2(r)$ görbe egységpályasebességű; ekkor $T = c'$. $\operatorname{Im}(c) \subset S^2(r)$ miatt a

$$\langle c, c \rangle : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \langle c, c\rangle(t) := \langle c(t), c(t) \rangle$$

függvény konstans: $\langle c(t), c(t) \rangle = r^2$ minden $t \in I$ esetén. Így

$$0 = \langle c, c \rangle' = 2 \langle c', c \rangle = 2 \langle T, c \rangle,$$

következésképpen

$$0 = \langle c, T \rangle' = \langle c', T \rangle + \langle c, T' \rangle \overset{(F1)}{=} \langle T, T \rangle + \varkappa \langle c, F \rangle$$
$$= \varkappa \langle c, F \rangle + 1,$$

ahonnan $-1 = \varkappa \langle c, F \rangle$. Ebből a pontonként érvényes Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\forall t \in I: \quad 1 = |-1| = |\varkappa(t) \langle c(t), F(t) \rangle| = \varkappa(t) |\langle c(t), F(t) \rangle|$$
$$\leq \varkappa(t) \|c(t)\| \|F(t)\| \leq \varkappa(t) r,$$

tehát

$$\forall t \in I: \quad \varkappa(t) \geq \frac{1}{r}.$$ □

<u>12. 8. Lemma</u> („<u>a gömb gömbölyű</u>"). Egy gömbfelület minden pontja valódi umbilikus pont: az $S^2(r)$ szféra esetén a formaoperátor minden pontban $\frac{1}{r}$-rel vagy $-\frac{1}{r}$-rel való szorzásként hat, a Gauss-leképezés választásától függően.

<u>Bizonyítás</u>. Tekintsük az $S^2(r)$ szféra

$$\begin{cases} f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \qquad (s, t) \longmapsto f(s,t) := r\,(\cos s \cos t,\ \cos s \sin t,\ \sin s) \end{cases}$$

geografikus paraméterezését (<u>7.4.</u>/(2)). Ekkor tetszőleges $(s,t) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$ esetén

$D_1 f(s,t) = r\,(-\sin s \cos t,\ -\sin s \sin t,\ \cos s)$,
$D_2 f(s,t) = r\,(-\cos s \sin t,\ \cos s \cos t,\ 0)$,

és – mint láttuk –

$$N(s,t) = -(\cos s \cos t,\ \cos s \sin t,\ \sin s) = -\frac{1}{r} f(s,t) . \quad (12.5)$$

Így

$$(g_{ij}(s,t)) = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 s \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}(s,t)) = \frac{1}{r^2\cos^2 s} \begin{pmatrix} \cos^2 s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f 2. parciális deriváltjai (s,t)-ben

$$D_1D_1 f(s,t) = r(-\cos s \cos t, -\cos s \sin t, -\sin s)$$

$$D_1D_2 f(s,t) = r(\sin s \sin t, -\sin s \cos t, 0),\quad D_2D_2 f(s,t) = r(-\cos s \cos t, -\cos s \sin t, 0);$$

s ezért a 2. alapmennyiségek mátrixa

$$(b_{ij}(s,t)) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 s \end{pmatrix}.$$

Következésképpen a $W_{(s,t)}$ Weingarten-operátor mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan

$$[W_{(s,t)}]_{(e_1,e_2)} = (g^{ij}(s,t))(b_{ij}(s,t)) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

amiből adódik az állítás. □

<u>12.9. Tétel.</u> Az $S^2(r)$ gömbfelület geodetikusai a konstans pályasebességű paraméterezett főkörök és csakis ezek.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Megmutatjuk, hogy <u>a konstans pályasebességű paraméterezett főkörök geodetikusok.</u>

$S^2(r)$ főkörei $k = S^2(r) \cap \sigma$ alakban állíthatók elő, ahol σ a szféra középpontján – esetünkben az origón – áthaladó sík. Legyen n normálegységvektora σ-nak, és válasszunk olyan $P, Q \in k$ pontokat, amelyekkel (P, Q, n) ortogonális bázisa $\mathbb{R}^3$-nak. Ekkor a

$$c : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad t \longmapsto c(t) := (\cos t)P + (\sin t)Q$$

leképezés paraméterezése k-nak, ugyanis tetszőleges $t \in [0, 2\pi[$ esetén egyrészt

$$\|c(t)\|^2 = \langle (\cos t)P + (\sin t)Q,\ (\cos t)P + (\sin t)Q \rangle = r^2,$$

és így $c(t) \in S^2(r)$; másrészt

$$\langle c(t), n\rangle = \langle (\cos t)P + (\sin t)Q, n\rangle = 0,$$

tehát $c(t) \in \sigma$ is teljesül. c konstans, mégpedig r pályasebességű, mivel

$$\forall t \in [0, 2\pi[: \quad \|c'(t)\| = \|(-\sin t)P + (\cos t)Q\| = r.$$

A gyorsulás:

$$\forall t \in I: \quad c''(t) = -(\cos t)P - (\sin t)Q = -c(t). \tag{12.6}$$

Legyen f $S^2(r)$ geografikus paraméterezése. Ennek segítségével c megadható

$$c = f \circ \gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

alakban. Ekkor

$$N \circ \gamma \overset{(12.5)}{=} -\frac{1}{r} f \circ \gamma = -\frac{1}{r} c \overset{(12.6)}{=} \frac{1}{r} c'',$$

következésképpen

$$c'' \parallel N \circ \gamma \quad (\text{pontonként});$$

amivel beláttuk, hogy c geodetikus.

(2) Jelentse f továbbra is $S^2(r)$ geografikus paraméterezését, és tegyük fel, hogy

$$c = f \circ \gamma : I \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

egységpályasebességű geodetikusa $S^2(r)$-nek. $\operatorname{Im}(c) \subset S^2(r)$ folytán a 12.7. lemma értelmében c biregulááris, így alkalmazható rá a 12.6. lemma. Ez azt adja, hogy

$$\forall t \in I: \quad \underline{t}\,(\varkappa T - \tau B)(t) = f'(\gamma(t))(W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)))$$

$$\overset{12.8.\text{lemma}}{=} f'(\gamma(t))\left(\frac{1}{r}\gamma'(t)\right) = \frac{1}{r} f'(\gamma(t))(\gamma'(t))$$

$$= \frac{1}{r}(f \circ \gamma)'(t) = \frac{1}{r} c'(t) = \frac{1}{r} T(t),$$

amiből $\varkappa(t) = \frac{1}{r}$, $\tau(t) = 0$ $(t \in I)$ következik. Így a 4.1. és 4.2. tétel alapján $\operatorname{Im}(c) \subset S^2(r)$ r-sugarú körvonal, s ennélfogva főköre $S^2(r)$-nek. □

<u>12. 10. Tétel.</u> Egy egyenes körhenger geodetikusai a konstans pályasebességű paraméterezett alkotóegyenesek, keresztmetszetkörök és csavarvonalak – s csakis ezek.

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsük az

$$f : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (s,t) \longmapsto f(s,t) := (r\cos s, r\sin s, t)$$

reguláris paraméterezett körhengert, ahol $r \in \mathbb{R}^*_+$. Keressük a geodetikusait a

$$c(t) = f(\gamma(t)) = f(\vartheta(t), h(t)) = (r\cos\vartheta(t), r\sin\vartheta(t), h(t))$$

alakban, ahol

$$\gamma = (\vartheta, h) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto \gamma(t) = (\vartheta(t), h(t))$$

az ismeretlen függvény. A definíció értelmében c pontosan akkor geodetikus, ha

(i) konstans pályasebességű;

(ii) $\forall t \in \mathbb{R} : \ c''(t) \parallel N(\gamma(t))$.

Rutin számolással kapjuk, hogy

$$\forall (s,t) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : \ N(s,t) = (\cos s, \sin s, 0).$$

Mivel c 3. komponensfüggvénye a h függvény, az (ii) feltétel azt adja, hogy $h'' = 0$, amiből

$$h(t) = \lambda t + \mu \ ; \quad t \in \mathbb{R}$$

következik, ahol λ, μ valós paraméterek. A c görbe pályasebességének négyzete

$$\|c'\|^2 = \|(-r\vartheta'(\sin\circ\vartheta), r\vartheta'(\cos\circ\vartheta), h'\|$$
$$= r^2(\vartheta')^2 + \lambda^2,$$

így (ii) akkor és csak akkor teljesül, ha a ϑ' függvény konstans, azaz ha

$$\vartheta(t) = \alpha t + \beta \ ; \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol α, β valós paraméterek. Tehát f geodetikusai a

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto c(t) := (r\cos(\alpha t + \beta), r\sin(\alpha t + \beta), \lambda t + \mu) \in \mathbb{R}^3$$

alakú reguláris felületi görbék. Itt a regularitás azt adja, hogy $(\alpha)^2 + (\lambda)^2 \neq 0$, az α és λ egyidejűleg nem lehet zérus. Így a következő három típushoz jutunk:

(1) $\alpha = 0,\ \lambda \neq 0$ – ekkor a paraméterezett alkotóegyenes;

(2) $\alpha \neq 0,\ \lambda = 0$ – ebben az esetben a paraméterezett keresztmetszetkör;

(3) $\alpha \neq 0,\ \lambda \neq 0$ – a hengeres csavarvonal. □

KIEGÉSZÍTŐ ANYAG

Algebra - geometria

Az alábbiak a Bevezetésben mondottak (ld. B1 - B6) folytatását jelentik.

AG 1 Jelölések

(1) $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ - az $m\times n$-es valós mátrixok vektortere

$M_n(\mathbb{R}) := M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $1_n \in M_n(\mathbb{R})$ az $n\times n$-es egységmátrix

(2) $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists A^{-1} \in M_n(\mathbb{R}) : A^{-1}A = AA^{-1} = 1_n\}$

$GL_n(\mathbb{R})$ csoport a mátrixszorzás műveletével, neve: általános lineáris csoport (general linear group).

Megmutatható: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$.

AG 2 Az ortogonális csoport

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\}$$

(itt - mint fentebb - A^{-1} az A mátrix inverze; ${}^tA$ az A mátrix transzponáltját jelenti). $O_n(\mathbb{R})$ csoport a mátrixszorzás művelettel (mégpedig részcsoportja $GL_n(\mathbb{R})$-nek), neve: ortogonális csoport. Az $O_n(\mathbb{R})$ ortogonális csoport elemeit ortogonális mátrixoknak hívjuk.

1. Tétel. Egy $A \in M_n(\mathbb{R})$ mátrixra a következők ekvivalensek:

(1) $A \in O_n(\mathbb{R})$, azaz A ortogonális mátrix.

(2) $\forall v \in \mathbb{R}^n : \|Av\| = \|v\|$.

(3) „A" oszlopvektorai ortonormált bázisát alkotják $\mathbb{R}^n$-nek.

(4) „A" sorvektorai ortonormált bázisát alkotják $\mathbb{R}^n$-nek. Δ

AG 3 Az $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések leírása

Általánosítjuk a B3-ban mondottakat.

(1) Ha $A = (\alpha^i_j) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, akkor az

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto L_A(v) := Av$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \dots & \alpha^1_n \\ \vdots & & \\ \alpha^m_1 & \dots & \alpha^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n \alpha^i_j v^j \right)$$

leképezés lineáris; ezt az A mátrixhoz csatolt lineáris leképezésnek nevezzük.

(2) 2. Tétel. Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, akkor létezik egy és csak egy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mátrix oly módon, hogy $\varphi = L_A$.

A létezés bizonyítása: Legyen $(e_1, \dots, e_n)$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér, $(E_1, \dots, E_m)$ az $\mathbb{R}^m$ vektortér kanonikus bázisa. Ha $v = (v^1, \dots, v^n) = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) \overset{\text{linearitás}}{=} \sum_{i=1}^n v^i \varphi(e_i).$$

Az itt szereplő $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in \mathbb{R}^m$ vektorok egyértelműen előállíthatók az $(E_1, \dots, E_m)$ bázis lineáris kombinációjaként:

$$\varphi(e_1) = \alpha^1_1 E_1 + \alpha^2_1 E_2 + \dots + \alpha^m_1 E_m = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 \\ \alpha^2_1 \\ \vdots \\ \alpha^m_1 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\varphi(e_n) = \alpha^1_n E_1 + \alpha^2_n E_2 + \dots + \alpha^m_n E_m = \begin{pmatrix} \alpha^1_n \\ \alpha^2_n \\ \vdots \\ \alpha^m_n \end{pmatrix}.$$

Röviden:

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_j E_i \quad , \quad j \in \{1, \dots, n\}. \qquad (*)$$

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \dots & \alpha^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha^m_1 & \alpha^m_2 & \dots & \alpha^m_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} v^j \varphi(e_j) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} v^j \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_j E_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j v^j \Big) E_i = A v = L_A(v),$$

tehát $\varphi = L_A$.

<u>AG 4</u> Ha $b \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektor, a

$$T_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto T_b(v) := v + b$$

transzformációt a „b" vektorral való <u>transzlációnak</u> hívjuk. (Vigyázat: a transzlációk nem lineárisak!) $\mathbb{R}^n$ egy transzformációját <u>affin transzformációnak</u> nevezzük, ha <u>előállítható egy invertálható lineáris transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként</u>, tehát ha

$$\varphi = T_b \circ L_A \quad ; \quad b \in \mathbb{R}^n, \ A \in GL(\mathbb{R}^n)$$

alakú, és így

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi(v) = Av + b.$$

Azt mondjuk ekkor, hogy L_A az affin transzformáció <u>lineáris része</u>, T_b pedig a <u>transzláció-része</u>. $\mathbb{R}^n$ összes affin transzformációi csoportot alkotnak a kompozíció műveletével, erre az $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ jelölést használjuk.

Egy $\varphi = T_b \circ L_A$ affin transzformáció <u>irányítás-tartó</u>, ha $\det(A) > 0$; <u>irányításváltó</u>, ha $\det(A) < 0$.

AG 5 Az $\mathbb{R}^n$ tér izometriacsoportja

Definíció. (1) Egy $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ transzformáció *izometria*, ha megőrzi a kanonikus skaláris szorzatból származó euklideszi távolságot, azaz

$$\forall p,q\in\mathbb{R}^n:\quad \|f(p)-f(q)\| = \|p-q\|.$$

(2) Ha $A\in O_n(\mathbb{R})$, akkor az A-hoz csatolt lineáris lineáris transzformációt *ortogonális transzformációnak* mondjuk.

3. Tétel. (1) Az $\mathbb{R}^n$ tér transzlációi, ortogonális transzformációi és ezek kompozíciói izometriák.

(2) Megfordítva, $\mathbb{R}^n$ minden izometriája egyértelműen előállítható

$$T_b\circ L_A;\quad b\in\mathbb{R}^n,\ A\in O_n(\mathbb{R})$$

alakban; *$\mathbb{R}^n$ izometriái tehát pontosan azok az affin transzformációk, melyeknek lineáris része ortogonális transzformáció.* △

Következmény-definíció. Az $\mathbb{R}^n$ tér összes izometriái csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot $\mathbb{R}^n$ *izometriacsoportjának* nevezzük és $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük. Az $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ csoport elemeit $\mathbb{R}^n$ *egybevágóságaiként* vagy *egybevágósági transzformációiként* is említjük. Két – nem feltétlenül különböző – $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazt *egybevágónak* vagy *kongruensnek* mondunk, ha van olyan izometriája $\mathbb{R}^n$-nek, amely az egyiküket a másikba viszi át. Az egybevágóság ekvivalenciareláció $\mathbb{R}^n$ részhalmazainak halmazában. ⚠

Definíció. $\mathbb{R}^n$ egy izometriáját irányítástartónak, ill. irányításváltónak mondjuk, ha mint affin transzformáció irányítástartó, ill. irányításváltó.

Megjegyzés. Ha $A \in O_n(\mathbb{R})$, akkor ${}^tAA = 1_n$ miatt

$$1 = \det(1_n) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = (\det(A))^2,$$

így $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Így

$$f = T_b \circ L_A \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) \begin{cases} \text{irányítástartó, ha } \det(A) = 1; \\ \text{irányításváltó, ha } \det(A) = -1. \end{cases}$$

ELV (Felix KLEIN: Erlangeni program, 1872):

> Azok a fogalmak és tulajdonságok tartoznak az $\mathbb{R}^n$ tér euklideszi geometriájához, amelyek megőrződnek izometria alkalmazása esetén, más szóval, amelyek izometriával szemben invariánsak.

Ilyen fogalmak: távolság, szögmérték, térfogatmérték, gömb, kocka, ...

Ugyanilyen értelemben szólunk az $\mathbb{R}^n$ tér affin geometriájáról: ez az $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ csoport invariánsainak elmélete. Az $\mathbb{R}^n$ tér affin geometriájához tartozó fogalom például a párhuzamosság és az osztóviszony.

AG 6 Leggyen V véges dimenziójú valós vektortér. Egy $\varphi : V \to V$ lineáris transzformáció determinánsán tetszőleges mátrix-reprezentánsa determinánsát értjük, s rá a $\det(\varphi)$ jelölést használjuk. φ nyoma (trace) tetszőleges mátrixreprezentánsa főátlóbeli elemeinek összege, ezt $tr(\varphi)$-vel jelöljük. Mindkét adat jól definiált: független a mátrixreprezentáns választásától. (Bizonyítás: internetes anyag, 0.17.)

AG 7 Legyen V továbbra is véges dimenziójú valós vektortér, φ pedig lineáris transzformációja V-nek. φ sajátvektorán olyan nemzérus $v \in V$ vektort értünk, amelyhez van olyan λ valós szám, hogy $\varphi(v) = \lambda v$. Ekkor azt mondjuk, hogy λ a v sajátvektorhoz tartozó sajátértéke φ-nek.

Lemma. Megtartva a bevezetett jelöléseket, egy λ valós szám akkor és csak akkor sajátértéke a $\varphi : V \to V$ lineáris transzformációnak, ha zérushelye a transzformáció

$$P_\varphi(t) := \det(\varphi - t\,1_V)$$

karakterisztikus polinomjának (1_V a V vektortér identikus transzformációja). Ha $\dim V = 2$, akkor

$$P_\varphi(t) = t^2 - (tr(\varphi))t + \det(\varphi). \qquad \Delta$$

AG 8 Legyen V euklideszi vektortér, azaz pozitív definit skaláris szorzattal ellátott véges dimenziójú (de legalább 1-dimenziós) valós vektortér, jelölje ezt a skaláris szorzatot a következőkben $\langle , \rangle$, az ebből származó normát $\| \ \|$ jelöli (tehát tetszőleges $v \in V$ esetén $\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2}$). A V euklideszi vektortér egységszférája az 1-normájú vektorok $S := \{ v \in V \mid \|v\| = 1 \}$ halmaza. V-nek egy $(b_i)_{i=1}^{n}$ bázisa ortonormált, ha páronként ortogonális 1-normájú vektorok alkotják, azaz

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \qquad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

AG 9 **A Riesz-lemma** (Riesz Frigyes, 1880–1956)

Ha $(V, \langle , \rangle)$ euklideszi vektortér és $f : V \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, akkor létezik egy és csak egy olyan $a \in V$ vektor, hogy

$$\forall v \in V : \quad f(v) = \langle a, v \rangle.$$

Ezt a lemmát alkalmazzuk a gradiens értelmezésekor (AG 6) és a Weingarten-operátor bevezetése során (9.2. lemma-definíció).

AG 10 Egy $(V, \langle , \rangle)$ euklideszi vektortér egy φ lineáris transzformációját önadjungáltnak mondjuk, ha bármely $u, v \in V$ esetén $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$. Megmutatható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha φ-t ortonormált bázisra vonatkozóan szimmetrikus mátrix reprezentálja.

4. Tétel. Legyen $(V, \langle , \rangle)$ euklideszi vektortér, φ pedig önadjungált lineáris transzformációja V-nek.

(1) Az $f : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto f(v) := \dfrac{\langle \varphi(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$ függvény V egységgömbjén fölveszi a szélsőértékeit. A szélsőértékhelyek φ-nek sajátvektorai, így a szélsőértékek a sajátértékek.

(2) Létezik V-nek olyan ortonormált bázisa, amelyet φ sajátvektorai alkotnak. Δ

FELADATOK

Ismétlő feladatok

1. A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi u és v vektorok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak-e be:

(a) $u = (-3, 2, 0)$, $v = (4, 1, 5)$; (b) $u = (1, 1, 9)$, $v = (2, 1, 3)$;

(c) $u = (1, 1, 1)$, $v = (-10, 7, 3)$; (d) $u = (5, -3, 4)$, $v = (1, -1, 2)$.

2. Az $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ pontok egy 2 oldalhosszúságú szabályos háromszög csúcspontjai. Számítsa ki az $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ skaláris szorzatot ($\overrightarrow{AB} := B - A$, $\overrightarrow{AC} := C - A$)!

3. Adottak az $\mathbb{R}^3$ tér $A = (2, -1, 1)$, $B = (16, 1, 3)$, $C = (6, -1, -2)$ pontjai. Számítsa ki az ABC háromszög $\overline{AC}$ oldalához tartozó magasság talppontjának koordinátáit és a magasság-szakasz hosszát!

4. Döntse el, hogy kollineárisak-e az $A = (-2, 5, 3)$, $B = (1, 2, 4)$, $C = (3, -7, 7)$ pontok!

5. Írja fel annak az egyenesnek egy paraméteres előállítását, amely illeszkedik a $P = (-1, 2, 0)$ pontra és merőleges az

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + t \\ z = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 8 + t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$$

paraméteres előállítású egyenesekre!

6. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P=(0,5,2)$ pontra és merőlegesen metszi a

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(t) := (1-3t, -2+t, 2t)$$

paraméterezésű egyenest!

7. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P=(3,1,1)$ pontra, az $x-2y+3z-4=0$ egyenletű síkra és merőleges a

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(t) := (3+2t, 1+t, -1)$$

paraméterezésű egyenesre!

8. Döntse el az alábbi l és m egyenesek kölcsönös helyzetét! Ha metszők, számítsa ki a metszéspontjuk koordinátáit és írja fel a síkjuk egyenletét!

(a) $l:\ \dfrac{x+3}{2} = -y = \dfrac{5-z}{2}$, $m:\ x+1 = \dfrac{2-y}{3} = -\dfrac{z+1}{2}$

(b) $l:\ x-1 = -y+1 = \dfrac{z-5}{2}$, $m:\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = -z+3$

9. Írja fel az $A=(1,1,0)$, $B=(4,-1,0)$, $C=(1,1,1)$ pontokra illeszkedő sík egy paraméteres előállítását és a sík egyenletét!

10. Írja fel a $P=(-1,2,3)$ pontra illeszkedő és az $x+2y-3z+1=0$, $x+3y-z+6=0$ egyenletű síkokra merőleges sík egyenletét!

11. Írja fel az $A=(1,-3,4)$ és $B=(1,2,3)$ pontokra illeszkedő, a $2x-y+3z-1=0$ egyenletű síkra merőleges sík egyenletét!

Parametrizált görbék, átparaméterezés

12. Ciklois Azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^2$-ben egy egyenest érintő kör gördül az egyenesen, ha úgy mozog el annak egy O pontjából egy A pontjába, hogy eközben az O pont abba a P pontba jut, amelyre

$$d(O,A) = \widehat{AP} \text{ körív hossza}$$

teljesül. Tegyük fel, hogy az egyenes a $\mathrm{span}(e_1)$ x-tengely és hogy a kör egyenlete a kiinduló helyzetben

$$(x)^2 + (y-a)^2 = a^2, \qquad a \in \mathbb{R}^*_+ ;$$

ekkor $O = (0,0)$.

(1) Mutassuk meg, hogy az O pont mozgását a

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto c(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

parametrizált görbe írja le. – Ezt a görbét (vagy a képét) nevezzük cikloisnak.

(2) Határozzuk meg azokat a $t \in \mathbb{R}$ paramétereket, amelyekben c nem reguláris!

(3) Számítsuk ki egy „teljes ciklois-ív" hosszát, azaz c ívhosszát $[0, 2\pi]$ fölött!

13. Tekintsük a

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto c(t) := (r\cos t, r\sin t)$$

($r \in \mathbb{R}^*_+$ rögzített) parametrizált körvonalat. Számítsuk ki c 0-alappontú ívhosszfüggvényét, és adjuk meg c egységpályasebességű átparaméterezettjét!

14. <u>Traktrix</u> Ellenőrizzük, hogy a

$$c :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto c(t) := \left(\sin t, \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$$

leképezés reguláris paraméterezett görbe! Ez a görbét <u>traktrixnak</u> nevezzük. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $P \in \operatorname{Im}(c)$ pont esetén a görbe P-re illeszkedő érintőegyenese olyan Q pontban metszi a $\operatorname{span}(e_2)$ y-tengelyt, amelyre $d(P, Q) = 1$ teljesül!

15. Tekintsük a

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto c(t) = \left(e^{kt} \cos t, \; e^{kt} \sin t\right)$$

<u>logaritmikus spirálist</u>, ahol $k \in \mathbb{R}^*$ rögzített. Határozzuk meg c 0-alappontú ívhossz-függvényét, számítsuk ki ennek inverzét, és adjuk meg c egységpályasebességű átparaméterezettjét!

16. Számítsuk ki a

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; t \longmapsto c(t) := (t, t^2, t^3)$$

paraméterezett görbe, az ún. <u>csavart harmadfokú görbe</u> (twisted cubic) 0-alappontú ívhossz-függvényét!

17.* Legyenek P és Q $\mathbb{R}^n$ különböző pontjai, és legyen $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ olyan görbe, amelyre $c(a) = P$, $c(b) = Q$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $d(P, Q) \leq \int_a^b \|c'\|$! („Két adott pontot összekötő görbék közül az egyenes szakasz a legrövidebb.")

Sebesség, gyorsulás, görbület

18. Határozzuk meg a $c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \longmapsto c(t)$ paraméterezett görbe tetszőleges t paraméterű pontjában a sebességvektort, a gyorsulásvektort, a pályamenti sebességet és a pályamenti gyorsulást, ha

(1) $c(t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$ rögzített ;

(2) $c(t) := (\alpha \operatorname{ch} t, \alpha \operatorname{sh} t, \alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ rögzített ;

(3) $c(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$;

(4) $c(t) := \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3, \frac{1}{2}t^4\right)$;

(5) $c(t) := (t, \sqrt{3}\, t^2, 2t^3)$.

19. Bizonyítsuk be, hogy a

$$c: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto c(t) := (\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t)$$

hengeres csavarvonalra (ahol $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ rögzített) teljesülnek a következők:

(1) $c''(t)$ pozitív skalárszorosa az $F(t)$ főnormálisnak minden $t \in \mathbb{R}$-re ;

(2) bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén $F(t)$ merőleges az $\operatorname{Im}(c)$-t tartalmazó henger tengelyére.

20. Adjuk meg az

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszerű $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmaz egy paraméterezését, és számítsuk ki a görbületét a $P = (1, 1, -1) \in \Gamma$ pontban!

21. Tekintsünk egy

$$c: [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto (\alpha \cos t, \beta \sin t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+)$$

paraméterezett ellipszist. Írjuk fel az ellipszis kanonikus egyenletét, ha

(1) nagytengelyének végpontjaiban a görbület $\varkappa(0) = \varkappa(\pi) = \frac{2}{9}$; kistengelyének végpontjaiban a görbület $\varkappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varkappa\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{32}$;

(2) nagytengelyének végpontjaiban a görbület $\varkappa(0) = \varkappa(\pi) = \frac{5}{16}$ és a $P = \left(4, \frac{12}{5}\right)$ pont illeszkedik az ellipszisre.

22. Határozzuk meg az $\frac{(x)^2}{9} + \frac{(y)^2}{3} = 1$ kanonikus egyenletű ellipszis mindazon pontjait, amelyekben a görbület értéke $\frac{1}{\sqrt{8}}$!

23. Határozzuk meg a

$$c : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto c(t) := (\alpha \cos t, \beta \sin t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+)$$

paraméterezett ellipszis görbületfüggvényének szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

24. Adjuk meg az $\frac{(x)^2}{(\alpha)^2} - \frac{(y)^2}{(\beta)^2} = 1 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+)$ egyenletű hiperbola egy paraméterezését és számítsuk ki a görbületét a tengelypontokban! (Javaslat: alkalmazzuk a $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \mathrm{sh}(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ és a $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \mathrm{ch}(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ hiperbolikus függvényeket; ekkor $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.)

25. Adjuk meg az $y = \ln x$ egyenletű görbe egy paraméterezését! Határozzuk meg a görbületfüggvényt! Mely pontokban van a görbületnek maximuma?

Érintősík

Elméleti háttér. Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, s tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felületet. (1) Tetszőleges $q \in U$ esetén
$$T_q f := f(q) + \operatorname{span}(D_1 f(q), D_2 f(q))$$
kétdimenziós lineáris sokasága $\mathbb{R}^3$-nak, amelyet f q-beli érintősíkjának nevezzük. $T_q f$-nek egy normálvektora $D_1 f(q) \times D_2 f(q)$, normálegységvektora
$$N(q) := \frac{1}{\| D_1 f(q) \times D_2 f(q) \|} D_1 f(q) \times D_2 f(q).$$
$(D_1 f(q), D_2 f(q), N(q))$ bázisa $\mathbb{R}^3$-nak, ez a q-beli Gauss-háromél.

(2) Rögzítve egy $q \in U$ pontot és véve $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisát, képezzük a
$$\gamma_{(1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma_{(1)}(t) := q + t e_1$$
és
$$\gamma_{(2)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma_{(2)}(t) := q + t e_2$$
parametrizált egyeneseket. Ekkor
$$c_{(1)} := f \circ \gamma_{(1)} \quad \text{és} \quad c_{(2)} := f \circ \gamma_{(2)}$$
felületi görbék ($\operatorname{Im}(c_{(i)}) \subset \operatorname{Im}(f)$; $i \in \{1, 2\}$), amelyeket f q-beli első, ill. második paramétervonalának nevezzük. Ekkor
$$c'_{(1)}(0) = D_1 f(q), \quad c'_{(2)}(0) = D_2 f(q),$$
ezért a $D_1 f(q)$, $D_2 f(q)$ parciális deriváltakat paramétervonal-érintőknek is mondjuk.

$\sim \circ \sim$

26. Írjuk fel az az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület q-beli érintősíkjának egyenletét, ha

(1) $f(s,t) := (s^3 - 2t^2,\ st^2,\ s^2 t - s)$, $q = (1, -2)$;

(2) $f(s,t) := (\cos s - t \sin s,\ \sin s - t \cos s,\ s + t)$, $q = (0, 1)$.

27. Ellenőrizzük, hogy a $p=(1,3,4)$ pont rajta van az
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto (s,\ s^2-2t,\ s^3-3st)$$
parametrizált felületen, és írjuk fel a p-beli érintősík egyenletét!

28. Írjuk fel az
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto (s,\ (1+s)\cos t,\ (1+s)\sin t)$$
parametrizált felület $q=(1,\pi/3)$ pontbeli paramétervonalainak paraméteres előállításait, és számítsuk ki ezek q-beli hajlásszögét!

29. Határozzuk meg az
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto f(s,t) := (s,\ \cos s \sin t,\ \cos s \cos t)$$
parametrizált felület $q=\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontjában a paramétervonal-érintők szögét!

30. Ellenőrizzük, hogy a $p=(3,5,7)$ pont rajta van az
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto f(s,t) := (2s-t,\ s^2+t^2,\ s^3-t^2)$$
parametrizált felületen, és határozzuk meg a p-n átmenő paramétervonalak p-beli érintőegyeneseinek egyenletrendszerét!

31. Legyen $c: I \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált görbe. Ekkor
$$f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (s,t) \mapsto f(s,t) := c(s) + t c'(s)$$
parametrizált felület, amelyet c <u>érintőfelületének</u> hívunk. Mutassuk meg, hogy ha c bireguláris, akkor f az $I \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ nyílt halmaz fölött reguláris parametrizált felület.

Felületek paraméteres előállítása és implicit megadása

32. Írjuk fel az

$$x^2+y^2-6x+5=0, \quad z=0$$

egyenletű kör y-tengely körüli megforgatásával keletkező tórusz egy paraméteres előállítását és az $F(x,y,z)=0$ alakú implicit egyenletét!

33. Egy kúp csúcspontja a $p=(0,0,1)$ pont, vezérvonalának egyenlete $x^2+y^2=4$, $z=0$. Írjuk fel a kúp egy paraméteres előállítását és az $F(x,y,z)=0$ alakú implicit egyenletét!

34. Egy henger vezérvonalának egyenlete

$x^2+y^2=2y$, $z=0$; alkotóegyeneseinek közös irányvektora $v=(2,1,2)$. Írjuk fel a henger egy paraméteres előállítását és az $F(x,y,z)=0$ alakú implicit egyenletét!

35. Határozzuk meg a c görbe érintő lefejtőjének egy paraméteres előállítását, ha

(a) $c(s) := (\cos^2 s, \sin s \cos s, \sin s)$, $s \in]0,2\pi[$;

(b) $c(s) := (s^2, s^3, s^4)$!

36. Írjuk fel a kúp $F(x,y,z)=0$ alakú implicit egyenletét, ha

(a) a kúp csúcspontja $p=(2,5,-3)$, vezérvonalának egyenlete $x^2+y^2-4y=0$, $z=0$;

(b) a kúp csúcspontja $p=(2,-3,5)$, vezérvonalának egyenlete $y^2=6x$, $z=0$!

Felületi görbék ívhossza. Felszín

Elméleti háttér (Homepage, 5.12 – 5.14)

! **Definíció.** Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris felület, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ pedig Jordan-mérhető részhalmaz. Ekkor f $\mathcal{V}$ fölötti felszínén az

$$A(f) = \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(g_{ij})} \overset{(8.2)}{=} \int_{\mathcal{V}} \| D_1 f \times D_2 f \|$$

integrált értjük (ahol a $g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle$ függvények f 1. alapmennyiségei).

Állítás. Ekvivalens reguláris paraméterezett felületek felszíne (ha létezik) egyenlő.

Bizonyítás. Legyen $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ reguláris paraméterezett felület, s tekintsük ennek egy

$$\tilde{f} := f \circ \varphi : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$$

átparaméterezését ($\varphi: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ diffeomorfizmus). Tegyük fel, hogy $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ Jordan-mérhető; ekkor $\tilde{\mathcal{V}} := \varphi^{-1}(\mathcal{V})$ is az.

$$A(\tilde{f}) := \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} \overset{(8.2)}{=} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \| D_1 \tilde{f} \times D_2 \tilde{f} \|$$

$$\overset{6.5.\ \text{Állítás},\ (2)}{=} \int_{\tilde{\mathcal{V}}} \| D_1 f \times D_2 f \| \circ \varphi \, |\det J_\varphi|$$

$$\overset{\text{integráltranszformáció tétele}}{=} \int_{\mathcal{V}} \| D_1 f \times D_2 f \| = A(f). \qquad \square$$

37. Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmaz, $h \in C^\infty(\mathcal{U})$, s tekintsük az $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto f(s,t) := (s, t, h(s,t))$ Monge-beágyazást. Mutassuk meg, hogy

$$A(f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + (D_1 h)^2 + (D_2 h)^2}.$$

38. Tekintsük az $S^2(r)$ szféra
$f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, 2\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,t) \longmapsto r(\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)$
geografikus paraméterezését és számítsuk ki az $A(f)$ felszínt!

39. Legyen $U := \left]0, 2\pi\right[\times \left]0, 2\pi\right[$; $r, R \in \mathbb{R}^*_+$; $r < R$.
Tekintsük az
$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,t) \longmapsto \big((R + r\cos s)\cos t, (R + r\cos s)\sin t, r\sin s\big)$
parametrizált forgási tóruszt és számítsuk ki az $A(f)$ felszínt!

40. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitív értékeket felvevő sima függvény. Tekintsük a $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \gamma(s) := (s, \varphi(s), 0)$ profilgörbéjű
$f: I \times \left]0, 2\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,t) \longmapsto (s, \varphi(s)\cos t, \varphi(s)\sin t)$
parametrizált forgásfelületet. Számítsuk ki az $A(f)$ felszínt!

! **41.** Legyen $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, $c := f \circ \gamma = f \circ (\gamma^1, \gamma^2): [\alpha, \beta] \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^3$ felületi görbéje f-nek. Mutassuk meg, hogy c ívhossza kiszámítható az

$$L(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (g_{ij} \circ \gamma)(\gamma^i)'(\gamma^j)'} \qquad (*)$$

formula alapján!

42. Adott az
$f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, 2\pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,t) \longmapsto r(\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)$
($r \in \mathbb{R}^*_+$) parametrizált felület (ld. 38.) és a
$\gamma: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto \gamma(t) := \left(t, \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ görbe.
Számítsuk ki a $c := f \circ \gamma$ felületi görbe ívhosszát kétféleképpen: a görbeelméletben tanult módon és $(*)$ alkalmazásával.

Parametrizált felületek görbületi adatai

43. Legyen adva egy
$$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad s \longmapsto \gamma(s) = (\gamma^1(s), \gamma^2(s))$$
egységpályasebességű parametrizált síkgörbe, s tekintsük az
$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := (\gamma^1(s), \gamma^2(s), t)$$
parametrizált hengert. Számítsuk ki tetszőleges $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$ pontban a főirányokat, a főgörbületeket valamint a Gauss- és a Minkowski-görbületet!

44. Tekintsük a $z = xy$ egyenletű ún. nyeregfelületet. Adjuk az Euler-Monge paraméterezését; mutassuk meg, hogy a Gauss-görbülete mindenütt negatív, és számítsuk ki a Minkowski-görbületét is!

45. Határozzuk meg, hogy hol helyezkednek el az
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto f(s,t) := ((R + r\cos s)\cos t, (R + r\cos s)\sin t, r \sin s)$$
parametrizált forgástórusz elliptikus, parabolikus ill. hiperbolikus pontjai!

46. Számítsuk ki az
$$f : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \longmapsto (s\cos t, s\sin t, s^2)$$
parametrizált felület $q = (\sqrt{2}, t_0)$ pontjában (ahol $t_0 \in]0, 2\pi[$ tetszőlegesen rögzített) a $v = (1,1)$ irányú normálgörbületet!

47. Az $y = 5x^2$, $z = 0$ egyenletű parabolát megforgatjuk az x-tengely körül. Írjuk fel a kapott forgásfelület egy paraméteres előállítását és számítsuk ki a $p = (-1, 4, 3)$ pontjában a Gauss- és a Minkowski-görbületet!

KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Adott az

$$f : \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 , \quad (s,t) \longmapsto (s\cos t, s\sin t, t)$$

parametrizált felület és a $q = (1, \frac{\pi}{4})$ pont. Meghatározzuk f q-beli görbületi adatait.

$$D_1 f(s,t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad D_1 f(q) = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}, 0\right)$$

$$D_2 f(s,t) = (-s\sin t, s\cos t, 1), \qquad D_2 f(q) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}, 1\right)$$

$$D_1 f \times D_2 f(q) = \left(\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}, 1\right) \parallel (1, -1, \sqrt2)$$

$$N(q) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$D_1 D_1 f(s,t) = (0, 0, 0);$$

$$D_1 D_2 f(s,t) = (-\sin t, \cos t, 0), \qquad D_1 D_2 f(q) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}, 0\right)$$

$$D_2 D_2 f(s,t) = (-s\cos t, -s\sin t, 0), \qquad D_2 D_2 f(q) = \left(-\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}, 0\right).$$

A q-beli 1. alapmennyiségek mátrixa és ennek inverze

$$(g_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}(q)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a q-beli 2. alapmennyiségek mátrixa

$$(b_{ij}(q)) = \left(\langle D_i D_j f(q), N(q) \rangle \right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt2}{2} \\ -\frac{\sqrt2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

A W_q Weingarten-operátor mátrixa $\mathbb{R}^2$ (e_1, e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan

$$[W_q]_{(e_1,e_2)} = (g^{ij}(q))(b_{ij}(q)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt2}{2} \\ -\frac{\sqrt2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt2}{2} \\ -\frac{\sqrt2}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

A $[W_q]_{(e_1,e_2)}$ mátrix ismeretében f q-beli **Gauss-görbülete** $K(q) := \det(W_q) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$;

Minkowski-görbülete $H(q) := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W_q) = \frac{1}{2}(0+0) = \underline{\underline{0}}$;

így a q-beli **főgörbületek**

$$k_1(q) = H(q) - \sqrt{H^2(q) - K(q)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}},$$
$$k_2(q) = H(q) + \sqrt{H^2(q) - K(q)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Meghatározzuk f q-beli **főirányait**. W_q karakterisztikus polinomja

$$\det(W_q - \lambda 1_{\mathbb{R}^2}) = \left| \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right).$$

Ennek zérushelyei az előbb – más módon – már meghatározott főgörbületek: $k_1(q) = -\frac{1}{2}$, $k_2(q) = \frac{1}{2}$.

A főirányok a megfelelő sajátvektorok, a

$$\begin{pmatrix} -k_i(q) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -k_i(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad i \in \{1,2\}$$

homogén lineáris egyenletek nemzérus megoldásvektorai.

(1) $k_1(q) = -\frac{1}{2}$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} v^1 - \sqrt{2}v^2 = 0 \\ -\sqrt{2}v^1 + 2v^2 = 0 \end{cases} \iff v^1 = \sqrt{2}\,v^2.$$

Itt a $v^2 := 1$ választással élve $v^1 = \sqrt{2}$ adódik, így a $k_1(q)$-hoz tartozó q-beli főirány $\underline{\underline{v_1 = (\sqrt{2}, 1)}}$ – és ennek minden nemzérus skalárszorosa. A v-nek megfelelő felületi érintővektor az

$$f'(q)(v_1) = v^1 D_1 f(q) + v^2 D_2 f(q) = \sqrt{2}\, D_1 f(q) + D_2 f(q)$$
$$= (1, 1, 0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$
$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, 1\right) \in \mathbb{R}^3$$

vektor, amelyet szintén főiránynak tekintünk.

(2) $k_2(q) = \frac{1}{2}$ $\qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v^1 + \sqrt{2}\, v^2 = 0 \\ \sqrt{2}\, v^1 + 2 v^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad v^1 + \sqrt{2}\, v^2 = 0 .$$

Ha $v^2 := -1$, akkor $v^1 = \sqrt{2}$; így a $v_2 = (\sqrt{2}, -1)$ főirányhoz jutunk. A megfelelő $\mathbb{R}^3$-beli főirány

$$f'(q)(v_2) = \sqrt{2}\, D_1 f(q) - D_2 f(q) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, -1\right).$$

Megjegyzés. $g_q(v_1, v_2) = (\sqrt{2} \;\; 1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{(g_{ij}(q))} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$= (\sqrt{2} \;\; 2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$, tehát v_1 és v_2 az elméletben tanultak szerint g_q-ortogonális. A megfelelő $\mathbb{R}^3$-beli (azaz érintővektor-) főirányok $\mathbb{R}^3$ kanonikus skaláris szorzatára nézve ortogonálisak:

$$\langle f'(q)(v_1), f'(q)(v_2) \rangle = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}, 1\right) \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{4} + \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

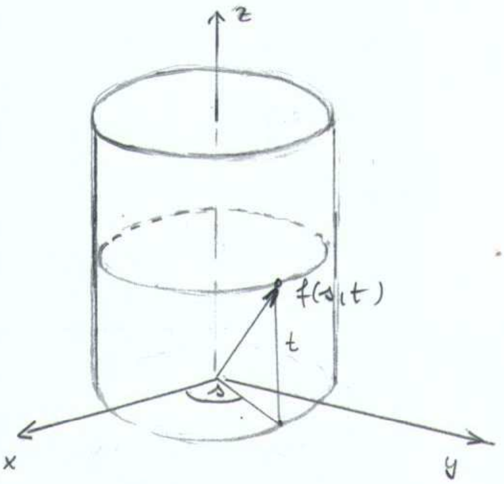
– erre is rámutattunk az elmélet tárgyalása során.

2. Adott az
$$f:\mathbb{R}\times\,]0,2\pi[\,\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad (s,t)\longmapsto(\alpha\cos t,\alpha\sin t, s)$$
parametrizált felület, ahol α rögzített, nemzérus valós szám, adott továbbá a $v=(\alpha,1)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$ vektor. Tekintve egy tetszőleges $(s,t)\in\mathbb{R}\times\,]0,2\pi[$ pontot, meghatározzuk f (s,t)-beli, v-irányú normálgörbületét.

$$D_1f(s,t)=(0,0,1),\qquad (g_{ij}(s,t))=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\alpha)^2\end{pmatrix},$$
$$D_2f(s,t)=(-\alpha\sin t,\alpha\cos t,0),$$
$$(D_1f\times D_2f)(s,t)=(-\alpha\cos t,-\alpha\sin t,0),\qquad (g^{ij}(s,t)):=\frac{1}{(\alpha)^2}\begin{pmatrix}(\alpha)^2&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$N(s,t)=(-\cos t,-\sin t,0);$$
$$D_1D_1f(s,t)=(0,0,0),$$
$$D_1D_2f(s,t)=(0,0,0),\qquad (b_{ij}(s,t))=\begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix}.$$
$$D_2D_2f(s,t)=(-\alpha\cos t,-\alpha\sin t,0),$$
A $W_{(s,t)}$ Weingarten-operátor mátrixa $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisára vonatkozóan
$$[W_{(s,t)}]_{(e_1,e_2)}=(g^{ij}(s,t))(b_{ij}(s,t))=\frac{1}{(\alpha)^2}\begin{pmatrix}0&0\\0&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}.$$
A keresett normálgörbület $k_{(s,t)}(v)=\dfrac{g_{(s,t)}(W_{(s,t)}(v),v)}{g_{(s,t)}(v,v)}$.

Itt
$$g_{(s,t)}(v,v)=(\alpha,1)\begin{pmatrix}1&0\\0&(\alpha)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=(\alpha\ \ (\alpha)^2)\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=2(\alpha)^2,$$
$$W_{(s,t)}(v)=\begin{pmatrix}0&0\\0&\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix},$$
$$g_{(s,t)}(W_{(s,t)}(v),v)=\left(0\ \ \tfrac{1}{\alpha}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&(\alpha)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=(0\ \ \alpha)\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\alpha,$$
tehát
$$\boxed{k_{(s,t)}(v)=\frac{\alpha}{2(\alpha)^2}=\frac{1}{2\alpha}}.$$
(Vigyázat: $g_{(s,t)}$-skaláris szorzatokat képzünk, nem pedig a kanonikus skaláris szorzatot!)

3. Tekintsünk egy r-sugarú, a z-tengellyel mint forgástengellyel rendelkező egyenes körhengert. Adjuk meg egy paraméterezését és az egyenletét! Tetszőleges pontjában határozzuk meg a Weingarten-operátort, a főirányokat, a főgörbületeket, a Gauss- és a Minkowski-görbületet!



Paraméterezés:

$f(s,t) = (r\cos s, r\sin s, t)$; $(s,t) \in]0,2\pi[\times \mathbb{R}$;

egyenlet:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (\mathbb{R}^3\text{-ban!}).$$

$$D_1 f(s,t) = (-r\sin s, r\cos s, 0),$$
$$D_2 f(s,t) = (0, 0, 1),$$
$$D_1 f \times D_2 f(s,t) = (r\cos s, r\sin s, 0),$$
$$N(s,t) = (\cos s, \sin s, 0).$$

Az 1. alapmennyiségek mátrixa

$$(g_{ij}(s,t)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ ennek inverze } (g^{ij}(s,t)) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

$$D_1 D_1 f(s,t) = (-r\cos s, -r\sin s, 0),$$
$$D_2 D_1 f(s,t) = (0, 0, 0),$$
$$D_2 D_2 f(s,t) = (0, 0, 0);$$

a 2. alapmennyiségek mátrixa

$$(b_{ij}(s,t)) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így az (s,t)-beli Weingarten operátor mátrixa $\mathbb{R}^2$ (e_1,e_2) kanonikus bázisára vonatkozóan

$$[W_{(s,t)}]_{(e_1,e_2)} = (g^{ij}(s,t))(b_{ij}(s,t)) = -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix oszlopvektorait a bázisvektorok képvektorainak koordinátái alkotják, következik, hogy
$$W_{(s,t)}(e_1) = -\frac{1}{r} e_1 \quad , \quad W_{(s,t)}(e_2) = \underline{0} .$$
Ily módon e_1 és e_2 főirányok; a megfelelő főgörbületek
$$k_1(s,t) = -\frac{1}{r} \quad , \quad k_2(s,t) = 0 .$$
Világos, hogy a kapott eredmény (s,t)-től független. A nyert főirányok megfelelő felületi érintővektorok
$$f'(s,t)(e_1) = D_1 f(s,t) = r(-\sin s, \cos s, 0) ,$$
$$f'(s,t)(e_2) = D_2 f(s,t) = (0,0,1) .$$
$D_1 f(s,t)$ az (s,t)-hez tartozó első paramétervonal (parametrizált keresztmetszetkör), $D_2 f(s,t)$ pedig a második paramétervonal (parametrizált alkotóegyenes) érintővektora. Megállapíthatjuk tehát, hogy az egyenes körhenger „félig gömbölyű, félig lapos": formaoperátora a keresztmetszetkörök mentén úgy hat, mint a gömbé (ld. 12.8. lemma), az alkotóegyenesek mentén pedig úgy, mint a síké.

A Gauss- és a Minkowski-görbület függvény
$$K = 0 \quad , \text{ ill. } \quad H = -\frac{1}{2r} 1 \quad ;$$
a Gauss-görbület eltűnése azt jelenti, hogy az egyenes körhenger lapos felület (a szó definíció szerinti értelmében).

4. ((Ellenőrző feladatok, 41.) Adott az

$$f : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(s,t) := (s, t, s^2+t^2) \in \mathbb{R}^3$$

parametrizált felület és ennek

$$c = f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \quad \gamma(t) := (t, t^3)$$

felületi görbéje. Kiszámítjuk c normálgörbületét a $t := 1$ paraméterű pontban.

---

c t-beli normálgörbület-függvénye

$$\varkappa_n(t) := k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{g_{\gamma(t)}\left(W_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \gamma'(t)\right)}{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} .$$

Kiszámítjuk a formula jobb oldalán szereplő adatokat a $t := 1$ helyen. Legyen $q := \gamma(1) = (1,1)$.

$D_1 f(s,t) = (1, 0, 2s)$, $\quad D_1 f(q) = (1, 0, 2)$

$D_2 f(s,t) = (0, 1, 2t)$, $\quad D_2 f(q) = (0, 1, 2)$

$D_1 f \times D_2 f(q) = (-2, -2, 1)$,

$N(q) = \frac{1}{3}(-2, -2, 1)$.

$D_1 D_1 f(s,t) = (0, 0, 2)$, $D_1 D_2 f(s,t) = (0,0,0)$, $D_2 D_2 f(s,t) = (0,0,2)$.

$$(g_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}(q)) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(h_{ij}(q)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$[W_q]_{(e_1,e_2)} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{27}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$g_q(\gamma'(1), \gamma'(1)) = g_q((1,3),(1,3)) = (1\;3)\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1\;3)\begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix} = 17 + 57 = 74 ;$$

$$W_q(\gamma'(t)) = \frac{2}{27}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{27}\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix};$$

$$g_q\left(W_q(\gamma'(1)),\gamma'(1)\right) = \frac{2}{27}(-7,11)\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{27}(-7,11)\begin{pmatrix}17\\ 19\end{pmatrix} = \frac{2}{27}(-119+209) = \frac{2}{27}\cdot 90 = \frac{20}{3}\ ;$$

így $\boxed{\varkappa_n(1) = \frac{20}{3}\,\frac{1}{74} = \frac{10}{111}}$.

Meghatározzuk a normálgörbület értékét a **Meusnier-tétel** alkalmazásával is, miszerint

$$\varkappa_n(t) = \varkappa(t)\,\langle F(t), N(\gamma(t))\rangle .$$

$c(t) = f(\gamma(t)) = f(t,t^3) = (t,\, t^3,\, t^2+t^6)$, $c(1) = (1,1,2)$

$c'(t) = (1,\, 3t^2,\, 2t+6t^5)$, $c'(1) = (1,3,8)$,

$c''(t) = (0,\, 6t,\, 2+30t^4)$; $c''(1) = (0,6,32)$,

$$c'(1)\times c''(1) = (48,-32,6) \parallel (24,-16,3)$$

$$c'(1) = (1,3,8)$$

$$(c'(1)\times c''(1))\times c'(1) \parallel (-137,-189,88)$$

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{62234}}(-137,-189,88)$$

$$N(q) = \frac{1}{3}(-2,-2,1)\ ;$$

$$\langle F(1), N(q)\rangle = \frac{740}{3\sqrt{62234}}$$

$$\varkappa(1) = \frac{\|c'(1)\times c''(1)\|}{\|c'(1)\|^3} = \frac{\sqrt{3364}}{74\sqrt{74}} = \frac{58}{74\sqrt{74}} = \frac{29}{37\sqrt{74}}$$

$$\varkappa_n(1) = \frac{29}{37\sqrt{74}}\cdot\frac{740}{3\sqrt{62234}} = \frac{1}{111}\,\frac{29\cdot 740}{2\cdot 1073} = \frac{740}{2\cdot 111\cdot 37}$$

$$= \frac{10}{740}$$ – ugyanazt kaptuk, mint az előző eljárással (de a „nagy" abszolút értékű számok miatt kissé kellemetlenebb volt a számolás).

5. Adott az

$f: \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \quad (s,t) \mapsto (s\cos t, s\sin t, s^2)$

parametrizált felület és a $q = (\sqrt{2}, t_0)$ pont, ahol $t_0 \in]0, 2\pi[$ tetszőlegesen rögzített. Számítsuk ki f q-beli, $v = (1,1)$ irányú normálgörbületét!

$$k_q(v) = \frac{g_q(W_q(v), v)}{g_q(v,v)}$$

$D_1 f(s,t) = (\cos t, \sin t, 2s)$, $\quad D_1 f(q) = (\cos t_0, \sin t_0, 2\sqrt{2})$

$D_2 f(s,t) = (-s\sin t, s\cos t, 0)$, $\quad D_2 f(q) = (-\sqrt{2}\sin t_0, \sqrt{2}\cos t_0, 0)$

$D_1 f \times D_2 f(q) = (-4\cos t_0, -4\sin t_0, \sqrt{2})$

$N(q) = \frac{1}{3}(-2\sqrt{2}\cos t_0, -2\sqrt{2}\sin t_0, 1)$

$D_1 D_1 f(s,t) = (0, 0; 2)$,

$D_1 D_2 f(s,t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $\quad D_1 D_2 f(q) = (-\sin t_0, \cos t_0, 0)$,

$D_2 D_2 f(s,t) = (-s\cos t, -s\sin t, 0)$, $\quad D_2 D_2 f(q) = (-\sqrt{2}\cos t_0, -\sqrt{2}\sin t_0, 0)$

$$(g_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}(q)) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(b_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}; \quad [W_q]_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$g_q(v,v) = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 11$$

$$W_q(v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$g_q(W_q(v), v) = \left(\frac{2}{27} \;\; \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

$$k_q(v) = \frac{2}{11}$$

6. Az $y=5x^2$, $z=0$ egyenletű parabolát megforgatjuk az x-tengely körül. Felírjuk a kapott forgásfelület egy paraméteres előállítását és kiszámítjuk a $p=(-1,4,3)$ pontban a Gauss- és a Minkowski-görbületet.

Paraméteres előállítás

$c: s\in\mathbb{R} \longmapsto c(s) := (s, 5s^2, 0) \in \mathbb{R}^2\times\{0\}$ – a parabola paraméterezése; a c profilgörbéjű, x-forgástengelyű paraméterezett forgásfelület:

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (s,t)\longmapsto f(s,t) := (s, 5s^2\cos t, 5s^2\sin t)$$

(ld. 7.4. Példák / (4)). Ekkor $p = f(-1, t_0)$, ahol $\cos t_0 = \frac{4}{5}$, $\sin t_0 = \frac{3}{5}$.

$D_1f(s,t) = (1, 10s\cos t, 10s\sin t)$, $D_1f(-1,t_0) = (1,-8,-6)$

$D_2f(s,t) = (0, -5s^2\sin t, 5s^2\cos t)$, $D_2f(-1,t_0) = (0,-3,4)$

$D_1f\times D_2f(-1,t_0) = (-50,-4,-3)$

$N(-1,t_0) = \frac{1}{5\sqrt{101}}(-50,-4,-3)$

$D_1D_1f(s,t) = (0, 10\cos t, 10\sin t)$; $D_1D_1f(-1,t_0) = (0,8,6)$

$D_2D_1f(s,t) = (0, -10s\sin t, 10s\cos t)$; $D_2D_1f(-1,t_0) = (0,6,-8)$

$D_2D_2f(s,t) = (0, -5s^2\cos t, -5s^2\sin t)$; $D_2D_2f(-1,t_0) = (0,-4,-3)$

$$(g_{ij}(s,t)) = \begin{pmatrix} 101 & 0 \\ 0 & 25\end{pmatrix},\quad (g^{ij}(s,t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{101} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25}\end{pmatrix}$$

$$(b_{ij}(s,t)) = \frac{1}{5\sqrt{101}}\begin{pmatrix} -50 & 0 \\ 0 & 25\end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{101}}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left[W_{(-1,t_0)}\right]_{(e_1,e_2)} = \frac{5}{\sqrt{101}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{101} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{K(-1,t_0) = \det\left(W_{(-1,t_0)}\right) = \frac{25}{101}\cdot -\frac{2}{25\cdot 101} = -\frac{2}{10201}},$$

$$\boxed{H(-1,t_0) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(W_{(-1,t_0)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{101}}\cdot\frac{101-50}{101\cdot 25} = \frac{51}{1010\sqrt{101}}}$$