Szilasi József

Bevezetés a differenciálgeometriába

Kossuth Egyetemi Kiadó
Debrecen, 1998

© Szilasi József, 1998

Lektorok:	Dr. Kovács Zoltán
	Dr. Kozma László
	Vincze Csaba
Ábrák:	Dr. Kovács Zoltán
Szedés:	Fogarasi Zsuzsa
	Kovács László
Tördelés:	Dr. Kozma László

A jegyzet elkészítését a Művelődési és Közoktatási Minisztérium Felsőoktatási Programfinanszírozási Pályázata támogatta. A szerző köszönetet mond mindazoknak, akik segítették a munka megjelenését.

Kiadó: Kossuth Egyetemi Kiadó
Nyomda: KLTE Reprográfia

Bevezetés

A klasszikus differenciálgeometria tárgya az $\mathbb{R}^3$-beli görbék és felületek alkalmas differenciálhatósági feltételek előírása mellett történő vizsgálata, az analízis nyújtotta lokális - az $\mathbb{R}^n$ tér nyílt halmazain működő - apparátus segítségével. Az első, még elszórtan felbukkanó differenciálgeometriai eredmények a 18. századból valók, s jelentős részben L. EULER-nek (1707-1783) köszönhetők. Az ilyenfajta vizsgálatoknak értelemszerűen előfeltétele volt a koordinátageometria kifejlődése (R. DESCARTES (1596-1650) , P. FERMAT (1601-1665)), továbbá rendelkezésre kellett állnia a differenciál- és integrálszámítás (I. NEWTON (1643-1727), W. LEIBNIZ (1646-1716)) alapvető eszközeinek is. Lényeges hozzájárulásokkal gyarapította a differenciálgeometriát a francia forradalom és az 1. császárság időszakában G. MONGE (1746-1818) és iskolája, amelynek hatása a francia geometriára egészen a 20. századig meghatározó erővel bírt. A felületelmélet szisztematikus tárgyalását C. F. GAUSS (1777-1855) alapozta meg (*Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827*). Gauss elgondolásait legmélyebben B. RIEMANN (1826-1866) értette meg és fejlesztette tovább; a göttingeni egyetemen 1854. június 12-én – Gauss jelenlétében – tartott habilitációs előadása (*Über die Hyphotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*) kivételes egyértelműséggel jelöli ki a modern differenciálgeometria megszületésének pillanatát. A Riemann által nagy szuggesztivitással és intuitív erővel javasolt általános térfogalom pontos fogalmi megalapozása, valamint egy ahhoz adekvált kalkulatív apparátus kifejlesztése hosszabb időt vett igénybe, századunk első évtizedére azonban már minden készen állt ahhoz, hogy A. EINSTEIN (1879-1955) megfogalmazhassa általános relativitáselméletét (*Zur Allgemeinen Relativitätstheorie,* Sitzber. preuss. Akad. Wiss. (1915)).

E nagyon rövid és vázlatos történeti áttekintésből is kiviláglik, hogy a differenciálgeometria az előismereteknek egy viszonylag szélesebb körére építő diszciplina, s mint ilyen, az egyetemi tanulmányokban a „haladottabb" kurzusok közé tartozik. Megkezdésének ténylegesen előfeltétele két félév lineáris algebra és három félév analízis teljesítése, kívánatos emellett bizonyos jártasság az általános topológia néhány egyszerűbb fogalmának kezelésében. Az új gondolatok befogadását hasznosan készítheti elő egy, a klasszikus geometriákat szintetikus vagy analitikus tárgyalásban bemutató kurzus. A szélesebb alapokra való építkezés kétségkívül nehézségek forrása, a befektetésre kerülő munka azonban bőséggel kamatoztatható: mód nyílik az említett területeken korábban szerzett ismeretek konszolidálására és elmélyítésére – s egyben bepillantás nyerhető egy-két valóban lényegi alkalmazásukba.

Ez a tankönyv egységes nézőpontból, szisztematikusan kifejti mindazt az anyagot, amelyet a tanárszakos hallgatók tanterve előír, sőt azon – mind mélység, mind pedig terjedelem tekintetében – jelentősen túllép. Egy lényeges kivételtől eltekintve lefedi a matematikus hallgatók programját is. A kivétel a *Gauss-Bonnet-tétel*, amelynek a követett elvek szellemében való, módszeres letárgyalása legalább ötven oldallal megnövelte volna a terjedelmet, s erre a bővítésre nem volt lehetőségünk. Az érdeklődő Olvasó e témakör egy rendkívül precíz és szép kifejtését találhatja meg John Thorpe Irodalomjegyzékben idézett könyvében.

Tárgyalásunk során fölelevenítjük a lineáris algebrából fölhasználásra kerülő tények egy viszonylag jelentős hányadát, sőt kisebb kiegészítésekkel is élünk. A topológiából szükséges tudnivalókat tömören bár, de teljes egészében beépítettük az anyagba. Ugyancsak összefoglaljuk a többváltozós differenciálszámítás néhány nélkülözhetetlen eredményét, egy-két egyszerűbb esetben bizonyítással együtt. Így voltaképpen csupán a bevezető algebra és az egyváltozós analízis elemeit kezeljük minden kommentár nélkül ismertnek feltételezett anyagként. Ez azonban távolról sem jelenti azt, hogy a lineáris algebrából és többváltozós analízisből itt elmondottak helyettesíthetik az említett kurzusokat! Szerepeltetésük célja – az emlékezet felfrissítése mellett – elsősorban a szó- és jelöléshasználat egységesítése. Hasonló okból, a nyelvi alapok rögzítése végett került beiktatásra egy rövid halmazelméleti áttekintés.

A kifejtésre kerülő valóban új anyag alapvetően négy kulcsfontosságú fogalom köré összpontosul; ezek

∼ a differenciálható struktúra;
∼ az érintővektor (absztrakt) sokaság esetén;
∼ a lineáris konnexió;
∼ a Riemann-struktúra.

Mindezeket csak gondos előkészítés után vezetjük be, lehetőség szerint több irányból is megvilágítjuk, s jól kidolgozott, nemtriviális példákkal illusztráljuk. A klasszikus differenciálgeometria hagyományos témái közül a felületek – az így kiépített fogalmi keretek között és kalkulatív apparátus segítségével – voltaképpen mint speciális kétdimenziós Riemann-sokaságok kerülnek tárgyalásra.

Differenciálgeometriai tanulmányai során az érdeklődő hallgató, illetve a figyelmes olvasó számára gyorsan világossá fog válni, hogy egész sor általa addig megtanult dolog nem csupán önmagában és önmagáért érdekes és szép, hanem szervesen kapcsolódik a matematika további fejezeteihez – valójában tehát egy nagyobb egység részeit jelenti. Az eszközöknek e szintézise mellett ki fognak bontakozni egy másik egység körvonalai is. Kiderül, hogy a klasszikus geometria, amely a különböző párhuzamossági axiómák lehetősége folytán széttörni látszott egymástól idegen területekre, az euklideszi, a hiperbolikus és az elliptikus geometriára, valójában mégsem hullott darabokra: egy közös, általános – éppen Riemann által fölfedezett – struktúra különböző realizációiról van szó.

Az idevezető út nem lesz mentes leküzdendő akadályoktól és nehézségektől, ez azonban a dolog természetéhez tartozik, hiszen – Spinoza szavaival élve – minden, ami kiváló, éppoly nehéz, mint amilyen ritka.

Tartalomjegyzék

Halmazelméleti alapok

1. Nyelv. Tárgyunk kifejtése során, a mai matematika gyakorlatának megfelelően, egy természetes nyelv – a magyar nyelv – kifejezéseit kombinálni fogjuk egy formális nyelv szimbólumaival, valamint speciális matematikai szimbólumokkal – lehetőség szerint előnyben részesítve a természetes nyelven való megfogalmazásokat. Így a logikai jeleket nem szigorú szintaktikai szabályokat követve alkalmazzuk, hanem csupán gyorsírásos rövidítésekként. Először is néhány ilyen típusú, gyakran előforduló rövidítést tekintünk át.

(1) Az $=$ szimbólum logikai használatát azzal a megállapodással rögzítjük, hogy ha az a és a b szimbólum ugyanazt az objektumot jelöli, akkor azt írjuk, hogy $a = b$; ha pedig azt akarjuk kifejezni, hogy nem ez a helyzet, akkor azt, hogy $a \neq b$. Amennyiben egy a jelet azáltal vezetünk be, hogy egy már ismert b jelet helyettesítsen, úgy az $a := b$ vagy $b =: a$ írásmóddal élünk.

(2) Tegyük föl, hogy p és q állítások szimbólumai! Ekkor $\neg p$ (kiolvasása: *nem* p) p *negáció*ja, $p \wedge q$ (kiolvasása: p *és* q) p és q *konjunkció*ja. A negáció és a konjunkció segítségével további logikai összekötők vezethetők be:

$p \vee q$ (olvasd: p *vagy* q) p és q *diszjunkció*ja, ez a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ állítást jelenti;

$p \Longrightarrow q$ (olvasd: *ha* p*, akkor* q*,* vagy: p*-ből következik* q) a $\neg p \vee q$ állítás;

$p \Longleftrightarrow q$ (olvasd: p *akkor és csak akkor, ha* q; vagy: p *ekvivalens* q-val) a $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ állítás.

A $p \Longrightarrow q$ állítás *megfordítása* a $q \Longrightarrow p$ állítás; *kontraponáltja* a $\neg q \Longrightarrow \neg p$ állítás. A

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$$

állítás *tautológia*: a logikai értéke p és q bármely logikai értéke mellett igaz. Ez a *kontrapozició* elve, amelyet okoskodásaink során sűrűn alkalmazunk (indirekt bizonyítás!).

Megállapodunk még a következő rövidítésben:

$p :\Longleftrightarrow q$ azt jelenti, hogy p *definíció szerint akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll* q.

(3) Tekintsünk ezek után egy $p(x)$ predikátumot (más szóval: nyitott mondatot), azaz olyan kifejezést, amely állítást eredményez, valahányszor az x szimbólumot egy rögzített tárgyalási univerzum objektumaival specifikáljuk. Ekkor $p(x)$-et *x-re vonatkozó feltétel*ként, magát p-t *tulajdonság*ként is említjük. Az „y p-tulajdonságú” állítás azt jelenti, hogy $p(y)$ igaz. További logikai szavak, mégpedig a

bármely (minden egyes), szimbóluma: $\forall$

és a

létezik (van olyan), szimbóluma: $\exists$

ún. kvantorok segítségével predikátumokból állítások képezhetők:

$\forall\ x : p(x)$ az az állítás, amely akkor és csak akkor igaz, ha az alapul vett tárgyalási univerzum minden objektuma p-tulajdonságú;

$\exists\ x : p(x)$ $:= \neg(\forall\ x : \neg p(x))$.

Végül megállapodunk abban, hogy a $\exists!\ x : p(x)$ állítás kiolvasása: *„egyetlenegy (pontosan egy) olyan x van, hogy $p(x)$”.*

2. Halmazok.

(1) Ismertnek tételezzük föl az elemi halmazelmélet alapvető fogalmait és szimbolikáját ($\in, \subset, \cup, \cap, \setminus$, rendezett pár, Descartes-szorzat, relációk és speciális típusaik, s í. t.). A $\subset$ jelet az

$$A \subset B \ :\Longleftrightarrow\ \forall\ a: \ (a \in A \Longrightarrow a \in B)$$

értelemben használjuk.

Megadva egy A halmazt s egy p tulajdonságot, létezik egy és csak egy olyan halmaz, amelyet A p-tulajdonságú elemei alkotnak, ennek jelölésére

$$\{a \in A \,|\, p(a)\}$$

szolgál. Tekinthetjük speciálisan az

$$\emptyset_A := \{a \in A \,|\, a \neq a\}$$

halmazt; ennek az **1.**-ben mondottak szerint egyetlen eleme sincs. Ha B tetszőleges további halmaz, akkor $\emptyset_B = \emptyset_A$, hiszen egy halmaz az elemei által egyértelműen meghatározott. Egyetlenegy olyan halmaz van tehát, amelynek nincs eleme, ezt az *üres halmaz*nak nevezzük és rá a $\emptyset$ jelölést használjuk.

Ugyancsak egyértelműen létezik olyan halmaz, amelynek elemei egy adott A halmaz összes részhalmazai, ezt az A halmaz *hatványhalmaz*ának hívjuk és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük.

(2) A szokásos módon

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\ \text{ és }\ \mathbb{C}$$

jelöli rendre a természetes, az egész, a racionális, a valós és a komplex számok halmazát.
$\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
$\mathbb{Z}^+ := \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n > 0\} = \mathbb{N}^+$ a pozitív egész számok halmaza;
$\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q > 0\}$, illetve $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > 0\}$ a pozitív racionális, illetve a valós számok halmaza. Ha $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, akkor

$$[a,b] := \{t \in \mathbb{R} \,|\, a \le t \le b\}, \quad \text{illetve} \quad]a,b[\,:= \{t \in \mathbb{R} \,|\, a < t < b\}$$

az a kezdőponttal, b végponttal rendelkező zárt, illetve nyílt intervallum; a megfelelő, balról, illetve jobbról félig nyílt intervallumot $]a,b]$, illetve $[a,b[$ jelöli.

3. Leképezések.

(1) *Leképezés*en olyan $f = (S, T, G)$ hármast értünk, ahol

(i) S, T, G halmazok;

(ii) $G \subset S \times T$;

(iii) $\forall\ s \in S:\ \exists!\ t \in T:\ (s,t) \in G$.

Az S halmazt a leképezés *értelmezési tartomány*ának, a T halmazt a *képhalmaz*ának, G-t pedig a *gráf*jának nevezzük, s ezekre rendre a $\operatorname{dom} f$, $\operatorname{rng} f$, illetve G_f jelölést (is) alkalmazzuk ('dom' a domain, 'rng' a range szóból). Ha speciálisan $T = S$ – azaz $\operatorname{dom} f = \operatorname{rng} f$ –, akkor az S halmazon adott *transzformáció*ról beszélünk, ha pedig $T = \mathbb{R}$ vagy $T = \mathbb{C}$, akkor az S halmazon adott *függvény*ről szólunk. (A függvény terminust tehát szűkebb értelemben használjuk, mint a leképezés terminust!) Adott $s \in S$ esetén azt az egyértelműen létező $t \in T$ elemet, amelyre $(s,t) \in G$, az s elem f *általi kép*ének, vagy a leképezés s-ben fölvett *érték*ének nevezzük és $f(s)$-sel jelöljük.

Példák. Vegyünk alapul egy S és egy T halmazt!

(a) $f := (\emptyset, T, \emptyset)$ leképezés, amelynél $\operatorname{dom} f = \emptyset$, $\operatorname{rng} f = T$, $G_f = \emptyset$.
A továbbiakban ezt a triviális esetet kizárjuk, tehát *csakis olyan leképezéseket tekintünk, melyeknek értelmezési tartománya nemüres;* ekkor a képhalmaz szükségképpen nemüres.

(b) Legyen

$$\Delta := \{(s,s) \mid s \in S\}, \quad f := (S, S, \Delta)!$$

Belátjuk, hogy f leképezés. – (i) és (ii) teljesülése nyilvánvaló. (iii) igazolása végett legyen $s \in S$ tetszőleges! Ekkor $(s,s) \in \Delta$, tehát

$$\forall\ s \in S: \quad \exists\ t \in S: \quad (s,t) \in \Delta. \tag{$*$}$$

Tegyük föl most, hogy $(s,t') \in \Delta$ és $(s,t'') \in \Delta$! $(s,t') \in \Delta$ folytán van olyan $t \in S$, hogy $(s,t') = (t,t)$. Ebből $s = t$ és $t' = t$, s így $s = t'$ következik. Ugyanígy kapjuk, hogy $s = t''$; az $s = t'$ és $s = t''$ relációból pedig $t' = t''$ adódik. Tehát

$$\forall\ s \in S: \quad \exists \textit{ legföljebb egy } t \in S : (s,t) \in \Delta. \tag{$**$}$$

$(*)$ és $(**)$ azt jelenti, hogy a leképezések definíciójában szereplő (iii) követelmény valóban teljesül.

Az $f = (S,S,\Delta)$ leképezésre rendszerint az 1_S jelölést fogjuk alkalmazni, s azt mondjuk, hogy 1_S az S halmaz *identikus transzformáció*ja. Az értelmezés szerint

$$\forall\ s \in S: \quad 1_S(s) = s.$$

(c) Tekintsük S és T $S \times T$ Descartes-szorzatát! Ha

$$G_1 := \{((s,t),s) \mid (s,t) \in S \times T\}, \quad G_2 := \{((s,t),t) \mid (s,t) \in S \times T\},$$

akkor

$$(S \times T, S, G_1) \quad \text{és} \quad (S \times T, T, G_2)$$

egyaránt leképezés. Az előbbire a pr_1, az utóbbira a pr_2 jelölést alkalmazzuk, s azt mondjuk, hogy pr_1 $S \times T$ S-re való, pr_2 $S \times T$ T-re való *természetes projekció*ja, röviden *projekció*ja. Jegyezzük meg, hogy

$$\operatorname{dom} \mathrm{pr}_1 = S \times T, \quad \operatorname{rng} \mathrm{pr}_1 = S,$$

és

$$\forall\ (s,t) \in S \times T: \quad \mathrm{pr}_1(s,t) = s.$$

Hasonló módon

$$\operatorname{dom} \mathrm{pr}_2 = S \times T, \quad \operatorname{rng} \mathrm{pr}_2 = T; \quad \forall\ (s,t) \in S \times T: \ \mathrm{pr}_2(s,t) = t.$$

Fennáll végül, hogy

$$\forall\ u \in S \times T: \quad u = (\mathrm{pr}_1(u), \mathrm{pr}_2(u)).$$

(d) Egy $f = (S,T,G_f)$ leképezést *konstans leképezés*nek mondunk, ha létezik $\lambda \in T$ olymódon, hogy $\forall\ s \in S: \ f(s) = \lambda$. Ekkor – nyilvánvalóan –

$$G_f = \{(s,\lambda) \mid s \in S\}.$$

A szóbanforgó konstans leképezésre gyakran egyszerűen a λ jelölést használják; mi ezzel a lehetőséggel rendszerint nem fogunk élni.

(2) **Szóhasználat.**

(a) Amikor azt mondjuk, hogy

„f az S halmaz T-be való leképezése",

akkor ezen azt értjük, hogy f egy olyan leképezés, amelynek értelmezési tartománya S, képhalmaza T. Ilyenkor – $f = (S, T, G_f)$ helyett – az igen praktikus (és szokásos)

$$f : S \to T,$$

olykor az

$$S \xrightarrow{f} T \quad \text{vagy} \quad T \xleftarrow{f} S$$

írásmóddal élünk, tárgyunk kifejtésekor kizárólag ezek valamelyikét fogjuk alkalmazni.

(b) Ha azt mondjuk, hogy

„tekintsük az S halmaz T-be való $s \mapsto \varphi(s)$ leképezését",

akkor ez úgy értendő, hogy az

$$f = (S, T, \{(s, \varphi(s)) \mid s \in S\})$$

leképezést tekintjük. A későbbiekben egyszerűbb, de pontatlanabb lesz a jelöléshasználatunk, s (a)-t és (b)-t kombinálva többnyire

$$f : S \to T, \quad s \mapsto f(s)$$

leképezésről fogunk szólni. – Fölhívjuk a figyelmet arra, hogy a kétféle nyíl kétféle dologra utal; a második esetben arról van szó, hogy s hozzátartozik a tekintett f leképezés értelmezési tartományához, és $f(s)$ a leképezés s-ben fölvett értéke.

(3) Legyen adva az $f : S \to T$ leképezés, s tegyük föl, hogy $H \subset S$. Ekkor tekinthetjük azt az $f_1 : H \to T$ leképezést, amelyet a

$$\forall\ s \in H : \ f_1(s) := f(s)$$

előírás értelmez. Világos, hogy

$$\operatorname{dom} f_1 = H \quad \text{és} \operatorname{rng} f_1 = T.$$

Az f_1 leképezést f H-ra való *leszűkítés*ének nevezzük és rendszerint az $f \restriction H$ szimbólummal jelöljük.

Ugyancsak tekinthetjük – némi jelölésbeli következetlenséggel – az

$$f(H) := \{f(s) \mid s \in H\} \subset T$$

halmazt[1]. Ezt H f *általi kép*ének nevezzük; speciálisan az

$$\operatorname{Im} f := f(S)$$

[1] A következetlenség abban áll, hogy $\operatorname{dom} f$ az S halmaz, nem pedig a $\mathcal{P}(S)$.

halmazt f *képter*ének vagy *értékkészlet*ének hívjuk. Amennyiben

$$\operatorname{Im} f = T,$$

azaz a képtér egybeesik a képhalmazzal, úgy *szürjektív* leképezésről beszélünk. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a leképezés a T halmaz*ra* történik.

Legyen $K \subset T$ tetszőleges! Az

$$f^{-1}(K) := \{s \in S \mid f(s) \in K\} \subset S$$

halmazt a K halmaz f általi *őskép*ének (vagy *inverz kép*ének) nevezzük. Speciálisan egy $\{t\} \subset T$ egyelemű részhalmaz esetén $f^{-1}(\{t\})$ helyett egyszerűen azt fogjuk írni, hogy $f^{-1}(t)$ (ami szintén pontatlanság, de elviselhető). Rögtön adódik, hogy

$$f : S \to T \text{ szürjektív} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, t \in T : \; f^{-1}(t) \neq \emptyset.$$

(4) Az $f : S \to T$ leképezést *injektív*nek nevezzük, ha

$$(s_1 \in S,\; s_2 \in S,\; s_1 \neq s_2) \quad \Longrightarrow \quad f(s_1) \neq f(s_2);$$

*bijektív*nek mondjuk, ha injektív és szürjektív.

(5) Tekintsük az $f : S \to T$ és a $g : T \to U$ leképezést, s értelmezzük a $h : S \to T$ leképezést a

$$\forall\, s \in S : \quad h(s) := g(f(s))$$

előírással! Az így bevezetett leképezést $g \circ f$-fel jelöljük, s az f és g leképezés *kompozíció*jának nevezzük. Az f leképezést *invertálható*nak mondjuk, ha van olyan

$$\tilde{f} : T \to S$$

leképezés, hogy

$$\tilde{f} \circ f = 1_S \quad \wedge \quad f \circ \tilde{f} = 1_T.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a szóbanforgó leképezés *egyértelműen meghatározott és bijektív*; megfordítva: *minden bijektív leképezés invertálható.*

A továbbiakban egy invertálható leképezés inverzét f^{-1}-gyel jelöljük. Ekkor ugyanaz a szimbólum kétféle funkciót is betölt (ld. (3)), ez a kettősség azonban a gyakorlatban ritkán okoz zavart.

4. Elemcsalád, halmazcsalád.

(1) Egy $f = (I, S, G)$ leképezést időnként az S halmaz elemeiből képzett *elemcsalád*nak hívunk. Ilyenkor az eddigi szó- és jelöléshasználatot módosítjuk: az I értelmezési tartományt a család *indexhalmaz*ának mondjuk,

$$\begin{array}{rll} f(i) & \text{helyett az} & f_i \; (i \in I), \\ f & \text{helyett az} & (f_i)_{i \in I} \end{array}$$

jelölést alkalmazzuk, az

$$\operatorname{Im} f = f(I) = \{f_i \mid i \in I\}$$

értékkészletet a család elemeinek halmazaként is említjük. Ugyancsak szokásos és kényelmes egy, az S halmaz elemeiből képzett elemcsaládra az

$$(s_i)_{i \in I}$$

jelölést használni; ekkor $i \mapsto s_i$ egy leképezése I-nek S-be. Amennyiben $J \subset I$, úgy azt mondjuk, hogy $(s_i)_{i \in J}$ *részcsalád*ja az $(s_i)_{i \in I}$ családnak.

(2) Az S halmaz elemeiből képzett *sorozat*on olyan S-beli elemcsaládot értünk, amelynek indexhalmaza $\mathbb{Z}$-nek részhalmaza. Sorozatok esetén sűrűn alkalmazzuk

$$\begin{array}{rll} (s_i)_{i \in \mathbb{N}} & \text{helyett az} & (s_i)_{i \geq 0}, \\ (s_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}} & \text{helyett az} & (s_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \text{vagy az} \quad (s_i)_{i=1}^{n} \end{array}$$

jelölést.

(3) Tárgyalásunkban gyakran fognak szerepelni ún. *kétindexes elemcsalád*ok is; ezek

$$f = (I \times J, S, G)$$

alakú leképezések, amelyekre a most mondottak szellemében rendszerint az

$$(s_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$$

jelölést használjuk. Egy ilyen elemcsaládot (I, J)-*típusú mátrix*nak nevezünk, az $i \in I$ indexeket *sorindex*ekként, a $j \in J$ indexeket *oszlopindex*ekként említjük. Számunkra az az eset lesz érdekes, amikor I és J az

$$\{1, ..., m\}, \quad \text{illetve az} \quad \{1, ..., n\} \quad (m, n \in \mathbb{N}^+)$$

véges halmaz. Ilyenkor $m \times n$-*típusú mátrix*ról szólunk és

$$(s_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \quad \text{helyett az} \quad (s_{ij})_{m \times n}$$

jelölést használjuk, sőt a típus feltüntetésétől is eltekintünk, ha az a szövegkörnyezetből kiderül. A differenciálgeometria speciális igényeinek megfelelően ezt a szimbolikát annyiban fogjuk még módosítani, hogy

$$(s_{ij})_{m \times n} \quad \text{helyett az} \quad (s^i_j)_{m \times n}$$

írásmódra térünk át (ld. I.1.1.).

(4) Ha S egy halmaz, és $(A_i)_{i \in I}$ $\mathcal{P}(S)$ elemeinek egy családja, akkor többnyire azt mondjuk, hogy $(A_i)_{i \in I}$ S részhalmazainak egy családja, vagy egyszerűen *halmazcsalád*ról beszélünk. Az unió- és metszetképzés kézenfekvő módon általánosítható halmazcsaládokra:

(a) Az $(A_i)_{i\in I}$ *halmazcsalád unióján* azt az $\bigcup_{i\in I} A_i$ halmazt értjük, amelyet az

$$a \in \bigcup_{i\in I} A_i \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, i \in I:\; a \in A_i$$

előírás definiál.

(b) Az $(A_i)_{i\in I}$ *halmazcsalád metszete* az a $\bigcap_{i\in I} A_i$ halmaz, amelyre

$$a \in \bigcap_{i\in I} A_i \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, i \in I:\; a \in A_i.$$

Az írásmódot egyszerűsítendő,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \text{helyett az} \quad \bigcup_{i\geq 0} A_i,$$

$$\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i \quad \text{helyett az} \quad \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \quad \text{vagy} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

jelöléseket is alkalmazzuk, s ugyanígy járunk el halmazcsaládok metszetével kapcsolatban.

I. rész

Görbeelmélet

Ami a klasszikus mechanikában egy rögzített vonatkoztatási rendszerben leírt, mozgó tömegpont, az a differenciálgeometriában egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezés, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. A mozgás alapvető kinematikai jellemzői (sebesség, pályasebesség, gyorsulás) a c', illetve a c'' első, illetve második derivált leképezéssel adhatók meg. Ebben az I. részben – a mechanikából kölcsönvett terminológia részleges megtartása mellett – vizsgálataink középpontjában ilyen leképezések állnak. Pontosabban, egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezést *parametrizált görbé*nek nevezünk, ha teljesül rá a következő

$$\text{„}\textit{regularitási feltétel}\text{”:} \quad \forall\, t \in I : \; c'(t) \neq 0.$$

Ezt a tulajdonságot egy általános definíció (4.1.(c))[2] szellemében úgy fogjuk kifejezni, hogy c *immerzió*, differenciálhatóságon pedig – ha mást nem mondunk – végtelen sokszori differenciálhatóságot értünk (5.2.(c)); a szinonim kifejezés erre az lesz, hogy a leképezés *sima*. - Már itt megjegyezzük, hogy a parametrizált görbék fogalmát a további részekben eltérő értelemben is fogjuk használni, elejtve például a regularitás követelményét.

Jelen I. rész fő célja a $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbék alapvető *geometriai tulajdonságai*nak feltárása.

Mi értendő azonban geometriai tulajdonságon? A válasz erre első közelítésben az, hogy c-nek egy p tulajdonságát *geometriai*nak mondjuk, amennyiben

(1) ha $\theta : J \to I$ diffeomorfizmus (ún. paramétertranszformáció), akkor c-vel együtt $c \circ \theta : J \to \mathbb{R}^3$ is p tulajdonságú;

(2) tetszőleges $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ izometria esetén $f \circ c : I \to \mathbb{R}^3$ szintén p tulajdonságú.

Röviden: a geometriainak mondott tulajdonságoktól megköveteljük, hogy legyenek *invariánsak paramétertranszformációval és izometriával szemben.* Ezeket a kívánalmakat esetenként annyiban enyhítjük, hogy megelégszünk irányítástartó paramétertranszformációval ($\forall\, t \in J : \theta'(t) > 0$) , illetve irányítástartó izometriával szembeni invarianciával.

Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe alapvető geometriai adatai a

$$\kappa : I \to \mathbb{R}, \text{ illetve a } \tau : I \to \mathbb{R}$$

[2] Adott részen belül a hivatkozás m.n. (m,n $\in \mathbb{N}^+$) alakú; ha a hivatkozott tény másik részben található, akkor a hivatkozás formája K.m.n., K$\in \{$I., II., III.$\}$.

görbület-, illetve *torziófüggvény*. Előbbi eltűnése a parametrizált egyeneseket, utóbbi eltűnése a parametrizált síkgörbéket jellemzi. E rész legfontosabb eredménye, „a görbeelmélet alaptétele” éppen azt állapítja meg, hogy a *görbület- és a torziófüggvény irányítástartó izometriától eltekintve egyértelműen meghatározza az $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbéket*, továbbá hogy *adott $\kappa : I \to \mathbb{R}$ pozitív értékű differenciálható és $\tau : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez létezik olyan $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe, amelynek görbület- és torziófüggvénye a szóbanforgó κ, illetve τ függvény.*

Ehhez a fontos eredményhez viszonylag hosszas előkészületek után jutunk csak el. Ezek során tekintjük át a tárgyalásunkban fölhasználásra kerülő lineáris algebrai és analízisbeli tudnivalók java részét, s egyben rögzítünk számos olyan megállapodást, amelyet a későbbiekben végig alkalmazni fogunk. Meglehetős részletességgel foglalkozunk a (véges dimenziójú, valós) vektorterek irányításának kérdésével, valamint az $\mathbb{R}^3$-beli vektoriális szorzással; minderről a lineáris algebra kurzusokon általában kevés szó esik. Ugyancsak áttekintjük $\mathbb{R}^n$ néhány nevezetes transzformációcsoportját, megkülönböztetett figyelmet szentelve az izometriacsoportnak. Bebizonyítjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden izometriája előállítható egy ortogonális transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként; ezt a tényt úgy fogjuk kifejezni, hogy *$\mathbb{R}^n$ izometriacsoportja egybeesik az euklideszi mozgások csoportjával.* A transzformációcsoportok kapcsán szót ejtünk a geometria fejlődésében oly fontos szerepet játszó *erlangeni program*ról is.

Az analízis tárgyköréből való előkészítő anyag a *derivált* fogalma körül összpontosul. Amennyiben $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^m$ pedig egy leképezés ($m, n \in \mathbb{N}^+$), úgy f p-beli deriváltja - ha létezik - az a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, amely „jól approximálja f-et p közelében”, olyan értelemben, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \varphi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Hangsúlyozzuk tehát, hogy alapvetően *egyetlen deriváltfogalommal operálunk, s az mindig lineáris leképezést jelent.* Ennek a lineáris leképezésnek azonban bizonyos speciális esetekben léteznek egyéb, természetes *interpretációi.* Így a jelen részben minket elsődlegesen érdeklő $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ alakú differenciálható leképezések egy tetszőleges $t \in I$ pontban tekintett deriváltja természetes módon azonosítható egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorral (illetve az $n = 1$ esetben egy valós számmal, a t-beli *differenciálhányados*sal). Ezzel az interpretációs lehetőséggel végig élni fogunk.

Új, de mondhatni zavarbaejtően egyszerű fogalomként kerül bevezetésre az *$\mathbb{R}^n$ pontjaiban vett érintővektorok* fogalma. Ha $p \in \mathbb{R}^n$, akkor egy p-beli érintővektor $v_p := (p, v)$ alakú rendezett pár,

$$T_p\mathbb{R}^n := \{\, v_p \mid v \in \mathbb{R}^n \,\}$$

pedig $\mathbb{R}^n$ érintőtere a p pontban. $T_p\mathbb{R}^n$ kézenfekvő módon valós vektortér-struktúrával ruházható föl, az így adódó vektortér azonban a $v_p \mapsto v$ leképezés révén természetes módon izomorf $\mathbb{R}^n$-nel. Ez azt jelenti, hogy algebrai indokok nemigen hozhatók föl $T_p\mathbb{R}^n$ bevezetése mellett. Vannak azonban geometriai, sőt egyéb, nyomós érvek is. – Kétségkívül az érintővektorok szerepeltetése mellett szól az a körülmény, hogy lehetővé teszik a korrekt szemléltetést: a lerajzolásra kerülő „nyilak” azokból a pontokból indíthatók, amelyekben ténylegesen „támadnak”. $T_p\mathbb{R}^n$ „létjogosultságának” valódi megalapozásával a II. részben fogunk találkozni. Ott ki fog derülni, hogy $T_p\mathbb{R}^n$-nek létezik olyan – a közvetlen geometriai szemlélettől meglehetősen távoli – interpretációja, amely megadja a kulcsot az absztrakt sokaságok érintővektorainak (egyik lehetséges) értelmezéséhez. Kívánatos tehát a $T_p\mathbb{R}^n$-nel s főleg a hozzákapcsolódó formalizmussal minél gyorsabban megbarátkozni!

$\mathbb{R}^n$ p-beli érintővektorai jelen részben praktikusan a *görbementi vektormezők* bevezetését szolgálják. Ha $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, akkor egy *c-menti vektormező*

$$\underline{X} : t \in I \mapsto \underline{X}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$$

alakú differenciálható leképezés. Ez egyértelműen leírható egy olyan $X : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezéssel, amelyre

$$\forall\, t \in I \colon \underline{X}(t) := (c(t), X(t));$$

X a vektormező ún. *csatolt leképezése*. $\underline{X}$ derivált vektormezőjén az

$$\dot{\underline{X}} : t \in I \mapsto \dot{\underline{X}}(t) := (c(t), X'(t))$$

c-menti vektormezőt értjük. Legyen speciálisan $n = 3$, s tegyük föl, hogy $\forall\, t \in I$: $c'(t) \times c''(t) \neq 0$! Ekkor – mint látni fogjuk – képezhetők a

$$\begin{aligned}
&\underline{T} : t \in I \mapsto \underline{T}(t) = (c(t), \frac{1}{\|c'(t)\|}c'(t)),\\
&\underline{F} : t \in I \mapsto \underline{F}(t) = \frac{1}{\|\dot{\underline{T}}(t)\|}\dot{\underline{T}}(t),\\
&\underline{B} := \underline{T} \times \underline{F}
\end{aligned}$$

c-menti vektormezők. A $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ hármast *c Frenet-féle háromélmező*jének nevezzük. Kiderül, hogy a $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ hármasból I-n adott valós értékű, sima függvényekkel képzett lineáris kombinációként minden c-menti vektormező előállítható. Speciálisan azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{T}} &= v\kappa\underline{F}\\
\dot{\underline{F}} &= -v\kappa\underline{T} + v\tau\underline{B}\\
\dot{\underline{B}} &= -v\tau\underline{F}
\end{aligned}$$

ahol $v := \|c'\|$, κ és τ pedig a föntebb már említett görbület-, illetve torziófüggvény. A fölírt összefüggések az ún. *Frenet-egyenletek*, ezekre épül a görbeelméleti problémák szisztematikus tárgyalása.

1. Néhány alapvető tény a lineáris algebrából

1.1. megállapodások.

(a) Egy $\mathbb{K}$ test feletti $m \times n$ típusú mátrixok vektorterét $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$-val jelöljük, speciálisan $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Ha $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, akkor az

$$A = (\alpha^i_j)_{m\times n} =: (\alpha^i_j)$$

írásmódot alkalmazzuk, ahol α^i_j a mátrix i-edik sorának j-edik elemét jelenti, tehát a mátrixelemek megadásakor

felső index	–	*sorindex*
alsó index	–	*oszlopindex*

.

(b) Tegyük föl, hogy V n-dimenziós vektortér a $\mathbb{K}$ test fölött, s legyen $\mathcal{B} = (b_i)^n_{i=1}$ bázisa V-nek. – Tetszőleges $v \in V$ vektor $\mathcal{B}$-re vonatkozó koordinátáit felső indexekkel látjuk el[1], azaz a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \nu^i b_i$$

írásmóddal élünk. Az

$$M_{\mathcal{B}}(v) := \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix} = (\nu^i)^n_{i=1} =: (\nu^i) \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

mátrixot a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó ***koordinátamátrix***ának, röviden ***mátrix***ának hívjuk. Rendszeresen fogjuk használni a

$$\nu^i b_i := \sum_{i=1}^{n} \nu^i b_i$$

típusú rövidítéseket, megállapodva ennek megfelelően abban, hogy

[1] Ez zavart okozhat, amennyiben hatványozás is szerepel. Elkerülendő a félreértést, ilyenkor – szükség esetén – a hatványalapot zárójelbe tesszük, tehát pl. $(\alpha)^2$-et írunk.

ha egy formálisan egytagú kifejezésben ugyanaz az index alsó és felső indexként is szerepel, akkor erre összegzés értendő 1-től n-ig (ahol n aktuális értéke a szövegkörnyezetből kiderül).

Ez az ***Einstein-féle összegzési konvenció***.

(c) Legyen V és W a $\mathbb{K}$ test fölötti vektortér! Alkalmazni fogjuk a következő jelöléseket:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W) =: \mathcal{L}(V,W) := \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ lineáris}\}$$

($\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ helyett $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$-t is írunk);

$$\mathrm{End}(V) := \mathcal{L}(V,V) \ ; \qquad V^* := \mathcal{L}(V,\mathbb{K}).$$

A V^* vektorteret a V vektortér ***duális*** vagy ***konjugált*** terének hívjuk, elemeit ***koevektorok***nak is mondjuk. A konjugált térben a bázisvektorokat látjuk el felső, a kovektorok koordinátáit pedig alsó indexekkel. A V vektortér $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisához ***duális bázis*** a V^* konjugált tér azon $(\ell^i)_{i=1}^n$ bázisa, amelyre

$$\ell^i(b_j) = \delta^i_j := \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = j \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

teljesül, ahol δ^i_j az ún. ***Kronecker-szimbólum***[2]. (Világos, hogy $(\delta^i_j)_{n\times n}$ éppen az $n \times n$-es egységmátrix.) A konstrukció értelmében

$$\forall\ v = \nu^i b_i \in V : \quad \ell^j(v) = \nu^j\ , \qquad 1 \leqq j \leqq n.$$

(d) Emlékeztetünk rá, hogy amennyiben $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$, $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisa a V vektortérnek, $\mathcal{B}' = (b'_j)_{j=1}^m$ pedig bázisa a W vektortérnek, úgy az

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\alpha^i_j) \ :\Longleftrightarrow \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^m \alpha^i_j b'_i =: \alpha^i_j b'_i$$

előírással definiált $m \times n$ típusú mátrixot a lineáris leképezés $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ bázispárra vonatkozó mátrixának hívjuk. Az

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \ : \quad \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\ , \quad \varphi \mapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$$

leképezés ismeretesen lineáris izomorfizmus az $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$ és az $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ vektortér között. Ha $v = \nu^j b_j \in V$, akkor

$$\varphi(v) = \nu^j \varphi(b_j) = \nu^j \alpha^i_j b'_i = (\alpha^i_j \nu^j) b'_i\ ,$$

ami a (b)-ben mondottak figyelembevételével azt jelenti, hogy

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi(v)) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(v).$$

[2] *L. Kronecker* (1823 - 1891), a berlini egyetem tanára.

1.2. példa. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret ($n \in \mathbb{N}^+$)! Ennek a vektortérnek jólismert bázisa az

$$(e_i)_{i=1}^n \ , \quad e_i = (0, \ldots, \overset{i}{\overbrace{1}}, \ldots, 0) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

vektorsorozat, amelyet ***kanonikus bázis***ként említünk a továbbiakban. $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisának duálisa az az $(u^i)_{i=1}^n$ függvénycsalád, amelyre

$$\forall \ a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = \alpha^j e_j \in \mathbb{R}^n \ : \quad u^i(a) = \alpha^i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Az így értelmezett $(u^i)_{i=1}^n$ függvénycsaládot $\mathbb{R}^n$ ***kanonikus koordinátarendszer***ének nevezzük, tagjait $\mathbb{R}^n$ ***természetes koordinátafüggvényei***nek mondjuk. Az $n = 3$, illetve az $n = 2$ esetben a kanonikus koordinátarendszerre az

$$(x, y, z), \quad \text{illetve} \quad (x, y)$$

jelölést is használjuk, így ha $a = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \alpha^i e_i \in \mathbb{R}^3$, akkor

$$x(a) = \alpha^1 \ , \ y(a) = \alpha^2 \ , \ z(a) = \alpha^3 \ .$$

E megállapodás értelmében tehát x, y és z nem vektorkoordinátákat – azaz számokat – jelölnek, hanem koordinátafüggvényeket; a világos különbségtétel igen fontos!

1.3. definíció. *Legyen S tetszőleges, nemüres halmaz, $f : S \to \mathbb{R}^n$ pedig egy leképezés. Az*

$$f^i := u^i \circ f \ : \quad S \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

függvényeket – ahol $(u^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere – az f leképezés ***természetes*** *vagy* ***euklideszi koordinátafüggvényei****nek, illetve egyszerűen csak* ***koordinátafüggvényei****nek hívjuk.*

1.4. megjegyzés. Koordinátafüggvényei segítségével egy $f : S \to \mathbb{R}^n$ leképezést az

$$f = (f^1, \ldots, f^n) \quad \text{vagy} \quad f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$$

alakban adhatunk meg, tekintettel arra, hogy tetszőleges $a \in S$ esetén $f(a) \in \mathbb{R}^n$, s ennélfogva

$$f(a) = (u^1(f(a)), \ldots, u^n(f(a))) = (f^1(a), \ldots, f^n(a))$$

írható.

1.5. definíció.

(a) *Egy V véges dimenziójú, valós vektorteret* ***euklideszi vektortér****nek nevezünk, ha adva van V-n egy* ***belső szorzat****nak mondott*

$$B \ : \quad V \times V \to \mathbb{R} \ , \quad (a, b) \mapsto B(a, b)$$

függvény, amely bilineáris, szimmetrikus és pozitív definit, vagyis amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(SP1) *Rögzített* $a \in V$ *mellett a* $V \to \mathbb{R}$, $\quad v \mapsto B(a,v)$ *függvény lineáris.*

(SP2) $\forall\ a,b \in V\ :\quad B(a,b) = B(b,a)$.

(SP3) $\forall\ v \in V \backslash \{0\}\ :\quad B(v,v) > 0$.

(b) *Tegyük föl, hogy* V *euklideszi vektortér a* B *belső szorzattal!*

(1) *Egy* $v \in V$ *vektor* ***hossza*** *vagy* ***normája***

$$\|v\|_B := [B(v,v)]^{\frac{1}{2}}\ ;$$

a $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|_B$ *függvény a* B*-hez tartozó* ***normafüggvény****.*

(2) *Az* $a,b \in V$ *vektorok* ***ortogonálisak****, ha* $B(a,b) = 0$*; egy* $(b_i)_{i=1}^k$ ***vektorsorozat ortogonális****, ha*

$$B(b_i,b_j) = 0\ , \qquad 1 \leqq i \neq j \leqq n\ ;$$

ortonormált*, ha ortogonális és*

$$\|b_i\|_B = 1\ , \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

1.6. megjegyzések.

(a) Egy valós vektortéren többféle – ténylegesen végtelen sok – belső szorzat létezik, kitüntetett belső szorzat általában nincs. A különböző belső szorzatokra vonatkozóan egy vektor hossza más és más, erre utal a $\|v\|_B$ jelölés. A most következőkben az egyszerűség kedvéért a belső szorzatokra egyöntetűen a szokásos $\langle\ ,\ \rangle$ jelölést használjuk és $B(a,b)$ helyett $\langle a,b\rangle$-t, $\|v\|_B$ helyett $\|v\|$-t írunk.

(b) Tárgyalásunk során az euklideszi vektorterekre vonatkozó alapvető tudnivalókat ismertnek tételezzük föl, így az alábbiakban csupán néhány, nagyon gyakran fölhasználásra kerülő tény áttekintésére szorítkozunk. – Először is arra emlékeztetünk, hogy ha V euklideszi vektortér, akkor $\forall a,b \in V$:

(1) $|\langle a,b\rangle| \leqq \|a\|\ \|b\|$, egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha (a,b) lineárisan függő vektorpár (*Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség*);

(2) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*), speciálisan a

$$d:\quad V \times V \to \mathbb{R}\ , \quad (a,b) \mapsto d(a,b) := \|a-b\|$$

függvény ***metrika***;

(3) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ (*paralelogramma-szabály*).

1.7. állítás. *Vegyünk alapul egy V euklideszi vektorteret!*

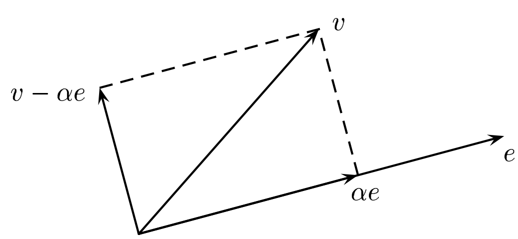
(a) Tegyük föl, hogy $e \in V$ nemzérus vektor. Tetszőleges $v \in V$ vektorhoz egyértelműen megadható egy α valós szám úgy, hogy $v - \alpha e$ ortogonális e-re, nevezetesen

$$\alpha = \frac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle}\ .$$

*A szóbanforgó $\alpha \in \mathbb{R}$ számot a v vektor e-re vonatkozó **Fourier-együttható**jának hívjuk*[3]*, az*

$$\alpha e = \frac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle} e$$

*vektort pedig a v vektor e-re való **ortogonális vetület**ének mondjuk.*



(b) Legyen $(b_i)_{i=1}^k$ nemzérus vektorok alkotta ortogonális vektorsorozata, v pedig tetszőleges vektora V-nek! A

$$v - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$$

vektor ortogonális a megadott vektorsorozat valamennyi tagjára; speciálisan

$$v \in \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k) \iff v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$$

($\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k)$ a $(b_i)_{i=1}^k$ vektorsorozat lineáris lezártját jelöli).

Bizonyítás.

(a) A $\langle v - \alpha e, e\rangle = 0$ követelményből $\langle v, e\rangle - \alpha\langle e, e\rangle = 0$, innen pedig

$$\alpha = \frac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy a keresett skalár egyértelműen meghatározott. $\alpha := \dfrac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle}$ ténylegesen meg is felel a kívánalmaknak, hiszen

$$\langle v - \frac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle} e, e\rangle = \langle v, e\rangle - \frac{\langle v, e\rangle}{\langle e, e\rangle}\langle e, e\rangle = \langle v, e\rangle - \langle v, e\rangle = 0.$$

[3] *J.B.J. Fourier* (1768 - 1830) francia matematikus és fizikus.

(b) $\forall j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\langle v - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i, b_j\rangle = \langle v, b_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle}\langle b_i, b_j\rangle = \langle v, b_j\rangle - \langle v, b_j\rangle = 0.$$

$\sim$ Ha $v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$, akkor evidens, hogy $v \in \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$.

$\sim$ Tegyük föl – megfordítva –, hogy $v \in \mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$! Amennyiben – állításunkkal ellentétben –

$$v - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i \neq 0,$$

akkor a már igazoltak szerint

$$\left(b_1, \dots, b_k, v - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i \right)$$

nemzérus vektorok által alkotott ortogonális vektorsorozata, és így – ismert módon – lineárisan független vektorsorozata a k-dimenziós $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_k)$ vektortérnek, ami ellentmondás, hiszen egy k-dimenziós vektortérben minden lineárisan független vektorsorozat legfeljebb k-tagú. $\square$

1.8. következmény. *Ha $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa a V euklideszi vektortérnek, akkor*

(a) $\forall v \in V : \ v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i\rangle b_i$ *(tehát egy vektor ortonormált bázisra vonatkozó koordinátái éppen a Fourier-együtthatók); v-nek ezt az előállítását a **Fourier-előállítás**ként említjük;*

(b) az $a = \alpha^i b_i$ és $b = \beta^i b_i$ vektor belső szorzata az

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i$$

formula szerint számítható ki. $\square$

1.9. állítás. *Legyen V n-dimenziós euklideszi vektortér ($n \in \mathbb{N}^+$), $(a_i)_{i=1}^n$ tetszőleges bázisa V-nek. – Létezik olyan $(b_i)_{i=1}^n$ ortogonális bázisa V-nek, amelyre*

$$\forall\ j \in \{1, \dots, n\} \ : \quad \mathcal{L}(b_1, \dots, b_j) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_j).$$

Bizonyítás. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárást alkalmazzuk. Ha

$$\begin{aligned}
b_1 &:= a_1 \ , \\
b_2 &:= a_2 - \frac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 \ , \\
b_3 &:= a_3 - \frac{\langle a_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle a_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} b_2 \ , \\
&\vdots \\
b_n &:= a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle a_n, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i \ ,
\end{aligned}$$

akkor 1.7. alapján következik, hogy az így megadott vektorsorozat ortogonális, és az is egyszerűen látható, hogy egyik tagja sem zérusvektor. $(b_i)_{i=1}^n$ ilymódon ortogonális bázis, amely a konstrukcióból kiolvashatóan eleget tesz az előírt kívánalmaknak. □

1.10. állítás (Riesz-lemma).[4] *Ha V euklideszi vektortér és $f : V \to \mathbb{R}$ lineáris függvény – azaz $f \in V^*$ –, akkor létezik egy és csak egy olyan – kizárólag f-től függő – $a \in V$ vektor, hogy*

$$\forall\ v \in V \ : \quad f(v) = \langle a, v\rangle \ .$$

Bizonyítás. Legyen V n-dimenziós! Föltehetjük, hogy $n > 1$; az $n = 1$ esetben az okoskodás hasonló, de jóval egyszerűbb.

(1) Ha $\operatorname{Im} f = \{0\}$, akkor az $a := 0$ választás megfelel, hiszen

$$\forall\ v \in V \ : \quad f(v) = 0 = \langle 0, v\rangle \ .$$

(2) Amennyiben $\operatorname{Im} f \neq 0$, úgy $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, mivel

$$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \dim \operatorname{Im} f = 1 = \dim \mathbb{R} \ ;$$

ennélfogva $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. 1.9. figyelembevételével megadható a $\operatorname{Ker} f \subset V$ altérnek egy $(b_1, \ldots, b_{n-1})$ ortonormált bázisa, és ez alkalmas b_n vektorral kiegészíthető V egy ortonormált bázisává. Ekkor 1.8.(a)-ra tekintettel

$$\forall\ v \in V \ : \quad v = \langle v, b_1\rangle b_1 + \cdots + \langle v, b_{n-1}\rangle b_{n-1} + \langle v, b_n\rangle b_n$$

írható, s így – lévén $f(b_i) = 0$, ha $1 \leqq i \leqq n - 1$ –

$$\forall\ v \in V \ : \quad f(v) = \langle v, b_n\rangle f(b_n) = \langle f(b_n) b_n, v\rangle \ .$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$a := f(b_n) b_n$$

vektor eleget tesz a kívánalmaknak

[4] *Riesz Frigyes* (1880 - 1956) a kolozsvári, a szegedi, majd a budapesti tudományegyetem professzora; századunk egyik meghatározó matematikusa.

(3) Belátjuk végül, hogy az a vektort a kiszabott feltétel egyértelműen meghatározza. – Tegyük föl, hogy egy $a' \in V$ vektorra is teljesül, hogy

$$\forall\ v \in V \ :\quad f(v) = \langle a', v\rangle \ .$$

Ekkor $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle a, v\rangle = \langle a', v\rangle \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle a - a', v\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \quad a = a' \ , \end{aligned}$$

tekintettel a belső szorzat pozitív definitségére. □

1.11. következmény. *Minden euklideszi vektortér természetes módon izomorf a konjugált terével, nevezetesen: ha V euklideszi vektortér, akkor a*

$$\varphi \ :\quad V^* \to V \ ,\quad f \mapsto \varphi(f);\qquad \forall\ v \in V \ :\quad \langle \varphi(f), v\rangle = f(v)$$

leképezés lineáris izomorfizmus V^* és V között.

Bizonyítás. A Riesz-lemma értelmében a φ leképezés jóldefiniált.

∼ *φ lineáris*
$\forall\ f, g \in V\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ ;\ v \in V$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\lambda f + \mu g), v\rangle \quad &:= \quad (\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v) =: \\ &= \quad \lambda\langle \varphi(f), v\rangle + \mu\langle \varphi(g), v\rangle = \\ &= \quad \langle \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g), v\rangle \ , \end{aligned}$$

így v tetszőlegessége folytán, a belső szorzat pozitív definitségének figyelembevételével

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

következik.

∼ *φ injektív*
Ha $\varphi(f) = 0$, akkor

$$\forall\ v \in V \ :\quad f(v) = \langle \varphi(f), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0 \ ,$$

tehát $f = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, ami ekvivalens φ injektívségével.

Mivel V^* és V egyező dimenziójú, φ injektívsége maga után vonja a szürjektívséget (sőt ekvivalens azzal), így φ valóban lineáris izomorfizmus V^* és V között. □

1.12. megjegyzés. Fontos rámutatni, hogy tetszőleges – további struktúrával nem rendelkező – vektortér és a konjugált tere között *természetes* – bázisválasztástól független – izomorfizmus nem adható meg, még a véges dimenziós esetben sem.

1.13. példa. Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren bevezethető egy kitüntetett belső szorzat az

$$\langle a, b\rangle = \langle \alpha^i e_i, \beta^j e_j\rangle := \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i$$

előírás szerint. Erre a belső szorzatra a továbbiakban mint $\mathbb{R}^n$ *kanonikus belső szorzat*ára hivatkozunk, és – ha mást nem mondunk – $\mathbb{R}^n$-et mindig ezzel a belső szorzattal gondoljuk fölruházottnak. Világos, hogy $\mathbb{R}^n$ $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázisa ortonormált a kanonikus belső szorzatra nézve.

1.14. definíció és lemma.

(a) *Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret és legyen $p \in \mathbb{R}^n$. A p* ***pontban vett érintővektor****on, röviden p-**beli vektor**on*

$$v_p := (p, v)\ , \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

rendezett párt értünk, p-t az érintővektor ***kezdőpont****jának vagy* ***támadáspont****jának, v-t pedig a* ***vektori rész****ének mondjuk. Ha két p-beli vektor* ***összegét*** *a*

$$v_p + w_p := (p, v + w) =: (v + w)_p\ ,$$

tetszőleges p-beli vektor ***skalárszoros****át pedig a*

$$\lambda v_p := (p, \lambda v) =: (\lambda v)_p$$

előírással értelmezzük, akkor az összes p-beli vektorok

$$T_p\mathbb{R}^n := \{v_p \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

halmaza valós vektortérré válik, amelyet az $\mathbb{R}^n$ tér p pontbeli ***érintőterének*** *nevezünk. $T_p\mathbb{R}^n$-nek bázisa az*

$$((e_i)_p)_{i=1}^n = ((p, e_i))_{i=1}^n$$

vektorsorozat (ahol $(e_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa); ezt a bázist $T_p\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisaként is említjük. $T_p\mathbb{R}^n$ ***euklideszi vektortér****, ha két p-beli vektor belső szorzatát a*

$$\langle v_p, w_p\rangle := \langle v, w\rangle$$

formulával adjuk meg.

(b) *Tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}^n$ esetén a*

$$T_p\mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^n\ , \quad v_p \mapsto v_q$$

leképezés, valamint a

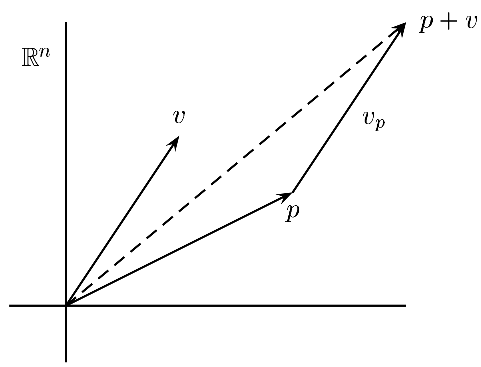
$$T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ , \quad v_p \mapsto v$$

leképezés természetes belsőszorzat-tartó izomorfizmus.

Bizonyítás. Valamennyi állítás közvetlenül adódik a definíciók alapján. □

1.15. megjegyzések.

(a) $\mathbb{R}^n$ elemeit pontokként és vektorokként egyaránt interpretálhatjuk. Az utóbbi esetben egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektor szemléltetése úgy történhet, hogy a $0 \in \mathbb{R}^n$ pontból „nyilat" indítunk a „v-nek megfelelő" pontba. A $v_p = (p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektort ezek után úgy szemléltethetjük, hogy a v-t szemléltető nyilat párhuzamosan eltoljuk p-be. A vektorösszeadás geometriai definíciójára tekintettel az így kapott nyíl végpontjának a $p + v$ pont tekintendő, ezt a pontot ezért a v_p érintővektor *végpont*jának nevezzük.



(b) Megállapodunk abban, hogy ha egy érintővektor kezdőpontja a szövegkörnyezetből világosan kiderül, akkor $v_p, w_p, \dots$ helyett azt is írjuk, hogy $\underline{v}, \underline{w}, \dots$; az aláhúzás tehát arra utal, hogy érintővektorról van szó.

(c) Mivel tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén $T_p\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^n$ között kanonikus belsőszorzat-tartó izomorfizmus adható meg (ld. 1.14.(b)), az $\mathbb{R}^n$ térben dolgozva az érintőterek szerepeltetését gyakran mellőzik. Mi ezzel a lehetőséggel általában *nem* fogunk élni.

2. Vektortér irányítása, vektoriális szorzat

2.1. definíció. *Legyen V a $\mathbb{K}$ test fölötti n-dimenziós vektortér, $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ és $\mathcal{B}' = (b'_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek. A $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{B}'$ bázisra való **átmenet** vagy **bázistranszformáció mátrixán** azt a $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$-vel jelölt mátrixot értjük, amelynek oszlopait a $\mathcal{B}'$ bázis tagjainak a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái alkotják, azaz*

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (\alpha^i_j) \;:\Longleftrightarrow\; b'_j = \alpha^i_j b_i \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

2.2. megjegyzés. A megfelelő definíciókból kiolvasható (v.ö. 1.1.(d)), hogy

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V),$$

ennek alapján pedig egyszerűen adódik, hogy az átmenetmátrix invertálható és

$$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \; (= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)).$$

2.3. állítás.

(a) *Bázistranszformáció alkalmával a vektorkoordináták a bázistranszformáció mátrixának inverzével transzformálódnak – s ilyen értelemben "ellentétesen változók" vagy **kontravariáns**ak –, azaz ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$ bázisa a V vektortérnek, akkor*

$$\forall\, v \in V \;:\quad M_{\mathcal{B}'}(v) = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} M_{\mathcal{B}}(v),$$

illetve az $X' := M_{\mathcal{B}'}(v),\ X := M_{\mathcal{B}}(v),\ P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ jelölések bevezetése után

$$X' = P^{-1}X.$$

(b) *Egy lineáris leképezés különböző bázispárokra vonatkozó mátrixai ekvivalensek: ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$ bázisa a V vektortérnek, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}'$ bázisa a W vektortérnek,*

$$\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W)\ ,\ A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi)\ ,\ A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}'}(\varphi)\ ,\ P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\ ,\ Q := P_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}'}$$

akkor

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Speciálisan egy endomorfizmus különböző bázisokra vonatkozó mátrixai hasonlók: amennyiben $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$ bázisa V-nek, $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, úgy

$$A' = P^{-1}AP\ ,$$

ahol $P := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Bizonyítás.

(a) $M_{\mathcal{B}'}(v) = M_{\mathcal{B}'}(1_V(v)) \overset{1.1.(d)}{=} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)M_{\mathcal{B}}(v) \overset{2.2.}{=} (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1}M_{\mathcal{B}}(v)$.

(b) Emlékeztetünk először a következő összefüggésre: ha U, V, W a $\mathbb{K}$ test fölötti vektorterek; $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ egy-egy rögzített bázisuk; $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(U,V)$, $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V,W)$, akkor

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\psi \circ \varphi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\psi)M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi). \tag{$*$}$$

Induljunk ki ezután a triviális

$$\varphi = 1_W \circ \varphi \circ 1_V \ , \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[d, "1_W"] \\ V \arrow[u, "1_V"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

relációból! ($*$) kétszeri alkalmazásával ebből azt kapjuk, hogy

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}'}(\varphi) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(1_W)M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi)M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V).$$

Itt 2.2-re tekintettel

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} =: P \ , \quad M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}(1_W) = P_{\mathcal{E}'\to\mathcal{E}} = Q^{-1},$$

tehát a kívánt összefüggéshez jutottunk. □

2.4. definíció és következmény. *Véges dimenziójú vektortér **endomorfizmusának** **determinánsán** az endomorfizmus tetszőleges mátrix-reprezentánsának determinánsát értjük. Az endomorfizmusokhoz így hozzárendelt skalár jól definiált: független az endomorfizmus mátrix-reprezentánsának megválasztásától.*

Bizonyítás. Egy endomorfizmus különböző bázisokra vonatkozó mátrixai hasonlók, ebből a mátrixok determinánsának szorzástétele alapján következik a tett észrevétel. □

2.5. állítás és definíció. *Legyen V véges dimenziójú, nemtriviális valós vektortér!*

(a) V bázisainak halmazában a

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \ :\Longleftrightarrow\ \det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) > 0$$

*reláció ekvivalenciareláció, a hozzátartozó ekvivalenciaosztályok száma pontosan kettő. – Kijelölve az ekvivalenciaosztályok egyikét, azt mondjuk, hogy **irányítás**t adtunk meg a vektortéren.*

(b) *A (V, μ) párt **irányított vektortér**nek nevezzük, ha μ irányítás V-n. Ekkor a μ-höz tartozó bázisokat **pozitív** vagy **jobbsodrású**, az ezekkel nem ekvivalens bázisokat **negatív** vagy **balsodrású bázis**okként említjük. Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér **szokásos** vagy **standard irányítás**án azt az irányítást értjük, amelyhez a kanonikus bázis tartozik.*

(c) *A (V, μ) irányított vektortér egy $\varphi : V \to V$ invertálható lineáris transzformációját **irányítástartó**nak, illetve **irányításváltó**nak mondjuk aszerint, amint* $\det \varphi > 0$, *illetve* $\det \varphi < 0$. *φ pontosan akkor irányítástartó, ha tetszőleges $\mathcal{B} \in \mu$ bázis esetén $\varphi(\mathcal{B}) \in \mu$.*

Bizonyítás.

(a) (1) A $\sim$ reláció *reflexív*, mert $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n := (\delta_i^j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, és $\det I_n = 1 > 0$.

(2) A $\sim$ reláció *szimmetrikus.* – Tegyük föl, hogy $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, és legyen $A := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Ekkor $\det A > 0$. Mivel $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = A^{-1}$ (2.2.) és $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} > 0$, következik, hogy $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$.

(3) Teljesül a *tranzitivitás.* – Tegyük föl, hogy $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ és $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$, s legyen a rövidség kedvéért $A := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, $B := P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$.
Ekkor a feltétel értelmében $\det A > 0,\ \det B > 0$, s mivel $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''} = BA$ és $\det(BA) = \det B \det A > 0$, kapjuk, hogy $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$.

(4) Van *legalább két* ekvivalenciaosztály. – Tekintsük V-nek egy $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázisát és legyen $\mathcal{B}' := (b_2, b_1, \ldots, b_n)$! Ekkor

$$\det(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

s ennélfogva $\mathcal{B} \not\sim \mathcal{B}'$.

(5) *Legföljebb két* ekvivalenciaosztály van. – Tegyük föl, hogy $\mathcal{B}' \not\sim \mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'' \not\sim \mathcal{B}$; legyen $A := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, $B := P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$. Ekkor $\det A < 0,\ \det B < 0$ és $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = BA^{-1}$. Mivel

$$\det(BA^{-1}) = \det B \det A^{-1} = \frac{\det B}{\det A} > 0,$$

$\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$ következik, ami állításunk helyességét jelenti.

(c) Tekintsük a (V, μ) irányított vektortér $\varphi : V \to V$ invertálható lineáris transzformációját!

(1) Tegyük föl, hogy $\det\varphi > 0$, és legyen $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n) \in \mu$! Ekkor

$$\varphi(\mathcal{B}) := (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$$

szintén bázisa V-nek (izomorfizmus bázist bázisba visz át) és $P_{\mathcal{B}\to\varphi(\mathcal{B})} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Ebből $\det(P_{\mathcal{B}\to\varphi(\mathcal{B})}) > 0$ következik, ami azt jelenti, hogy $\varphi(\mathcal{B}) \in \mu$.

(2) Megfordítva, $\varphi(\mathcal{B}) \in \mu$ esetén $\varphi(\mathcal{B}) \sim \mathcal{B}$, s így

$$\det(\varphi) \overset{2.4.}{=} \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \det(P_{\mathcal{B}\to\varphi(\mathcal{B})}) > 0.$$

□

2.6. megjegyzés. Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban az $\mathbb{R}^n$ teret irányítottnak tekintjük, ellátva a standard irányítással. Ez tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén a $T_p\mathbb{R}^n$ érintőtéren is irányítást indukál, amelyet az $((e_i)_p)_{i=1}^n$ bázis reprezentál.

2.7. példa. Tekintsük a

$$\varphi \; : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \; , \quad a \mapsto \varphi(a) := -a$$

leképezést („origóra vonatkozó tükrözés")! Mivel $\det\varphi = (-1)^n$, φ aszerint irányítástartó, illetve irányításváltó, amint n páros, illetve páratlan.

2.8. állítás és definíció. *Legyen adva a kanonikus belső szorzattal és a standard irányítással ellátott $\mathbb{R}^3$ euklideszi vektortér!*

$$\forall\; a, b \in \mathbb{R}^3 : \;\exists!\; a \times b \in \mathbb{R}^3 : \;\forall\; v \in \mathbb{R}^3 \; : \quad \langle a \times b, v\rangle = \det\begin{pmatrix} v \\ a \\ b \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{pmatrix} v \\ a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix} ,$$

ha $v = \nu^i e_i,\; a = \alpha^i e_i,\; b = \beta^i e_i$.
*Az $a \times b$ vektort az a és b vektorok **vektoriális szorzat**ának nevezzük, az*

$$(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto a \times b \in \mathbb{R}^3$$

*leképezést **vektoriális szorzás**nak mondjuk. A vektoriális szorzás rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(1) ferdeszimmetrikus: $\forall\; a, b \in \mathbb{R}^3 : \quad a \times b = -b \times a$;

(2) bilineáris;

(3) a vektoriális szorzat mindkét tényezőjére ortogonális:
$\forall\; a, b \in \mathbb{R}^3 : \quad \langle a \times b, a\rangle = \langle a \times b, b\rangle = 0$;

(4) $a \times b = 0 \iff (a, b)$ *lineárisan függő vektorpár;*

(5) $a \times b \neq 0 \implies (a, b, a \times b)$ *pozitív bázisa* $\mathbb{R}^3$*-nak;*

(6) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 \ : \quad \langle a \times b, c\rangle = \langle b \times c, a\rangle$*;*

(7) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 \ : \quad (a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a$*;*

(8) $\forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}^3 \ : \quad \langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle\langle a, d\rangle$*;*

(9) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^3 \ : \quad \|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$ *(**Lagrange-identitás**[1]);*

(10) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 \ : \quad (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ *(**Jacobi-identitás**[2]).*

Bizonyítás.

(a) *Egzisztencia és unicitás.* – Mivel rögzített $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén a

$$v \in \mathbb{R}^3 \mapsto \det \begin{pmatrix} v \\ a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

függvény lineáris, a Riesz-lemma értelmében létezik pontosan egy olyan $c \in \mathbb{R}^3$ vektor, hogy

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^3 \ : \quad \langle c, v\rangle = \det \begin{pmatrix} v \\ a \\ b \end{pmatrix};$$

ezt a vektort jelöljük $a \times b$-vel.

(b) *Műveleti tulajdonságok.*

(1) $\forall\ v \in \mathbb{R}^3 \ : \quad \langle b \times a, v\rangle := \det \begin{pmatrix} v \\ b \\ a \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} v \\ a \\ b \end{pmatrix} =: -\langle a \times b, v\rangle =$
$= \langle -(a \times b), v\rangle \implies a \times b = -(b \times a).$

(2) Tekintettel a ferdeszimmetriára, a bilinearitás igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy rögzített $b \in \mathbb{R}^3$ mellett az

$$a \in \mathbb{R}^3 \mapsto a \times b \in \mathbb{R}^3$$

[1] *J.L. Lagrange* (1736 - 1813) francia tudós, Euler mellett a XVIII. századi matematika meghatározó egyénisége.
[2] *G. Jacobi* (1804 - 1851) német matematikus és fizikus.

leképezés lineáris. – Legyen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$!

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad \langle (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \times b, v\rangle = \det \begin{pmatrix} v \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ b \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \det \begin{pmatrix} v \\ a_1 \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \det \begin{pmatrix} v \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} =: \lambda_1 \langle a_1 \times b, v\rangle +$$

$$+\lambda_2 \langle a_2 \times b, v\rangle = \langle \lambda_1 (a_1 \times b) + \lambda_2 (a_2 \times b), v\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \times b = \lambda_1 (a_1 \times b) + \lambda_2 (a_2 \times b).$$

(3) $\langle a \times b, a\rangle := \det \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0$, s ugyanígy kapjuk azt is, hogy $\langle a \times b, b\rangle = 0$.

(4) – Ha az (a, b) vektorpár lineárisan függő, akkor

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 0 = \det \begin{pmatrix} v \\ b \\ a \end{pmatrix} =: \langle a \times b, v\rangle \implies a \times b = 0.$$

– Tegyük föl, hogy (a, b) lineárisan független! Ekkor alkalmas $c \in \mathbb{R}^3$ vektor segítségével (a, b) kiegészíthető $\mathbb{R}^3$ egy bázisává. Mivel így

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \langle a \times b, c\rangle \neq 0,$$

$a \times b \neq 0$ adódik. Meggondolásunkból a kontrapozíció elvének alkalmazásával következik, hogy

$$a \times b = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a, b) \text{ lineárisan függő.}$$

(5) Belátjuk először, hogy $(a, b, a \times b)$ lineárisan független vektorhármas. Tegyük föl, hogy

$$\alpha a + \beta b + \gamma (a \times b) = 0.$$

Véve mindkét oldal belső szorzatát $a \times b$-vel, (3)-ra tekintettel azt kapjuk, hogy

$$\gamma \|a \times b\|^2 = 0.$$

Mivel $a \times b \neq 0$ miatt $\|a \times b\|^2 \neq 0$, innen $\gamma = 0$ következik, s így a vizsgált összefüggés az

$$\alpha a + \beta b = 0$$

relációra redukálódik. Képezzük mindkét oldal vektoriális szorzatát a-val majd b-vel! (1) vagy (4) miatt $a \times a = b \times b = 0$, ezért

$$\beta (b \times a) = 0, \quad \text{illetve} \quad \alpha (a \times b) = 0$$

adódik, ahonnan $a \times b \neq 0$ és (1) alapján

$$\beta = 0 \quad \text{és} \quad \alpha = 0$$

következik. $(a, b, a \times b)$ tehát valóban lineárisan független vektorsorozata és ennélfogva bázisa $\mathbb{R}^3$-nek.
Világos, hogy ha

$$A := P_{(e_1,e_2,e_3)\to(a,b,a\times b)},$$

akkor

$$A = (a, b, a \times b).$$

Így

$$\det A = \det {}^t\!A = \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \times b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \times b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \|a \times b\|^2 > 0;$$

ez azt jelenti, hogy az $(a, b, a \times b)$ bázis pozitív bázis.

(6) $\langle a \times b, c\rangle := \det \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =: \langle b \times c, a\rangle.$

(7) Vegyük először is észre, hogy a kanonikus bázis tagjainak vektoriális szorzatai

$$e_1 \times e_2 = e_3 \ , \ e_2 \times e_3 = e_1 \ , \ e_3 \times e_1 = e_2 \ ,$$

hiszen a Fourier-előállítás (1.8.) alkalmazásával például

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= \langle e_1 \times e_2, e_1\rangle e_1 + \langle e_1 \times e_2, e_2\rangle e_2 + \langle e_1 \times e_2, e_3\rangle e_3 \overset{(3)}{=} \\ &= \langle e_1 \times e_2, e_3\rangle e_3 = \det \begin{pmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} e_3 = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} e_3 = e_3. \end{aligned}$$

A bázisvektorok e szorzótáblája segítségével kapjuk, hogy ha

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \ , \quad b = \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3,$$

akkor

$$\begin{aligned} a \times b &= \alpha^2\beta^1(e_2 \times e_1) + \alpha^3\beta^1(e_3 \times e_1) + \alpha^1\beta^2(e_1 \times e_2) + \\ &+ \alpha^3\beta^2(e_3 \times e_2) + \alpha^1\beta^3(e_1 \times e_3) + \alpha^2\beta^3(e_2 \times e_3) = \\ &= (\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)e_1 - (\alpha^1\beta^3 - \alpha^3\beta^1)e_2 + (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)e_3. \end{aligned}$$

Ezt fölhasználva

$$(a \times b) \times e_3 = -(\alpha^1\beta^3 - \alpha^3\beta^1)e_1 - (\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)e_2.$$

Másrészt

$$\begin{aligned}&\langle a, e_3\rangle b - \langle b, e_3\rangle a = \\ &\quad = \alpha^3 b - \beta^3 a = \alpha^3\beta^1 e_1 + \alpha^3\beta^2 e_2 - \beta^3\alpha^1 e_1 - \beta^3\alpha^2 e_2 = \\ &\quad = -(\alpha^1\beta^3 - \alpha^3\beta^1)e_1 - (\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2)e_2,\end{aligned}$$

következésképpen

$$(a \times b) \times e_3 = \langle a, e_3\rangle b - \langle b, e_3\rangle a,$$

tehát a bizonyítandó összefüggés a $c := e_3$ speciális esetben igaz. Analóg módon kapjuk a helyességét akkor is, ha $c := e_1$, illetve ha $c := e_2$. Az így adódó három összefüggésből azonban a vektoriális szorzás bilinearitása alapján következik, hogy

$$\forall\ c \in \mathbb{R}^3 \ :\quad (a \times b) \times c = \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a.$$

(8) $\langle a \times b, c \times d\rangle \overset{(6)}{=} \langle b \times (c \times d), a\rangle \overset{(1)}{=} \langle (d \times c) \times b), a\rangle \overset{(7)}{=}$
$= \langle \langle b, d\rangle c - \langle b, c\rangle d, a\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle\langle a, d\rangle$.

(9) – triviális következménye (8)-nak.

(10) $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b \overset{(8)}{=}$
$= \langle a, c\rangle b - \langle b, c\rangle a + \langle a, b\rangle c - \langle a, c\rangle b + \langle b, c\rangle a - \langle a, b\rangle c = 0.$ □

2.9. következmény. *Az $\mathbb{R}^3$ vektortér valós Lie-algebra*[3] *a vektoriális szorzás műveletével.* □

2.10. állítás. *Az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy (a, b, c) bázisa akkor és csak akkor jobbsodrású (a kanonikus irányításra nézve), ha $\langle a \times b, c\rangle > 0$.*

Bizonyítás. Az (a, b, c) bázis jobbsodrású volta 2.5. értelmében definíció szerint azt jelenti, hogy az

$$A := P_{(e_1,e_2,e_3)\to(a,b,c)}$$

átmenetmátrix pozitív determinánsú. Ha $a = \alpha^i e_i,\ b = \beta^i e_i,\ c = \gamma^i e_i$, akkor

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} =: (a\ b\ c)\ ;$$

így

$$\det A = \det {}^t\!A = \det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} =: \langle a \times b, c\rangle,$$

amiből kiolvasható az állítás. □

[3] A Lie algebrák (általános) definícióját a II.1.17-ben adjuk meg.

2.11. állítás. $\forall\ \varphi \in \operatorname{End}\mathbb{R}^3;\ a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c)\rangle = \det\varphi\langle a \times b, c\rangle.$$

Bizonyítás. A kanonikus bázis rögzítése után

$$\exists!\ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ \ :\ \ \ \forall\ v \in \mathbb{R}^3\ \ :\ \varphi(v) = AM(v)$$

(v.ö. 1.1.), ahol

$$M(v) := M_{(e_1,e_2,e_3)}(v) = \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \\ \nu^3 \end{pmatrix}, \quad \text{ha} \quad v = \nu^i e_i.$$

Okoskodásunk további részében a $v \in \mathbb{R}^3$ vektorokat azonosítjuk $M(v)$ koordinátamátrixukkal s egyszerűen $\varphi(v) = Av$-t írunk. Így

$$\begin{aligned} \langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c)\rangle &= \langle Aa \times Ab, Ac\rangle =: \det \begin{pmatrix} {}^t(Ac) \\ {}^t(Aa) \\ {}^t(Ab) \end{pmatrix} = \\ &= \det {}^t(Ac\ Aa\ Ab) = \det(Ac\ Aa\ Ab) = \det(Aa\ Ab\ Ac). \end{aligned}$$

Ha

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

akkor

$$Aa = \begin{pmatrix} A_1a \\ A_2a \\ A_3a \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} A_1b \\ A_2b \\ A_3b \end{pmatrix}, \quad Ac = \begin{pmatrix} A_1c \\ A_2c \\ A_3c \end{pmatrix},$$

következésképpen

$$(Aa\ Ab\ Ac) = \begin{pmatrix} A_1a & A_1b & A_1c \\ A_2a & A_2b & A_2c \\ A_3a & A_3b & A_3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} (a\ b\ c) = A(a\ b\ c);$$

ezt figyelembe véve

$$\begin{aligned} \langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c)\rangle &= \det(Aa\ Ab\ Ac) = \det[A(a\ b\ c)] = \\ &= \det A \det(a\ b\ c) = \det A \det \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \\ &= \det A\langle a \times b, c\rangle = \det\varphi\langle a \times b, c\rangle. \end{aligned}$$

□

3. Transzformációk

3.1. definíció. *Legyen* (M, d) *és* (M', d') *metrikus tér*[1]. *– Egy* $f : M \to M'$ *leképezést **izometriá**nak nevezünk, ha*

(1) szürjektív;

(2) $\forall\ p, q \in M \ :\quad d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$.

3.2. megjegyzés. A (2) feltétel alapján közvetlenül adódik, hogy minden izometria bijekció. Az is egyszerűen ellenőrizhető, hogy izometriák kompozíciója, valamint izometria inverze ugyancsak izometria, így speciálisan egy metrikus tér önmagára való összes izometriái csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével; ezt a csoportot a metrikus tér ***izometriacsoport***jának nevezzük.

3.3. lemma és definíció. *Ha* V *egy* $\mathbb{K}$ *test fölötti vektortér és*

$$GL(V) := \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid \varphi \text{ bijektív}\}\ ,$$

akkor $GL(V)$ *a leképezés-kompozíció műveletével csoport, amelyet a* V *vektortér **általános lineáris csoport**jának hívunk.*

3.4. állítás és definíció. *Tegyük föl, hogy* V *és* V' *egyező dimenziójú euklideszi vektortér, s legyen adva egy* $\varphi : V \to V'$ *leképezés.*

(a) φ*-re vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) φ *lineáris és normatartó:* $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ *és* $\forall\ v \in V \ :\quad \|\varphi(v)\| = \|v\|$.

(2) φ *megtartja a belső szorzatot:* $\forall\ u, v \in V \ :\quad \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

*(b) Minden, az (1) vagy (2) tulajdonsággal rendelkező leképezés **lineáris izometria*** V *és* V' *között ; ezek halmazát* $O(V, V')$*-vel jelöljük.*

(c) $O(V) := O(V, V)$ *csoport a leképezés-kompozíció műveletével; ezt a csoportot a* V *euklideszi vektortér **ortogonális csoport**jának, elemeit **ortogonális transzformációk**nak nevezzük;* $\varphi : V \to V$ *tehát ortogonális transzformáció, ha belsőszorzat-tartó vagy – ekvivalens módon – ha* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ *és* φ *normatartó.*

[1] A metrikus terekről kicsit bővebben II.3.6 - 3.9-ben szólunk.

Bizonyítás.

(a) (1) $\Longrightarrow$ (2) $\quad \forall\, u, v \in V$:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\varphi(u)+\varphi(v)\|^2 - \|\varphi(u)\|^2 - \|\varphi(v)\|^2\right) \overset{\text{linearitás}}{=} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\varphi(u+v)\|^2 - \|\varphi(u)\|^2 - \|\varphi(v)\|^2\right) \overset{\text{normatartás}}{=} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \langle u, v \rangle.
\end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) A belsőszorzat-tartás automatikusan maga után vonja a normatartást; megmutatjuk, hogy a linearitás is következik belőle. – Legyen $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa V-nek! Ekkor $\dim V' = \dim V$ és φ belsőszorzat-tartása miatt $(\varphi(b_i))_{i=1}^n$ szintén ortonormált bázis (V'-ben). Így a Fourier-előállítás (1.8.) alkalmazásával

$$\forall\ v \in V\ :\quad \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(v), \varphi(b_i) \rangle \varphi(b_i) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle \varphi(b_i)$$

írható, ahonnan kiolvasható φ linearitása.

(b) Tegyük föl, hogy $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ és hogy φ normatartó! Ha $\varphi(v) = 0$, akkor $\|\varphi(v)\| = \|v\| = 0 \implies v = 0$, tehát $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, s így φ injektív. Ebből $\dim V' = \dim V$ folytán az is adódik, hogy φ szürjektív. Mivel a normatartás miatt

$$\begin{aligned}
\forall\ a, b \in V\ :\quad & d(\varphi(a), \varphi(b)) := \|\varphi(a) - \varphi(b)\| = \|\varphi(a-b)\| = \\
& = \|a-b\| =: d(a,b),
\end{aligned}$$

megállapíthatjuk, hogy φ izometria, mégpedig lineáris izometria.

(c) Annak ellenőrzése, hogy $O(V)$ csoport, egyszerű gyakorló feladat. $\square$

3.5. következmény. *Legyen V euklideszi vektortér!*

(a) $O(V) \subset GL(V)$.

(b) Ha $\dim V = n$, *akkor V izometrikusan izomorf a kanonikus belső szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.*

Bizonyítás.

(a) közvetlenül adódik az állításból.

(b) igazolása végett válasszunk V-ben egy $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázist, s tekintsük a

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n\ , \quad v = \nu^i b_i \mapsto (\nu^1, \ldots, \nu^n) = \nu^i e_i$$

leképezést! Ekkor $\forall\ a = \alpha^i b_i\ ,\ b = \beta^i b_i \in V$:

$$\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle = \langle \alpha^i e_i, \beta^i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \beta^i \overset{1.8.(b)}{=} \langle a, b \rangle,$$

tehát φ belsőszorzat-tartó. Ez 3.4.(b) alapján azt jelenti, hogy φ lineáris izometria – s így egyben lineáris izomorfizmus V és $\mathbb{R}^n$ között. □

3.6. megjegyzés. Ismeretes a lineáris algebrából, hogy ortogonális transzformációt ortonormált bázisra vonatkozóan ortogonális mátrix reprezentál, vagyis olyan mátrix, amelynek inverze a transzponáltjával egyenlő. Ebből egyszerűen adódik, hogy egy ortogonális transzformáció determinánsa csakis 1 vagy -1 lehet.

3.7. definíció és lemma. *Egy euklideszi vektortér 1 determinánsú ortogonális transzformációit* ***forgás****oknak nevezzük. Ha V euklideszi vektortér, akkor*

$$O^+(V) := \{\varphi \in O(V) \mid \det \varphi = 1\}$$

csoport a leképezés-kompozíció műveletével, ezt a csoportot a V forgáscsoportjának hívjuk. □

3.8. definíció.

(a) Az $\mathbb{R}^n$ tér ***transzlációj****án*

$$\tau_q\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ ,\quad p \mapsto \tau_q(p) := p + q$$

alakú leképezést értünk, ahol $q \in \mathbb{R}^n$ (tetszőlegesen) rögzített vektor.

(b) Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést ***affin transzformáció****nak mondunk, ha előállítható egy invertálható lineáris transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként, azaz ha*

$$f = \tau_q \circ \varphi\ ; \qquad q \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$$

írható, s ennélfogva

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^n\ :\quad f(p) = \varphi(p) + q.$$

Ekkor φ-t az affin transzformáció ***lineáris rész****ének, τ_q-t pedig a* ***transzlációrész****ének hívjuk. Egy affin transzformációt* ***irányítástartó****nak, illetve* ***irányításváltó****nak nevezünk aszerint, amint a lineáris része irányítástartó, illetve irányításváltó.*

(c) $\mathbb{R}^n$ ***euklideszi mozgás****án olyan affin transzformációt értünk, amelynek lineáris része ortogonális transzformáció.*

3.9. tétel. *$\mathbb{R}^n$ egy transzformációja pontosan akkor izometria, ha előállítható egy ortogonális transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként, így $\mathbb{R}^n$ izometriacsoportja egybeesik az euklideszi mozgások csoportjával.*

Bizonyítás.

(a) Tekintsünk egy
$$f = \tau_q \circ \varphi \; ; \qquad q \in \mathbb{R}^n, \; \varphi \in O(\mathbb{R}^n)$$
euklideszi mozgást! $\forall \; a, b \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned} d(f(a), f(b)) \;&:=\; \|f(a) - f(b)\| = \|\varphi(a) + q - \varphi(b) - q\| = \\ &=\; \|\varphi(a) - \varphi(b)\| \overset{3.4.}{=} \|\varphi(a - b)\| \overset{3.4.}{=} \|a - b\| = \\ &=\; d(a, b) \; , \end{aligned}$$
f tehát izometria. (A szürjektívség abból adódik, hogy f nyilvánvalóan szürjektív leképezések kompozíciója.)

(b) Tegyük föl – megfordítva –, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometria!
Bevezetve a $q := f(0)$ jelölést, képezzük a
$$g \;:\quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \;, \quad p \mapsto g(p) := f(p) - q$$
transzformációt! Ekkor
$$\forall \; p \in \mathbb{R}^n \;:\quad f(p) = g(p) + q = \tau_q(g(p)) = (\tau_q \circ g)(p),$$
azaz
$$f = \tau_q \circ g.$$
Belátjuk, hogy g ortogonális transzformáció.

(1) g fixen hagyja az origót:
$$g(0) = f(0) - q = q - q = 0.$$

(2) g belsőszorzat-tartó:
$$\begin{aligned} \forall \; a, b \in \mathbb{R}^n \quad : \quad & -2\langle g(a), g(b)\rangle \overset{(1)}{=} \|g(a) - g(b)\|^2 - \|g(a) - g(0)\|^2 - \\ & -\|g(b) - g(0)\|^2 \overset{(*)}{=} \|a - b\|^2 - \|a - 0\|^2 - \|b - 0\|^2 = \\ & = -2\langle a, b\rangle, \end{aligned}$$
a $(*)$-gal jelölt lépésnél azt használva föl, hogy g izometria (hiszen $g = \tau_{-q} \circ f$ írható, s így g izometriák kompozíciója). Ilymódon
$$\forall \; a, b \in \mathbb{R}^n \;:\quad \langle g(a), g(b)\rangle = \langle a, b\rangle,$$
ami 3.4. értelmében azt jelenti, hogy g valóban ortogonális transzformáció, következésképpen f euklideszi mozgás. □

3.10. megjegyzések.

(a) A tétel lehetővé teszi, hogy a 3.8.(b) szerinti értelemben szólhassunk $\mathbb{R}^n$ irányítástartó, illetve irányításváltó izometriáiról; az előbbiek éppen azok az euklideszi mozgások, amelyeknek ortogonális része forgás.

(b) Az $\mathbb{R}^n$ ***tér euklideszi geometriájá***n azon fogalmak és tulajdonságok összességét értjük, amelyek megőrződnek izometriák alkalmazása esetén – más szóval: az izometria-csoport – vagy ami ugyanaz: az euklideszi mozgások csoportja – invariánsainak elméletét. Így például az $\mathbb{R}^3$ tér euklideszi geometriájához tartozik

- az egyenesek, síkok... szöge,
- a sokszögek területe,
- a poliéderek térfogata.

A geometriai fogalmak, illetve a geometriák osztályozásának ezt az elvét F. Klein (1849 - 1925) fogalmazta meg 1872-ben, az erlangeni egyetemen tartott habilitációs előadásában. Ennek az ún. ***erlangeni program***nak értelmében – általánosan szólva – egy geometrián egy adott halmazon ható transzformációcsoport invariánsainak elmélete értendő. (Az, hogy mit jelent itt az invariáns, matematikailag pontosan definiálható.) – Ha egy transzformációcsoport bővítődik, az illető halmazon általánosabb geometriához jutunk, míg a transzformációcsoport szűkítése az invariánsok finomabb rendszeréhez és a geometriai objektumok finomabb osztályozásához vezet. Így $\mathbb{R}^n$ euklideszi geometriájánál általánosabb geometriát kapunk, ha transzformációcsoportnak az affin transzformációk csoportját választjuk; ez az ún. ***affin geometria***. Az affin geometriánál speciálisabb – de az euklideszi geometriánál még mindig általánosabb – az ún. ***ekviaffin geometria***, itt a transzformációcsoportot azok az affin transzformációk alkotják, amelyeknél a lineáris rész determinánsa 1; ezeket ***ekviaffin transzformációk***nak hívjuk.

Az $\mathbb{R}^n$ tér így adódó három geometriájának vázlatos összehasonlításaként tekintsük a következő táblázatot:

Geometria	*Transzformációcsoport*	*Invariánsok*
affin	affin csoport: $\{\tau_a \circ \varphi \mid a \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in GL(\mathbb{R}^n)\}$	párhuzamosság, osztóviszony, térfogatarány
ekviaffin	ekviaffin csoport: $\{\tau_a \circ \varphi \mid a \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in GL(\mathbb{R}^n) \wedge \det\varphi = 1\}$	párhuzamosság, osztóviszony, térfogat, irányítás
euklideszi	euklideszi mozgások csoportja: $\{\tau_a \circ \varphi \mid a \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in O(\mathbb{R}^n)\}$	párhuzamosság, osztóviszony, térfogat, hossz, szög

Tegyük föl a határozottság kedvéért, hogy $n = 2$! Azzal kapcsolatban, hogy $\mathbb{R}^2$ geometriai objektumainak ekvivalenciája – azaz a kijelölt transzformációcsoport elemeivel egymásba átvihető alakzatok osztálya – miként függ a transzformációcsoport „méretétől”, jegyezzük meg a következőket:

(1) $\mathbb{R}^2$ bármely két paralelogrammája, háromszöge, ellipszise (speciálisan a kört is ellipszisnek tekintve) affin értelemben ekvivalens egymással: tetszőlegesen megadva két paralelogrammát (háromszöget, ellipszist), ezek egyike affin transzformációval átvihető a másikba. Így affin szempontból például a paralelogrammáknak nem lehet kijelölni olyan speciális osztályát, mint a téglalapok, négyzetek vagy rombuszok osztálya.

(2) Ha leszűkítjük az affin csoportot az ekviaffin csoportra, akkor az osztályozás finomabbá válik. Most már két paralelogramma vagy két háromszög nem szükségképpen ekvivalens; ez akkor és csak akkor következik be, ha területeik megegyeznek. Analóg észrevétel vonatkozik az ellipszisekre is.

(3) Az euklideszi mozgások csoportjára nézve két paralelogramma (illetve két háromszög) akkor és csak akkor ekvivalens, ha úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy a megfelelő oldalak és szögek hossz-, illetve szögmértéke egyenlő; ilyenkor ezeket az alakzatokat ***kongruens***eknek mondjuk. Kör és valódi ellipszis nem lehet ekvivalens.

(c) Klein erlangeni programja az elemi geometriákkal foglalkozott. A legbővebb csoportként a projektív transzformációk csoportja szerepelt, a többi transzformációcsoport ennek részcsoportjaként adódott. A későbbiekben mindazon geometriákat, amelyekre alkalmazható volt a Klein-féle osztályozási elv, ***Klein-geometriák***nak nevezték.

(d) Történeti érdekességként megemlítjük, hogy Klein mindössze 23 évesen habilitált Erlangenben. Arra, hogy az erlangeni program nyomtatásban is megjelenjen, majdnem 20 évet kellett várni. Először olaszul publikálták 1890-ben, aztán franciául 1891-ben, s csak végül, 1893-ban németül. Klein geometriafölfogása jelentős hatással volt a geometria fejlődésére. A differenciálgeometriára történő alkalmazása a múlt század végén – e század elején indult meg; S. Lie (1842 - 1899) norvég matematikus, Klein barátja, majd E. Cartan (1869 - 1949) francia matematikus és W. Blaschke (1885 - 1962) német matematikus játszott úttörő szerepet abban, hogy a program hatóköre további, nem csak Klein-féle geometriákra is kiterjedjen. Ilyen további geometria a Riemann-geometria, illetve – általánosabban – az affinösszefüggő sokaságok geometriája, amelyekről a III. részben lesz szó.

4. Differenciálás

4.1. definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, s tekintsünk egy $f : U \to \mathbb{R}^m$ leképezést!*

(a) *Megadva egy $p \in U$ pontot, válasszuk ki a $0 \in \mathbb{R}^n$ pontnak egy olyan U_0 környezetét, amelyre teljesül, hogy $\forall\ h \in U_0\ :\ p + h \in U$. – Azt mondjuk, hogy f differenciálható a p pontban, ha*

$$\exists\ \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\ :\quad \lim_{h \to 0,\ h \in U_0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \varphi(h)\|}{\|h\|} = 0\ .$$

*A φ lineáris leképezést ekkor az f leképezés p-**beli deriváltjának** nevezzük, s rá az $f'(p)$ jelölést használjuk. $f'(p)$-nek arra a bázispárra vonatkozó mátrixát, amelyet $\mathbb{R}^n$, illetve $\mathbb{R}^m$ kanonikus bázisa alkot, f p-beli **Jacobi-mátrixának** hívjuk.*

(b) *f-et differenciálhatónak mondjuk U fölött, ha annak minden pontjában differenciálható; ilyenkor az*

$$f'\ :\quad U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad p \mapsto f'(p)$$

leképezést f deriváltjaként említjük. Amennyiben $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nemüres halmaz és $g : H \to \mathbb{R}^m$ egy leképezés, úgy g-t akkor nevezzük H-n differenciálhatónak, ha van olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenciálható leképezés, hogy $H \subset U$ és $f \restriction H = g$.

(c) *Tegyük föl, hogy f differenciálható U fölött! – Azt mondjuk, hogy az f leképezés egy $p \in U$ pontban*

- ***immerzió**, ha $f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ injektív;*
- ***szubmerzió**, ha $f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ szürjektív;*
- ***reguláris**, ha egyidejűleg immerzió és szubmerzió, vagyis ha $f'(p)$ lineáris izomorfizmusa $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{R}^m$-re.*

f-et az U nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$-be való immerziójának, szubmerziójának, illetve reguláris leképezésének nevezzük, ha U minden pontjában rendelkezik a kérdéses tulajdonsággal.

(d) *f **diffeomorfizmus**a U-nak egy $V \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmazra, ha olyan differenciálható bijekciója U-nak V-re, amelynek az $f^{-1} : V \to U$ inverz leképezése is differenciálható.*

4.2. állítás.

(a) *Ha egy leképezésnek egy pontban létezik deriváltja, akkor az egyértelműen meghatározott.*

(b) *Tegyük föl, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s legyenek $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenciálható leképezések. Ekkor $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ :\ \lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m$ differenciálható leképezés, és*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

(c) *(**Láncszabály**) Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^m$ és $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenciálható leképezés, akkor a $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ leképezés ugyancsak differenciálható, és*

$$\forall\ p \in U\ :\quad (g \circ f)'(p) = g'[f(p)] \circ f'(p). \qquad \square$$

4.3. következmény.

(1) *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ konstans leképezés, akkor*
$\forall\ p \in \mathbb{R}^n\ :\quad \exists\ f'(p)$ és $f'(p) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(2) *Amennyiben f lineáris leképezése $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{R}^m$-be, úgy*
$\forall\ p \in \mathbb{R}^n\ :\quad \exists\ f'(p)$ és $f'(p) = f$.

(3) *$\mathbb{R}^n$ affin transzformációi differenciálhatók, és tetszőleges pontban vett deriváltjuk a lineáris részükkel egyezik meg.*

Bizonyítás.

(a) Közvetlenül kiolvasható a definícióból, hogy ha f konstans leképezés, akkor a $\varphi := 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ választással tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ pontban teljesül a differenciálhatóság feltétele.

(b) Megmutatjuk (3) teljesülését, ebből speciális esetként adódik (2). – Tekintsük az

$$f = \tau_a \circ \varphi\ ; \qquad a \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$$

affin transzformációt! Mivel

$$\begin{aligned} \forall\ p \in \mathbb{R}^n\quad :\quad & \lim_{h \to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \varphi(h)\|}{\|h\|} = \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\|\varphi(p+h) + a - \varphi(p) - a - \varphi(h)\|}{h} = \\ & = \lim_{h \to 0} \frac{\|0\|}{\|h\|} = 0, \end{aligned}$$

következik, hogy $\forall\ p \in \mathbb{R}^n\ :\quad f'(p) = \varphi.$ $\square$

4.4. állítás és definíció. *Legyen adva egy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és egy $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. – Egyértelműen létezik olyan*

$$\operatorname{grad} f \ : \quad U \to \mathbb{R}^n \ , \quad p \mapsto \operatorname{grad} f(p)$$

leképezés, amelyre

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^n \ : \quad \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = f'(p)(v).$$

Ezt a leképezést az f függvény ***gradiens****ének nevezzük.*

Bizonyítás. Mivel $\forall\ p \in U \ : \ f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$, a Riesz-lemma biztosítja, hogy tetszőleges $p \in U$ pontban egyértelműen létezik a kívánalmaknak megfelelő $\operatorname{grad} f(p)$ vektor. □

4.5. megjegyzés. 4.4-ben – korábbi megállapodásunknak megfelelően – föltételeztük, hogy $\mathbb{R}^n$ a kanonikus belső szorzattal van ellátva. Maga az állítás tetszőleges belső szorzat választása esetén érvényes, a $\operatorname{grad} f(p)$ vektor azonban függ a választott belső szorzattól, míg $f'(p)$ független attól.

4.6. példa. Tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad p \mapsto f(p) := \|p\|^2 = \langle p, p\rangle$$

függvényt! Mivel

$$\begin{aligned} \frac{|f(p+h) - f(p) - 2\langle p, h\rangle|}{\|h\|} \quad &= \quad \frac{|\langle p+h, p+h\rangle - \langle p,p\rangle - 2\langle p,h\rangle|}{\|h\|} = \\ &= \quad \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \ , \end{aligned}$$

következik, hogy

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^n \ : \quad \exists\ f'(p) \quad \text{és} \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^n \ : \ f'(p)(v) = 2\langle p, v\rangle$$

(azaz $f'(p) = 2\langle p, \cdot\rangle$). Ez azt is jelenti, hogy

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^n \ : \quad \operatorname{grad} f(p) = 2p \ .$$

4.7. állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, s tekintsünk egy*

$$f = (f^1, \dots, f^n) \ : \quad U \to \mathbb{R}^n \qquad (f^i := u^i \circ f;\ 1 \leqq i \leqq n)$$

leképezést! f akkor és csak akkor differenciálható egy $p \in U$ pontban, ha az f^i koordinátafüggvények mindegyike differenciálható p-ben, s ekkor

$$f'(p) = ({f^1}'(p), \dots, {f^n}'(p)) \ ,$$

ahol a jobboldali lineáris leképezés a

$$v \in \mathbb{R}^k \mapsto ({f^1}'(p)(v), \dots, {f^n}'(p)(v)) \cong \begin{pmatrix} {f^1}'(p)(v) \\ \vdots \\ {f^n}'(p)(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

előírás szerint hat.

Bizonyítás.

(a) Megjegyezzük először is, hogy

$$\forall\ v = \nu^i e_i \in \mathbb{R}^n \ : \quad \|v\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\nu^i|, \qquad (*)$$

ui. a normafüggvény elemi tulajdonságai alapján

$$\|v\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \nu^i e_i \right\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \|\nu^i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\nu^i|\ \|e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |\nu^i|\ .$$

(b) Tegyük föl, hogy $\forall\ i \in \{1, \dots, n\}\ :\ \exists\ {f^i}'(p)$, s legyen

$$\varphi := ({f^1}'(p), \dots, {f^n}'(p)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} &f(p+h) - f(p) - \varphi(h) = \\ &\quad = (f^1(p+h) - f^1(p) - {f^1}'(p)(h), \dots, f^n(p+h) - f^n(p) - {f^n}'(p)(h)), \end{aligned}$$

így $(*)$ alkalmazásával

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \varphi(h)\|}{\|h\|} \leqq \sum_{i=1}^{n} \lim_{h\to 0} \frac{|f^i(p+h) - f^i(p) - {f^i}'(p)(h)|}{\|h\|} = 0$$

(hiszen f^i differenciálható p-ben); létezik tehát $f'(p)$ és $f'(p) = \varphi$.

(c) Ha – megfordítva – f differenciálható p-ben, akkor a láncszabály alapján ugyanez teljesül az $f^i = u^i \circ f$ koordinátafüggvények mindegyikére, ugyanis az $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ természetes koordinátafüggvények lineárisak, s ennélfogva (ld. 4.3.(2)) differenciálhatók. □

4.8. definíció. *Tegyük föl, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}^m$ leképezést! Választva egy $p \in U$ pontot s egy tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektort, képezzük a*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

határértéket! Létezése esetén ezt az f leképezés p ***pontbeli,*** *v* ***szerinti iránymenti derivált****jának nevezzük és $D_v f(p)$-vel jelöljük, speciálisan a*

$$D_i f(p) := D_{e_i} f(p) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

iránymenti deriváltakat (ha léteznek) p-beli ***parciális derivált****aknak mondjuk.*

4.9. megjegyzés. v szerinti iránymenti deriváltról olykor csak a $\|v\| = 1$ feltétel mellett beszélnek; mi ilyen megszorítást nem alkalmazunk.

4.10. lemma. *Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és az $f : U \to \mathbb{R}^m$ leképezés differenciálható a $p \in U$ pontban, akkor*

$$\forall\ v = \nu^i e_i \in \mathbb{R}^n \ : \quad \exists\ D_v f(p) \quad \text{és} \quad D_v f(p) = f'(p)(v) = \nu^i D_i f(p).$$

Bizonyítás. Éljünk a 4.1.(a) definícióban a $h := tv$ választással! Ekkor $h \to 0$, ha $t \to 0$, s így $f'(p)$ létezése esetén

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{\|f(p+tv) - f(p) - f'(p)(tv)\|}{\|tv\|} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} - f'(p)(v) \right\|$$

adódik, ahonnan kiolvasható, hogy $f'(p)(v) = D_v f(p)$. Így speciálisan

$$D_i f(p) = f'(p)(e_i) \qquad (1 \leqq i \leqq n);$$

ennek figyelembevételével

$$D_v f(p) = f'(p)(\nu^i e_i) = \nu^i f'(p)(e_i) = \nu^i D_i f(p). \qquad \square$$

4.11. állítás. *Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és*

$$f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^m \end{pmatrix} \ : \quad U \to \mathbb{R}^m$$

differenciálható leképezés, akkor f Jacobi-mátrixa tetszőleges $p \in U$ pontban a

$$(D_i f^j(p)) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

mátrix.

Bizonyítás. Az értelmezés szerint (4.1.(a)) f p-beli Jacobi-mátrixának i-edik oszlopvektorát az $f'(p)(e_i)$ vektornak az $\mathbb{R}^m$ tér kanonikus bázisára vonatkozó koordinátái alkotják. Mivel

$$f'(p)(e_i) \overset{4.7}{=} \begin{pmatrix} {f^1}'(p)(e_i) \\ \vdots \\ {f^m}'(p)(e_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_i f^1(p) \\ \vdots \\ D_i f^m(p) \end{pmatrix},$$

a kérdéses mátrix valóban a $(D_i f^j(p)) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mátrix. $\square$

4.12. állítás (Láncszabály parciális deriváltakra). *Tegyük föl, hogy a $g^1, \ldots, g^n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $a \in \mathbb{R}^k$ pontban, az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény pedig differenciálható a $b = (g^1(a), \ldots, g^n(a)) \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ha*

$$F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}\ , \quad p \mapsto F(p) := f(g^1(p), \ldots, g^n(p)),$$

akkor léteznek F a-beli parciális deriváltjai, és a

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(b) D_i g^j(a) \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

formula alapján számíthatók ki.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$g \;:\quad \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \;,\quad p \mapsto g(p) := (g^1(p), \dots, g^n(p))$$

leképezést! Ekkor $g = (g^1, \dots, g^n)$ és $F = f \circ g$ írható. A 4.2.(c) láncszabály értelmében

$$F'(a) = f'[g(a)] \circ g'(a) = f'(b) \circ g'(a) \;,$$

így F a-beli Jacobi-mátrixa f b-beli Jacobi-mátrixának és g a-beli Jacobi-mátrixának a szorzata. Mivel 4.11. értelmében

$\sim$ F Jacobi-mátrixa a-ban $(D_iF(a)) \in \mathcal{M}_{1\times k}(\mathbb{R})$,

$\sim$ f Jacobi-mátrixa b-ben $(D_jf(b)) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$,

$\sim$ g Jacobi-mátrixa a-ban $(D_ig^j(a)) \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$,

következik, hogy

$$D_iF(a) = \sum_{j=1}^{n} D_jf(b)D_ig^j(a) \;. \qquad \square$$

4.13. lemma és definíció. *Legyen V euklideszi vektortér, $a, b \in V$. – Az*

$$a \circ b \;:\quad V \to V \;,\quad v \mapsto a \circ b(v) := \langle b, v\rangle a$$

leképezés lineáris transzformációja V-nek, amelyet az a és a b vektor ***diadikus szorzat****ának nevezünk.* $\square$

4.14. állítás. *Tegyük föl, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, s legyen adva az $X : U \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, valamint az $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor az*

$$fX \;:\quad U \to \mathbb{R}^n \;,\quad p \mapsto (fX)(p) := f(p)X(p)$$

leképezés differenciálható és

$$\forall\, p \in U \;:\quad (fX)'(p) = f(p)X'(p) + X(p) \circ \operatorname{grad} f(p),$$

ahol a második tag az $X(p)$ és a $\operatorname{grad} f(p)$ vektor diadikus szorzata.

Bizonyítás. Tekintsük az X leképezés

$$X^i := u^i \circ X \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

koordinátafüggvényeit! Ezek segítségével, alkalmazva a valós értékű függvények szorzatának differenciálására vonatkozó Leibniz-szabályt is,

$$\begin{aligned}
(fX)'(p) &\overset{4.7.}{=} ((fX^1)'(p), \dots, (fX^n)'(p)) = \\
&= (f'(p)X^1(p) + f(p)X^{1\prime}(p), \dots, f'(p)X^n(p) + f(p)X^{n\prime}(p)) = \\
&= f(p)(X^{1\prime}(p), \dots, X^{n\prime}(p)) + (X^1(p)f'(p), \dots, X^n(p)f'(p)) = \\
&\overset{4.7.}{=} f(p)X'(p) + (X^1(p)f'(p), \dots, X^n(p)f'(p)) \;.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}\forall\ v \in \mathbb{R}^n \quad : \quad & (X^1(p)f'(p), \dots, X^n(p)f'(p))(v) = \\ & = (X^1(p)f'(p)(v), \dots, X^n(p)f'(p)(v)) \overset{4.7.}{=} \\ & = (X^1(p)\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle, \dots, X^n(p)\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle) = \\ & = \langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle X(p) = X(p) \circ \operatorname{grad} f(p)(v)\ ,\end{aligned}$$

következik, hogy

$$(fX)'(p) = f(p)X'(p) + X(p) \circ \operatorname{grad} f(p). \qquad \square$$

4.15. állítás. *Legyen adva egy $p \in \mathbb{R}^n$ pont, s tegyük föl, hogy f a p pont egy környezetében definiált valós értékű függvény! Ha f parciális deriváltjai léteznek a p pont egy környezetében és folytonosak p-ben, akkor f differenciálható a p pontban.* $\square$

4.16. definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz!*

(a) *Tekintsünk egy $f : U \to \mathbb{R}$ függvényt!*

  (1) *Azt mondjuk, hogy f C^1**-osztályú** U-n, ha parciális deriváltjai léteznek U minden pontjában, és $\forall\ i \in \{1, \dots, n\}$:*

$$D_i f \ :\ U \to \mathbb{R}\ , \quad p \mapsto D_i f(p)$$

  folytonos függvény.

  (2) *Legyen $k > 1$ egész szám! f-et C^k**-osztályú**nak mondjuk U-n, ha a $D_i f$ függvények ($1 \leqq i \leqq n$) C^{k-1}-osztályúak.*

  (3) *Az f függvényt C^∞**-osztályú**nak vagy **simá**nak nevezzük, ha minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén C^k-osztályú.*

  (4) *f **analitikus** U-n, ha bármely $a \in U$ pontnak van olyan U_a környezete, hogy a függvény a-beli Taylor-sora tetszőleges $p \in U_a$ esetén $f(p)$-hez konvergál.*

(b) *Legyen adva egy $F : U \to \mathbb{R}^m$ leképezés! Akkor mondjuk, hogy F C^k-osztályú ($k \in \mathbb{N}^+$) – speciálisan sima – U-n, ha valamennyi koordinátafüggvénye C^k-osztályú, illetve sima.*

4.17. megjegyzés. Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nemüres nyílt halmaz! – Megállapodunk a következő jelölésekben:

$$\begin{aligned} C^0(U) \quad &:= \quad \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}\ ; \\ C^k(U) \quad &:= \quad \{f : U \to \mathbb{R} \mid f\ C^k\text{-osztályú}\}\ ,\ k \in \mathbb{N}^+; \\ C^\infty(U) \quad &:= \quad \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ sima}\}\ := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U).\end{aligned}$$

Ekkor

$$C^0(U) \supset C^1(U) \supset \dots \supset C^{k-1}(U) \supset C^k(U) \supset \dots \supset C^\infty(U),$$

s valamennyi tartalmazás valódi. Tetszőleges $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ esetén $C^k(U)$ $\mathbb{R}$ fölötti algebra[1] a függvények összeadásának, valós számmal való szorzásának és szorzásának szokásos értelmezése mellett. Ez az algebra nyilvánvalóan asszociatív, kommutatív és egységelemes; az egységelem az $\{1\}$ értékkészletű konstans függvény.

4.18. példa. Ha $(u^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere, akkor

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \ : \quad u^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

4.19. állítás. *Tegyük föl, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, $f \in C^r(U)$, $r \geqq 2$. Legyen $1 < k \leqq r$ pozitív egész, s képezzünk az $\{1, \ldots, n\}$ halmazból egy $(i_1, \ldots, i_k)$ sorozatot. Ha $(j_1, \ldots, j_k)$ tetszőleges permutációja $(i_1, \ldots, i_k)$-nak, akkor*

$$D_{j_k} \ldots D_{j_1} f = D_{i_k} \ldots D_{i_1} f. \qquad \square$$

4.20. lemma. *A*

$$h : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & ,\text{ha} \quad t > 0 \\ 0 & ,\text{ha} \quad t \leqq 0 \end{cases}$$

függvény C^∞-osztályú $\mathbb{R}$ fölött, de nem analitikus.

Bizonyítás. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén h n-edik deriváltját a szokásos módon $h^{(n)}$-nel fogjuk jelölni.

(1) Evidens, hogy $t < 0$ esetén $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \exists h^{(n)}(t)$ és $h^{(n)}(t) = 0$.

(2) Teljes indukcióval ellenőrizhető, hogy ha $t > 0$, akkor

$$h^{(n)}(t) = t^{-3n} Q_n(t) h(t),$$

ahol

$$Q_0(t) = 1, \quad Q_1(t) = 2, \quad Q_2(t) = 4 - 6t^2, \quad \ldots;$$

általánosan: tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $Q_n(t)$ $(2n-2)$-edfokú polinom, amely a

$$Q_{n+1}(t) = (2 - 3nt^2) Q_n(t) + t^3 Q_n'(t)$$

rekurzív formulával adható meg. – Mindez azt jelenti, hogy h C^∞-osztályú a pozitív valós számok halmaza fölött is.

(3) Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}^+$ mellett

$$(*) \qquad \lim_{s \to \infty} s^k e^{-s} = 0.$$

Legyen ebből a célból tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi(s) := s^{-k} e^s.$$

[1] Az algebrák definícióját illetően ld. II.1.14-et.

Ekkor

$$\varphi'(s) = (s-k)s^{-k-1}e^s, \qquad \varphi''(s) = [s^2 - 2ks + k(k+1)]s^{-k-2}e^s.$$

Itt $s^2 - 2ks + k(k+1) = (s-k)^2 + k$, ennek a kifejezésnek tehát az $s = k$ helyen minimuma van, és a minimumérték pozitív. Megállapíthatjuk ilymódon, hogy

$$\forall s \in R^+ : \varphi''(s) > 0.$$

A Taylor-formula alkalmazásával

$$\varphi(s) = \varphi(s_0) + \varphi'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(s - s_0)^2$$

írható, ahol ξ s és s_0 között van. Mivel – mint láttuk – $\varphi''(\xi) > 0$, összefüggésünkből

$$(**) \qquad \varphi(s) > \varphi(s_0) + \varphi'(s_0)(s - s_0) \qquad (s \in \mathbb{R}^+)$$

következik. Ha $s_0 > k$, akkor $\varphi'(s_0) > 0$, tekintettel a φ'-re levezetett formulára. Így $s \to \infty$ esetén $(**)$ jobboldala ∞-hez tart; ennélfogva

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = \infty, \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\varphi(s)} = 0.$$

Az utóbbi reláció éppen $(*)$ helyességét jelenti.

(4) Belátjuk, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : h^{(n)}(0) = 0.$$

Teljesen indukcióval okoskodunk.

(i) $h'(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{h(t) - h(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t} = \lim\limits_{s\to\infty} s^{\frac{1}{2}}e^{-s} \overset{(*)}{=} 0.$

(ii) Tegyük föl, hogy $h^{(n)}(0) = 0$! $h^{(n+1)}(0)$ meghatározásához a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{h^{(n)}(t) - h^{(n)}(0)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{h^{(n)}(t)}{t} \overset{(2)}{=} \\ &= \lim_{t\to 0^+} t^{-3n-1}Q_n(t)h(t)\end{aligned}$$

határértéket kell kiszámítani. Ez azonban $(*)$ alkalmazásával ($s := \frac{1}{t^2}$ választással, alkalmas k kitevő mellett) zérust ad, tehát $h^{(n+1)}(0) = 0$ szintén teljesül.

(5) Az (1)-ben, (2)-ben és (4)-ben mondottak azt jelentik, hogy h C^∞-osztályú $\mathbb{R}$ fölött. h azonban nem analitikus, hiszen $h^{(k)}(0) = 0$ ($k \in \mathbb{N}^+$), $h(0) = 0$ folytán a 0-beli Taylor-sora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}h^{(k)}(0)t^k = 0,$$

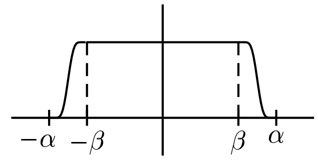
s így ez az összeg egyetlen pozitív t esetén sem egyenlő $h(t)$-vel. □

4.21. lemma. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$; $\alpha > \beta$. Létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(1) $g(t) = 1$, *ha* $|t| \leqq \beta$*;*

(2) $0 < g(t) < 1$, *ha* $\beta < |t| < \alpha$*;*

(3) $g(t) = 0$, *ha* $|t| \geqq \alpha$.



Bizonyítás. (Vázlat)

(a) Ha $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(t) := \dfrac{h(t)}{h(t) + h(1-t)}$, ahol h a 4.20-beli függvény, akkor G sima, és

$$G(t) = 0, \text{ ha } t \leqq 0; \quad 0 < G(t) < 1, \text{ ha } 0 < t < 1; \quad G(t) = 1, \text{ ha } t \geqq 1.$$

(b) $g : \ t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) := G\left(\dfrac{t+\alpha}{\alpha - \beta}\right) G\left(\dfrac{-t+\alpha}{\alpha-\beta}\right)$ sima függvény, és eleget tesz az (1)-(3) feltételeknek. $\square$

4.22. megjegyzés. A differenciálással kapcsolatos legfontosabb tudnivalók e rövid áttekintésének lezárásaként emlékeztetünk a következő, alapvető eredményre, amely a későbbiekben több ízben is alkalmazásra fog kerülni.

Inverz leképezés tétel. *Legyen $W \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, s tegyük föl, hogy $f : W \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés. Ha $a \in W$, és f reguláris a-ban ($:\Leftrightarrow$ $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \det f'(a) \neq 0$), akkor létezik az a pontnak $U \subset W$, az $f(a)$ pontnak pedig V környezete úgy, hogy az*

$$f \restriction U : U \to V$$

*leképezés **diffeomorfizmus**. Amennyiben $p \in U$ és $q := f(p)$, úgy az f^{-1} inverz q-beli deriváltját az*

$$(f^{-1})'(q) = [f'(p)]^{-1}$$

formula adja.

5. Parametrizált görbék

5.1. lemma. *Az $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ valós vektortér természetes módon izomorf az $\mathbb{R}^n$ valós vektortérrel, ilyen izomorfizmust ad meg közöttük a*

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mapsto \varphi(1) \in \mathbb{R}^n$$

leképezés.

Bizonyítás. Jelölje F a szóbanforgó leképezést!

(1) $\forall\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n);\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned} F(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) &:= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(1) = \lambda_1\varphi_1(1) + \lambda_2\varphi_2(1) = \\ &= \lambda_1 F(\varphi_1) + \lambda_2 F(\varphi_2) \end{aligned}$$

– F tehát lineáris.

(2) Ha $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ és $F(\varphi) = F(\psi)$, azaz $\varphi(1) = \psi(1)$, akkor $\varphi = \psi$, hiszen az $1 \in \mathbb{R}$ bázisát alkotja az $\mathbb{R}$ valós vektortérnek, s egy lineáris leképezést egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása. – Ezzel beláttuk, hogy F injektív. Mivel $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^n = n$, ebből az is következik, hogy F szürjektív – F tehát lineáris izomorfizmus $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ és $\mathbb{R}^n$ között. □

5.2. megjegyzések.

(a) Tegyük föl, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nem egypontú intervallum, $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, $t_0 \in I$ egy belső pont. Ekkor 5.1. értelmében

az $f'(t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ derivált azonosítható az $f'(t_0)(1) \in \mathbb{R}^n$ vektorral

– ezzel az interpretációs lehetőséggel a következőkben külön említés nélkül élni fogunk, s az $f'(t_0)$ deriváltat rendszerint $\mathbb{R}^n$ vektorának tekintjük. Mivel 4.8. és 4.10. figyelembevételével

$$f'(t_0)(1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t}\ ,$$

így visszakapjuk a differenciálhányados szokásos fogalmát (amely ebben a szituációban értelemmel bír).

(b) Megtartva az (a)-beli jelöléseket és feltételeket, közvetlenül adódik, hogy f akkor és csak akkor immerzió egy $t_0 \in I$ pontban, ha

$$f'(t_0) \neq 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \ ,$$

azaz – ekvivalens módon – ha

$$f'(t_0)(1) \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$$

(c) A következőkre nézve megállapodunk abban, hogy – ha mást nem mondunk –

differenciálható leképezésen C^∞-osztályú – azaz sima – leképezést értünk.

5.3. definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy (nem föltétlenül korlátos) intervallum, s tegyük föl, hogy $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$.*

(a) Egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ immerziót $\mathbb{R}^n$-beli ***parametrizált görbének*** *nevezünk. A $t \in I$ valós számokat ilyenkor* ***paraméter****ekként is említjük, adott $t \in I$ esetén $c(t)$-t a görbe t paraméterű pontjának mondjuk. Ha $\operatorname{Im} c$-t $\mathbb{R}^n$ egy kétdimenziós lineáris sokasága tartalmazza – valamint az $n = 2$ speciális esetben –* ***parametrizált síkgörbéről*** *szólunk.*

(b) Tekintsük a $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét!

(1) c ***érintőegyenese*** *a t paraméterű pontban a $c(t)+\mathcal{L}(c'(t))$ (egydimenziós) lineáris sokaság.*

(2) c ***bireguláris****, ha*

$$\forall\, t \in I : \ (c'(t), c''(t)) \text{ lineárisan független;}$$

ebben az esetben a $c(t) + \mathcal{L}(c'(t), c''(t))$ (kétdimenziós) lineáris sokaságot a görbe $c(t)$ pontbeli ***simulósík****jának vagy* ***oszkuláló sík****jának mondjuk.*

(3) c ***pályasebessége*** *a*

$$v : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto v(t) := \|c'(t)\|$$

függvény; ha ez az 1 értékű konstans függvény, akkor c-t ***egységpályasebességű****nek vagy* ***természetes paraméterezésű****nek nevezzük.*

(4) c ***ívhossza*** *a pályasebesség I fölötti integrálja:*

$$L(c) := \int_I v = \int_I \|c'\| \ ;$$

ívhosszfüggvénye *a*

$$\sigma \ : \ I \to [0, L(c)], \quad t \mapsto \sigma(t) := \int_a^t v$$

függvény, ahol $a \in I$ rögzített (amennyiben I alulról korlátos, úgy rendszerint $a := \inf I$).

(c) *A* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *és* $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^n$ *parametrizált görbéket **kongruens**eknek nevezzük, ha van olyan* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *izometria, hogy* $\tilde{c} = F \circ c$*. Amennyiben – speciálisan – a szóbanforgó izometria transzláció, úgy **paralel görbék**ről szólunk.*

(d) *Azt mondjuk, hogy a* $\tilde{c} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ *parametrizált görbe **ekvivalens** a* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *parametrizált görbével, ha megadható olyan* $\theta : \tilde{I} \to I$ *diffeomorfizmus, amelyre*

$$\tilde{c} = c \circ \theta$$

teljesül. Ekkor a θ *függvényt **paramétertranszformáció**nak hívjuk, és a* $\tilde{c}$ *parametrizált görbét* c θ *általi **átparaméterezett**jeként is említjük. A* θ *paramétertranszformáció **irányítástartó**, illetve **irányításváltó** aszerint, amint*

$$\forall\, t \in \tilde{I} \; : \quad \theta'(t) > 0, \quad \textit{illetve} \quad \theta'(t) < 0.$$

5.4. megjegyzések.

(a) Az értelmezés szerint egy parametrizált görbe nem ponthalmaz, hanem leképezés; különbséget teszünk tehát egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe és ennek

$$\operatorname{Im} c = \{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

képtere között. Másrészt, ha egy $C \subset \mathbb{R}^n$ ponthalmazhoz megadható olyan $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, hogy $\operatorname{Im} c = C$, akkor azt mondjuk, hogy c ***paraméterezése*** C-nek. – A továbbiakban a „parametrizált görbe” elnevezés mellett a kissé pontatlan, de rövidebb „görbe” elnevezést is használjuk.

(b) Közvetlenül ellenőrizhető, hogy a parametrizált görbék halmazában bevezetett kongruencia és ekvivalencia egyaránt ekvivalenciareláció. (Rövidesen megmutatjuk, hogy az átparaméterezés valóban parametrizált görbét eredményez.) Világos, hogy az egymástól paramétertranszformációban különböző parametrizált görbéknek közös a képtere. Megfordítva, egy adott $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmaznak lehetnek nem ekvivalens paraméterezései. – Illusztrációként tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az

$$S^1 := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1\}$$

origó középpontú egységkört! Ha

$$c_1 : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto c_1(t) := (\cos t, \sin t) \;,$$

illetve

$$c_2 : \,]-\pi, 3\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto c_2(t) := (\cos t, \sin t),$$

akkor c_1 és c_2 egyaránt immerzió, s $\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2$ nyilvánvalóan teljesül. Ugyanakkor c_1 és c_2 nem ekvivalens, mivel például a $c_1^{-1}(1,0)$ és $c_2^{-1}(1,0)$ ősképek különböző számosságúak.

(c) A parametrizált görbék soronkövetkező tárgyalásánál erősen támaszkodunk arra a definícójukba beépített feltételre, hogy deriváltjuk seholsem tűnik el. A későbbiekben, amikor már nem a görbék vizsgálata a cél, ez a megszorítás fölöslegessé, olykor terhessé válik. Így a II. fejezetben – általánosabb körülmények között – az immerzió követelményét el fogjuk ejteni (ld. II.7.17.-7.20.).

5.5. állítás.

(a) Parametrizált görbe átparaméterezettje parametrizált görbe. Az átparaméterezés során a biregularitás megőrződik.

(b) A parametrizált görbék érintőegyenese és – bireguláris esetben – a simulósíkja paramétertranszformációval szemben invariáns.

(c) A parametrizált görbék érintőegyenese, biregularitása és simulósíkja affin transzformációval szemben invariáns. Nevezetesen: ha $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe és $f = \tau_a \circ \varphi$ ($a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$) affin transzformáció, akkor

(1) $f \circ c$ parametrizált görbe;

(2) $f \circ c$ bireguláris, ha c bireguláris;

(3) $f \circ c$ érintőegyenese, illetve bireguláris esetben a simulósíkja egy t paraméterű pontban az

$$f(c(t)) + \mathcal{L}(\varphi(c'(t))),$$

illetve az

$$f(c(t)) + \mathcal{L}(\varphi(c'(t)), \varphi(c''(t)))$$

lineáris sokaság.

Bizonyítás. Tekintsük a $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét!

(a) Ha $\theta : \tilde{I} \to I$ paramétertranszformáció és $\tilde{c} := c \circ \theta$, akkor a 4.2.(c) láncszabály ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{c}' &= (c' \circ \theta)\theta' \\ \tilde{c}'' &= (c'' \circ \theta)(\theta')^2 + (c' \circ \theta)\theta'' \,. \end{aligned}$$

Mivel θ diffeomorfizmus, θ' seholsem tűnik el (ez szintén a láncszabály alapján adódik a $\theta \circ \theta^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$ relációból); az első összefüggésből így azonnal kiolvasható, hogy $\tilde{c}$ immerzió.
Tegyük föl, hogy c bireguláris! Ha valamely $t \in \tilde{I}$ esetén $\tilde{c}'(t)$ és $\tilde{c}''(t)$ lineárisan függő volna, akkor $\tilde{c}''(t)$ skalárszorosa lenne $\tilde{c}'(t)$-nek, azaz

$$(c'' \circ \theta)(t)[\theta'(t)]^2 + (c' \circ \theta)(t)\theta''(t) = \lambda(c' \circ \theta)(t)\theta'(t) \,,$$

illetve – rendezés után –

$$(c' \circ \theta)(t)(\theta''(t) - \lambda\theta'(t)) + (c'' \circ \theta)(t)[\theta'(t)]^2 = 0 \,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

teljesülne. Ez utóbbi relációból azonban $c'(t)$ és $c''(t)$ lineáris függetlensége folytán $\theta'(t) = 0$ következik, ami kizárt.

(b) $\tilde{c}$ érintőegyenese egy t paraméterű pontban

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) + \mathcal{L}(\tilde{c}'(t)) &\overset{(a)}{=} \tilde{c}(t) + \mathcal{L}(\theta'(t)c'(\theta(t))) = \\ &= c(\theta(t)) + \mathcal{L}(c'(\theta(t))) = \\ &= c \text{ érintőegyenese a } \theta(t) \text{ paraméterű pontban.}\end{aligned}$$

Ha c bireguláris, akkor – mint megmutattuk – $\tilde{c}$ szintén bireguláris. A $\tilde{c}''$-re levezetett formulából kiolvashatóan

$$\forall\ t \in \tilde{I}: \quad \mathcal{L}(\tilde{c}'(t), \tilde{c}''(t)) = \mathcal{L}(c'(\theta(t)), c''(\theta(t))),$$

így $\tilde{c}$ simulósíkja a t paraméterű pontban

$$\begin{aligned}\tilde{c}(t) + \mathcal{L}(\tilde{c}'(t), \tilde{c}''(t)) &= c(\theta(t)) + \mathcal{L}(c'(\theta(t)), c''(\theta(t))) = \\ &= c \text{ simulósíkja a } \theta(t) \text{ paraméterű pontban.}\end{aligned}$$

(c) Mivel

$$\forall\ t \in I: \quad (f \circ c)'(t) = f'(c(t))c'(t) \overset{4.3.(3)}{=} \varphi(c'(t)),$$

és itt $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizmus, a tett (1)-(3) észrevételek mindegyike közvetlenül adódik. $\square$

5.6. állítás. *A parametrizált görbék ívhossza izometriával és irányítástartó paramétertranszformációval szemben invariáns.*

Bizonyítás. Legyen adva a $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe!

(a) Tekintsük az $f = \tau_a \circ \varphi,\ \varphi \in O(\mathbb{R}^n)$ izometriát! Mivel φ normatartó,

$$\forall\ t \in I: \ \|(f \circ c)'(t)\| = \|f'(c(t))c'(t)\| \overset{4.3.(3)}{=} \|\varphi(c'(t))\| = \|c'(t)\|,$$

$$L(f \circ c) := \int_I \|(f \circ c)'\| = \int_I \|c'\| =: L(c).$$

(b) Tegyük föl, hogy $\theta : \tilde{I} \to I$ irányítástartó paramétertranszformáció! Ekkor $\forall\ t \in \tilde{I}: \ \theta'(t) > 0$, amennyiben tehát $\tilde{c} := c \circ \theta$, úgy

$$L(\tilde{c}) = \int_{\tilde{I}} \|\tilde{c}'\| = \int_{\tilde{I}} \|(c' \circ \theta)\theta'\| = \int_{\tilde{I}} \|c' \circ \theta\|\theta' \overset{(*)}{=} \int_I \|c'\| =: L(c),$$

ahol a $(*)$-gal jelölt lépésnél a helyettesítéssel való integrálás tételét alkalmaztuk. $\square$

5.7. állítás.

(a) *Minden parametrizált görbe ekvivalens egy természetes paraméterezésű görbével. Nevezetesen: ha $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe és ívhosszfüggvénye σ, akkor $\tilde{c} := c \circ \sigma^{-1}$ létezik, és c-vel ekvivalens természetes paraméterezésű görbe.*

(b) Amennyiben $c : I \to \mathbb{R}^n$ természetes paraméterezésű görbe, úgy bármely vele ekvivalens természetes paraméterezésű görbe

$$t \mapsto c(t+\alpha) \qquad \text{vagy} \qquad t \mapsto c(-t+\alpha)$$

alakú, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás.

(a) Legyen a határozottság kedvéért $I = [a, b],\ a < b$. Ekkor c ívhosszfüggvénye

$$\sigma : \quad [a, b] \to [0, L(c)], \quad t \mapsto \sigma(t) := \int_a^t v$$

(v.ö. 5.3.(b)). Itt a

$$v : \quad t \in [a, b] \mapsto v(t) := \|c'(t)\|$$

integrandus folytonos, ezért az elemi analízis egyik jólismert tétele szerint σ differenciálható, és deriváltfüggvénye

$$\sigma' = v.$$

Mivel c immerzió, σ' pozitív $[a, b]$ fölött, s így σ szigorúan monoton növekvő. Ebből következik, hogy létezik a

$$\sigma^{-1} : \quad [0, L(c)] \to [a, b]$$

inverz függvény. Ez szintén differenciálható; deriváltja

$$(\sigma^{-1})' = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \ .$$

A mondottak értelmében

$$\tilde{c} := c \circ \sigma^{-1} : \quad [0, L(c)] \to \mathbb{R}^n$$

c-vel ekvivalens parametrizált görbe. $\tilde{c}$ természetes paraméterezésű, ugyanis $\forall\ t \in [0, L(c)]$:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{c}'(t)\| &= \|(c \circ \sigma^{-1})'(t)\| = \|c'(\sigma^{-1}(t)) \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(t))}\| = \\
&= \|c'(\sigma^{-1}(t))\| \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(t))|} = \\
&= v(\sigma^{-1}(t)) \frac{1}{v(\sigma^{-1}(t))} = 1.
\end{aligned}$$

(b) Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^n$ és $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ egymással ekvivalens természetes paraméterezésű görbe! Ekkor $\tilde{c} = c \circ \theta$ írható, ahol $\theta : J \to I$ diffeomorfizmus. Így

$$\begin{aligned} \forall\ t \in J : \quad 1 &= \|\tilde{c}'(t)\| = \|c'(\theta(t))\theta'(t)\| = \\ &= \|c'(\theta(t))\|\ |\theta'(t)| = |\theta'(t)|\ , \end{aligned}$$

következésképpen tetszőleges $t \in J$ pontban $\theta'(t) = 1$ vagy $\theta'(t) = -1$. Mivel J – lévén intervallum – összefüggő, és θ' folytonos J fölött, θ' értékkészlete nem lehet az $\{1, -1\}$ halmaz, ellenkező esetben ui. a közbülső-érték tétel[1] miatt θ' a 0-t is fölvenné. Így tehát

$$\forall\ t \in J :\ \theta'(t) = 1 \qquad \text{vagy} \qquad \forall\ t \in J :\ \theta'(t) = -1$$

(kizáró *vagy*), következésképpen

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R} :\ \forall\ t \in J : \quad \theta(t) = t + \alpha \quad \text{vagy} \quad \theta(t) = -t + \alpha\ . \qquad \square$$

5.8. megjegyzések.

(a) Megmutatható – ld. az analízis elemeit –, hogy egy

$$c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

parametrizált görbe ívhossza

$$L(c) = \sup\Big\{\sum_{i=0}^{n-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|\ \Big|\ n \in \mathbb{N}^+;\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\Big\}.$$

(b) Ha $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ természetes paraméterezésű görbe, akkor c ívhosszfüggvénye

$$\sigma : \quad [0, 1] \to [0, L(c)], \quad t \mapsto \sigma(t) = \int_0^t 1 = t\ ,$$

ilyenkor tehát a t paraméter megadja a $c(0)$ és a $c(t)$ pont közötti görbeszakasz ívhosszát. Erre tekintettel a természetes paraméterre az ***ívhossz-paraméter*** elnevezés is használatos.

(c) $t \mapsto t + \alpha$ alakú paramétertranszformációval – amely 5.7.(b)-re tekintettel megőrzi a természetes paraméterezést – mindig elérhető, hogy egy görbe értelmezési tartománya tartalmazza a 0-t. Ezt tehát szükség esetén az általánosság sérelme nélkül föltehetjük, s többnyire – külön említés nélkül – föl is fogjuk tenni.

[1] ld. II.3.17.

5.9. lemma. *Ha* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *és* $g : I \to \mathbb{R}^n$ *differenciálható leképezés, akkor az*

$$\langle f, g\rangle : \quad I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle f, g\rangle(t) := \langle f(t), g(t)\rangle$$

függvény differenciálható, és

$$\forall\ t \in I : \quad \langle f, g\rangle'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle.$$

Bizonyítás. Vezessük be f és g

$$f^i := u^i \circ f, \quad \text{illetve} \quad g^i := u^i \circ g \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

koordinátafüggvényeit! Ekkor

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f^i g^i$$

írható, amiből $\langle f, g\rangle$ differenciálhatósága világos, és az egyváltozós analízisből ismert differenciálási szabályok alapján

$$\begin{aligned} \forall\ t \in I : \quad \langle f, g\rangle'(t) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} f^i g^i\Big)'(t) = \sum_{i=1}^{n} {f^i}'(t) g^i(t) + \sum_{i=1}^{n} f^i(t) {g^i}'(t) = \\ &= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle \end{aligned}$$

adódik. □

5.10. következmény. *Ha* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *konstans pályasebességű parametrizált görbe, akkor* $\forall\ t \in I : \ \langle c'(t), c''(t)\rangle = 0$.

Bizonyítás. Mivel a feltétel értelmében a

$$\langle c', c'\rangle : \quad I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle c'(t), c'(t)\rangle$$

függvény konstans,

$$0 = \langle c', c'\rangle' \overset{5.9.}{=} \langle c'', c'\rangle + \langle c', c''\rangle = 2\langle c', c''\rangle$$

következik, ami a tett észrevétel helyességét jelenti. □

5.11. definíció. *Az* $\mathbb{R}^n$ *tér* $(n \in \mathbb{N}^+)$ *összes érintőtereinek*

$$T\mathbb{R}^n := \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$$

unióját $\mathbb{R}^n$ ***érintősokaság****ának vagy* ***érintőnyaláb****jának nevezzük, egy (nemüres)* $U \subset \mathbb{R}^n$ *halmaz fölötti érintőnyalábon az* U *pontjaiban vett érintőterek*

$$TU := \bigcup_{p \in U} T_p\mathbb{R}^n$$

unióját értjük.

5.12. megjegyzések.

(a) Mivel $T\mathbb{R}^n$ elemei $v_p := (p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rendezett párok, $T\mathbb{R}^n$ – mint ponthalmaz – az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ szorzattérrel, TU pedig az $U \times \mathbb{R}^n$ Descartes-szorzattal azonos. Ugyanakkor $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ az

$$(a, b) = (a^i e_i, b^i e_i) \mapsto (a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n)$$

bijekció révén természetes módon interpretálható az $\mathbb{R}^{2n}$ térként, következésképpen

$$T\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^{2n}\text{-}nel, \quad TU \quad U \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}\text{-}nel \ azonosítható$$

(mint ponthalmaz!). – Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy a szokott módon szólhassunk egy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz $T\mathbb{R}^k$-ba ($k \in \mathbb{N}^+$), vagy egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallum $T\mathbb{R}^n$-be való leképezésének folytonosságáról és differenciálhatóságáról.

(b) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ tér $(u^i)_{i=1}^n$ kanonikus koordinátarendszerét, valamint a

$$\mathrm{pr}_1 : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (a, b) \mapsto a$$

és

$$\mathrm{pr}_2 : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (a, b) \mapsto b$$

természetes projekciókat! Ekkor az

$$(u^i \circ \mathrm{pr}_1, u^i \circ \mathrm{pr}_2)_{i=1}^n$$

függvénycsaládot a $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ érintősokaság $(u^i)_{i=1}^n$ által ***indukált koordinátarendszer***ként említjük.

$$\forall\ v_p \in T_p\mathbb{R}^n \subset T\mathbb{R}^n : \qquad \begin{aligned} u^i \circ \mathrm{pr}_1(v_p) &= u^i \circ \mathrm{pr}_1(p, v) = u^i(p), \\ u^i \circ \mathrm{pr}_2(v_p) &= u^i \circ \mathrm{pr}_2(p, v) = u^i(v). \end{aligned}$$

Amennyiben $T\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{R}^{2n}$-ként interpretáljuk, úgy az indukált koordinátarendszer szerepét $\mathbb{R}^{2n}$ kanonikus koordinátarendszere veszi át.

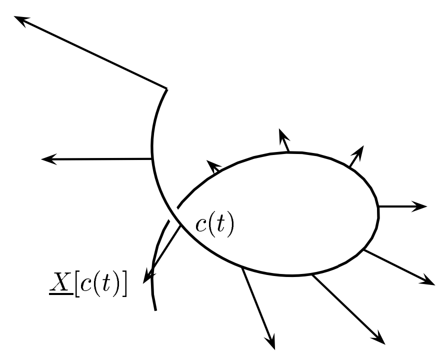
5.13. definíció. *Legyen adva egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe!*

(a) *c**-menti vektormezőn** olyan*

$$\underline{X} : \ I \to T\mathbb{R}^n$$

differenciálható leképezést értünk, amelyre teljesül, hogy

$$\forall \ t \in I : \ \underline{X}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n.$$



(b) *Legyen $\underline{X}$ és $\underline{Y}$ tetszőleges c-menti vektormező, $f \in C^\infty(I)$. Az*

$$\underline{X} + \underline{Y} : t \in I \mapsto (\underline{X} + \underline{Y})(t) := \underline{X}(t) + \underline{Y}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$$

és az

$$f\underline{X} : t \in I \mapsto (f\underline{X})(t) := f(t)\underline{X}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$$

leképezést az $\underline{X}$ és $\underline{Y}$ c-menti vektormező összegének, illetve $\underline{X}$ f-fel képzett függvényszeresének, az

$$\langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle : \quad I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \underline{X}, \underline{Y} \rangle(t) := \langle \underline{X}(t), \underline{Y}(t) \rangle$$

függvényt az $\underline{X}$ és $\underline{Y}$ vektormező belső szorzatának nevezzük.

5.14. megjegyzés. Közvetlenül adódik, hogy egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe mentén vett összes vektormezők $C^\infty(I)$ fölötti modulust[2] alkotnak a most bevezetett összeadással és függvényszeres-képzéssel. Erre a modulusra az $\mathfrak{X}(c)$ jelölést alkalmazzuk.

5.15. lemma és definíció. *Legyen adva egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe, s tekintsünk egy $\underline{X} : I \to T\mathbb{R}^n$ c-menti vektormezőt!*

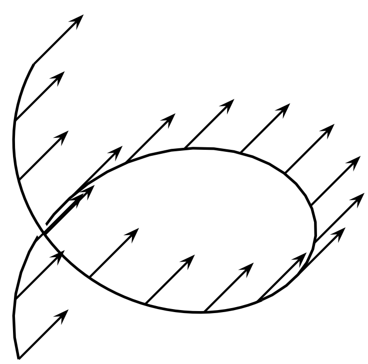
[2] A modulusokkal kapcsolatos alapvető tudnivalókat a II.1. fejezetben tekintjük át.

(a) Egyértelműen létezik olyan $X : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad \underline{X}(t) = (c(t), X(t)) = (X(t))_{c(t)};$$

*ezt az $\underline{X}$ c-menti vektormező **csatolt leképezés**ének nevezzük.*

*(b) Egy c-menti vektormezőt **párhuzamos**nak mondunk, ha a csatolt leképezése konstans.*



(c) Ha az $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c)$ c-menti vektormező csatolt leképezése X, akkor az

$$\dot{\underline{X}} :\ I \to T\mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \dot{\underline{X}}(t) := (c(t), X'(t)) = (X'(t))_{c(t)}$$

*c-menti vektomezőt $\underline{X}$ **derivált vektormezőj**ének nevezzük. – A derivált vektormező képzésére teljesülnek a következő szabályok:*

(1) $\forall\ \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(c) : \quad \dot{\overline{\underline{X} + \underline{Y}}} = \dot{\underline{X}} + \dot{\underline{Y}};$

(2) $\forall\ \underline{X} \in \mathfrak{X}(c),\ f \in C^\infty(I) : \quad \dot{\overline{f\underline{X}}} = f'\underline{X} + f\dot{\underline{X}};$

(3) $\forall\ \underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(c) : \quad \langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle' = \langle \dot{\underline{X}}, \underline{Y}\rangle + \langle \underline{X}, \dot{\underline{Y}}\rangle.$

Bizonyítás.

(a) Ha $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c)$ és $X := \mathrm{pr}_2 \circ \underline{X}$, akkor $X : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, hiszen differenciálható leképezések kompozíciója, és nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad \underline{X}(t) = (c(t), X(t)),$$

X tehát csatolt leképezése $\underline{X}$-nek. – Amennyiben $\tilde{X} : I \to \mathbb{R}^n$ olyan differenciálható leképezés, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad \underline{X}(t) = (c(t), \tilde{X}(t)),$$

úgy $\tilde{X} = \mathrm{pr}_2 \circ \underline{X}$, ami azt jelenti, hogy a csatolt leképezés egyértelműen meghatározott.

(c) Legyen $\underline{X}$ és $\underline{Y}$ csatolt leképezése X, illetve Y!

(1) $\forall\, t \in I: \ \dot{\overbrace{\underline{X}+\underline{Y}}}(t) := (c(t), (X+Y)'(t)) = (c(t), X'(t) + Y'(t)) = = (c(t), X'(t)) + (c(t), Y'(t)) = \dot{\underline{X}}(t) + \dot{\underline{Y}}(t)$ (fölhasználva, hogy vektormezők összeadásakor a megfelelő definíciókból adódóan csatolt leképezéseik összegződnek).

(2) Mivel $\forall\, t \in I: \ (f\underline{X})(t) := f(t)\underline{X}(t) = f(t)(c(t), X(t)) = = (c(t), f(t)X(t)) = (c(t), (fX)(t))$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\dot{\overbrace{f\underline{X}}}(t) &:= (c(t), (fX)'(t)) = (c(t), f'(t)X(t) + f(t)X'(t)) = \\
&= (c(t), f'(t)X(t)) + (c(t), f(t)X'(t)) = \\
&= f'(t)(c(t), X(t)) + f(t)(c(t), X'(t)) = \\
&= f'(t)\underline{X}(t) + f(t)\dot{\underline{X}}(t) = (f'\underline{X} + f\dot{\underline{X}})(t) \\
&\Longrightarrow \quad \dot{\overbrace{f\underline{X}}} = f'\underline{X} + f\dot{\underline{X}}.
\end{aligned}$$

(3) $\forall\, t \in I: \ \langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle(t) = \langle (X(t))_{c(t)}, (Y(t))_{c(t)} \rangle \overset{1.14.(a)}{=} \langle X(t), Y(t)\rangle = = \langle X, Y\rangle(t) \quad \Longrightarrow \quad \langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle = \langle X, Y\rangle.$
Így

$$\begin{aligned}
\langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle' &= \langle X, Y\rangle' \overset{5.9.}{=} \langle X', Y\rangle + \langle X, Y'\rangle = \\
&= \langle \dot{\underline{X}}, \underline{Y}\rangle + \langle \underline{X}, \dot{\underline{Y}}\rangle.
\end{aligned}$$

□

5.16. megjegyzések.

(a) A lemmában látottaknak megfelelően a következőkben a görbementi vektormezőket rendszerint aláhúzott latin nagybetűkkel, csatolt leképezésüket pedig ugyanazzal az aláhúzás nélküli betűvel fogjuk jelölni.

(b) Az $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c) \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \underline{X}$ leképezés izomorfizmus az $\mathfrak{X}(c)$ $C^\infty(I)$-modulus és az $I \to \mathbb{R}^n$ sima leképezések modulusa között. – Valóban, az, hogy a szóbanforgó leképezés injektív és műveletttartó, kiolvasható 5.15-ből és a bizonyításából. Ha $X: I \to \mathbb{R}^n$ sima leképezés és

$$\underline{X}: \ t \in I \mapsto \underline{X}(t) := (c(t), X(t)),$$

akkor $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c)$ és $\mathrm{pr}_2 \circ \underline{X} = X$, tehát a vizsgált leképezés szürjektív is. Így lehetővé válik, hogy a c-menti vektormezőket a csatolt leképezésükkel azonosítsuk, ezzel a lehetőséggel azonban rendszerint nem fogunk élni.

5.17. állítás.

(a) *Egy görbementi vektormező akkor és csak akkor párhuzamos, ha a derivált vektormezője eltűnik.*

(b) Ha az $\underline{X} : I \to T\mathbb{R}^n$ *c-menti vektormező*

$$\|\underline{X}\| : \quad I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|\underline{X}(t)\|$$

normafüggvénye konstans, akkor

$$\forall\ t \in I : \quad \langle \underline{X}(t), \underline{\dot{X}}(t)\rangle = 0, \quad \text{azaz} \quad \underline{\dot{X}}(t) \perp \underline{X}(t).$$

Bizonyítás.

(a) $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c)$ párhuzamos $:\iff X := \mathrm{pr}_2 \circ \underline{X}$ konstans
$\iff X' = 0 \iff \underline{\dot{X}} = \underline{0}$
(ahol a $\underline{0}$ az $\mathfrak{X}(c)$ modulus zéruseleme, azaz a $t \in I \mapsto 0_{c(t)} \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ c-menti vektormező).

(b) $\|\underline{X}\|$ konstans $\iff \langle \underline{X}, \underline{X}\rangle$ konstans $\Longrightarrow$
$0 = \langle \underline{X}, \underline{X}\rangle' \overset{5.15.}{=} \langle \underline{\dot{X}}, \underline{X}\rangle + \langle \underline{X}, \underline{\dot{X}}\rangle = 2\langle \underline{X}, \underline{\dot{X}}\rangle \implies \langle \underline{X}, \underline{\dot{X}}\rangle = 0.$ □

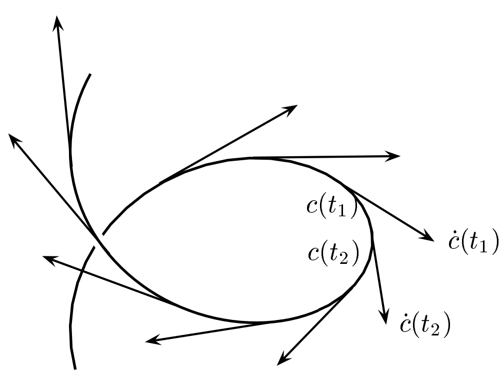
5.18. definíció. *Egy* $c : I \to \mathbb{R}^n$ *parametrizált görbe* ***érintő-*** *vagy* ***sebességvektormezőjén*** *a*

$$\dot{c} :\ I \to T\mathbb{R}^n,\ t \mapsto \dot{c}(t) := (c(t), c'(t)) = (c'(t))_{c(t)}$$

c-menti vektormezőt értjük; tetszőleges $t \in I$ *paraméter esetén a* $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}\mathbb{R}^n$ *vektort a görbe* $c(t)$ *pontbeli* ***érintő-*** *vagy* ***sebességvektorának*** *hívjuk.* c ***érintőegységvektormezője*** *a*

$$\underline{T} = \frac{1}{v}\dot{c}$$

c-menti vektormező, ahol v *a görbe pályasebessége (5.3.(b)). A* c *görbe* ***gyorsulásvektormezője*** *a sebességvektormező derivált vektormezője, ezt* $\ddot{c}$*-tal jelöljük.*



5.19. megjegyzés. Közvetlenül adódik az értelmezésből, hogy

– a sebességvektormező csatolt leképezése a $c' : I \to \mathbb{R}^n$ $(\cong \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$,

– a gyorsulásvektormező csatolt leképezése a $c'' : I \to \mathbb{R}^n$

első, illetve második derivált leképezés.

5.20. állítás. *Egy parametrizált görbe akkor és csak akkor parametrizált egyenes, ha a gyorsulásvektormezője zérus.*

Bizonyítás. $\ddot{c} = 0 \overset{5.19.}{\iff} c'' = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}^n : \forall\, t \in I : c'(t) = a \iff \exists\, b \in \mathbb{R}^n : \forall\, t \in I : c(t) = ta + b$. Mivel c immerzió, itt $a \neq 0$; tehát a $\ddot{c} = \underline{0}$ feltétel valóban azzal ekvivalens, hogy $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált egyenes. □

5.21. állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény!*

(a) Ha $c : I \to U$ parametrizált görbe, akkor

$$\forall\, t \in I : \quad (f \circ c)'(t) = \langle \operatorname{grad} f[c(t)], c'(t) \rangle \ .$$

(b) Megadva egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektort, tekintsünk egy olyan $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét, amelyre $\dot{c}(0) = v_p$ (azaz $c(0) = p,\ c'(0) = v$). Ekkor

$$D_v f(p) = (f \circ c)'(0).$$

Bizonyítás.

(a) A láncszabály (4.2.(c)) alkalmazásával

$$\forall\, t \in I : \quad (f \circ c)'(t) = f'[c(t)] \circ c'(t) = f'[c(t)](c'(t))$$

írható, alkalmazva az 5.2.(a)-ban rögzített megállapodást. Mivel $f'[c(t)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$, a gradiens definíciója (4.4.) alapján

$$f'[c(t)](c'(t)) = \langle \operatorname{grad} f[c(t)], c'(t) \rangle.$$

(b) $D_v f(p) \overset{4.10.}{=} f'(p)(v) = f'[c(0)](c'(0)) \overset{4.2.(c)}{=} (f \circ c)'(0)$. □

5.22. definíció és lemma. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Az $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ leképezések* ***vektoriális szorzat****án az*

$$f \times g : \quad I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (f \times g)(t) := f(t) \times g(t)$$

leképezést értjük. Ha f és g differenciálható, akkor $f \times g$ is differenciálható, és

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'.$$

Bizonyítás. Amennyiben $f = (f^1, f^2, f^3)$, $g = (g^1, g^2, g^3)$, úgy a vektoriális szorzat kiszámítási formulája alapján (ld. 2.8. bizonyítását!)

$$f \times g = (f^2 g^3 - f^3 g^2, f^3 g^1 - f^1 g^3, f^1 g^2 - f^2 g^1).$$

4.7. értelmében így $f \times g$ differenciálható, és deriváltja 4.7. ismételt figyelembevételével valamint a Leibniz-szabály[3] alkalmazásával

$$\begin{aligned}(f \times g)' &= \begin{pmatrix} f^{2\prime} g^3 + f^2 g^{3\prime} - f^{3\prime} g^2 - f^3 g^{2\prime} \\ f^{3\prime} g^1 + f^3 g^{1\prime} - f^{1\prime} g^3 - f^1 g^{3\prime} \\ f^{1\prime} g^2 + f^1 g^{2\prime} - f^{2\prime} g^1 - f^2 g^{1\prime} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f^{2\prime} g^3 - f^{3\prime} g^2 \\ f^{3\prime} g^1 - f^{1\prime} g^3 \\ f^{1\prime} g^2 - f^{2\prime} g^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^2 g^{3\prime} - f^3 g^{2\prime} \\ f^3 g^{1\prime} - f^1 g^{3\prime} \\ f^1 g^{2\prime} - f^2 g^{1\prime} \end{pmatrix} = \\ &= f' \times g + f \times g'. \end{aligned}$$

□

5.23. definíció és következmény. *Legyen adva egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe, s tekintsük az $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(c)$ c-menti vektormezőket! Ekkor*

$$\underline{X} \times \underline{Y} : \quad t \in I \mapsto (\underline{X} \times \underline{Y})(t) := \underline{X}(t) \times \underline{Y}(t) := (X(t) \times Y(t))_{c(t)}$$

(ahol $X, Y : I \to \mathbb{R}^3$ a megfelelő csatolt leképezések) szintén c-menti vektormező, amelyet $\underline{X}$ és $\underline{Y}$ ***vektoriális szorzat****ának nevezünk. $\underline{X} \times \underline{Y}$ derivált vektormezője*

$$\dot{\overline{\underline{X} \times \underline{Y}}} = \dot{\underline{X}} \times \underline{Y} + \underline{X} \times \dot{\underline{Y}}.$$

□

5.24. lemma. *Legyen adva egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) parametrizált görbe és egy $\underline{X} \in \mathfrak{X}(c)$ c-menti vektormező. Tekintsünk egy $\theta : J \to I$ paramétertranszformációt! Ekkor $\underline{X} \circ \theta \in \mathfrak{X}(c \circ \theta)$, és*

$$\dot{\overline{\underline{X} \circ \theta}} = \theta'(\dot{\underline{X}} \circ \theta).$$

Bizonyítás. Ha $\underline{X}$ csatolt leképezése $X : I \to \mathbb{R}^n$, akkor $\underline{X} \circ \theta$ csatolt leképezése $X \circ \theta : J \to \mathbb{R}^n$, s így

$$\begin{aligned}\forall\, t \in J : \quad \dot{\overline{\underline{X} \circ \theta}}(t) &= (c(\theta(t)), (X \circ \theta)'(t)) = (c(\theta(t)), X'[\theta(t)]\theta'(t)) = \\ &= \theta'(t)(c(\theta(t)), X'[\theta(t)]) = \theta'(t)\dot{\underline{X}}(\theta(t))\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\dot{\overline{\underline{X} \circ \theta}} = \theta'(\dot{\underline{X}} \circ \theta).$ □

5.25. lemma. *Tekintsük a $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét, s legyen $\tilde{c} = c \circ \theta$ ($\theta : J \to I$ diffeomorfizmus) átparaméterezése c-nek. c és $\tilde{c}$ érintőegységvektormezője között a*

$$\tilde{\underline{T}} = \varepsilon(\underline{T} \circ \theta)$$

kapcsolat áll fenn, ahol ε 1, illetve -1 aszerint, amint θ irányítástartó, illetve irányításváltó paramétertranszformáció.

[3] Ennek absztrakt formáját illetően ld. II.1.20-at!

Bizonyítás. Jelölje T, illetve $\tilde{T}$ a tekintett vektormezők csatolt leképezését! Ekkor

$$T = \frac{1}{v}c', \qquad \tilde{T} = \frac{1}{\tilde{v}}\tilde{c}',$$

ahol v és $\tilde{v}$ a megfelelő pályasebességek. Mivel

$$\tilde{c}' = (c \circ \theta)' = \theta'(c' \circ \theta),$$

kapjuk, hogy

$$\tilde{v} = \|\tilde{c}'\| = |\theta'|\ \|c' \circ \theta\| = |\theta'|(\|c'\| \circ \theta) = |\theta'|(v \circ \theta).$$

Ennek fölhasználásával

$$\tilde{T} = \frac{1}{|\theta'|(v \circ \theta)}\theta'(c' \circ \theta) = \frac{\theta'}{|\theta'|}\frac{1}{v \circ \theta}c' \circ \theta = \varepsilon(T \circ \theta),$$

ami az állítás helyességét jelenti. $\square$

6. Görbület, torzió, Frenet-egyenletek

6.1. definíció. *Legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe, s tekintsük ennek*

$$\underline{T} : I \to T\mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \underline{T}(t) = (c(t), T(t)) = \frac{1}{v(t)}(c(t), c'(t))$$

érintő-egységvektormezőjét! c ***görbületfüggvény****én a*

$$\kappa := \frac{1}{v}\|\dot{\underline{T}}\| = \frac{1}{v}\|T'\|$$

függvényt értjük.

6.2. megjegyzés. Ha speciálisan c természetes paraméterezésű, akkor görbületfüggvénye $\kappa = \|c''\|$.

6.3. állítás. *Tekintsünk egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét, amelynek görbületfüggvénye a $\kappa : I \to \mathbb{R}$ függvény!*

(a) Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ izometria, akkor $f \circ c$ görbületfüggvénye szintén κ, a görbület tehát izometriával szemben invariáns.

(b) Amennyiben $\theta : J \to I$ paramétertranszformáció, $\tilde{c} = c \circ \theta$, és $\tilde{c}$ görbületfüggvénye $\tilde{\kappa}$, úgy

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \theta \ ,$$

azaz a görbület paramétertranszformációval szemben is invariáns.

Bizonyítás.

(a) Legyen $\tilde{c} := f \circ c$! Ha $f = \tau_a \circ \varphi$, akkor 4.3.(3) alkalmazásával

$$\tilde{c}' = (f' \circ c)c' = \varphi \circ c', \qquad \tilde{c}'' = (\varphi' \circ c')c'' = \varphi \circ c'' \ .$$

Így $\tilde{c}$ pályasebessége

$$\tilde{v} := \|\tilde{c}'\| = \|\varphi \circ c'\| = \|c'\| = v \ ;$$

$\tilde{c}$ görbületfüggvénye pedig (ennek figyelembevételével)

$$\tilde{\kappa} \quad := \quad \frac{1}{\tilde{v}}\|\tilde{T}'\| = \frac{1}{v}\left\|\left(\frac{1}{v}(\varphi \circ c')\right)'\right\| = \frac{1}{v}\left\|\left(\frac{1}{v}\right)'(\varphi \circ c') + \frac{1}{v}(\varphi \circ c'')\right\| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{v}\left\|\varphi\circ\left(\left(\frac{1}{v}\right)' c' + \frac{1}{v}c''\right)\right\| = \frac{1}{v}\left\|\left(\frac{1}{v}\right)' c' + \frac{1}{v}c''\right\| = \\
&= \frac{1}{v}\left\|\left(\frac{1}{v}c'\right)'\right\| = \frac{1}{v}\|T'\| =: \kappa
\end{aligned}
$$

(b) Az 5.25-ben látottak szerint $\tilde{c} = c\circ\theta$ pályasebessége, illetve érintő-egységvektormezőjének csatolt leképezése

$$\tilde{v} = |\theta'|(v\circ\theta), \quad \text{ill.} \quad \tilde{T} = \varepsilon(T\circ\theta),$$

így a görbületfüggvénye

$$
\begin{aligned}
\tilde{\kappa} &= \frac{1}{\tilde{v}}\|\tilde{T}'\| = \frac{1}{|\theta'|(v\circ\theta)}\|\varepsilon(T\circ\theta)'\| = \frac{|\theta'|}{|\theta'|(v\circ\theta)}\|T'\circ\theta\| = \\
&= \frac{1}{v\circ\theta}\|T'\circ\theta\| = \|\frac{1}{v}T'\|\circ\theta = \kappa\circ\theta \ .
\end{aligned}
$$

□

6.4. állítás. *Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe görbületfüggvénye kiszámítható a*

$$\kappa = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}$$

formula alapján.

Bizonyítás. c érintő-egységvektormezőjének csatolt leképezése

$$T = \frac{1}{v}\ c'\ ,$$

ahonnan

$$c' = vT\ .$$

Innen deriválással

$$c'' = v'T + vT'$$

adódik; így

$$
\begin{aligned}
c'\times c'' &= vT\times(v'T+vT') = v^2(T\times T')\ ,\\
\|c'\times c''\|^2 &= v^4\|T\times T'\|^2 \overset{2.8.(9)}{=} v^4(\|T\|^2\ \|T'\|^2 - \langle T, T'\rangle^2) \overset{5.17.(b)}{=} \\
&= v^4\|T'\|^2 \overset{6.1.}{=} v^6\kappa^2\ ,
\end{aligned}
$$

amiből valóban a kívánt

$$\kappa = \frac{\|c'\times c''\|}{v^3} = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}$$

összefüggéshez jutunk. □

6.5. következmény. *Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe pontosan akkor bireguláris, ha a görbületfüggvénye seholsem tűnik el (s ennélfogva mindenütt pozitív értéket vesz föl).*

Bizonyítás. c bireguláris $:\Longleftrightarrow\ \forall\, t \in I:\ (c'(t), c''(t))$ lineárisan független $\overset{2.8.(4)}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, t \in I:\ c'(t)\times c''(t) \neq 0 \iff \forall\, t \in I : \|\, c'(t)\times c''(t)\| \neq 0 \overset{6.4.}{\Longleftrightarrow} \forall\, t \in I:\ \kappa(t) \neq 0$.
□

6.6. következmény. *Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe akkor és csak akkor parametrizált egyenes, ha a görbületfüggvénye a zérusfüggvény.*

Bizonyítás.

(a) Tekintsük a

$$c:\ t \in \mathbb{R}\ \mapsto\ c(t) := a + tv \in \mathbb{R}^3 \quad (v \neq 0)$$

parametrizált egyenest! Ekkor

$$\forall\, t \in \mathbb{R}:\ c'(t) = v,\ c''(t) = 0 \implies c' \times c'' = 0 \overset{6.4.}{\implies} \kappa = 0.$$

(b) Megfordítva, legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ olyan parametrizált görbe, amelynek görbületfüggvénye a zérusfüggvény: $\forall\, t \in I : \kappa(t) = 0$. 6.3.(b)-re tekintettel föltehetjük, hogy c természetes paraméterezésű. Ekkor

$$\kappa = \|c''\| = \|\ddot{c}\| = 0 \quad \implies \quad \ddot{c} = 0 \quad \overset{5.20.}{\implies} \quad c \text{ parametrizált egyenes.}$$

□

6.7. definíció és lemma. *Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe!*

(a) Az

$$\underline{F} := \frac{1}{\|\dot{\underline{T}}\|}\dot{\underline{T}} = \frac{1}{v\kappa}\dot{\underline{T}}$$

*c-menti vektormező létezik, ezt **főnormális vektormező**nek nevezzük. A főnormális vektormező egységvektormező: $\|\underline{F}\| = 1$; fennáll továbbá, hogy*

$$\forall\, t \in I: \quad \underline{F}(t) \perp \underline{T}(t)\ .$$

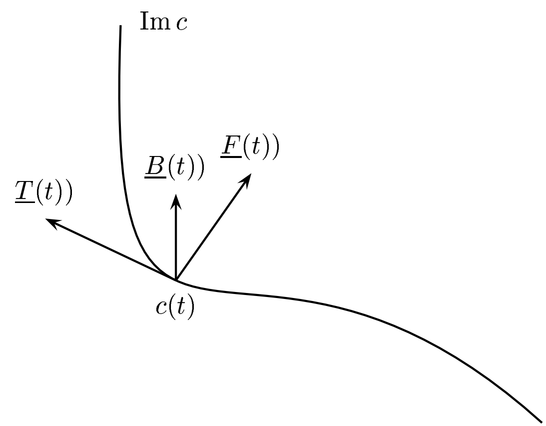
(b) A

$$\underline{B} := \underline{T} \times \underline{F}$$

*c-menti vektormezőt c **binormális vektormező**jének hívjuk, ez ugyancsak egységvektormező.*

(c) *A* $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ *hármast a tekintett parametrizált görbe* ***Frenet-féle háromél-mezőjének*** *mondjuk. Erre teljesül, hogy*

$$\forall\ t \in I:\ (\underline{T}(t), \underline{F}(t), \underline{B}(t)) \text{ pozitív ortonormált bázisa } T_{c(t)}\mathbb{R}^3\text{-nak.}$$



Bizonyítás.

(a) A biregularitás miatt 6.5. értelmében κ seholsem tűnik el, így

$$\underline{F} = \frac{1}{\|\dot{\underline{T}}\|}\dot{\underline{T}} \overset{6.1.}{=} \frac{1}{v\kappa}\dot{\underline{T}}$$

valóban létezik. Innen kiolvasható, hogy $\|\underline{F}\| = 1$, míg 5.17.(b) alapján következik, hogy $\forall\ t \in I:\ \underline{F}(t) \perp \underline{T}(t)$.

(b) A Lagrange-identitás (2.8.(9)) alkalmazásával

$$\begin{aligned}\forall\ t \in I: \quad \|\underline{B}(t)\|^2 \quad &= \quad \|\underline{T}(t) \times \underline{F}(t)\|^2 = \|\underline{T}(t)\|^2\|\underline{F}(t)\|^2 - \\ &- \quad \langle \underline{T}(t), \underline{F}(t)\rangle^2 \overset{\text{(a)}}{=} 1\ .\end{aligned}$$

(c) Mivel a vektoriális szorzat ortogonális a tényezőire,

$$\forall\ t \in I: \quad \underline{B}(t) \perp \underline{T}(t), \quad \underline{B}(t) \perp \underline{F}(t);$$

így az eddig mondottak figyelembevételével

$$\forall\ t \in I: \quad (\underline{T}(t), \underline{F}(t), \underline{B}(t)) \text{ ortonormált bázisa } T_{c(t)}\mathbb{R}^3\text{-nak.}$$

Az, hogy ez a bázis pozitív ($T_{c(t)}\mathbb{R}^3$ szokásos irányítására nézve), 2.10. figyelembevételével adódik abból, hogy

$$\forall\ t \in I: \quad \langle \underline{T}(t) \times \underline{F}(t), \underline{B}(t)\rangle = \langle \underline{B}(t), \underline{B}(t)\rangle = 1 > 0. \qquad \square$$

6.8. következmény. *Tetszőleges $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe esetén érvényesek a következő összefüggések:*

(a) $\dot{\underline{T}} = v\kappa\underline{F}$ *(F1)*

(b) $\ddot{c} = v'\underline{T} + v^2\kappa\underline{F}$.

Bizonyítás.

(a) Csupán a 6.7.(a) definíciót írtuk más alakba.

(b) 6.4. bizonyításában már láttuk, hogy

$$c'' = v'T + vT' \ ,$$

ami a megfelelő c-menti vektormezők nyelvén azt jelenti, hogy

$$\ddot{c} = v'\underline{T} + v\dot{\underline{T}} \overset{\text{(a)}}{=} v'\underline{T} + v^2\kappa\underline{F} \ . \qquad \square$$

6.9. megjegyzések.

(a) 6.7.(b) alapján közvetlenül adódik, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén $\underline{T}(t)$ és $\underline{F}(t)$ a $c(t)$-beli simulósíkot feszíti ki, hiszen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c'(t), c''(t)) &= \mathcal{L}(v(t)T(t), v'(t)T(t) + \kappa(t)v^2(t)F(t)) = \\ &= \mathcal{L}(T(t), F(t)). \end{aligned}$$

Az $\underline{F}(t)$ és $\underline{B}(t)$ által kifeszített síkot a $c(t)$-beli ***normálsík***nak, a $\underline{B}(t)$ és $\underline{T}(t)$ által kifeszített síkot pedig a $c(t)$-beli ***rektifikáló sík***nak nevezzük.

(b) A mechanika terminológiájával élve, a

$$\ddot{c} = v'\underline{T} + v^2\kappa\underline{F}$$

formula tetszőleges t paraméterű pontban megadja a gyorsulásvektor fölbontását egy tangenciális összetevőre, az ún. ***pályamenti gyorsulás***ra és egy normális összetevőre, az ún. ***centripetális gyorsulás***ra. A sebességváltozáshoz a tangenciális összetevő járul hozzá, míg a normális összetevő az irányváltozásért felelős.

(c) Tekintsünk egy $c : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizált síkgörbét!
Mivel

$$T = \frac{1}{v}c'$$

1-normájú, megmutatható, hogy létezik olyan

$$\alpha : \ I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \alpha(t)$$

sima függvény, amelyre

$$\forall\, t \in I : \quad T(t) = (\cos\alpha(t))e_1 + (\sin\alpha(t))e_2.$$

(Ehhez sokkal finomabb meggondolásokra van szükség, mint első pillantásra sejtenénk!) Innen deriválással kapjuk, hogy

$$\forall\, t \in I: \quad T'(t) = \alpha'(t)(-(\sin\alpha(t))e_1 + (\cos\alpha(t))e_2) = \alpha'(t)U(t),$$

ahol $U(t) := -(\sin\alpha(t))e_1 + (\cos\alpha(t))e_2$ egységvektor, s így

$$\forall\, t \in I: \quad \|T'(t)\| = |\alpha'(t)|.$$

A $t \in I \mapsto U(t) \in \mathbb{R}^2$ függvény sima, és az

$$\underline{U}: I \to T\mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \underline{U}(t) := (c(t), U(t))$$

c-menti vektormezőt származtatja. A konstrukcióból világos, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén $(\underline{T}(t), \underline{U}(t))$ ortonormált bázisa $T_{c(t)}\mathbb{R}^2$-nek. Ez a bázis ráadásul pozitív, hiszen

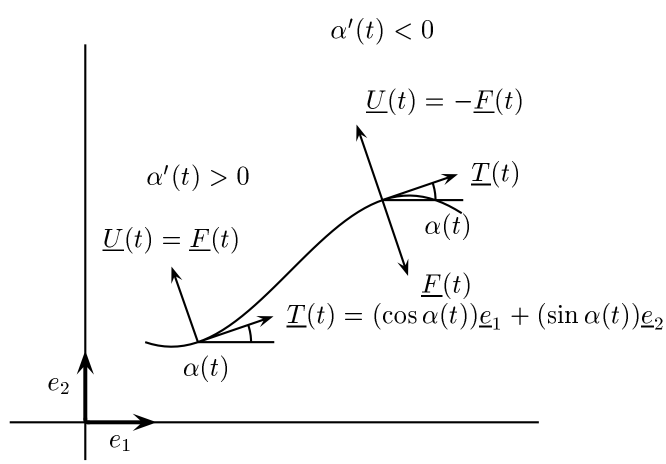
$$P_{(e_1,e_2)\to(T(t),U(t))} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) & -\sin\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) & \cos\alpha(t) \end{pmatrix}$$

pozitív (mégpedig 1) determinánsú. Mivel $\forall\, t \in I: \ \alpha(t) = \arccos\langle T(t), e_1\rangle$, α-t ***hajlásszögfüggvény***nek hívjuk. Az

$$|\alpha'(t)| = \|T'(t)\| = \|\dot{\underline{T}}(t)\|$$

relációból kiolvasható, hogy – szemléletesen szólva – $\|\dot{\underline{T}}(t)\|$ a $\underline{T}$ vektormező t-beli hajlásszögének *„változási sebességét"*, vagy $\underline{T}$ $c(t)$-beli *„szögsebességét"* méri. Megállapíthatjuk, hogy

- amennyiben $\alpha'(t) > 0$, a hajlásszögfüggvény lokálisan növekvő, s ekkor $\underline{U}(t) = \underline{F}(t)$;
- $\alpha'(t) < 0$ esetén a hajlásszögfüggvény lokálisan csökkenő, és $\underline{U}(t) = -\underline{F}(t)$.



Ha c természetes paraméterezésű, akkor

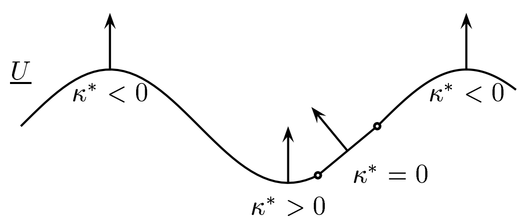
$$|\alpha'(t)| = \|T'(t)\| = \kappa(t) \ ,$$

s bevezethetjük a

$$\kappa^* := \alpha'$$

előjeles görbületfüggvényt. A mondottak alapján κ^* előjelének a következő szemléletes jelentés adható:

– $\kappa^*(t) > 0$ esetén a görbe az $\underline{U}(t)$ $(= \underline{F}(t))$ normális *felé* hajlik;
– ha $\kappa^*(t) < 0$, akkor a görbe ($c(t)$ egy környezetében) *el*hajlik az $\underline{U}(t)$ $(= -\underline{F}(t))$ normálistól.



(Vegyük észre, hogy $\underline{F}$-fel ellentétben $\underline{U}$ κ eltűnése esetén is létezik!)

6.10. állítás. *Tekintsük a $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbét, amelynek Frenet-féle háromélmezője $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$, a megfelelő csatolt leképezések hármasa (T, F, B).*

(a) *Ha $\tilde{c} := f \circ c$, ahol $f = \tau_a \circ \varphi$ $(a \in \mathbb{R}^3,\ \varphi \in O(\mathbb{R}^3))$ izometria, akkor $\tilde{c}$ Frenet-féle háromélmezőjének csatolt leképezései*

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \varphi \circ T \ , \\ \tilde{F} &= \varphi \circ F \ , \\ \tilde{B} &= \varepsilon(\varphi \circ B) \ , \end{aligned}$$

ahol $\varepsilon = \det \varphi \in \{1, -1\}$.

(b) *Tegyük föl, hogy $\theta : J \to I$ paramétertranszformáció, s legyen $\tilde{c} := c \circ \theta$. Ebben az esetben $\tilde{c}$ Frenet-féle háromélmezője*

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{T}} &= \varepsilon(\underline{T} \circ \theta) \ , \\ \underline{\tilde{F}} &= \underline{F} \circ \theta \ , \\ \underline{\tilde{B}} &= \varepsilon(\underline{B} \circ \theta) \ , \end{aligned}$$

ahol ε 1, illetve -1 aszerint, amint θ irányítástartó, illetve irányításváltó paramétertranszformáció.

Bizonyítás.

(a) (1) $\tilde{T} := \dfrac{1}{\tilde{v}}\tilde{c}' \overset{6.3.}{=} \dfrac{1}{v}(\varphi \circ c') = \varphi \circ \dfrac{1}{v}c' = \varphi \circ T$.

(2) $\tilde{F} := \dfrac{1}{\tilde{v}\tilde{\kappa}}\tilde{T}' \overset{6.3.}{=} \dfrac{1}{v\kappa}(\varphi \circ T)' = \dfrac{1}{v\kappa}(\varphi \circ T') = \varphi \circ \dfrac{1}{v\kappa}T' = \varphi \circ F$.

(3) Jegyezzük meg először, hogy $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c)\rangle &\overset{2.11.}{=} \det\varphi\langle a \times b, c\rangle \overset{\varphi \in O(\mathbb{R}^3)}{=} \\ &= \det\varphi\langle \varphi(a \times b), \varphi(c)\rangle = \langle \varepsilon\varphi(a \times b), \varphi(c)\rangle \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\varphi(a) \times \varphi(b) = \varepsilon\varphi(a \times b)$. Ennek alapján közvetlenül adódik, hogy

$$\tilde{B} = \tilde{T} \times \tilde{F} = (\varphi \circ T) \times (\varphi \circ F) = \varepsilon\varphi \circ (T \times F) = \varepsilon(\varphi \circ B) .$$

(b) Az első összefüggés 5.25-ben már igazolást nyert. Ezt is fölhasználva,

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{F}} &:= \frac{1}{\tilde{v}\tilde{\kappa}}\dot{\underline{\tilde{T}}} \overset{5.25.,6.3.}{=} \frac{1}{|\theta'|(v \circ \theta)(\kappa \circ \theta)}\varepsilon(\overline{\underline{T} \circ \theta})^{\cdot} \overset{5.24.}{=} \\ &= \frac{1}{|\theta'|(v \circ \theta)(\kappa \circ \theta)}\varepsilon\theta'(\dot{\underline{T}} \circ \theta) = \frac{\varepsilon^2}{(v \circ \theta)(\kappa \circ \theta)}\dot{\underline{T}} \circ \theta = \\ &= (\frac{1}{v\kappa}\dot{\underline{T}}) \circ \theta = \underline{F} \circ \theta \\ \Longrightarrow \underline{\tilde{B}} &= \varepsilon(\underline{T} \circ \theta) \times (\underline{F} \circ \theta) = \varepsilon(\underline{T} \times \underline{F}) \circ \theta = \varepsilon(\underline{B} \circ \theta). \end{aligned}$$

□

6.11. állítás és definíció. *A binormális vektormező derivált vektormezője függvényszerese a főnormális vektormezőnek. A*

$$\dot{\underline{B}} = -v\tau\underline{F} \tag{F3}$$

*összefüggés által meghatározott $\tau : I \to \mathbb{R}$ függvényt **torziófüggvény**nek nevezzük.*

Bizonyítás. Mivel $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ bázisa $\mathfrak{X}(c)$-nek és $\dot{\underline{B}} \in \mathfrak{X}(c)$, egyértelmű módon

$$\dot{\underline{B}} = \lambda\underline{T} + \mu\underline{F} + \nu\underline{B}; \qquad \lambda, \mu, \nu \in C^\infty(I)$$

írható. Itt

$$\nu = \langle \dot{\underline{B}}, \underline{B}\rangle \overset{5.17.(b)}{=} 0;$$

belátjuk, hogy a λ függvény ugyancsak eltűnik.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{B}} &= \overline{\underline{T} \times \underline{F}}^{\cdot} \overset{5.23.}{=} \dot{\underline{T}} \times \underline{F} + \underline{T} \times \dot{\underline{F}} \overset{(F1)}{=} v\kappa\underline{F} \times \underline{F} + \underline{T} \times \dot{\underline{F}} = \\ &= \underline{T} \times \dot{\underline{F}}, \end{aligned}$$

így

$$\lambda = \langle \dot{\underline{B}}, \underline{T}\rangle = \langle \underline{T} \times \dot{\underline{F}}, \underline{T}\rangle \overset{2.8.(3)}{=} 0 ,$$

következésképpen $\dot{\underline{B}} = \mu\underline{F}$. A τ függvényt ezek után a $\tau := -\dfrac{\mu}{v}$ előírással vezethetjük be. □

6.12. állítás. *A torziófüggvény irányítástartó izometriával és tetszőleges paramétertranszformációval szemben invariáns, irányításváltó izometria alkalmazása esetén előjelet vált.*

Bizonyítás. Legyen adva a $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe!

(a) Tekintsük az $f = \tau_a \circ \varphi$ $(a \in \mathbb{R}^3,\ \varphi \in O(\mathbb{R}^3))$ izometriát, és legyen $\tilde{c} := f \circ c$. $\tilde{c}$ torziófüggvénye a

$$\tilde{B}' = -\tilde{v}\tilde{\tau}\tilde{F} \overset{6.3.}{=} -v\tilde{\tau}\tilde{F}$$

összefüggés által meghatározott $\tilde{\tau} : I \to \mathbb{R}$ függvény. Mivel – másrészt –

$$\begin{aligned}\tilde{B}' &\overset{6.10.(a)}{=} \varepsilon(\varphi \circ B)' = \varepsilon(\varphi \circ B') \overset{(F3)}{=} \varepsilon(\varphi \circ -v\tau F) = \\ &= -\varepsilon v\tau(\varphi \circ F) \overset{6.10.(a)}{=} = -\varepsilon v\tau\tilde{F}\ ,\end{aligned}$$

következik, hogy

$$\tilde{\tau} = \varepsilon\tau = \begin{cases} \tau, & \text{ha} \quad f \quad \text{irányítástartó;} \\ -\tau, & \text{ha} \quad f \quad \text{irányításváltó.} \end{cases}$$

(b) Legyen $\theta : J \to I$ paramétertranszformáció, $\tilde{c} := c \circ \theta$! Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\tilde{B}}} &\overset{6.10.(b)}{=} \varepsilon(\dot{\overline{\underline{B} \circ \theta}}) \overset{5.24.}{=} \varepsilon\theta'(\dot{\underline{B}} \circ \theta) \overset{(F3)}{=} \varepsilon\theta'((-v\tau\underline{F}) \circ \theta) = \\ &= -\frac{\theta'}{|\theta'|}\theta'(v \circ \theta)(\tau \circ \theta)(\underline{F} \circ \theta) \overset{6.10.(b)}{=} -|\theta'|(v \circ \theta)(\tau \circ \theta)\underline{\tilde{F}} = \\ &\overset{5.25.}{=} -\tilde{v}(\tau \circ \theta)\underline{\tilde{F}} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\tau} = \tau \circ \theta.\end{aligned}$$

□

6.13. tétel (Frenet-egyenletek). *Tekintsünk egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbét! – A $\underline{T}$, $\underline{F}$ és $\underline{B}$ vektormezők derivált vektormezője egyértelműen előállítható a Frenet-féle hárommélmező segítségével a*

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \dot{\underline{T}} & = & v\kappa\underline{F} & \text{(F1)} \\ \dot{\underline{F}} & = & -v\kappa\underline{T} + v\tau\underline{B} & \text{(F2)} \\ \dot{\underline{B}} & = & -v\tau\underline{F} & \text{(F3),} \end{array}}$$

speciálisan természetes paraméterezés esetén a

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \dot{\underline{T}} & = & \kappa\underline{F} \\ \dot{\underline{F}} & = & -\kappa\underline{T} + \tau\underline{B} \\ \dot{\underline{B}} & = & -\tau\underline{F} \end{array}}$$

alakban.

Bizonyítás. Már csupán (F2) igényel igazolást. – Mivel $\forall\, t \in I:\ (\underline{T}(t), \underline{F}(t), \underline{B}(t))$ ortonormált bázisa $T_{c(t)}\mathbb{R}^3$-nak, a pontonként érvényes Fourier-előállítás (1.8.) alapján

$$\dot{\underline{F}} = \langle \dot{\underline{F}}, \underline{T}\rangle \underline{T} + \langle \dot{\underline{F}}, \underline{F}\rangle \underline{F} + \langle \dot{\underline{F}}, \underline{B}\rangle \underline{B}$$

írható. Itt

$$\begin{array}{llll} (1) & \langle \underline{F}, \underline{T}\rangle = & 0 & \overset{5.15.}{\Longrightarrow} \langle \dot{\underline{F}}, \underline{T}\rangle = -\langle \underline{F}, \dot{\underline{T}}\rangle \overset{(F1)}{=} -v\kappa\langle \underline{F}, \underline{F}\rangle = -v\kappa\ ; \\ (2) & \langle \dot{\underline{F}}, \underline{F}\rangle = & 0 & \text{5.17.(b) miatt;} \\ (3) & \langle \underline{F}, \underline{B}\rangle = & 0 & \Longrightarrow \langle \dot{\underline{F}}, \underline{B}\rangle = -\langle \underline{F}, \dot{\underline{B}}\rangle \overset{(F3)}{=} -\langle \underline{F}, -v\tau\underline{F}\rangle = v\tau, \end{array}$$

amivel beláttuk (F2) teljesülését. □

6.14. megjegyzés. Az (F1)-(F3) összefüggéseket ***Serret-Frenet-formulák***ként is szokás idézni, ui. egymástól függetlenül jutott el hozzájuk Serret 1851-ben, illetve Frenet az 1847-ben elkészült disszertációjában[1]. Az utóbbinak egy kivonata 1852-ben került publikálásra. – Az (F1)-(F3) egyenletek teszik lehetővé a görbeelméleti problémák szisztematikus tárgyalását.

6.15. állítás. *Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe Frenet-féle háromélmezőjének tagjai kiszámíthatók a*

$$\underline{T} = \frac{1}{\|c'\|}\dot{c}, \qquad \underline{B} = \frac{1}{\|c' \times c''\|}\dot{c} \times \ddot{c}, \qquad \underline{F} = \underline{B} \times \underline{T}$$

összefüggések szerint, a torziófüggvénye pedig a

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{1}{\|c' \times c''\|^2} \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c''' \end{pmatrix}$$

formula alapján. Természetes paraméterezés esetén

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c'''\rangle}{\|c''\|^2} = \frac{1}{\kappa^2} \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c''' \end{pmatrix} .$$

Bizonyítás.

(a) $\underline{T} := \dfrac{1}{v}\dot{c} = \dfrac{1}{\|c'\|}\dot{c}$; így 6.8.(b) figyelembevételével

$$\dot{c} \times \ddot{c} = v\underline{T} \times (v'\underline{T} + v^2\kappa\underline{F}) = v^3\kappa\underline{T} \times \underline{F} = v^3\kappa\underline{B}\ ,$$

innen

$$\underline{B} = \frac{1}{v^3\kappa}\dot{c} \times \ddot{c} \overset{6.4.}{=} \frac{1}{\|c' \times c''\|}\dot{c} \times \ddot{c}\ .$$

[1] *J.A. Serret* (1819 - 1885) és *J-F. Frenet* (1816 - 1900) francia matematikusok; utóbbi a toulousei, majd a lyoni egyetem professzora.

Mivel $\forall\ t \in I:\ (\underline{T}(t), \underline{F}(t), \underline{B}(t))$ pozitív ortonormált bázisa $T_{c(t)}\mathbb{R}^3$-nak, ugyanilyen tulajdonságú a $(\underline{B}(t), \underline{T}(t), \underline{F}(t))$ hármas is. Másrészt 2.8.(5) értelmében $(\underline{B}(t), \underline{T}(t), \underline{B}(t) \times \underline{T}(t))$ szintén pozitív ortonormált bázisa $T_{c(t)}\mathbb{R}^3$-nak, ezért

$$\forall\ t \in I:\ \underline{F}(t) = \underline{B}(t) \times \underline{T}(t) \implies \underline{F} = \underline{B} \times \underline{T}\ .$$

(b) A $\dddot{c}$ c-menti vektormező egyértelműen fölírható

$$\dddot{c} = \lambda \underline{T} + \mu \underline{F} + \nu \underline{B}; \qquad \lambda, \mu, \nu \in C^\infty(I)$$

alakban, hiszen $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ bázisa $\mathfrak{X}(c)$-nek. Mivel az (a)-ban látottak szerint

$$\dot{c} \times \ddot{c} = v^3 \kappa \underline{B}, \quad \text{továbbá} \quad \langle \underline{T}, \underline{B} \rangle = \langle \underline{F}, \underline{B} \rangle = 0\ ,$$

a $\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dddot{c} \rangle$ belső szorzat kiszámításához elegendő a $\nu \in C^\infty(I)$ függvényt ismernünk. – 6.8.(b)-ből deriválással

$$\begin{aligned} \dddot{c} &= v'' \underline{T} + v' \dot{\underline{T}} + (v^2\kappa)' \underline{F} + v^2 \kappa \dot{\underline{F}} \overset{\text{(F1),(F2)}}{=} \\ &= v^3 \kappa \tau \underline{B} + \{\underline{T} \text{ és } \underline{F} \text{ lineáris kombinációja}\}\ , \end{aligned}$$

így

$$\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dddot{c} \rangle = v^6 \kappa^2 \tau\ .$$

Itt

$$\kappa^2 \overset{6.4.}{=} \frac{\|c' \times c''\|^2}{v^6}, \quad \text{tehát} \quad v^6 \kappa^2 = \|c' \times c''\|^2,$$

következésképpen

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c' \times c''\|^2}\ .$$

Amennyiben a paraméterezés természetes, úgy

$$\|c' \times c''\|^2 \overset{2.8.(9)}{=} \|c'\|^2 \|c''\|^2 - \langle c', c'' \rangle^2 \overset{5.10.}{=} \|c''\|^2 = \kappa^2\ ,$$

ekkor tehát

$$\tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\|c''\|^2} = \frac{1}{\kappa^2} \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ c''' \end{pmatrix}\ .$$

□

6.16. állítás. *Egy $c: I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha a torziófüggvénye a zérusfüggvény, röviden: a torzió eltűnése a parametrizált síkgörbéket jellemzi.*

Bizonyítás. 6.3-ra és 6.12-re tekintettel az általánosság sérelme nélkül föltehetjük, hogy c természetes paraméterezésű. Ekkor

$$T = c', \qquad F = \frac{1}{\kappa} T' = \frac{1}{\kappa} c''\ . \tag{$*$}$$

(a) Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor c parametrizált síkgörbe, vagyis van olyan, valamely $p \in \mathbb{R}^3$ pontra illeszkedő, n normálegységvektorú sík, amely tartalmazza $\operatorname{Im} c$-t. Ekkor

$$\forall\, t \in I : \quad \langle c(t) - p, n \rangle = 0 \ .$$

Innen ismételt differenciálással azt kapjuk, hogy

$$\forall\, t \in I : \quad \langle c'(t), n \rangle = 0, \quad \langle c''(t), n \rangle = 0 \ ;$$

illetve $(*)$ figyelembevételével, hogy

$$\forall\, t \in I : \quad \langle T(t), n \rangle = 0, \quad \langle F(t), n \rangle = 0$$

(fölhasználva, hogy a biregularitás miatt κ seholsem zérus). Mivel az is fennáll, hogy

$$\forall\, t \in I : \quad \langle T(t), B(t) \rangle = \langle F(t), B(t) \rangle = 0,$$

a $B(t)$ és az n egységvektor ugyanabban az egydimenziós altérben ($\mathcal{L}(T(t), F(t))$ ortogonális komplementerében) van, s ennélfogva

$$\forall\, t \in I : \quad B(t) = \pm n \implies B' = 0 \overset{\text{(F3)}}{\implies} \tau = 0 \ .$$

(b) Legyen – megfordítva – $\tau = 0$! Ekkor (F3) alapján $B' = 0$, s így

$$\exists\, n \in \mathbb{R}^3 : \quad \|n\| = 1 \quad \text{és} \quad \forall\, t \in I : \quad B(t) = n \ .$$

Mivel ekkor

$$\langle c, B \rangle' = \langle c', B \rangle + \langle c, B' \rangle = \langle T, B \rangle = 0 \ ,$$

következik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ létezése, hogy

$$\forall\, t \in I : \quad \langle c(t), n \rangle = \alpha.$$

α nyilvánvalóan fölírható $\langle p, n \rangle$ alakban; így azt kapjuk, hogy

$$\forall\, t \in I : \quad \langle c(t) - p, n \rangle = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Im} c$ benne van a p pontra illeszkedő, n normálegységvektorú síkban. □

6.17. állítás (A körvonal jellemzése). *Egy $c : I \to \mathbb{R}^2$ természetes paraméterezésű, bireguláris síkgörbére a következő tulajdonságok ekvivalensek:*

$$(1) \qquad \exists\, \varrho \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall\, t \in I : \ \kappa(t) = \frac{1}{\varrho}.$$

$$(2) \qquad \exists\, \varrho \in \mathbb{R}^+,\ c_0 \in \mathbb{R}^2 : \quad \forall\, t \in I : \ \|c(t) - c_0\| = \varrho.$$

Bizonyítás. A $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ Frenet-féle háromélmező alapulvételével dolgozunk, a csatolt leképezésekre most is a T, F, B jelölést használva. Síkgörbéről lévén szó, 6.16. értelmében $\tau = 0$, így a Frenet-egyenletek (a csatolt leképezésekre fölírva) a következőkre redukálódnak:

$$T' = \kappa F, \qquad F' = -\kappa T, \qquad B' = 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Tekintsük a

$$\tilde{c} := c + \varrho F \ : \quad I \to \mathbb{R}^2$$

parametrizált görbét! Differenciálással

$$\tilde{c}' = c' + \varrho F' \overset{(F2)}{=} T - \varrho\kappa T \overset{(1)}{=} T - T = 0 \ ;$$

így $\exists\ c_0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall\ t \in I : \quad \tilde{c}(t) = c(t) + \varrho F(t) = c_0 \ .$$

Innen az következik, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad \|c(t) - c_0\| = \|\varrho F(t)\| = \varrho \ ,$$

(2) tehát teljesül.

(2) $\Rightarrow$ (1) A feltétel értelmében most

$$\forall\ t \in I : \quad \langle c(t) - c_0, c(t) - c_0 \rangle = \varrho^2.$$

Ennek alapján differenciálással következik, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad \langle c'(t), c(t) - c_0 \rangle = \langle T(t), c(t) - c_0 \rangle = 0.$$

Mivel – másrészt –

$$\forall\ t \in I : \quad \langle T(t), F(t) \rangle = 0,$$

megállapíthatjuk, hogy $c(t) - c_0$ skalárszorosa $F(t)$-nek.
$\|F(t)\| = 1$ és $\|c(t) - c_0\| = \varrho$ folytán a skalárszorzó csakis ϱ vagy $-\varrho$ lehet, tehát

$$\forall\ t \in I : \quad c(t) - c_0 = \varrho F(t) \quad \text{vagy} \quad c(t) - c_0 = -\varrho F(t).$$

Újbóli differenciálással innen az adódik, hogy

$$\begin{aligned} &\forall\ t \in I : \quad c'(t) = \varrho F'(t) \quad \text{vagy} \quad c'(t) = -\varrho F'(t) \overset{\text{(F2)}}{\Longleftrightarrow} \\ &\forall\ t \in I : \quad c'(t) = -\varrho\kappa(t) T(t) = -\varrho\kappa(t) c'(t) \quad \text{vagy} \quad c'(t) = \varrho\kappa(t) c'(t). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\forall\ t \in I : \quad -\varrho\kappa(t) = 1 \quad \text{vagy} \quad \varrho\kappa(t) = 1.$$

Mivel $\varrho \in \mathbb{R}^+$, és a biregularitás figyelembevételével (6.5.) $\forall\ t \in I : \ \kappa(t) > 0$, az első alternatíva nem teljesülhet. Tehát

$$\forall\ t \in I : \quad \varrho\kappa(t) = 1,$$

amivel (1) igazolást nyert. $\square$

6.18. állítás. *Jelölje* $S^2(r)$ $\mathbb{R}^3$ *origó középpontú,* r *sugarú gömbfelületét, s legyen* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *olyan bireguláris parametrizált görbe, amelyre* $\operatorname{Im} c \subset S^2(r)$ *teljesül. Ekkor*

$$\forall\ t \in I : \quad \kappa(t) \geqq \frac{1}{r}\ .$$

Bizonyítás. Föltesszük – nem sértve ezzel az általánosságot –, hogy c természetes paraméterezésű. Az $\operatorname{Im} c \subset S^2(r)$ feltétel miatt

$$\forall\ t \in I : \quad \langle c(t), c(t)\rangle = r^2,$$

következésképpen

$$\forall\ t \in I : \quad \langle c'(t), c(t)\rangle = 0,$$

azaz

$$\langle T, c\rangle = 0.$$

Ismételten differenciálva, innen

$$0 = \langle T', c\rangle + \langle T, c'\rangle \overset{\text{(F1)}}{=} \kappa\langle F, c\rangle + 1\ ,$$

vagyis

$$\kappa\langle c, F\rangle = -1$$

adódik. A Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján itt

$$|\langle c, F\rangle| \leqq \|c\|\ \|F\| = r\ ,$$

így

$$\frac{1}{r} \leqq \frac{1}{|\langle c, F\rangle|}\ .$$

Másrészt $\kappa|\langle c, F\rangle| = 1$, ennélfogva $\dfrac{1}{|\langle c, F\rangle|} = \kappa$, s ezért

$$\forall\ t \in I : \quad \frac{1}{r} \leqq \kappa(t),$$

amint állítottuk. □

6.19. definíció. *Tekintsünk egy* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *bireguláris parametrizált görbét! – A*

$$c^* := c + \frac{1}{\kappa}F$$

parametrizált görbét – ahol F *a főnormális vektormező csatolt leképezése –* c ***centrális görbéjé****nek nevezzük. Tetszőleges* $t \in I$ *paraméter esetén a*

$$c^*(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}F(t)$$

*pontot a c görbe t paraméterű pontjához tartozó **görbületi középpont**nak; a $c^*(t)$ középpontú, $\varrho(t) := \dfrac{1}{\kappa(t)}$ sugarú és a $c(t)$-beli simulósíkra illeszkedő kört az adott görbe (illető pontbeli) **simulókör**ének mondjuk, $\varrho(t)$-re a **görbületi sugár** elnevezést használjuk. Speciálisan egy bireguláris síkgörbe centrális görbéjét a görbe **evolutá**jának hívjuk.*

6.20. példák.

(a) *Ellipszis evolutája.* – Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+; \alpha \neq \beta)$$

egyenletű ellipszist! Ennek egy paraméteres előállítását adja a

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto c(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)$$

parametrizált görbe; c evolutáját határozzuk meg.

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in [0, 2\pi] :\ c'(t) &= (-\alpha \sin t, \beta \cos t) \cong (-\alpha \sin t, \beta \cos t, 0),\\
c''(t) &= (-\alpha \cos t, -\beta \sin t) \cong (-\alpha \cos t, -\beta \sin t, 0),\\
c'(t) \times c''(t) &= (0, 0, \alpha\beta) \implies B(t) = e_3.
\end{aligned}$$

Ezek alapján $\forall\, t \in [0, 2\pi]$:

$\sim$ a t-beli görbület $\kappa(t) = \dfrac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$,

$\sim$ a t-beli görbületi sugár $\varrho(t) = \dfrac{(\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\alpha\beta}$,

$\sim$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{\|e_3 \times c'(t)\|} e_3 \times (-(\alpha \sin t) e_1 + (\beta \cos t) e_2) =\\
&= \frac{1}{(\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} (-\beta \cos t, -\alpha \sin t),
\end{aligned}$$

s így

$$\begin{aligned}
c^*(t) &= c(t) + \varrho(t) F(t) =\\
&= (\alpha \cos t, \beta \sin t) + \frac{\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t}{\alpha\beta} (-\beta \cos t, -\alpha \sin t) =\\
&= (\alpha \cos t - \alpha \sin^2 t \cos t - \frac{\beta^2}{\alpha} \cos^3 t, \beta \sin t - \frac{\alpha^2}{\beta} \sin^3 t - \beta \sin t \cos^2 t) =\\
&= (\alpha \cos^3 t - \frac{\beta^2}{\alpha} \cos^3 t, \beta \sin^3 t - \frac{\alpha^2}{\beta} \sin^3 t) =\\
&= \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cos^3 t, \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \sin^3 t \right).
\end{aligned}$$

Ha $c^* = ((c^*)^1, (c^*)^2)$, akkor $\forall\ t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
(c^*)^1(t) &= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\cos^3 t \implies \cos t = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(c^*)^1(t)\right)^{\frac{1}{3}} \\
(c^*)^2(t) &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\sin^3 t \implies \sin t = \left(\frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}(c^*)^2(t)\right)^{\frac{1}{3}},
\end{aligned}$$

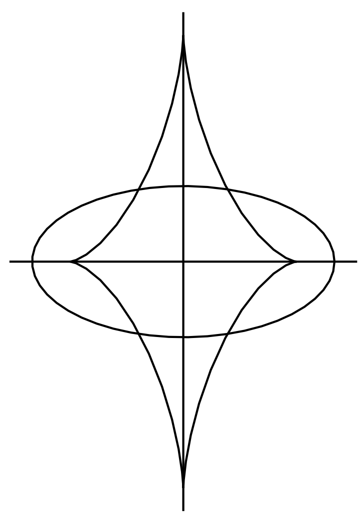
következésképpen a $c^*(t)$ pontok koordinátái az

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}x\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2}y\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

vagyis az

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\right] &= 1, \\
\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}\right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

egyenletnek tesznek eleget; ez az úgynevezett ***asztroid***ok egyenlete.



(b) *Parabola evolutája* Ha

$$c:\ t \in \mathbb{R}\ \mapsto\ c(t) := (t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

akkor $\operatorname{Im} c$ az $y = x^2$ egyenletű parabola.

$$\forall\ t \in \mathbb{R}:\ c'(t) = (1, 2t, 0),$$

$$\begin{aligned}
c''(t) &= (0,2,0), \\
c'(t)\times c''(t) &= (0,0,2) \implies B(t) = e_3, \\
\kappa(t) &= \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \varrho(t) = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}, \\
F(t) &= \frac{1}{\|e_3 \times c'(t)\|} e_3 \times (e_1 + 2te_2) = \frac{1}{(4t^2+1)^{\frac{1}{2}}}(-2t,1);
\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R}: \quad c^*(t) &= (t,t^2) + \frac{1+4t^2}{2}(-2t,1) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}); \\
(c^*)^1(t) &= -4t^3 \implies [(c^*)^1(t)]^2 = 16t^6 \\
(c^*)^2(t) &= 3t^2 + \frac{1}{2} \implies [(c^*)^2(t) - \frac{1}{2}]^3 = 27t^6,
\end{aligned}$$

következésképpen az evoluta pontjainak koordinátái a

$$27x^2 = 16(y - \frac{1}{2})^3$$

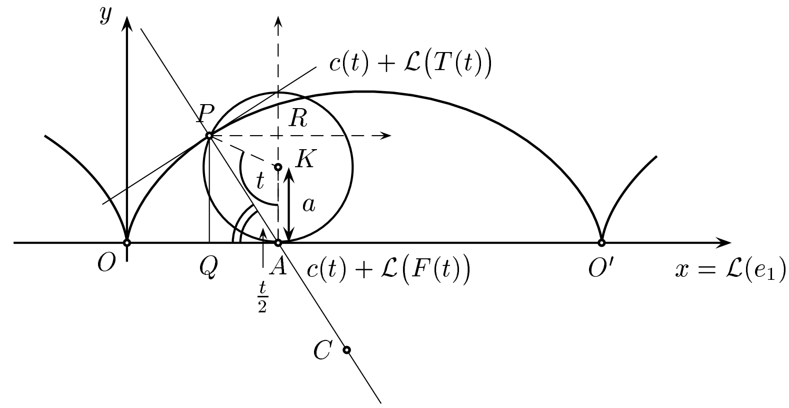
egyenletnek tesznek eleget; az ilyen alakú egyenlet az ún. ***Neil-parabolá***k egyenlete.

(c) *Ciklois*

(1) *Szemléletes származtatás.* Legyen adva $\mathbb{R}^2$-ben egy egyenes és egy azt érintő kör ! - Azt mondjuk, hogy a kör az egyenes mentén *gördül*, ha úgy mozog el az egyenes egy O pontjából annak egy A pontjába, hogy eközben az O pont olyan P pontba jut, amelyre teljesül:

$(*)$ az $\widehat{AP}$ körív hossza $= \overline{OA}$ szakasz hossza.

Egy egyenesen gördülő kör tetszőlegesen kiválasztott pontja által befutott ponthalmazt ***ciklois***nak nevezünk. Miközben a kör egy teljes gördülést végez az O ponttól az O' pontig, a P pont az $\widehat{OPO'}$ ciklois-ívet írja le; a „teljes ciklois” ezzel kongruens ívek uniója. (Amennyiben a kör már n számú teljes gördülést végzett, úgy $(*)$ baloldalához hozzáadandó még a körkerület n-szerese.)



(2) *Paraméteres előállítás.* Válasszuk $\mathbb{R}^2$-beli egyenes gyanánt az $\mathcal{L}(e_1)$ x-tengelyt, a gördülő kör pedig legyen az a kör, amelynek egyenlete a „kiinduló helyzetben”

$$x^2 + (y-a)^2 = a^2 \qquad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Leírjuk, hogyan mozog az $O = (0,0)$ pont – az origó – a kör gördülése során. Ha K az A-ba elgördült kör középpontja, akkor legyen

$$t := PKA\sphericalangle \text{ ívmértéke } := m(PKA\sphericalangle).$$

t segítségével explicit módon kifejezzük a

$$P := c(t) = (c^1(t), c^2(t))$$

pont koordinátáit. Jelölje P merőleges vetületét az x-tengelyre Q, az $\overleftrightarrow{AK}$ egyenesre R. Ekkor

$$\begin{aligned} c^1(t) &= d(O,Q) = d(O,A) - d(Q,A) \overset{(*)}{=} at - a\sin(\pi - t) = \\ &= at - a\sin t; \\ c^2(t) &= d(P,Q) = d(R,A) = d(R,K) + d(K,A) = \\ &= a + a\cos(\pi - t) = a - a\cos t; \end{aligned}$$

a cikloist ilymódon a

$$(**) \qquad c : t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = (at - a\sin t, a - a\cos t) \in \mathbb{R}^2$$

leképezés írja le. A továbbiakban ezt a leképezést *parametrizált cikloisnak*, illetve egyszerűen *cikloisnak* nevezzük. Jegyezzük meg, hogy c a $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *halmaz pontjaiban nem immerzió.* Valóban, $\forall\ t \in \mathbb{R}$: $c'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$, így

$$\|c'(t)\|^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t),$$

tehát

$$c'(t) = 0 \iff \cos t = 1 \iff t = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ez azt jelenti, hogy a „parametrizált ciklois” nem parametrizált görbe a szó 5.3-ban bevezetett értelmében. A $c(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokat a ciklois *szinguláris pont*jainak hívjuk.

(3) $]0, 2\pi[$ *fölötti ívhossz.* Mivel

$$\forall\, t \in\,]0, 2\pi[\, : \ \|c'(t)\| = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2},$$

kapjuk, hogy

$$L_0^{2\pi}(c) = 2a \int_0^{2\pi} \left(t \mapsto \sin \frac{t}{2}\right) = 4a \left[-\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

(4) **Állítás.** *Egy ciklois tetszőleges, nem szinguláris ponjában vont érintőegyenes áthalad a cikloist előállító (elgördült) kör „legfelső pontján”, az illető ponthoz tartozó főnormális egyenes pedig annak „legalsó pontján”.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(**)$ által megadott cikloist, s legyen például $t \in\,]0, 2\pi[$. A $c(t)$-re illeszkedő érintőegyenes meredeksége

$$\frac{c^{2'}(t)}{c^{1'}(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}.$$

Alkalmazva a föntebbi ábra jelöléseit,

$$m(KAP\sphericalangle) = \frac{\pi - t}{2},$$

hiszen a KAP háromszög egyenlő szárú. Így

$$m(QAP\sphericalangle) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - t}{2} = \frac{t}{2},$$

következésképpen az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes meredeksége

$$\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{t}{2}\right) = -\operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Összevetve ezt a $P = c(t)$ ponton átmenő érintőegyenes meredekségével, megállapíthatjuk, hogy az merőleges az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenesre. Ebből Thalesz tétele alapján rögtön adódik, hogy az érintőegyenes áthalad az A-ba elgördült kör legfelső pontján, s az is világos, hogy $\overleftrightarrow{AP}$ a P-hez tartozó főnormális egyenes. – Ezzel igazoltuk a tett észrevételeket. $\square$

(5) *A ciklois evolutája.* Legyen $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tetszőleges! Mivel

$$\begin{aligned} c'(t) &= a(1-\cos t, \sin t, 0), \\ c''(t) &= a(\sin t, \cos t, 0), \\ c'(t) \times c''(t) &= a^2(0,0,\cos t - 1), \\ (c'(t) \times c''(t)) \times c'(t) &\parallel (\sin t, \cos t - 1, 0), \end{aligned}$$

kapjuk, hogy a t paraméterű pontban
$\sim$ *a görbületi sugár*

$$\varrho(t) = \frac{\|c'(t)\|^3}{\|c'(t) \times c''(t)\|} = \frac{(a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t})^3}{a^2(1-\cos t)} = 2a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t};$$

$\sim$ *a főnormális (vektori része)*

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(\sin t, \cos t - 1, 0);$$

így a *görbületi középpont*

$$\begin{aligned} c^*(t) &= c(t) + \varrho(t)F(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t) + \\ &+ 2a(\sin t, \cos t - 1) = \\ &= a(t + \sin t, \cos t - 1). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy *az evoluta az adott cikloissal kongruens ciklois.* Tekintsük ebből a célból először is a $\theta : t \in \mathbb{R} \mapsto \theta(t) := t + \pi$ paramétertranszformációt, s legyen $\tilde{c}^* := c^* \circ \theta$. Ekkor $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{c}^*(t) &= a(t + \pi + \sin(t+\pi), \cos(t+\pi) - 1) \\ &= a(t + \pi - \sin t, -1 - \cos t) = \\ &= a(t - \sin t, 1 - \cos t) + a(\pi, -2), \end{aligned}$$

ha tehát $p := a(\pi, -2)$, akkor

$$\tilde{c}^* = \tau_p \circ c.$$

Ez azt jelenti, hogy $\tilde{c}^*$ és c valóban kongruens, sőt paralel görbék (lásd 5.3.(c)).

(6) Ha a t-beli görbületi sugárra kapott kifejezést a

$$\varrho(t) = 2a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 4a\sin\frac{t}{2}$$

alakban írjuk, s figyelembe vesszük, hogy a

$$\sin\frac{t}{2} = \frac{\frac{1}{2}d(A,P)}{a}$$

relációból

$$d(A,P) = 2a\sin\frac{t}{2},$$

akkor a (4)-ben igazolt állítás alapján megállapíthatjuk:

a ciklois P pontján átmenő simulókör középpontja a $\overrightarrow{PA}$ félegyenesnek az a C pontja, amelyre $d(A,C) = d(P,A)$ teljesül.

A (4)-beli állítás, valamint a most tett észrevétel egyszerű eljárást ad a nem szinguláris ciklois-pontokhoz tartozó érintő- és főnormális egyenes, valamint a görbületi középpont elemi úton történő megszerkesztésére.

(7) Jegyezzük meg végül, hogy számításaink a szinguláris pontokban nem érvényesek; közvetlenül meggyőződhetünk azonban arról, hogy ezeken a helyeken az $\mathcal{L}(e_2)$ y-tengely, illetve az ezzel párhuzamos egyenesek ésszerű módon tekinthetők érintőegyeneseknek.

6.21. definíció.

(a) *Legyen $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$. A*

$$c:\ t\in\mathbb{R}\ \mapsto\ c(t) := (\alpha\cos t, \alpha\sin t, \beta t) \in \mathbb{R}^3$$

*parametrizált görbét **(közönséges) csavarvonal**nak nevezzük.*

(b) *Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbét **általános csavarvonal**nak vagy **lejtővonal**nak mondunk, ha érintői konstans szöget alkotnak egy rögzített egységvektorral, azaz ha*

$$\exists\ a \in \mathbb{R}^3,\ \|a\| = 1 : \quad \forall\ t \in I :\ \langle T(t), a\rangle = \cos\vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad \text{állandó.}$$

6.22. tétel. *Egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe*

(1) *parametrizált egyenes* $\iff$ $\kappa = 0$ *;*

egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe

(2) *parametrizált síkgörbe* $\iff$ $\tau = 0$ *;*

(3) *körvonal* $\iff$ *$\kappa > 0$ konstans függvény és $\tau = 0$;*

(4) *csavarvonal* $\iff$ *κ pozitív, τ nemzérus konstans függvény;*

(5) *lejtővonal* $\iff$ *$\dfrac{\tau}{\kappa}$ konstans függvény.*

Bizonyítás.

(a) (1),(2) és (3) 6.6-ban, 6.16-ban és 6.17-ben már igazolást nyert.

(b) Tekintsük a

$$c:\ t\in\mathbb{R}\ \mapsto\ c(t):=(\alpha\cos t,\alpha\sin t,\beta t)\in\mathbb{R}^3 \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R};\ \alpha>0,\ \beta\neq 0)$$

csavarvonalat!
Kiszámítjuk a görbület- és a torziófüggvényt.

$$\begin{aligned}\forall\ t\in\mathbb{R}:\ c'(t) &= (-\alpha\sin t,\alpha\cos t,\beta),\\ c''(t) &= (-\alpha\cos t,-\alpha\sin t,0),\\ c'(t)\times c''(t) &= (\alpha\beta\sin t,-\alpha\beta\cos t,\alpha^2);\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\forall\ t\in\mathbb{R}:\ \kappa(t) &= \frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}=\frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^4}}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^3}=\\ &= \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^3}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.\\ \forall\ t\in\mathbb{R}:\ c'''(t) &= (\alpha\sin t,-\alpha\cos t,0),\\ \tau(t) &= \frac{\langle c'(t)\times c''(t),c'''(t)\rangle}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2}=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\ ,\end{aligned}$$

tehát $\kappa>0$, $\tau\neq 0$ konstans függvény. – Megfordítva, a soronkövetkező 6.23. tétel alkalmazásával egyszerűen adódik – de közvetlenül is könnyen ellenőrizhető –, hogy ha egy bireguláris parametrizált görbe esetén κ pozitív, τ pedig nemzérus konstans függvény, akkor csavarvonalról van szó.

(c) (i) Tegyük föl, hogy $c : I\to\mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű, bireguláris lejtővonal, vagyis hogy

$$\exists\ a\in\mathbb{R}^3,\ \|a\|=1:\ \forall\ t\in I:\quad \langle T(t),a\rangle=\cos\vartheta\quad(\vartheta\in\mathbb{R}).$$

Differenciálással innen a

$$\forall\ t\in I:\ \langle T'(t),a\rangle=0,$$

azaz a

$$\forall\ t\in I:\ \kappa(t)\langle F(t),a\rangle=0$$

összefüggéshez jutunk. Mivel a biregularitás folytán $\forall\ t\in I:\ \kappa(t)>0$, megállapíthatjuk, hogy

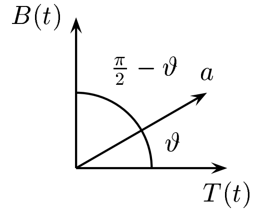
$$\forall\ t\in I:\ \langle F(t),a\rangle=0\ .$$

A Fourier-előállítás (1.8.) alkalmazásával

$$a=\langle a,T(t)\rangle T(t)+\langle a,F(t)\rangle F(t)+\langle a,B(t)\rangle B(t)\quad(t\in I)$$

írható, így – az iménti eredmény figyelembevételével –

$$\forall\ t\in I:\ a=\langle a,T(t)\rangle T(t)+\langle a,B(t)\rangle B(t).$$



Itt a feltétel szerint $\langle a, T(t)\rangle = \cos\vartheta$, következésképpen $\langle a, B(t)\rangle = \sin\vartheta$, s ezért

$$\forall\ t \in I:\ a = (\cos\vartheta)T(t) + (\sin\vartheta)B(t). \tag{$*$}$$

Innen újbóli differenciálással, valamint (F1) és (F3) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} \forall\ t \in I: \quad 0 & = & (\cos\vartheta)T'(t) + (\sin\vartheta)B'(t) = \\ & = & (\kappa(t)\cos\vartheta - \tau(t)\sin\vartheta)F(t) \\ \Longrightarrow & & (\cos\vartheta)\kappa = (\sin\vartheta)\tau. \end{array}$$

Itt $\sin\vartheta \neq 0$, ellenkező esetben ui. ($*$)-ból T konstans volta, ebből pedig (F1) alapján κ eltűnése következne, amit 6.5-re tekintettel a biregularitás kizár. Így

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \operatorname{ctg}\vartheta$$

adódik, tehát a $\dfrac{\tau}{\kappa}$ függvény valóban konstans.

(ii) Legyen – megfordítva – a $\dfrac{\tau}{\kappa}$ függvény konstans! Ekkor létezik olyan ϑ valós szám, hogy

$$\forall\ t \in I: \quad \frac{\tau}{\kappa}(t) = \operatorname{ctg}\vartheta.$$

Értelmezzük az $\tilde{a} : I \to \mathbb{R}^3$ leképezést az

$$\tilde{a}(t) := (\cos\vartheta)T(t) + (\sin\vartheta)B(t)$$

előírással! Differenciálással, majd (F1) és (F2) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl} \forall\ t \in I:\ \tilde{a}'(t) & = & (\cos\vartheta)T'(t) + (\sin\vartheta)B'(t) = \\ & = & (\kappa(t)\cos\vartheta - \tau(t)\sin\vartheta)F(t) \overset{\text{feltétel}}{=} 0\ . \end{array}$$

Így $\tilde{a}$ konstans, mégpedig 1 normájú konstans leképezés, létezik tehát $a \in \mathbb{R}^3$, $\|a\| = 1$ vektor olymódon, hogy

$$\forall\ t \in I:\ a = \tilde{a}(t) = (\cos\vartheta)T(t) + (\sin\vartheta)B(t);$$

innen

$$\forall\ t \in I:\ \langle T(t), a\rangle = \cos\vartheta;$$

ez azt jelenti, hogy c lejtővonal. $\square$

6.23. tétel (A görbeelmélet alaptétele).

(a) (***Unicitás-tétel***) *Tegyük föl, hogy $c : I \to \mathbb{R}^3$ és $d : I \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű bireguláris parametrizált görbe, amelyeknek görbület- és torzió-függvénye megegyezik. Ekkor létezik olyan irányítástartó izometria, amely a görbék egyikét a másikba viszi át, következésképpen* ***a görbület- és a torziófüggvény irányítástartó izometriától eltekintve egyértelműen meghatározza az $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbéket****.*

(b) (***Egzisztencia-tétel***) *Tetszőlegesen adott $\kappa : I \to \mathbb{R}$ pozitív értékű, differenciálható és $\tau : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez létezik olyan $c : I \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű – szükségképpen bireguláris – parametrizált görbe, amelynek görbület- és torziófüggvénye a megadott κ, illetve τ függvény.*

Bizonyítás.

(a) (1) A görbék közös görbület- és torziófüggvényét jelölje κ, illetve τ; a Frenet-féle háromélmezőjüket pedig

$$(\underline{T}_c, \underline{F}_c, \underline{B}_c)\ , \quad \text{illetve} \quad (\underline{T}_d, \underline{F}_d, \underline{B}_d).$$

A megfelelő csatolt leképezések hármasa ekkor

$$(T_c, F_c, B_c)\ , \quad \text{illetve} \quad (T_d, F_d, B_d).$$

(2) Válasszuk ki a $0 \in I$ paramétert (v.ö. 5.8.(c))! Nyilvánvalóan megadható olyan $\varphi \in O^+(\mathbb{R}^3)$ forgás, hogy

$$\varphi(T_c(0)) = T_d(0), \quad \varphi(F_c(0)) = F_d(0)\ .$$

Ekkor $\det\varphi = 1$, és a 6.10. bizonyításában látottak szerint

$$\varphi(T_c(0)) \times \varphi(F_c(0)) = (\det\varphi)\varphi(T_c(0) \times F_c(0)) = \varphi(B_c(0)),$$

tehát

$$\varphi(B_c(0)) = T_d(0) \times F_d(0) = B_d(0)\ .$$

Ha

$$f := \tau_{d(0)-\varphi(c(0))} \circ \varphi,$$

akkor

$$\begin{aligned} f(c(0)) &= \tau_{d(0)-\varphi(c(0))}(\varphi(c(0))) = d(0) - \varphi(c(0)) + \varphi(c(0)) = \\ &= d(0)\ . \end{aligned}$$

(3) Megmutatjuk, hogy $d = f \circ c$. Képezzük ebből a célból a

$$h := \frac{1}{2}(\|\varphi \circ T_c - T_d\|^2 + \|\varphi \circ F_c - F_d\|^2 + \|\varphi \circ B_c - B_d\|^2) : \ I \to \mathbb{R}$$

függvényt! Ennek deriváltja

$$\begin{aligned} h' &= \langle \varphi\circ T_c - T_d, (\varphi\circ T_c)' - T_d'\rangle + \langle \varphi\circ F_c - F_d, (\varphi\circ F_c)' - F_d'\rangle + \\ &+ \langle \varphi\circ B_c - B_d, (\varphi\circ B_c)' - B_d'\rangle\ . \end{aligned}$$

Itt az egyes tagok a Frenet-formulák segítségével a következőképpen alakíthatók át:

1. tag $\langle \varphi\circ T_c - T_d, \varphi\circ T_c' - T_d'\rangle \overset{(F1)}{=} \langle \varphi\circ T_c - T_d, \varphi\circ \kappa F_c - \kappa F_d\rangle =$
$= \kappa\langle \varphi\circ T_c, \varphi\circ F_c\rangle - \kappa\langle T_d, \varphi\circ F_c\rangle - \kappa\langle \varphi\circ T_c, F_d\rangle +$
$+\kappa\langle T_d, F_d\rangle = -\kappa\langle T_d, \varphi\circ F_c\rangle - \kappa\langle \varphi\circ T_c, F_d\rangle.$

2. tag $\langle \varphi\circ F_c - F_d, \varphi\circ F_c' - F_d'\rangle \overset{(F2)}{=} \langle \varphi\circ F_c - F_d, \varphi\circ(-\kappa T_c + \tau B_c)\rangle -$
$-\langle \varphi\circ F_c - F_d, -\kappa T_d + \tau B_d\rangle = \kappa\langle F_d, \varphi\circ T_c\rangle - \tau\langle F_d, \varphi\circ B_c\rangle +$
$\kappa\langle \varphi\circ F_c, T_d\rangle - \tau\langle \varphi\circ F_c, B_d\rangle.$

3. tag $\langle \varphi\circ B_c - B_d, \varphi\circ B_c' - B_d'\rangle \overset{(F3)}{=} \langle \varphi\circ B_c - B_d, -\varphi\circ \tau F_c + \tau F_d\rangle =$
$= \tau\langle B_d, \varphi\circ F_c\rangle + \tau\langle \varphi\circ B_c, F_d\rangle.$

Közvetlenül ellenőrizhető mármost, hogy a kapott tagok összege zérus, tehát $h' = 0$, s ennélfogva h konstans függvény. Azonban a (2)-ben tett észrevételek alapján $h(0) = 0$, következésképpen

$$\forall\ t \in I:\ \ h(t) = 0.$$

Mivel h definíciójában három nemnegatív értékű függvény összege szerepel, $h = 0$ ekvivalens azzal, hogy a három függvény mindegyike zérus. Így speciálisan

$$\begin{aligned} \varphi\circ T_c = T_d \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi\circ c' = d' \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi\circ c)' = d' \\ &\Longleftrightarrow \quad (\varphi\circ c - d)' = 0, \end{aligned}$$

tehát a $\varphi\circ c - d$ függvény is konstans, s ezért

$$\begin{aligned} \forall\ t\in I: \qquad & \varphi[c(t)] - d(t) = \varphi(c(0)) - d(0) \ \Longleftrightarrow \\ & d(t) = \varphi[c(t)] - \varphi(c(0)) + d(0), \end{aligned}$$

azaz

$$\forall\ t \in I: \quad d(t) \ = \ f[c(t)] \quad \Longleftrightarrow \quad d = f\circ c.$$

Ezzel az unicitás-tételt igazoltuk.

(b) (1) Emlékeztetünk a differenciálegyenletek elméletéből két alapvető eredményre.

I. tétel (Lokális egzisztencia-unicitás tétel) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $X : U \to \mathbb{R}^n$ sima leképezés, $p \in U$. – Létezik olyan, a 0-t tartalmazó $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $c : I \to U$ sima leképezés – ún. szinguláris parametrizált görbe –, hogy*

(i) $c(0) = p$;

(ii) $\forall\, t \in I: \quad c'(t) = X[c(t)]$.

Értelmezési tartományainak metszetén bármely két ilyen parametrizált görbe egybeesik.

II. tétel (A homogén lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó alaptétel) *Tegyük föl, hogy $I \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum,*

$$A:\ I \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

folytonos leképezés, $p \in \mathbb{R}^n$. – Létezik egy és csak egy $c : I \to \mathbb{R}^n$ szinguláris parametrizált görbe olymódon, hogy

(i) $c(0) = p$,

(ii) $\forall\, t \in I:\ c'(t) = A(t)c(t)$.

(2) Rátérve az egzisztencia-tétel bizonyítására, tekintsük az adott κ és τ függvény segítségével képzett

$$A:\ t \in I \ \mapsto\ A(t) := \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

mátrixértékű leképezés által meghatározott

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \end{cases}$$

(homogén) lineáris differenciálegyenletet! Itt a keresett leképezés $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$-értékű, amelyet előállíthatunk

$$t \in I \ \mapsto\ (X^1(t), X^2(t), X^3(t)), \quad X^i(t) \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad (1 \leqq i \leqq 3)$$

alakban. A II. tételt ezen X^i leképezésekre alkalmazva, olyan

$$S:\ I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

sima leképezés egyértelmű létezése következik, amely eleget tesz az

(i) $S(0) = I_3$,

(ii) $\forall\, t \in I:\ S'(t) = A(t)S(t)$

feltételeknek.

(3) Megmutatjuk, hogy

$$\forall\ t \in I: \quad S(t) \text{ ortogonális mátrix.}$$

Ehhez azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\forall\ t \in I:\ {}^tS(t)S(t) = I_3.$$

Tekintsük az

$$f:\ t \in I\ \mapsto\ {}^tS(t)S(t) = ({}^tSS)(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

leképezést! Deriválva, az értelemszerűen adódó szorzatszabály és a $({}^tS)' = {}^t(S')$ összefüggés alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f' &= ({}^tS)'S + {}^tSS' = {}^t(S')S + {}^tSS' \overset{(2)/(\mathrm{ii})}{=} \\ &= {}^t(AS)S + {}^tSAS = {}^tS\,{}^tAS + {}^tSAS = \\ &= {}^tS({}^tA + A)S. \end{aligned}$$

Itt azonban ${}^tA + A = 0$, hiszen A definíciójából közvetlenül látható, hogy $\forall\ t \in I:\ A(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ferdeszimmetrikus. Így $f' = 0$, s ennélfogva f konstans leképezés. Mivel

$$f(0) = ({}^tSS)(0) = {}^t[S(0)]S(0) \overset{(2)/(\mathrm{i})}{=} I_3,$$

következik, hogy

$$\forall\ t \in I:\ f(t) = {}^tS(t)S(t) = I_3$$

– s ezt akartuk belátni.

(4) Jelölje tetszőleges $t \in I$ esetén az $S(t)$ mátrix sorvektorait rendre $T(t)$, $F(t)$ és $B(t)$! Ekkor (2)/(ii) a

$$\begin{pmatrix} T'(t) \\ F'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(t) \\ F(t) \\ B(t) \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

alakot ölti. A (3)-ban mondottak alapján

$$\forall\ t \in I:\ (T(t), F(t), B(t)) \text{ ortonormált bázisa } \mathbb{R}^3\text{-nak.}$$

Így ráadásul tetszőleges $t \in I$ esetén pozitív bázishoz jutunk, hiszen a $(T(0), F(0), B(0)) = (e_1, e_2, e_3)$ bázis pozitív, a

$$t \mapsto S(t) = {}^t(T(t), F(t), B(t))$$

leképezés pedig (simaságából adódó) folytonossága miatt a sodrásjelleget megőrzi. Ebből 2.8.(5) figyelembevételével következik, hogy

$$\forall\ t \in I:\ B(t) = T(t) \times F(t).$$

(5) Tekintsük ezek után a

$$c: \ I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto c(t) := \int_0^t T$$

leképezést! T folytonossága miatt c differenciálható, mégpedig

$$c' = T.$$

Mivel

$$\forall\ t \in I: \ \|c'(t)\| = \|T(t)\| = 1,$$

következik, hogy c természetes paraméterezésű parametrizált görbe, amelynek érintő-egységvektormezője

$$\underline{T}: \ t \in I: \ \underline{T}(t) = (c(t), T(t)) = T(t)_{c(t)}.$$

A $(*)$ mátrixegyenlet első sora azt adja, hogy

$$\forall\ t \in I: \ \|c''(t)\| = \|T'(t)\| = \|\kappa(t)F(t)\| = \kappa(t);$$

ebből 6.2. alapján megállapíthatjuk, hogy c görbületfüggvénye a megadott κ függvény.

(6) Mivel c egységpályasebességű, torziófüggvénye a

$$\tau_c = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{\kappa^2}$$

formula alapján számítható ki (6.15.). Megmutatjuk, hogy $\tau_c = \tau$.

$$\begin{aligned} c''' &= T'' \overset{(*)}{=} (\kappa F)' = \kappa' F + \kappa F' \overset{(*)}{=} \\ &= \kappa' F + \kappa(-\kappa T + \tau B) = -\kappa^2 T + \kappa' F + \kappa\tau B \ , \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} \tau_c &= \frac{\langle T \times \kappa F, -\kappa^2 T + \kappa' F + \kappa\tau B \rangle}{\kappa^2} \overset{(4)}{=} \frac{\langle \kappa B, -\kappa^2 T + \kappa' F + \kappa\tau B \rangle}{\kappa^2} = \\ &= \frac{\kappa^2 \tau \langle B, B \rangle}{\kappa^2} = \tau, \end{aligned}$$

c-nek tehát a torziófüggvénye is megegyezik az előírt τ függvénnyel. – A kívánt c parametrizált görbe létezését ezzel igazoltuk. Az elmondottakból az is adódik, hogy c Frenet-féle háromélmezője az a $(\underline{T}, \underline{F}, \underline{B})$ hármas, amelyet a (2)-ben fölírt differenciálegyenlet megoldásaként nyert (T, F, B) leképezés-hármas határoz meg. □

II. rész

Sokaságok

A bevezetésben említett négy központi fogalom közül kettő, a differenciálható struktúra és az absztrakt sokaságok érintővektorának fogalma ebben a részben kerül tárgyalásra. Kidolgozásuk irányában az első – s így úttörő – lépéseket Gauss tette meg. Mai nyelvre lefordítva, az $\mathbb{R}^3$-beli felületeket Gauss olyan $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (U nyílt halmaz) injektív leképezésekkel adta meg, amelyekre teljesül a következő

„regularitási feltétel”: $\forall\, q \in U : f'(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *injektív lineáris leképezés.*

A I.4.1.(c)-ben rögzített szóhasználattal élve, a regularitási feltétel azt jelenti, hogy f immerzió U fölött. (Az $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ immerziókra 5.9-ben a *reguláris parametrizált felület* elnevezést fogjuk bevezetni.) A regularitási feltétel biztosítja, hogy

$$\forall\, q \in U : (D_1 f(q), D_2 f(q)) \text{ lineárisan független,}$$

így

$$f(q) + \mathcal{L}(D_1 f(q), D_2 f(q))$$

kétdimenziós lineáris sokaság, amely az *érintősík* szerepét játssza az $f(q)$ pontban.

Mai szemmel nézve, a Gauss-féle koncepció három fogyatkozásban szenved:

1. *Tisztán lokális jellegű*, például már egy $\mathbb{R}^3$-beli gömbfelület sem adható meg egyetlen injektív immerzió képeként. – Ez a hiányosság, mint 5.1-ben látni fogjuk, viszonylag könnyen kiküszöbölhető.

2. *Megáll a kétdimenziós alakzatoknál* – ezen sem nehéz segíteni.

3. Egy *„beágyazó térhez”*, adott esetben $\mathbb{R}^3$-hoz kötődik.

A dimenzionalitási korlát feloldásának igénye viszonylag korán és természetes módon jelentkezett. Gondoljuk meg, hogy egy k (≥ 2) számú tömegpont alkotta rendszer $3k$ paramétertől függ, amelyek általában bizonyos – egyenletekkel kifejezhető – relációkkal vannak összekötve. Kézenfekvő tehát egy ilyen rendszert alkalmas $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^+$) tér pontjaként tekinteni, előírva, hogy ennek bizonyos „részsokaságára” illeszkedjen, amelyet éppen az említett egyenletek határoznak meg. Ezzel az általánosítással egyidejűleg adódik az a nem teljesen triviális, de tisztán technikai jellegű feladat, hogy az $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazain kidolgozott differenciál- és integrálszámítást – a „lokális kalkulust” – ültessük át a részsokaságok „globális” keretei közé. Ezt az átültetést – legalábbis a differenciálás vonatkozásában – absztrakt szituációban fogjuk elvégezni, a végrehajtásához szükséges további struktúráról a 3. nehézség diszkussziója kapcsán szólunk.

Az a körülmény, hogy egy felület, illetve egy részsokaság benne van egy beágyazó térben, számos esetben zavaró esetlegességként, egy sor topológiai konstrukció szempontjából tehertételként jelentkezik. Világos ugyanis, hogy például egy gömbfelület ugyanaz az alakzat, akár $\mathbb{R}^3$-ba, akár $\mathbb{R}^4$-be ágyazzuk be. – A beágyazó tér gondolata ellen azonban egészen más jellegű, eleinte inkább filozófiai indíttatású érvek is jelentkeztek, már a 19. század derekától kezdve; ezek az érvek aztán hatásos megerősítést nyertek az elektromágneses mező Faraday-Maxwell-féle elméletének kidolgozásával. A mindent magában foglaló, végtelen kiterjedésű, a dolgokkal semmiféle relációban nem álló, tartályszerű „tér" ideája Newton elméletének felel meg. Valójában Newton felfogása sokkal mélyebb volt, mint a legtöbb őt követő fizikusé: szemléletében a „tér" hat a tömegekre, igaz, a „tér"-re nem hat semmi. Ennek dacára a „tér" egészen Einsteinig a passzív edény szerepét játszotta a fizikusok tudatában, amelynek a fizikai jelenségekben semmi szerep nem jutott. Riemann volt az első, aki – már említett habilitációs előadásában – egészen más képet festett a „tér"-ről: elhagyta annak merevségét, s lehetővé tette a fizikai jelenségekben való aktív részvételét. A Riemann által fölfedezett alapstruktúra – mai terminusokkal élve – ún. *n-dimenziós topologikus sokaság* (4.1.(a)). Ez

- ∼ nem föltételez befoglaló koordinátateret: *önálló topologikus tér* (bár ez utóbbi fogalom kikristályosodására még évtizedekig kellett várni);
- ∼ kicsiben „jól emlékeztet" az $\mathbb{R}^n$ térre: *minden pontja rendelkezik olyan nyílt környezettel, amely homeomorf* $\mathbb{R}^n$ *egy nyílt halmazával.*

Ha tehát M n-dimenziós topologikus sokaság, akkor a másodjára említett tulajdonság értelmében létezik olyan $(U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ család, hogy

- ∼ $\forall\ \alpha \in A:\ U_\alpha \subset M$ (összefüggő) nyílt halmaz;
- ∼ $\forall\ \alpha \in A:\ x_\alpha : U_\alpha \to x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus;
- ∼ $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M.$

Egy ilyen családot *atlasz*nak nevezünk, a tagjait *térkép*eknek hívjuk. – Eljutva idáig, a következő feladat – mint már jeleztük –, az analízis „globalizálása". Tekintve egy $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, f egy $p \in M$ pontban való differenciálhatóságának értelmezésére a következő gondolat kínálkozik: válasszunk egy olyan (U_α, x_α) térképet, ahol $p \in U_\alpha$, s nevezzük f-et p-ben differenciálhatónak, ha az

$$f \circ x_\alpha^{-1} :\ x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvény a szokásos értelemben differenciálható az $x_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ez a próba-definíció azonban gyorsan megdől, nem vezet ugyanis térképválasztástól független fogalomhoz – ami pedig nyilvánvalóan alapkövetelmény. A nehézségen annak előírásával lehet segíteni, hogy tetszőleges $(\alpha, \beta) \in A \times A$ esetén az

$$x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : \ x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

leképezés *legyen differenciálható* $\mathbb{R}^n$ tekintett nyílt halmazai között. Így jutunk el a *differenciálható struktúra* és a *differenciálható sokaságok* fogalmához (4.5.), a differenciálgeometria, differenciáltopológia, Lie-csoport elmélet s egy sor további diszplicina közös kiinduló fogalmához.

A másik kulcsfontosságú fogalom, egy differenciálható sokaság egy adott pontbeli *érintővektor*a bevezetésének módja a kifejtés során igen részletesen lesz kommentálva (7.23 - 7.25.). Előzetes motivációként e helyen elegendő annyit megjegyeznünk, hogy tetszőleges $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektor $\mathbb{R}^n$ differenciálható függvényeinek algebráján valós értékű derivációként hat az

$$f \mapsto v_p(f) := D_v f(p)$$

előírás szerint, s ez egy olyan karakterisztikus tulajdonsága $\mathbb{R}^n$ érintővektorainak, amely nehézség nélkül átültethető az absztrakt viszonyok közé.

Fejtegetéseinket ebben a részben a fogalmi keretek fölvázolásával kezdjük, amelyet algebrai oldalról elsősorban a modulusok, másfelől pedig a topologikus terek jelölnek ki. Ami az utóbbiakat illeti, csupán a legalapvetőbb definíciók, továbbá néhány egészen elemi tény és konstrukció áttekintésére szorítkozunk; a legkevésbé talán a faktortopológiával kapcsolatos gondolatmenet triviális. Ennek alkalmazásaként tárgyaljuk az n-dimenziós valós projektív teret, amelyet először topologikus térként írunk le (3.26.), majd differenciálható struktúrát is megadunk rajta (4.9.(e)). – A modulusok első pillanatra a vektorterek egyszerű általánosításainak tűnnek: a változás „csupán” annyi, hogy test helyett (kommutatív, egységelemes) gyűrűt veszünk alapul. Gyorsan kiderül azonban, hogy így egy egészen más világba jutunk, amelynek néhány szokatlan, a vektorterekétől élesen különböző vonására igyekszünk majd rámutatni. Modulusok alapulvételével vezetjük be a differenciálgeometria kalkulatív apparátusában oly jellegzetes szerepet betöltő *tenzor*okat, s ilyen – remélhetőleg nagyobb világosságot adó – általánosságban tárgyaljuk a velük kapcsolatos legfontosabb tényeket. A sokaságokra mindez azáltal lesz alkalmazható, hogy egy M sokaság összes vektormezői egy $\mathfrak{X}(M)$-mel jelölt modulust alkotnak az M-en sima függvények $C^\infty(M)$ gyűrűje fölött, s M-en adott tenzoron az $\mathfrak{X}(M)$ moduluson adott tenzort értünk. Emellett az igen elegáns algebrai értelmezés mellett szükségünk lesz az M-en tekintett tenzorok további interpretációjára is, amely lehetővé teszi, hogy értelmesen szólhassunk egy tenzornak egy $p \in M$ pontban fölvett értékéről (8.21 - 8.23.).

Az elvontnak tűnő fejtegetéseket sűrűn fogják megszakítani nagy számban beiktatott, részletesen kidolgozott s meglehetősen változatos példák, amelyek elsősorban a sokaságokat, részsokaságokat és ezek érintőtereit illusztrálják.

1. Modulusok, algebrák, derivációk

1.1. definíció.

(a) *Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű, V pedig (additív módon írt) Abel-csoport. – V-t az R gyűrű fölötti **modulus**nak, röviden R-**modulus**nak nevezzük, ha adva van egy skalárral való szorzásnak mondott*

$$R \times V \to V \ , \quad (\alpha, a) \mapsto \alpha a$$

leképezés, amely eleget tesz a következő axiómáknak:

(Mod1) $\forall \alpha \in R;\ a, b \in V: \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b;$

(Mod2) $\forall \alpha, \beta \in R;\ a \in V: \quad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a;$

(Mod3) $\forall \alpha, \beta \in R;\ a \in V: \quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a);$

(Mod4) $\forall a \in V : 1a = a$ *, ahol* $1 \in R$ *a gyűrű egységeleme.*

*V elemeit ekkor **vektor**okként is említjük, R elemeit pedig **skalár**oknak hívjuk.*

(b) *Tegyük föl, hogy V és V' R-modulus! Egy $f : V \to V'$ leképezést R-**lineáris leképezés**nek vagy R-**homomorfizmus**nak mondunk, ha teljesül*

(L1) $\forall a, b \in V: \quad f(a+b) = f(a) + f(b);$

(L2) $\forall \alpha \in R,\ a \in V: \quad f(\alpha a) = \alpha f(a).$

*A $V' = V$ esetben R-**endomorfizmus**ról (vagy egyszerűen endomorfizmusról)beszélünk, a bijektív R-lineáris leképezéseket **izomorfizmus**oknak nevezzük.*

(c) *Legyenek $V_1, \ldots, V_k$ ($k \in \mathbb{N},\ k \geqq 2$) és W egyaránt R-modulusok! Egy*

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$$

*leképezést (R-) **multilineáris**nak, közelebbről k-**lineáris**nak mondunk, ha valamennyi változójában lineáris, azaz ha minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ index és tetszőlegesen rögzített $v_j \in V_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$) vektorok esetén a*

$$v \in V_i \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k) \in W$$

*leképezés R-lineáris. Ha speciálisan $W = R$, akkor multilineáris **függvény**ről vagy **formá**ról szólunk; amennyiben – ráadásul – $V_1 = \cdots = V_k =: V$, úgy a V moduluson adott **k-adfokú multilineáris formá**ról beszélünk.*

1.2. megjegyzések.

(a) Ha speciálisan az R gyűrű test, akkor az R-modulus fogalma átmegy a vektortér fogalmába. – A modulusok és a vektorterek elmélete a kiinduló definíciók közötti szoros analógia dacára lényegbevágó eltéréseket mutat, amelynek oka alapvetően abban rejlik, hogy egy gyűrűbeli elemnek a szorzásra nézve általában nincs inverze. A modulusok és a vektorterek világa közötti néhány meghatározó jelentőségű különbségre a továbbiakban nyomatékosan rá fogunk mutatni.

(b) Tegyük föl, hogy V R-modulus, s V és R zéruselemét jelölje az egyszerűség kedvéért ugyanaz a 0 szimbólum. Miként vektortérben, modulusban is fennáll, hogy

$$\forall v \in V: \quad 0v = 0. \tag{$*$}$$

Valóban,

$$0v = (0+0)v \overset{(\text{Mod2})}{=} 0v + 0v \overset{V \text{ Abel csoport}}{\Longrightarrow} 0v = 0.$$

Ugyancsak teljesül a

$$(-1)v = -v.$$

összefüggés, mivel

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(*)}{=} 0v = (1+(-1))v \overset{(\text{Mod2})}{=} 1v + (-1)v \overset{(\text{Mod4})}{=} v + (-1)v \\ \Longrightarrow &\quad (-1)v = -v. \end{aligned}$$

(c) A lineáris kombináció, valamint a lineáris függőség és függetlenség fogalma modulusokban pontosan úgy értelmezhető mint vektorterekben. Nevezetesen:

1.3. definíció. *Tekintsünk egy V R-modulust, s legyen adva egy $(a_i)_{i=1}^n (n \in \mathbb{N}^+)$ elemcsalád!*

(a) Ha $(\alpha^i)_{i=1}^n$ egy R-beli elemcsalád, akkor a

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i a_i \quad (=: \alpha^i a_i)$$

*összeget a megadott vektorok egy **lineáris kombináció**jának mondjuk, az α^i $(1 \leqq i \leqq n)$ skalárokat a lineáris kombináció **együtthatói**ként említjük.*

*(b) Az $(a_i)_{i=1}^n$ elemcsaládot **lineárisan függő**nek nevezzük, ha nem csupa 0 együtthatókkal képzett lineáris kombinációjaként is előállítható belőle a zérusvektor; ellenkező esetben, vagyis ha*

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i a_i = 0 \implies \alpha^i = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

***lineárisan független** elemcsaládról beszélünk.*

1.4. példák.

(a) Ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor az

$$R \times R \to R\ , \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

gyűrűbeli szorzás eleget tesz a (Mod1)–(Mod4) axiómáknak, s mivel $(R; +)$ egyben Abel-csoport, R önmaga fölötti modulus. Speciálisan az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűje $\mathbb{Z}$-modulus.

(b) Legyen V Abel-csoport, s tekintsük az egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjét! Értelmezzünk skalárral való szorzást a

$$\mathbb{Z} \times V \to V\ , \quad (n, v) \mapsto nv := \begin{cases} v + \ldots + v\ (n \text{ tag}) & , \text{ha} \quad n \in \mathbb{Z}^+; \\ 0 & , \text{ha} \quad n = 0; \\ -((-n)v) & , \text{ha} \quad n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

előírással! Közvetlenül ellenőrizhető, hogy így V $\mathbb{Z}$-modulussá válik. – Ez azt jelenti, hogy minden Abel-csoport fölfogható az egészek gyűrűje fölötti modulusként. (Speciálisan újból adódik, hogy $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modulus.)

(c) Jelentsen R ismét kommutatív, egységelemes gyűrűt, legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$, s tekintsük az R elemeiből képzett n-tagú sorozatok R^n halmazát! Ha

$$(a^1, \ldots, a^n),\ (b^1, \ldots, b^n) \in R^n, \quad r \in R,$$

és

$$\begin{aligned} &(a^1, \ldots, a^n) + (b^1, \ldots, b^n) := (a^1 + b^1, \ldots, a^n + b^n), \\ &r(a^1, \ldots, a^n) := (ra^1, \ldots, ra^n), \end{aligned}$$

akkor R^n könnyen ellenőrizhető módon R-modulussá válik. Speciálisan $\mathbb{Z}^n$ $\mathbb{Z}$-modulus.

(d) Legyen $m, n \in \mathbb{N}^+$, és jelölje

$$\mathcal{M}_{m \times n}(R)$$

az R (kommutatív, egységelemes) gyűrű elemeiből képzett $m \times n$-típusú mátrixok halmazát! A mátrixok összeadásának és – R elemeivel történő – skalárral való szorzásának szokásos értelmezése mellett $\mathcal{M}_{m \times n}(R)$ R-modulus. A lineáris algebra szempontjából fontos speciális esethez jutunk, ha R gyanánt egy $\mathbb{K}$ test fölötti polinomok $\mathbb{K}[t]$ gyűrűjét választjuk; ekkor $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}[t])$ polinomelemű $m \times n$-es mátrixok alkotta $\mathbb{K}[t]$-modulus.

(e) Vegyünk alapul egy R kommutatív, egységelemes gyűrűt és egy nemüres S halmazt, s legyen

$$V := \{f \mid f : S \to R\}.$$

V a függvények összeadásának szokásos („pontonkénti") értelmezése mellett Abel-csoport. Ha az

$$R \times V \to V\ , \quad (\alpha, f) \mapsto \alpha f$$

leképezést a

$$\forall s \in S: \quad (\alpha f)(s) := \alpha f(s),$$

előírással definiáljuk, akkor (Mod1)–(Mod4) egyszerűen ellenőrizhető módon teljesül, s így V R-modulussá válik.

(f) Tegyük föl, hogy V és V' R-modulus! Az (e)-beli mintára R-modulus struktúrával rendelkeznek a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_R(V, V') := \{f : V \to V' \mid f \ R\text{-lineáris}\};\\ &\mathrm{End}_R(V) := \mathrm{Hom}_R(V, V);\\ &V^* := \mathrm{Hom}_R(V, R)\end{aligned}$$

halmazok, hiszen R-lineáris leképezések, illetve függvények összege és skalárszorosa könnyen látható módon szintén R-lineáris. A V^* modulust a V R-modulus ***duális modulus***ának, ennek elemeit V ***lineáris függvény***einek vagy ***lineáris formái***nak hívjuk.– A most bevezetett jelöléseket és elnevezéseket akkor is alkalmazzuk, ha speciálisan vektorterekről van szó.

(g) Ismeretes, hogy vektortérben egy egytagú vektorcsalád akkor és csak akkor lineárisan függő, ha a zérusvektor alkotja. Modulusokban általában nem ez a helyzet. Illusztrációként tekintsük a

$$\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ , \quad 2\mathbb{Z} := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

faktorcsoportot! Ez kételemű Abel-csoport, elemeit jelölheti 0 és 1. $\mathbb{Z}_2$ a (b) példában mondottak szerint $\mathbb{Z}$-modulus. Véve egy $a \in \mathbb{Z}_2$ elemet,

$$\forall\ \alpha \in 2\mathbb{Z}: \quad \alpha a = 0;$$

ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben nincs egytagú lineárisan független elemcsalád. Ugyanez a jelenség érvényes általánosan a $\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2)$ $\mathbb{Z}$-modulusban is.

(h) Az is jól ismert, hogy vektortérben egy vektorcsalád pontosan akkor lineárisan függő, ha van olyan tagja, amelyik előállítható a többi tag lineáris kombinációjaként. Megmutatjuk, hogy modulusban általában ez sem teljesül.

Tekintsük a $\mathbb{Z}^2$ $\mathbb{Z}$-modulust (v.ö. (c))! Ebben például a $(2, 0)$ és $(3, 0)$ vektorok alkotta vektorpár lineárisan függő, hiszen

$$3(2, 0) + (-2)(3, 0) = (6, 0) + (-6, 0) = (0, 0),$$

ugyanakkor a vektorok egyike sem skalárszorosa a másiknak.

1.5. definíció.

*(a) Egy modulus egy $(a_i)_{i\in I}$ elemcsaládját **generátorrendszer**nek nevezzük, ha a modulus bármely vektora előállítható az elemcsalád véges sok tagjának lineáris kombinációjaként. Véges generátorrendszer létezése esetén a modulust **végesen generált**nak vagy **véges típusú**nak mondjuk.*

*(b) Egy modulus **bázis**án lineárisan független generátorrendszert értünk. Bázis létezése esetén a modulust **szabad modulus**nak nevezzük.*

1.6. megjegyzések.

(a) Ismeretes a lineáris algebrából, hogy minden vektortér szabad modulus (bár ennek bizonyítását a bevezető kurzusokon csak a végesen generált vektorterekre végzik el). Ugyanez modulusokra általában nem igaz: például a $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$-modulus nem szabad modulus, hiszen az 1.4.(g)-ben mondottak szerint nincs lineárisan független elemcsaládja.

(b) Miként vektorterekben, modulusokban is fennáll, hogy egy lineárisan független elemcsaládból minden vektor legföljebb egyféleképpen, bázisból pedig pontosan egyféleképpen kombinálható lineárisan.

(c) A lineáris algebrában bizonyítást nyer, hogy vektortér egy $\mathcal{B}$ elemcsaládjára a következő tulajdonságok ekvivalensek:

1. $\mathcal{B}$ bázis.
2. $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer.
3. $\mathcal{B}$ maximális lineárisan független elemcsalád.

Modulusok általánosságában a legtöbb, amit ebben a vonatkozásban állíthatunk, a következő: Ha $\mathcal{B}$ bázisa a V R-modulusnak, akkor

- $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer;
- $\mathcal{B}$ maximális lineárisan független elemcsalád.

A megfordítások tehát általában nem teljesülnek. Ennek részleges illusztrációjaként tekintsük ismét a $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}$-modulust! Mint arra (a)-ban rámutattunk, $\mathbb{Z}_2$-nek nincs bázisa, van azonban minimális generátorrendszere, az (1) egytagú elemcsalád.

1.7. állítás (Az R-lineáris leképezések alaptétele). *Ha V szabad R-modulus, $(b_i)_{i\in I}$ bázisa V-nek, V' pedig további – esetleg V-vel azonos – R-modulus és $(b'_i)_{i\in I}$ tetszőleges elemcsaládja V'-nek, akkor létezik egy és csak egy olyan $f : V \to V'$ R-lineáris leképezés, amelyre*

$$\forall\ i \in I : \quad f(b_i) = b'_i\ .$$

Ez az f leképezés

- $\sim$ *pontosan akkor injektív, ha $(b'_i)_{i\in I}$ lineárisan független elemcsalád;*
- $\sim$ *akkor és csak akkor szürjektív, ha $(b'_i)_{i\in I}$ generátorrendszer.*

A *bizonyítás* egyszerű, úgy okoskodhatunk, mint a lineáris algebrában. □

1.8. tétel és definíció. ***Ha** V **szabad** R**-modulus, akkor** V **bármely két bázisa egyenlő számosságú.*** *V bázisainak közös számosságát a modulus **rang**jának vagy **dimenzió**jának nevezzük és $\dim_R V$-vel (olykor egyszerűen $\dim V$-vel) jelöljük.*

A *bizonyítás* további előkészületeket és finomabb meggondolásokat igényelne; mellőzzük. □

1.9. példa. Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű,$n \in \mathbb{N}$ $(n \geqq 2)$, s tekintsük az R^n R-modulust (1.4.(c)). R^n-nek bázisa az az $(e_i)_{i=1}^n$ elemcsalád, ahol

$$e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0) \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

R^n ilymódon szabad modulus, és a tétel értelmében $\dim_R R^n = n$.

1.10. definíció. *Egy V R-modulus egy H részhalmazát **részmodulus**nak nevezzük, ha nemüres és*

1. $\forall a, b \in H: \quad a + b \in H;$
2. $\forall a \in H, \alpha \in R: \quad \alpha a \in H.$

1.11. megjegyzések.

(a) Egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy részmodulus maga is modulus az adott modulusbeli összeadás és skalárral való szorzás rá való leszűkítésével. A részmodulus zérusvektora megegyezik a modulus zérusvektorával. Egy V modulusnak *triviális* vagy *nemvalódi részmodulus*ai $\{0\}$ és V.

(b) Ha V R-modulus, S nemüres részhalmaza V-nek és

$$\mathcal{L}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha^i a_i \mid \alpha^i \in R, a_i \in S \right\},$$

akkor $\mathcal{L}(S)$ részmodulusa V-nek, amelyet az S halmaz által *generált* vagy *kifeszített részmodulus*nak hívunk, illetve S *lineáris lezárt*jaként is említünk.

1.12. példa. Az egész számokból képzett rendezett párok $\mathbb{Z}^2$ halmaza gyűrű az összeadás és szorzás

$$(n, m) + (n', m') := (n + n', m + m'), \text{ illetve } (n, m) \cdot (n', m') := (nn', mm')$$

előírás szerinti értelmezése mellett, így az 1.4.(a)-ban mondottak szerint $\mathbb{Z}^2$ modulus önmaga fölött. Ez a modulus *szabad modulus*, ugyanis $\{(1, 1)\}$ bázisa $\mathbb{Z}^2$-nek:

$(n, m) \cdot (1, 1) = (0, 0) \Longrightarrow (n, m) = (0, 0)$, tehát $\{(1, 1)\}$lineárisan független;

$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$: $(n, m) = (n, m) \cdot (1, 1)$, ami azt jelenti, hogy $\{(1, 1)\}$ generátorrendszer.

$H := \mathbb{Z} \times \{0\}$ részmodulusa $\mathbb{Z}^2$-nek. Ez a részmodulus *nem szabad modulus*, mivel nincs lineárisan független elemcsaládja, s ennélfogva bázisa sincs.– Valóban, ha $(n, 0) \neq (0, 0)$, akkor például

$$(0, 1) \cdot (n, 0) = (0, 0),$$

tehát $((n, 0))$ nem lineárisan független.

1.13. megjegyzés. Összefoglalólag áttekintünk néhány olyan – részben már említett – tulajdonságot, amelyek nyomatékosítják a modulusok és a vektorterek közötti különbséget.

1. Modulusokban létezhet olyan lineárisan függő elemcsalád, amelynek egyik tagja sem állítható elő további tagok lineáris kombinációjaként.
2. Vannak olyan modulusok, amelyekben nincs lineárisan független elemcsalád, s így bázis sincs – azaz *léteznek nem szabad modulusok*.
3. Modulusban egy minimális generátorrendszer nem föltétlenül bázis.
4. Modulusban egy maximális független elemcsalád nem szükségképpen bázis, sőt maximális független elemcsalád általában nem is létezik.
5. Szabad modulusban is létezhet olyan lineárisan független elemcsalád, amely nem egészíthető ki bázissá, illetve olyan generátorrendszer, amely nem tartalmaz egyetlen bázist sem.
6. Végesen generált modulus részmodulusa nem föltétlenül végesen generált.
7. Szabad modulus részmodulusa nem szükségképpen szabad modulus.

1.14. definíció. *Legyen R kommutatív, egységelemes gyűrű. R* ***fölötti algebrán****, rövidebben* ***R-algebrán*** *vagy egyszerűen* ***algebrán*** *olyan A R-modulust értünk, amelyben adva van egy* ***szorzás****nak mondott*

$$A \times A \to A \ , \quad (a, b) \mapsto ab$$

R-bilineáris *művelet. Az algebra* ***asszociatív****, illetve* ***kommutatív*** *aszerint, amint az algebrabeli szorzás asszociatív, illetve kommutatív; $e \in A$* ***egységelem****e az algebrának, ha*

$$\forall \ a \in A : \quad ea = ae = a.$$

Az A és A' R-algebrák közötti ***homomorfizmus****on olyan*

$$f : A \to A' \ , \quad a \mapsto f(a)$$

R-lineáris leképezést értünk, amelyre

$$\forall a, b \in A : \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

Egy algebra-homomorfizmus ***izomorfizmus****, ha bijektív; két R-algebra* ***izomorf****, ha létezik közöttük izomorfizmus.*

1.15. megjegyzés. Ha A R-algebra és $0 \in A$ a zérusvektor, akkor

$$\forall a \in A : \quad 0a = (0+0)a = 0a + 0a \Longrightarrow 0a = 0;$$

hasonlóan kapjuk, hogy $a0 = 0$.

1.16. példa. Legyen M R-modulus, és tekintsük az $\mathrm{End}_R(M)$ R-modulust. Ha két endomorfizmus szorzatán a kompozíciójukat értjük, akkor $\mathrm{End}_R(M)$ asszociatív, egységelemes R-algebrává válik, az egységelem az 1_M identikus transzformáció.

Ugyancsak asszociatív, egységelemes algebra az R elemeiből képzett $n \times n$-es mátrixok

$$\mathcal{M}_n(R) := \mathcal{M}_{n \times n}(R)$$

halmaza a szokásos mátrixszorzással. Amennyiben V n-dimenziós szabad R-modulus és $\mathcal{B}$ bázisa V-nek, úgy egy $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$ endomorfizmus $\mathcal{B}$-re vonatkozó

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) =: M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

mátrixát ugyanúgy értelmezzük, mint a lineáris algebrában (ld. I.1.1.(d)). Az

$$M_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}_R(V) \to \mathcal{M}_n(R), \quad \varphi \mapsto M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

leképezés algebra-izomorfizmus.

1.17. definíció. *Tegyük föl, hogy A R-algebra, amelyben a szorzás műveleti jele $[\ ,\ ]$. A-t* ***Lie-algebrá****nak nevezzük, ha szorzás eleget tesz a következő axiómáknak:*

(Lie1) $\forall a \in A : \quad [a, a] = 0$*;*

(Lie2) $\forall a, b, c \in A : \quad [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ ***(Jacobi-identitás)****.*

1.18. megjegyzések.

(a) Ha A Lie-algebra, akkor az $a, b \in A$ elemek $[a, b]$ szorzatát a és b *Lie-zárójele*ként is említjük. Ezt az elnevezést magára a szorzásműveletre is használjuk.

(b) Lie-algebrában a szorzás antiszimmetrikus:

$$\forall a, b \in A : \quad [a, b] = -[b, a].$$

Valóban,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(Lie1)}}{=} [a+b, a+b] \overset{\text{bilinearitás}}{=} [a, a] + [b, a] + [a, b] + [b, b] = \\ &\overset{\text{(Lie1)}}{=} [b, a] + [a, b]. \end{aligned}$$

1.19. példák.

(a) Tegyük föl, hogy A asszociatív R-algebra az

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto ab$$

szorzással. Értelmezzük tetszőleges $a, b \in A$ Lie-zárójelét az

$$[a, b] := ab - ba$$

előírással! Azonnal látható, hogy ekkor (Lie1) teljesül, s az A-ban „eredetileg adott” szorzás asszociativitásának fölhasználásával (Lie2) is közvetlenül adódik; így tehát A a bevezetett Lie-zárójellel Lie-algebrává válik. Ilyen módon speciálisan $\mathrm{End}_R(V)$ és $\mathcal{M}_n(R)$ (ld.1.16.) egyaránt Lie-algebra.

1.20. definíció. *Egy A R-algebra **derivációján** olyan*

$$\theta : A \to A, \quad a \mapsto \theta(a) =: \theta a$$

leképezést értünk, amelyre teljesülnek a következők:

(Der1) θ *R-lineáris;*

(Der2) $\forall a, b \in A : \quad \theta(ab) = (\theta a)b + a(\theta b)$ ***(Leibniz-szabály)****.*

1.21. állítás. *Legyen adva egy A R-algebra!*

(a) Ha A-nak létezik $e \in A$ egységeleme és $\theta : A \to A$ deriváció, akkor $\theta(e) = 0$.

(b) Az A algebra összes derivációinak $\mathrm{Der}\, A$ *halmaza R-modulus, ha két deriváció összegét s egy deriváció skalárszorosát mint R-lineáris leképezések összegét és skalárszorosát értelmezzük. Ezt a modulust Lie-algebrává teszi a*

$$[\theta_1, \theta_2] := \theta_1 \circ \theta_2 - \theta_2 \circ \theta_1 \qquad (\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Der}\, A)$$

*előírással bevezetett Lie-zárójel, amelyet **kommutátorszorzat**ként is említünk.*

Bizonyítás.

(a) $\theta(e) = \theta(e \cdot e) \overset{(\mathrm{Der2})}{=} (\theta e)e + e(\theta e) = \theta e + \theta e \Longrightarrow \theta e = 0.$

(b) A következőket kell ellenőrizni:

- $\sim$ $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Der}\, A \implies \theta_1 + \theta_2 \in \mathrm{Der}\, A, \quad [\theta_1, \theta_2] \in \mathrm{Der}\, A;$
- $\sim$ $\theta \in \mathrm{Der}\, A,\ \lambda \in R \implies \lambda\theta \in \mathrm{Der}\, A;$
- $\sim$ a bevezetett kommutátorszorzat eleget tesz a (Lie1) és a (Lie2) feltételnek.

1. Legyen $\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Der} A$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $[\theta_1, \theta_2]$ teljesíti a Leibniz-szabályt. $\forall a, b \in A$:

$$\begin{aligned}
[\theta_1, \theta_2](ab) &:= \theta_1(\theta_2(ab)) - \theta_2(\theta_1(ab)) = \\
&\overset{(\text{Der2})}{=} \theta_1((\theta_2 a)b + a(\theta_2 b)) - \theta_2((\theta_1 a)b + a(\theta_1 b)) = \\
&\overset{(\text{Der1})}{=} [\theta_1 \circ \theta_2(a)]b + (\theta_2 a)(\theta_1 b) + (\theta_1 a)(\theta_2 b) + a(\theta_1 \circ \theta_2(b)) - \\
&\quad -[\theta_2 \circ \theta_1(a)]b - (\theta_1 a)(\theta_2 b) - (\theta_2 a)(\theta_1 b) - a(\theta_2 \circ \theta_1(b)) = \\
&= [(\theta_1 \circ \theta_2 - \theta_2 \circ \theta_1)a]b + a[(\theta_1 \circ \theta_2 - \theta_2 \circ \theta_1)b] = \\
&= ([\theta_1, \theta_2]a)b + a([\theta_1, \theta_2]b).
\end{aligned}$$

   Annak ellenőrzése, hogy $[\theta_1, \theta_2]$ R-lineáris, még egyszerűbb; ilymódon $[\theta_1, \theta_2] \in \operatorname{Der} A$. – Hasonlóan igazolható, hogy $\theta_1 + \theta_2 \in \operatorname{Der} A$ és $\lambda\theta \in \operatorname{Der} A$.

2. Mivel $\operatorname{Der} A \subset \operatorname{End}_R(A)$, s a derivációknak mint endomorfizmusoknak a szorzása asszociatív művelet, az 1.19.(a)-ban mondottak szerint $\operatorname{Der} A$ a kommutátorszorzással Lie-algebra R fölött. □

1.22. példa. Tekintsük a $C^\infty(\mathbb{R})$ valós algebrát (ld. I.4.17.), egy $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvény deriváltfüggvényét az 1. részben mondottaknak megfelelően jelölje f'. Ekkor a

$$\theta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \theta(f) := f'$$

leképezés - azaz a szokásos differenciálás - deriválója $C^\infty(\mathbb{R})$-nek.

2. Tenzorok

2.1. megjegyzés. Ha V végesen generált szabad R-modulus, akkor V^* duális modulusa szintén végesen generált szabad R-modulus. Nevezetesen: amennyiben $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, úgy – miként a vektorterek elméletében – egyértelműen létezik V^*-nak olyan $(\ell^i)_{i=1}^n$ bázisa, amelyre

$$\ell^i(b_j) = \delta^i_j; \qquad 1 \leqq i, j \leqq n;$$

ezt az $(\ell^i)_{i=1}^n$ bázist a $(b_i)_{i=1}^n$ bázis ***duális***ának hívjuk.

2.2. állítás és definíció. *Legyen adva egy V R-modulus, és tekintsük V duális modulusának V^{**} $(:= (V^*)^*)$ duálisát!*

(a) A

$$\gamma : V \to V^{**}\ ,\ v \mapsto \gamma_v\ ; \quad \forall \ell \in V^* :\ \gamma_v(\ell) := \ell(v)$$

*leképezés R-lineáris leképezés V és V^{**} között, ezt a leképezést a V modulus V^{**} modulusba való **természetes** vagy **kanonikus leképezés**ének hívjuk.*

(b) Amennyiben V végesen generált szabad modulus, úgy a kanonikus leképezés izomorfizmus V és V^{**} között, amelyek ezáltal azonosíthatók.

Bizonyítás.

(a) 1. $\forall\ v \in V :\quad \gamma_v :\ V^* \to R\quad$ *R-lineáris.*
Legyen $\ell_1, \ell_2 \in V^*$; $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ tetszőleges! Ekkor

$$\begin{aligned}\gamma_v(\lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2) : &= (\lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2)(v) = \lambda_1\ell_1(v) + \lambda_2\ell_2(v) \\ &= : \lambda_1\gamma_v(\ell_1) + \lambda_2\gamma_v(\ell_2);\end{aligned}$$

ez azt jelenti, hogy $\gamma_v \in V^{**}$ valóban teljesül.

2. *A $\gamma :\ V \to V^{**},\quad v \mapsto \gamma_v$ leképezés R-lineáris.*
(i) $\forall\ v_1, v_2 \in V,\ l \in V^*$:

$$\begin{aligned}\gamma_{v_1+v_2}(\ell) : &= \ell(v_1 + v_2) = \ell(v_1) + \ell(v_2) = \gamma_{v_1}(\ell) + \gamma_{v_2}(\ell) \\ &= (\gamma_{v_1} + \gamma_{v_2})(\ell),\end{aligned}$$

így ℓ tetszőlegessége folytán

$$\gamma_{v_1+v_2} = \gamma_{v_1} + \gamma_{v_2}.$$

(ii) $\forall\ \lambda \in R,\ v \in V,\ \ell \in V^* :$

$$\gamma_{\lambda v}(\ell) := \ell(\lambda v) = \lambda \ell(v) = \lambda \gamma_v(\ell) \Longrightarrow \gamma_{\lambda v} = \lambda \gamma_v.$$

(b) Tegyük föl, hogy V végesen generált szabad R-modulus! Rögzítsük V-nek egy $(b_i)_{i=1}^n$ bázisát, és tekintsük a V^* konjugált tér ehhez duális $(\ell^i)_{i=1}^n$ bázisát! Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ker}\gamma = \{0\}$. – Amennyiben $v \in \operatorname{Ker}\gamma$, úgy $\gamma_v = 0 \in V^{**}$, s ezért $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$0 = \gamma_v(\ell^i) := \ell^i(\nu^j b_j) = \nu^j \ell^i(b_j) = \nu^j \delta^i_j = \nu^i,$$

tehát $v = 0$. Ez $\operatorname{Ker}\gamma = \{0\}$ teljesülését jelenti. $\operatorname{Ker}\gamma = \{0\}$ ismeretesen ekvivalens azzal, hogy γ injektív, ebből viszont $\dim V = \dim V^{**}$ folytán következik, hogy γ R-lineáris izomorfizmus V és V^{**} között. □

2.3. definíció. *Vegyünk alapul egy V R-modulust, és legyen $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. A V modulus fölötti (r, s)-**típusú**, mégpedig r-**edrendben kontravariáns**, s-**edrendben kovariáns tenzor**on egy*

$$\underbrace{V^* \times V^* \ldots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{s} \to R$$

*$(r+s)$-lineáris formát értünk, ha $r + s \neq 0$; egy R-beli elemet, ha $r = s = 0$. Speciálisan az $(r, 0)$-típusú tenzorokat, azaz a $(V^*)^r \to R$ r-lineáris formákat r-**edrendű** (vagy „r-szer”) **kontravariáns**, a $(0, s)$-típusú tenzorokat, azaz a $V^s \to R$ s-lineáris formákat s-**edrendű** (vagy „s-szer”) **kovariáns** tenzoroknak hívjuk. Az $r, s \geqq 1$ esetben **vegyes tenzor**ról is szólunk.*

2.4. megjegyzések.

(a) Alkalmazni fogjuk a következő jelöléseket:

$\mathcal{T}^r_s(V)$ – a V-modulus fölötti (r, s)-típusú tenzorok halmaza,
$\mathcal{T}^r(V) := \mathcal{T}^r_0(V)$ – a V fölötti r-szer kontravariáns tenzorok halmaza,
$\mathcal{T}_s(V) := \mathcal{T}^0_s(V)$ – a V fölötti s-szer kovariáns tenzorok halmaza,
$\mathcal{T}^0_0(V) := R$.

(b) Két (r, s)-típusú tenzor összegének s egy (r, s)-típusú tenzor skalárszorosának kézenfekvő értelmezése mellett (v.ö.1.4.(e)) $\mathcal{T}^r_s(V)$ R-modulussá válik.

(c) Az elsőrendű kovariáns tenzorok modulusa azonos az alapulvett modulus duálisával:

$$\boxed{\mathcal{T}_1(V) = V^*}.$$

2.5. állítás. *Ha V végesen generált szabad R-modulus, akkor a V fölötti elsőrendű kontravariáns tenzorok modulusa kanonikusan izomorf V-vel, a V fölötti $(1, 1)$-típusú tenzorok modulusa pedig kanonikusan izomorf a V modulus endomorfizmusainak modulusával:*

$$\boxed{\mathcal{T}^1(V) \cong V\ ,\quad \mathcal{T}^1_1(V) \cong \operatorname{End}_R(V)}.$$

Bizonyítás.

(a) $\mathcal{T}^1(V) := \mathcal{T}^1_0(V) := \mathrm{Hom}_R(V^*, R) =: V^{**} \overset{2.2.}{\cong} V$.

(b) Legyen $t \in \mathcal{T}^1_1(V)$ tetszőleges! Ekkor

$$t: \ V^* \times V \to R, \quad (\ell, v) \mapsto t(\ell, v)$$

R-bilineáris függvény, így tetszőlegesen rögzített $u \in V$ mellett a

$$t_u : V^* \to R, \quad \ell \mapsto t_u(\ell) := t(\ell, u)$$

függvény R-lineáris, azaz $t_u \in V^{**}$. Tekintettel a V és V^{**} közötti

$$\gamma: \ V \to V^{**}$$

természetes izomorfizmusra (2.2.),

$$\exists!\ v \in V: \quad \gamma_v = t_u;$$

ennélfogva

$$\forall\ \ell \in V^*: \quad t_u(\ell) = t(\ell, u) = \gamma_v(\ell) = \ell(v).$$

Jelentse ma rmost φ a

$$V \to V, \quad u \mapsto \varphi(u) := v$$

leképezést, vagyis azt a leképezést, amely a t tenzorral a

$$\forall\ (\ell, u) \in V^* \times V: \quad t(\ell, u) = \ell(\varphi(u))$$

kapcsolatban áll! A konstrukcióból kiolvashatóan φ jól definiált, s az is egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$. Az így adódó

$$\mathcal{T}^1_1(V) \to \mathrm{End}_R(V), \quad t \mapsto \varphi$$

leképezés, valamint a

$$\beta: \ \mathrm{End}_R(V) \to \mathcal{T}^1_1(V), \quad \varphi \to \beta(\varphi),$$
$$\forall\ (\ell, v) \in V^* \times V: \quad \beta(\varphi)(\ell, v) := \ell(\varphi(v))$$

leképezés könnyen látható módon R-lineáris, s a két leképezés egymásnak inverze; $\mathcal{T}^1_1(V)$ és $\mathrm{End}_R(V)$ között tehát valóban izomorfizmust adtunk meg.

□

2.6. megjegyzés. Hasonlóan igazolható, hogy ha V végesen generált szabad R-modulus, akkor a

$$\mathcal{T}^1_1(V) \cong \mathrm{End}_R V^*$$

természetes izomorfizmus is fennáll, ilyen izomorfizmust jelent e modulusok között a

$$t \in \mathcal{T}^1_1(V) \mapsto \psi \in \mathrm{End}(V^*),$$
$$\forall\ (\ell, v) \in V^* \times V: \quad t(\ell, v) = [\psi(\ell)](v)$$

leképezés.

2.7. definíció. *Legyen V végesen generált szabad modulus. A V identikus transzformációjának a $\beta:\ \mathrm{End}_R(V) \to \mathcal{T}_1^1(V)$ természetes izomorfizmusnál adódó képét $\mathcal{T}_1^1(V)$* ***egységtenzor****ának vagy* ***Kronecker-delta tenzor****nak hívjuk.*

2.8. megjegyzés. A Kronecker-delta tenzorra a δ jelölést használva, az értelmezés szerint

$$\forall\ (\ell, v) \in V^* \times V: \quad \delta(\ell, v) = \ell(1_V(v)) = \ell(v).$$

2.9. definíció és lemma. *Legyen V R-modulus, s tekintsük a $t_1 \in \mathcal{T}_k(V)$ valamint a $t_2 \in \mathcal{T}_\ell(V)$ kovariáns tenzort! t_1 és t_2* ***tenzori szorzat****án azt a $t_1 \otimes t_2$-vel jelölt függvényt értjük, amelyet a*

$$t_1 \otimes t_2(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) := t_1(v_1, \dots, v_k) t_2(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell})$$

$$(v_i \in V, \quad 1 \leqq i \leqq k + \ell)$$

előírás értelmez, ha $k + \ell \geqq 2$; amennyiben a tenzorok valamelyike skalár (azaz $\mathcal{T}_0(V) := R$-ből való), úgy a tenzori szorzat a multilineáris forma szokásos skalárszorosát jelenti. – A tenzori szorzatra teljesülnek a következők:

(1) Ha t_1 és t_2 azonos fokú, t pedig tetszőleges kovariáns tenzor, akkor bármely $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ esetén

$$\begin{aligned}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) \otimes t &= \lambda_1(t_1 \otimes t) + \lambda_2(t_2 \otimes t),\\ t \otimes (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) &= \lambda_1(t \otimes t_1) + \lambda_2(t \otimes t_2).\end{aligned}$$

(2) $\forall\ t_i \in \mathcal{T}_{k_i}(V)\ , \quad 1 \leqq i \leqq 3:$

$$(t_1 \otimes t_2) \otimes t_3 = t_1 \otimes (t_2 \otimes t_3).$$

Bizonyítás. A tett észrevételek közvetlenül adódnak az értelmezés alapján. □

2.10. megjegyzések.

(a) A 2.9.(2) tulajdonság által kifejezett asszociativitás folytán egy többtényezős tenzori szorzat egyszerűen a $t_1 \otimes t_2 \otimes \cdots \otimes t_n$ alakba írható, tehát a zárójelek mellőzhetők.

(b) A tenzori szorzat nem kommutatív. Illusztrációként legyen $f, g \in \mathcal{T}_1(V) = V^*$! Ha f és g lineárisan független, akkor $f \otimes g \neq g \otimes f$, hiszen

$$f \otimes g(v_1, v_2) = f(v_1)g(v_2), \quad g \otimes f(v_1, v_2) = g(v_1)f(v_2);$$

és általában

$$f(v_1)g(v_2) \neq g(v_1)f(v_2).$$

(c) Vegyes tenzorok körében a tenzori szorzat analóg módon vezethető be.

2.11. állítás. *Legyen V végesen generált szabad R-modulus, $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, s jelölje $(b^i)_{i=1}^n$ a V^* duális modulus ehhez duális bázisát! Ekkor a*

$$b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k} \;; \quad 1 \leqq i_j \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq k$$

elemcsalád bázisa a $\mathcal{T}_k(V)$ R-modulusnak , következésképpen

$$\dim \mathcal{T}_k(V) = n^k.$$

Bizonyítás.

(a) Tetszőleges $v = \nu^i b_i \in V$ esetén

$$b^j(v) = \nu^i b^j(b_i) = \nu^i \delta_i^j = \nu^j \qquad (1 \leqq j \leqq n),$$

tehát v egyértelműen fölírható a

$$v = b^i(v) b_i$$

alakban. Fölhasználva ezt az észrevételt,
$\forall t \in \mathcal{T}_k(V)$; $\quad v_1, \ldots, v_k \in V$:

$$\begin{aligned} t(v_1, \ldots, v_k) &= t(b^{i_1}(v_1) b_{i_1}, \ldots, b^{i_k}(v_k) b_{i_k}) = \\ &= t(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) b^{i_1}(v_1) \cdot \ldots \cdot b^{i_k}(v_k) = \\ &= t(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k}(v_1, \ldots, v_k), \end{aligned}$$

következésképpen

$$t = t(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}) b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k}$$

írható; ez azt jelenti, hogy $\mathcal{T}_k(V)$ megadott elemcsaládja generátorrendszer.

(b) Igazoljuk a lineáris függetlenséget. – Tegyük föl, hogy

$$\lambda_{i_1 \ldots i_k} b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k} = 0.$$

Ekkor $\forall v_1, \ldots, v_k \in V$:

$$\lambda_{i_1 \ldots i_k} b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \lambda_{i_1 \ldots i_k} b^{i_1}(v_1) \cdots b^{i_k}(v_k) = 0.$$

Tetszőlegesen kiválasztva egy $(j_1, \ldots, j_k)$ indexsorozatot, s alkalmazva a most nyert relációt a

$$v_i := b_{j_i} \;, \quad 1 \leqq i \leqq k$$

vektorokra, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{i_1 \ldots i_k} b^{i_1}(b_{j_1}) \cdots b^{i_k}(b_{j_k}) = \lambda_{i_1 \ldots i_k} \delta_{j_1}^{i_1} \ldots \delta_{j_k}^{i_k} = \\ &= \lambda_{j_1 \ldots j_k}, \end{aligned}$$

következésképpen a megadott elemcsaládból $\mathcal{T}_k(V)$ zérusvektora csakis csupa nulla együtthatókkal kombinálható lineárisan. $\square$

2.12. megjegyzés. A bizonyításban látottak szerint tetszőleges $t \in \mathcal{T}_k(V)$ tenzor a megkonstruált

$$b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k} \ ; \qquad 1 \leqq i_j \leqq n, \ 1 \leqq j \leqq k \tag{$*$}$$

bázis segítségével egyértelműen előállítható a

$$t = t(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) b^{i_1} \otimes \cdots \otimes b^{i_k}$$

alakban. A $t(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in R$ skalárokat a t tenzor $(b_i)_{i=1}^n$ *bázishoz tartozó komponensei*ként említjük, holott ezek ténylegesen t-nek a $\mathcal{T}_k(V)$ modulus $(*)$ bázisára vonatkozó koordinátái. – A tenzorkomponensek tetszőleges vegyes tenzor esetén analóg formulával vezethetők be.

2.13. definíció. *Legyen V végesen generált szabad R-modulus, $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, $(b^i)_{i=1}^n$ az ehhez duális bázisa V^*-nak. Egy $t \in \mathcal{T}_s^r(V)$ tenzor $(b_i)_{i=1}^n$* ***bázishoz tartozó komponensein*** *a*

$$t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := t(b^{i_1}, \dots, b^{i_r}, b_{j_1}, \dots, b_{j_s});$$

$$1 \leqq i_k, \ j_l \leqq n \ , \quad 1 \leqq k \leqq r \ , \quad 1 \leqq \ell \leqq s$$

skalárokat értjük.

2.14. példa. Vegyünk alapul egy V végesen generált szabad R-modulust! Legyen $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, s tekintsük a V^* duális modulus (b_i)-hez duális $(b^i)_{i=1}^n$ bázisát!

Tetszőleges $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$ endomorfizmus a 2.5-ben mondottak szerint a $\beta(\varphi) \in \mathcal{T}_1^1(V)$ $(1,1)$-típusú tenzorral azonosítható. $\beta(\varphi)$-nek a $(b_i)_{i=1}^n$ bázishoz tartozó komponensei 2.13. értelmében

$$\beta(\varphi)(b^i, b_j) = b^i(\varphi(b_j)), \qquad 1 \leqq j \leqq n.$$

Ha $M_{(b_i)}(\varphi) = (\alpha^i_j)$, akkor az értelmezés szerint

$$\varphi(b_j) = \alpha^k_j b_k \ , \qquad 1 \leqq j \leqq n.$$

Így

$$\beta(\varphi)(b^i, b_j) = b^i(\alpha^k_j b_k) = \alpha^k_j b^i(b_k) = \alpha^k_j \delta^i_k = \alpha^i_j \ ; \quad 1 \leqq i, j \leqq n$$

adódik, ami azt jelenti, hogy a $\beta(\varphi)$ tenzor $(b_i)_{i=1}^n$ bázishoz tartozó komponensei éppen a φ endomorfizmus (b_i) bázisra vonatkozó matrixának (megfelelő indexű) elemei. Ilymódon φ és $\beta(\varphi)$ koordinátás nézőpontból „megkülönböztethetetlen”.

Tekintsük speciálisan a $\delta := \beta(1_V)$ Kronecker-delta tenzort! Ennek (b_i)-re vonatkozó komponensei

$$\delta(b^i, b_j) = b^i(b_j) = \delta^i_j \qquad (1 \leqq i, j \leqq n),$$

összhangban az elnevezéssel.

2.15. megjegyzés. Az átmenetmátrixot egy V végesen generált szabad R-modulus $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ és $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_i)_{i=1}^n$ bázisai között ugyanúgy értelmezzük, mint vektorterek esetén:

$$P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = (\alpha_j^i) \;:\Longleftrightarrow\; \tilde{b}_j = \alpha_j^i b_i \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

(v.ö. I.2.1.) Most is fennáll, hogy $P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}$ invertálható,

$$P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} = M_{\mathcal{B}}^{\widetilde{\mathcal{B}}}(1_V), \qquad P_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}})^{-1} = M_{\widetilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(1_V).$$

2.16. lemma. *Legyen $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ és $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_i)_{i=1}^n$ egy-egy bázisa a V végesen generált szabad R-modulusnak, $\mathcal{B}^* = (b^i)_{i=1}^n$ és $\widetilde{\mathcal{B}}^* = (\tilde{b}^i)_{i=1}^n$ pedig az ezekhez duális bázisai a V^* duális modulusnak. Ha*

$$A := P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}}, \quad \textit{akkor} \quad P_{\mathcal{B}^*\to\widetilde{\mathcal{B}}^*} = A^{-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $(\beta_i^j) := (\alpha_i^j)^{-1}$! Ekkor $P_{\widetilde{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} = A^{-1}$ miatt

$$b_k = \beta_k^\ell \tilde{b}_\ell \ , \quad 1 \leqq k \leqq n.$$

Ha $(\gamma_i^j) := P_{\mathcal{B}^*\to\widetilde{\mathcal{B}}^*}$, akkor

$$\tilde{b}^j = \gamma_i^j b^i \ , \quad 1 \leqq j \leqq n.$$

Így egyrészt

$$\tilde{b}^j(b_k) = (\gamma_i^j b^i)(b_k) = \gamma_i^j \delta_k^i = \gamma_k^j,$$

másrészt

$$\tilde{b}^j(b_k) = \tilde{b}^j(\beta_k^\ell \tilde{b}_\ell) = \beta_k^\ell \tilde{b}^j(\tilde{b}_\ell) = \beta_k^\ell \delta_\ell^j = \beta_k^j,$$

következésképpen

$$(\gamma_k^j) = (\beta_k^j) = (\alpha_k^j)^{-1}.$$

□

2.17. állítás (A tenzorkomponensek transzformációs szabálya).
Legyen V végesen generált szabad R-modulus, $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ és $\widetilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_i)_{i=1}^n$ pedig egy-egy bázisa V-nek! Ha egy $t \in \mathcal{T}_s^r(V)$ tenzor

$\mathcal{B}$-hez tartozó komponensei $t_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}$,

$\widetilde{\mathcal{B}}$-hoz tartozó komponensei $\tilde{t}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}$

$$(1 \leqq i_k \leqq n \ , \ 1 \leqq k \leqq r \ ; \ 1 \leqq j_\ell \leqq n \ , \ 1 \leqq \ell \leqq s),$$

akkor

$$\boxed{\tilde{t}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r} = t_{\ell_1\dots\ell_s}^{k_1\dots k_r} \beta_{k_1}^{i_1} \cdots \beta_{k_r}^{i_r} \alpha_{j_1}^{\ell_1} \cdots \alpha_{j_s}^{\ell_s}} \ ,$$

ahol

$$(\alpha_j^i) := P_{\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}} \ , \quad (\beta_j^i) := (\alpha_j^i)^{-1}.$$

Bizonyítás. Jelentse – a korábbiaknak megfelelően – $(b^i)_{i=1}^n$, illetve $(\tilde{b}^i)_{i=1}^n$ a $\mathcal{B}$, illetve a $\widetilde{\mathcal{B}}$ bázis duálisát!

$$\begin{aligned}\tilde{t}^{i_1\dots i_l}_{j_1\dots j_s} &:= t(\tilde{b}^{i_1},\dots,\tilde{b}^{i_r},\tilde{b}_{j_1},\dots,\tilde{b}_{j_s}) \overset{2.16.}{=} \\ &= t(\beta^{i_1}_{k_1}b^{k_1},\dots,\beta^{i_r}_{k_r}b^{k_r},\alpha^{\ell_1}_{j_1}b_{\ell_1},\dots,\alpha^{\ell_s}_{j_s}b_{\ell_s}) = \\ &= t(b^{k_1},\dots,b^{k_r},b_{\ell_1},\dots,b_{\ell_s})\beta^{i_1}_{k_1}\cdots\beta^{i_r}_{k_r}\alpha^{\ell_1}_{j_1}\cdots\alpha^{\ell_s}_{j_s} = \\ &= t^{k_1\dots k_r}_{\ell_1\dots\ell_s}\beta^{i_1}_{k_1}\cdots\beta^{i_r}_{k_r}\alpha^{\ell_1}_{j_1}\cdots\alpha^{\ell_s}_{j_s}.\end{aligned}$$

□

2.18. megjegyzés. A levezetett összefüggés speciális esetként visszaadja a vektorkomponensek valamint az endomorfizmusok matrixának már ismert transzformációs szabályát (v.ö. I.2.3.). Ha $r = 0, s = 1$, akkor az általános formula a

$$\tilde{t}_j = t_\ell \alpha^\ell_j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

relációra redukálódik. Ez azt jelenti, hogy V-beli bázistranszformáció során a lineáris formáknak a duális bázisra vonatkozó koordinátái a bázistranszformáció matrixával transzformálódnak – s ilyen értelemben „együtt változók”, *„kovariánsak”.*

2.19. definíció és állítás. *Legyen V és W R-modulus, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(V,W)$. A*

$$\begin{aligned}&\varphi^* : \mathcal{T}_k(W) \to \mathcal{T}_k(V)\ ,\ t \mapsto \varphi^* t,\\ &\varphi^* t(v_1,\dots,v_k) := t(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k)) \quad (v_i \in V\ ,\ 1 \leqq i \leqq k)\end{aligned}$$

leképezést ***tenzorvisszahúzó leképezés****nek, a $\varphi^* t \in \mathcal{T}_k(V)$ tenzort a $t \in \mathcal{T}_k(W)$ tenzor φ általi* ***visszahúzott****jának vagy* ***pull back****-jének hívjuk. – A tenzorvisszahúzó leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *$\varphi^* \in \mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}_k(W), \mathcal{T}_k(V))$, azaz φ^* R-lineáris.*
2. *φ^* megtartja a tenzori szorzatot: ha $t_1 \in \mathcal{T}_{k_1}(W), t_2 \in \mathcal{T}_{k_2}(W)$, akkor $\varphi^*(t_1 \otimes t_2) \in \mathcal{T}_{k_1+k_2}(V)$, és*
$$\varphi^*(t_1 \otimes t_2) = (\varphi^* t_1) \otimes (\varphi^* t_2).$$
3. *Amennyiben $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(U,V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(V,W)$, akkor*
$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Bizonyítás.

1. Legyen $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_k(W)$; $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ tetszőleges! $\forall v_1,\dots,v_k \in V$:

$$\begin{aligned}&(\varphi^*(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2))(v_1,\dots,v_k) := (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k)) = \\ &= \lambda_1 t_1(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k)) + \lambda_2 t_2(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k)) = \\ &= \lambda_1(\varphi^* t_1)(v_1,\dots,v_k) + \lambda_2(\varphi^* t_2)(v_1,\dots,v_k) = \\ &= (\lambda_1(\varphi^* t_1) + \lambda_2(\varphi^* t_2))(v_1,\dots,v_k) \\ &\Longrightarrow \varphi^*(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) = \lambda_1(\varphi^* t_1) + \lambda_2(\varphi^* t_2).\end{aligned}$$

2. $\forall\, v_1, \ldots, v_{k_1+k_2} \in V$:

$$\begin{aligned}
\varphi^*(t_1 \otimes t_2)(v_1, \ldots, v_{k_1+k_2}) &:= t_1 \otimes t_2(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_{k_1+k_2})) = \\
&= t_1(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_{k_1}))t_2(\varphi(v_{k_1+1}), \ldots, \varphi(v_{k_1+k_2})) = \\
&= \varphi^*t_1(v_1, \ldots, v_{k_1})\varphi^*t_2(v_{k_1+1}, \ldots, v_{k_1+k_2}) = \\
&= (\varphi^*t_1 \otimes \varphi^*t_2)(v_1, \ldots, v_{k_1+k_2}) \Longrightarrow \varphi^*(t_1 \otimes t_2) = (\varphi^*t_1) \otimes (\varphi^*t_2).
\end{aligned}$$

3. $\forall\, t \in \mathcal{T}_k(W);\ v_1, \ldots, v_k \in U$:

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)^*t(v_1, \ldots, v_k) &= t(\psi(\varphi(v_1), \ldots, \psi(\varphi(v_k))) = \\
&= \psi^*t(\varphi(v_1, \ldots, \varphi(v_k)) = \varphi^*(\psi^*t)(v_1, \ldots, v_k) \\
&\Longrightarrow (\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.
\end{aligned}$$

□

2.20. állítás. *Legyen V és W végesen generált szabad R-modulus, $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, $\mathcal{B}' = (b'_j)_{j=1}^m$ bázisa W-nek. Tekintsünk egy $t \in \mathcal{T}_k(V)$ kovariáns tenzort, melynek a $\mathcal{B}'$ bázishoz tartozó komponensei*

$$t_{j_1 \ldots j_k} := t(b'_{j_1}, \ldots, b'_{j_k}).$$

Ha $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(V, W)$, akkor a $\varphi^*t \in \mathcal{T}_k(V)$ tenzor $\mathcal{B}$ bázishoz tartozó komponenseit a

$$(\varphi^*t)_{j_1 \ldots j_k} = t_{\ell_1 \ldots \ell_n} \alpha^{\ell_1}_{j_1} \cdots \alpha^{\ell_n}_{j_k}$$

formula adja, ahol $(\alpha^\ell_j) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Bizonyítás. Fölhasználva, hogy $\varphi(b_j) = \alpha^\ell_j b'_\ell \ \ (1 \leqq j \leqq n)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\varphi^*t)_{j_1 \ldots j_k} &:= \varphi^*t(b_{j_1}, \ldots, b_{j_k}) = t(\varphi(b_{j_1}), \ldots, \varphi(b_{j_n})) \\
&= t(\alpha^{\ell_1}_{j_1} b'_{\ell_1}, \ldots, \alpha^{\ell_k}_{j_n} b'_{\ell_k}) = t(b'_{\ell_1}, \ldots, b'_{\ell_k})\alpha^{\ell_1}_{j_1} \cdots \alpha^{\ell_k}_{j_k} \\
&= t_{\ell_1 \ldots \ell_k} \alpha^{\ell_1}_{j_1} \cdots \alpha^{\ell_k}_{j_k}.
\end{aligned}$$

□

2.21. példa. Vegyük alapul az $\mathbb{R}^2$ valós vektorteret, rögzítsük ennek (e_1, e_2) kanonikus bázisát, s jelölje (u^1, u^2) a kanonikus bázis duálisát! Tekintsük a

$$t := u^2 \otimes u^1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^2)$$

tenzort, s jelentse φ $\mathbb{R}^2$-nek azt az endomorfizmusát, amelyet a kanonikus bázisra vonatkozóan a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix reprezentál! Meghatározzuk a $\varphi^*t \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^2)$ tenzort.

$$\varphi^*t = \varphi^*(u^2 \otimes u^1) \overset{2.19.(2)}{=} \varphi^*u^2 \otimes \varphi^*u^1;$$

$$\begin{aligned}
(\varphi^* u^2)(e_1) &:= u^2(\varphi(e_1)) = u^2(2e_1 + e_2) = 1, \\
(\varphi^* u^2)(e_2) &:= u^2(\varphi(e_2)) = u^2(e_1 + e_2) = 1, \\
(\varphi^* u^1)(e_1) &:= u^1(\varphi(e_1)) = u^1(2e_1 + e_2) = 2, \\
(\varphi^* u^1)(e_2) &:= u^1(\varphi(e_2)) = u^1(e_1 + e_2) = 1,
\end{aligned}$$

tehát

$$\varphi^* u^2 = u^1 + u^2 \ , \qquad \varphi^* u^1 = 2u^1 + u^2;$$

s így

$$\varphi^* t = (u^1 + u^2) \otimes (2u^1 + u^2) = 2u^1 \otimes u^1 + 2u^2 \otimes u^1 + u^1 \otimes u^2 + u^2 \otimes u^2.$$

3. Elemi tények a topológiából

3.1. definíció.

(a) *Legyen S egy halmaz, $\mathcal{T}$ pedig S részhalmazainak egy halmaza. Az $(S, \mathcal{T})$ párt – vagy egyszerűen az S halmazt –* ***topologikus tér****nek, $\mathcal{T}$-t S-en adott* ***topológiá****nak, a $\mathcal{T}$-hez tartozó részhalmazokat pedig* ***nyílt halmazok****nak nevezzük, ha teljesülnek a következő axiómák:*

(Top1) $\emptyset \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{T}$;

(Top2) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;

(Top3) *nyílt halmazok tetszőleges családjának az uniója is nyílt halmaz: ha* $\forall\ i \in I:\ U_i \in \mathcal{T}$, *akkor* $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(b) *Topologikus tér egy pontjának vagy részhalmazának* ***környezet****én olyan, a pontot, illetve a részhalmazt tartalmazó halmazt értünk, amely tartalmaz a pontot, illetve a részhalmazt tartalmazó nyílt halmazt.*

(c) *Topologikus tér egy részhalmazának* ***belseje*** *az általa tartalmazott összes nyílt halmaz uniója.*

3.2. megjegyzések.

(a) Topológia minden halmazon megadható: ha S egy halmaz és

- $\mathcal{T}_1 := \mathcal{P}(S) :=$ S hatványhalmaza;
- $\mathcal{T}_2 := \{\emptyset, S\}$,

akkor $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ egyaránt topológia az S halmazon: az előbbit az S halmaz ***diszkrét***, az utóbbit pedig a ***kaotikus*** topológiájának hívjuk.

(b) Teljes indukcióval következik, hogy nyílt halmazok tetszőleges véges családjának a metszete is nyílt halmaz.

(c) (Top3)-ból adódóan topologikus tér egy részhalmazának belseje nyílt halmaz. Egyszerűen átgondolható, hogy egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha megegyezik a belsejével.

(d) Tegyük föl, hogy $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér. Az értelmezés szerint egy $V \subset S$ halmaz akkor környezete egy $p \in S$ pontnak, ha

$$\exists\, U \in \mathcal{T}: \quad p \in U \subset V.$$

Speciálisan egy pontot tartalmazó bármely nyílt halmaz környezete a pontnak; az ilyen környezeteket ***nyílt környezetek***ként is említjük. Megállapodunk abban, hogy egy p pont összes környezeteinek halmazát $\mathcal{N}(p)$-vel jelöljük.

(e) Diszkrét topologikus térben egy pontot tartalmazó minden részhalmaz környezete a pontnak; a kaotikus topológiában minden pontnak csupán egyetlen környezete van: a teljes tér.

3.3. lemma. *Topologikus tér egy részhalmaza akkor és csak akkor nyílt, ha minden egyes pontjának környezete.*

Bizonyítás. Legyen adva az S topologikus tér H részhalmaza!

(a) Amennyiben H nyílt halmaz, úgy a környezetek definíciójából nyilvánvaló, hogy H minden egyes pontjának környezete.

(b) Megfordítva, tegyük föl, hogy $\forall\, h \in H:\ H \in \mathcal{N}(h)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, h \in H: \quad \exists\, U_h \in \mathcal{T}: \quad h \in U_h \subset H.$$

Legyen

$$U := \bigcup_{h \in H} U_h \quad !$$

(Top3) miatt ekkor U nyílt halmaz. Mivel $\forall\, h \in H:\ U_h \subset H$, következik, hogy $U \subset H$. Másrészt

$$(\forall\, h \in H:\ h \in U_h) \implies H \subset \bigcup_{h \in H} U_h = U,$$

tehát $U = H$. Ezzel beláttuk, hogy H nyílt halmaz. □

3.4. definíció és állítás.

(a) *Topologikus tér egy részhalmazát* ***zárt****nak nevezzük, ha a komplementere nyílt halmaz. – A zárt halmazok rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:*

  (1) *Az üres halmaz és a teljes tér zárt halmaz.*

  (2) *Zárt halmazok tetszőleges családjának a metszete is zárt halmaz.*

  (3) *Véges sok zárt halmaz uniója is zárt halmaz.*

(b) *Topologikus tér egy adott részhalmazát tartalmazó összes zárt halmaz metszete zárt halmaz, ezt az illető részhalmaz* ***lezárt****jának hívjuk.*

Bizonyítás. Elegendő annyit megjegyezni, hogy (1) közvetlenül adódik (Top1)-ből, (2) és (3) pedig a halmazelméleti de Morgan-szabályok alapján következik (Top3)-ból és (Top2)-ből. □

3.5. állítás.

(a) Tegyük föl, hogy $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér! Tetszőleges $p \in S$ pont esetén az $\mathcal{N}(p)$ halmaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(N1) $\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$.

(N2) *Ha $V \in \mathcal{N}(p)$, akkor $p \in V$.*

(N3) *$\mathcal{N}(p)$ bármely két tagjának metszete is $\mathcal{N}(p)$-be tartozik.*

(N4) *S minden olyan részhalmaza, amely tartalmazza $\mathcal{N}(p)$ egy tagját, $\mathcal{N}(p)$-be tartozik.*

(N5) *$\mathcal{N}(p)$ minden egyes V tagja tartalmazza $\mathcal{N}(p)$-nek egy olyan W tagját, hogy $\forall\ q \in W :\ V \in \mathcal{N}(q)$.*

(b) Megfordítva, tegyük föl, hogy egy S halmaz minden egyes p pontjához hozzárendeltük S részhalmazainak egy $\mathcal{N}(p)$ halmazát, eleget téve az (N1)-(N5) feltételeknek. Ekkor létezik egy és csak egy olyan topológia az S halmazon, amelyre vonatkozóan tetszőleges p pont környezeteinek halmaza éppen a megadott $\mathcal{N}(p)$ halmaz.

Bizonyítás.

(a) Megmutatjuk, hogy az $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér tetszőleges p pontja esetén $\mathcal{N}(p)$-re teljesülnek az (N1)-(N5) tulajdonságok.

(N1) Mivel (Top1) szerint S nyílt halmaz, és – nyilvánvalóan – $p \in S \subset S$, S környezete p-nek. $\mathcal{N}(p)$ tehát nemüres.

(N2) Evidens a környezetek definíciójából.

(N3) Tegyük föl, hogy $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(p)$! Ekkor megadhatók olyan U_1, U_2 nyílt halmazok, hogy
$$p \in U_1 \subset V_1 \quad \text{és} \quad p \in U_2 \subset V_2.$$
(Top2) értelmében $U_1 \cap U_2$ szintén nyílt halmaz, s
$$p \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2,$$
alapján következik, hogy $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(p)$.

(N4) Ez ugyancsak közvetlenül kiolvasható a környezetek definíciójából.

(N5) Ha $V \in \mathcal{N}(p)$, akkor van olyan U nyílt halmaz, hogy $p \in U \subset V$. Mivel 3.3. szerint $\forall\ q \in U :\ U \in \mathcal{N}(q)$, a $W := U$ választás megfelel a követelményeknek.

(b) Föltesszük, hogy adva van egy

$$p \in S \mapsto \mathcal{N}(p) \subset \mathcal{P}(S)$$

leképezés, teljesítve az (N1)-(N5) feltételeket.

(1) Először a kérdéses topológia *unicitás*át igazoljuk; ezzel egyben arra vonatkozóan is iránymutatást kapunk, hogy miként konstruálandó az meg. Tegyük föl tehát, hogy $\mathcal{T}$ olyan topológia S-en, amelyre nézve

$\forall\, p \in S :$ *p $\mathcal{T}$-re vonatkozó környezeteinek halmaza a megadott $\mathcal{N}(p)$ halmaz.*

Alkalmazzuk ismét a nyílt halmazok 3.3-ban adott jellemzését! Eszerint

$V \subset S$ *nyílt halmaza a* $\mathcal{T}$ *topológiának* $\iff \forall\, p \in V : \ V \in \mathcal{N}(p)$.

Megállapíthatjuk ilymódon, hogy

$$(*) \qquad \mathcal{T} = \{V \subset S \mid \forall\, p \in V : \ V \in \mathcal{N}(p)\};$$

$\mathcal{T}$ tehát egyértelműen meghatározott.

(2) A *létezés*t igazolandó, értelmezzük $\mathcal{T}$-t a $(*)$ előírással! Megmutatjuk, hogy $\mathcal{T}$ topológia S-en; ehhez (Top1)-(Top3) ellenőrzésére van szükség.

(Top1) Mivel nincs olyan $p \in S$ elem, hogy $p \in \emptyset$, üres feltételrendszerrel teljesül a

$$\forall p \in \emptyset : \quad \emptyset \in \mathcal{N}(p)$$

tulajdonság, tehát $\emptyset \in \mathcal{T}$. Tetszőleges $p \in S$ ponthoz (N1) értelmében megadható valamely $U \in \mathcal{N}(p)$. Mivel $U \subset S$, (N4)-ből következően $S \in \mathcal{N}(p)$, s ezért $S \in \mathcal{T}$.

(Top2) Legyen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$! Ha $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, akkor nincs mit bizonyítani; különben válasszunk egy tetszőleges $p \in U_1 \cap U_2$ pontot. $\mathcal{T}$ definíciója értelmében $U_1 \in \mathcal{N}(p)$ és $U_2 \in \mathcal{N}(p)$, így (N3) miatt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}(p)$. Ez – ismételten figyelembe véve $\mathcal{T}$ definícióját – azt jelenti, hogy $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

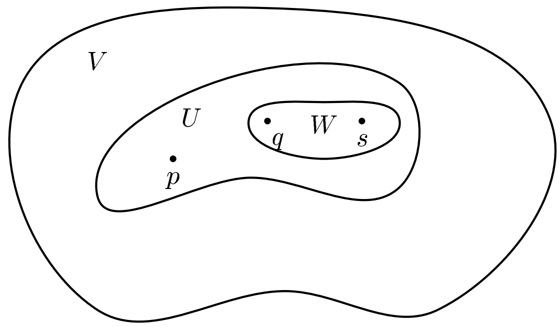
(Top3) Tegyük föl, hogy $(U_i)_{i\in I}$ $\mathcal{T}$-beli halmazok egy tetszőleges családja, s legyen $U := \bigcup_{i\in I} U_i$. Tekintve egy $p \in U$ pontot, valamely $i_0 \in I$ indexre $p \in U_{i_0}$ teljesül. Mivel $U_{i_0} \in \mathcal{T}$, ekkor $U_{i_0} \in \mathcal{N}(p)$, s a nyilvánvaló $U_{i_0} \subset U$ reláció alapján, az (N4) feltétel figyelembevételével, $U \in \mathcal{N}(p)$ következik. Ezzel beláttuk, hogy U eleget tesz a nyílt halmazok $(*)$ definiáló feltételének.

Igazolnunk kell végül, hogy tetszőleges $p \in S$ pont esetén p összes $\mathcal{T}$ szerinti környezeteinek halmaza éppen a megadott $\mathcal{N}(p)$ halmaz.

(i) Legyen $p \in S$ és $V \in \mathcal{N}(p)$ tetszőleges! Megmutatjuk, hogy V környezete p-nek a $\mathcal{T}$ topológiára nézve. – Ha

$$U := \{q \in V \mid V \in \mathcal{N}(q)\},$$

akkor $p \in U$, hiszen $V \in \mathcal{N}(p)$. Belátjuk, hogy $U \in \mathcal{T}$.



Tekintsünk egy tetszőleges $q \in U$ pontot ! U definíciója értelmében megállapíthatjuk, hogy $V \in \mathcal{N}(q)$. Az (N5) feltétel garantálja, hogy létezik olyan $W \in \mathcal{N}(q)$ halmaz, amelyre teljesül az

$$s \in W \Longrightarrow V \in \mathcal{N}(s)$$

tulajdonság. (N2)-re, valamint ismét U definíciójára tekintettel világos, hogy

$$q \in W \subset U.$$

Innen az (N4) feltétel alapján következik, hogy $U \in \mathcal{N}(q)$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall\ q \in U : \quad U \in \mathcal{N}(q);$$

ez $\mathcal{T}$ definíciójára tekintettel azt jelenti, hogy $U \in \mathcal{T}$.

(ii) Megfordítva, tegyük föl, hogy V $\mathcal{T}$ szerinti környezete egy p pontnak! Ekkor – a 3.1.(b) definíció értelmében –

$$\exists\ U \in \mathcal{T} : \quad p \in U \subset V.$$

$\mathcal{T}$ definícióját alkalmazva ezután, megállapíthatjuk, hogy $U \in \mathcal{N}(p)$, amiből (N4) alapján $V \in \mathcal{N}(p)$ következik.

Ezzel a bizonyítás teljes. □

3.6. definíció. *Egy (S, d) párt* ***metrikus tér****nek nevezünk, ha*

$$d : \ S \times S \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \to d(a, b)$$

olyan ***távolságfüggvény****nek vagy* ***metrikának*** *mondott függvény, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(1) $d(a, b) = 0 \iff a = b;$

(2) $\forall\ (a, b) \in S \times S : \quad d(a, b) = d(b, a);$

(3) $\forall\ a, b, c \in S : \quad d(a, b) + d(b, c) \geqq d(a, c).$

3.7. következmény. *Ha (S, d) metrikus tér, akkor*

$$\forall\ (a, b) \in S \times S : \quad d(a, b) \geq 0.$$

Bizonyítás. $0 \overset{(1)}{=} d(a,a) \overset{(3)}{\leqq} d(a,b) + d(b,a) \overset{(2)}{=} 2d(a,b) \quad \Longrightarrow \quad d(a,b) \geqq 0.$ □

3.8. következmény és definíció. *Vegyünk alapul egy (S, d) metrikus teret! Tekintsünk egy $p \in S$ pontot, s legyen ρ egy pozitív valós szám! A*

$$B_\rho(p) := \{q \in S \mid d(p, q) < \rho\}$$

*halmazt p középpontú, ρ sugarú **nyílt gömb**nek hívjuk. Ha*

$$\mathcal{N}(p) := \{V \subset S \mid \exists\ \rho \in \mathbb{R}^+ : \ B_\rho(p) \subset V\},$$

akkor $\mathcal{N}(p)$ eleget tesz az (N1)-(N5) *feltételeknek, következésképpen létezik egy és csak egy olyan $\mathcal{T}_d$ topológia az S halmazon,hogy tetszőleges $p \in S$ pont esetén p $\mathcal{T}_d$ szerinti környezeteinek halmaza megegyezik az $\mathcal{N}(p)$ halmazzal. Ezt a topológiát a d **metrika által meghatározott topológiának** hívjuk.* □

3.9. megjegyzések.

(a) (S, d) metrikus tér helyett – a szokásos pontatlansággal – többnyire egyszerűen S metrikus térről szólunk.

(b) Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér metrikus tér a kanonikus belső szorzatból a

$$d_n(a, b) := \|a - b\| = \langle a - b, a - b\rangle^{\frac{1}{2}}$$

előírás szerint származó (euklideszi) metrikával. A d_n által a 3.8-ban mondottak szerint meghatározott $\mathcal{T}_{d_n}$ topológiát $\mathbb{R}^n$ *szokásos topológiájának* nevezzük, és megállapodunk abban, hogy az $\mathbb{R}^n$ térben dolgozva mindig ezt a topológiát vesszük alapul. (Az 1. részben – hallgatólagosan – ezt tettük.) Megmutatható, hogy a leírt eljárás $\mathbb{R}^n$ bármely belső szorzatából kiindulva a szokásos topológiához vezet.

3.10. lemma és definíció. *Tegyük föl, hogy $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér, s legyen $H \subset S$. Ha*

$$\mathcal{T}_H := \{U \cap H \mid U \in \mathcal{T}\},$$

*akkor $\mathcal{T}_H$ topológia a H halmazon; ezt a topológiát a H-n $\mathcal{T}$ által indukált **relatív topológiának** hívjuk, s azt mondjuk, hogy a $(H, \mathcal{T}_H)$ topologikus tér – vagy egyszerűen H – **altere** az $(S, \mathcal{T})$ topologikus térnek.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük, hogy $\mathcal{T}_H$ eleget tesz a (Top1)-(Top3) axiómáknak.

(Top1) $\emptyset = \emptyset \cap H \in \mathcal{T}_H$, mert $\emptyset \in \mathcal{T}$; $\quad H = S \cap H \in \mathcal{T}_H$, mert $S \in \mathcal{T}$.

(Top2) Tegyük föl, hogy $A \in \mathcal{T}_H$ és $B \in \mathcal{T}_H$! Az értelmezés alapján

$$A = U \cap H \ , \quad B = V \cap H \ ; \quad U, V \in \mathcal{T}$$

írható, s így

$$A \cap B = (U \cap H) \cap (V \cap H) = (U \cap V) \cap H \in \mathcal{T}_H,$$

hiszen $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(Top3) Legyen $(A_i)_{i \in I}$ $\mathcal{T}_H$-nak egy tetszőleges elemcsaládja! Ekkor

$$\forall i \in I: \quad \exists\, U_i \in \mathcal{T}: \quad A_i = U_i \cap H;$$

ennélfogva

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap H) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap H \in \mathcal{T}_H,$$

mivel $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, lévén $\mathcal{T}$ topológia. □

3.11. definíció.

(a) *Egy topologikus tér **topológiájának bázis**án a tér nyílt halmazainak olyan családját értjük, amelyből vett halmazok uniójaként a topologikus tér tetszőleges nyílt halmaza előállítható. Megszámlálható bázis létezése esetén azt mondjuk, hogy a topologikus tér eleget tesz a **2. megszámlálhatósági axiómá**nak, vagy hogy **megszámlálható bázisú**.*

(b) *Egy topologikus tér **Hausdorff-tér**[1], ha bármely két pontja rendelkezik diszjunkt környezetekkel.*

(c) *Egy topologikus tér **nyílt lefedés**én nyílt halmazok olyan családját értjük, amelynek uniójaként előáll a tér.*

(d) *Azt mondjuk, hogy egy topologikus tér **kompakt**, ha*

(1) *Hausdorff-tér;*

(2) *minden nyílt lefedése tartalmaz véges lefedést, azaz ha $(U_i)_{i \in I}$ tetszőleges nyílt lefedése a térnek, akkor létezik olyan $J \subset I$ véges halmaz, hogy $(U_i)_{i \in J}$ továbbra is lefedés. Topologikus tér egy **részhalmazát** akkor nevezzük **kompakt**nak, ha a relatív topológiára nézve kompakt (vagyis ha mint altér kompakt).*

(e) *Egy Hausdorff-teret **lokálisan kompakt**nak hívunk, ha minden pontjának van kompakt környezete.*

[1] *F. Hausdorff* (1868 - 1942) német matematikus, a lipcsei, majd a bonni egyetem professzora.

3.12. példa. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$! A szokásos topológiával ellátott $\mathbb{R}^n$ tér (ld. 3.9.(b)) megszámlálható bázisú, lokálisan kompakt, de nem kompakt topologikus tér. Ismeretes, hogy $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt (*Heine-Borel-tétel*).

3.13. definíció. *Legyen adva egy S és egy T topologikus tér!*

(a) *Azt mondjuk, hogy egy $f: S \to T$ leképezés **folytonos** egy $p \in S$ **pontban**, ha az $f(p) \in T$ pont minden V környezetéhez létezik a p pontnak olyan U környezete, hogy $f(U) \subset V$. Ha f az S topologikus tér minden pontjában folytonos, akkor S T-be való **folytonos leképezésének** nevezzük. Amenynyiben az $f: S \to T$ leképezés bijektív folytonos leképezése S-nek T-re, és az $f^{-1}: T \to S$ leképezés is folytonos, úgy f-et az S topologikus tér T-re való **homeomorfizmus**ának hívjuk. Két topologikus teret **homeomorf**nak mondunk, ha létezik közöttük homeomorfizmus.*

(b) *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nem egypontú zárt intervallum, ellátva a relatív topológiával. Egy*

$$c: [a, b] \to S$$

*folytonos leképezést az S topologikus térbeli **pályának** nevezünk, $c(a)$-t a pálya **kezdőpont**jának, $c(b)$-t pedig a **végpont**jának hívjuk. Az S topologikus tér p és q pontját **ívvel összeköthető**nek mondjuk, ha van olyan S-beli pálya, amelynek kezdőpontja a p pont, végpontja a q pont.*

3.14. megjegyzések.

(a) Legyen S és T topologikus tér, s tekintsünk egy $f: S \to T$ leképezést. Egyszerűen megmutatható, hogy a következő kijelentések ekvivalensek:

 (1) f folytonos leképezése S-nek T-be.

 (2) Bármely T-beli nyílt halmaz ősképe S-ben nyílt halmaz.

 (3) Bármely T-beli zárt halmaz ősképe S-ben zárt halmaz.

(b) Folytonos leképezések kompozíciója folytonos leképezés; speciálisan homeomorfizmusok kompozíciója homeomorfizmus.

3.15. lemma. *Egy topologikus térben az ívvel való összeköthetőség ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. Legyen adva az S topologikus tér, s tekintsük ebben a

$$\begin{aligned} p \sim q \quad &:\Longleftrightarrow \quad p \text{ ívvel összeköthető } q \text{ -val} \\ &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, c: [a, b] \to S \text{ pálya: } c(a) = p \text{ és } c(b) = q \end{aligned}$$

relációt!

(1) A $\sim$ *reláció reflexív.* – Legyen $p \in S$ tetszőleges. A

$$c: \ [0,1] \to S, \quad t \mapsto c(t) := p$$

konstans leképezés nyilvánvalóan p-t p-vel összekötő pálya, hiszen folytonos és $c(0) = c(1) = p$; tehát $p \sim p$.

(2) A $\sim$ *reláció szimmetrikus.* – Tegyük föl, hogy $p \sim q$. Ekkor van olyan $c: \ [0,1] \to S$ pálya, hogy $c(0) = p, \ c(1) = q$. Tekintsük a

$$c^- : \ [0,1] \to S, \quad t \mapsto c^-(t) := c(1-t)$$

leképezést! Ez előáll folytonos leképezések kompozíciójaként, tehát folytonos. Mivel

$$c^-(0) = c(1) = q, \qquad c^-(1) = c(0) = p,$$

c^- q-t p-vel köti össze, tehát $q \sim p$.

(3) *Teljesül a tranzitivitás.* – Tegyük föl, hogy $p \sim q$ és $q \sim r$! Ekkor megadható olyan

$$c_1 : \ [0,1] \to S \quad \text{és} \quad c_2 : \ [0,1] \to S$$

pálya, hogy

$$c_1(0) = p \ , \quad c_1(1) = q \ ; \quad c_2(0) = q \ , \quad c_2(1) = r.$$

Értelmezzük a

$$c: \ [0,1] \to S, \quad t \mapsto c(t)$$

leképezést a következő előírással:

$$c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{, ha} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ c_2(2t-1) & \text{, ha} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ekkor c jól definiált leképezés $[0,1]$-en, hiszen

$$c_1(2 \cdot \frac{1}{2}) = c_1(1) = q = c_2(0) = c_2(2 \cdot \frac{1}{2} - 1).$$

$c \restriction [0, \frac{1}{2}]$ és $c \restriction [\frac{1}{2}, 1]$ folytonos (mivel folytonos leképezések kompozíciója), s egyszerűen megmutatható, hogy e leképezések „összeragasztása”, a $c: \ [0,1] \to S$ leképezés ugyancsak folytonos. Mivel $c(0) = c_1(0) = p, \ c(1) = = c_2(1) = r$, c p-t r-rel összekötő pálya, amivel beláttuk, hogy $p \sim r$. □

3.16. definíció. *Vegyünk alapul egy S topologikus teret!*

*(a) Azt mondjuk, hogy S **összefüggő**, ha nem állítható elő két nemüres, diszjunkt nyílt halmaz uniójaként. S egy **részhalmazát** akkor nevezzük **összefüggő**-nek, ha összefüggő a relatív topológiára nézve, vagyis ha mint altér összefüggő.*

(b) *A topologikus teret **ívszerűen összefüggő**nek mondjuk, ha bármely két pontja ívvel összeköthető.*

3.17. megjegyzés. Topologikus terek összefüggőségével kapcsolatban emlékeztetünk a következő eredményekre:

(1) Ha S összefüggő topologikus tér, T egy topologikus tér, és $f: S \to T$ folytonos leképezés, akkor $f(S) \subset T$ összefüggő; röviden: *összefüggő topologikus tér folytonos képe összefüggő.* (Ez könnyen ellenőrizhető.)

(2) Az $\mathbb{R}$ topologikus tér egy topologikus altere akkor és csak akkor összefüggő, ha intervallum; speciálisan $\mathbb{R}$ összefüggő. (Ennek igazolása munkaigényes.)

(3) ***(Közbülső-érték tétel)*** Legyen S összefüggő topologikus tér, $f: S \to \mathbb{R}$ pedig folytonos függvény. Tegyük föl, hogy $p, q \in S$ és $f(p) < f(q)$. Ha k tetszőleges olyan valós szám, amelyre $f(p) < k < f(q)$ teljesül, akkor létezik olyan $s \in S$ pont, hogy $f(s) = k$.

3.18. lemma. *Ha egy topologikus tér ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.*

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük föl, hogy az S topologikus tér ívszerűen összefüggő, de nem összefüggő! Ekkor léteznek olyan U_0, U_1 nemüres, diszjunkt nyílt halmazok, hogy $U_0 \cup U_1 = S$. Válasszunk tetszőlegesen egy $p_0 \in U_0$ és egy $p_1 \in U_1$ pontot! S ívszerű összefüggősége miatt megadható olyan $c: [0,1] \to S$ pálya, hogy $c(0) = p_0$, $c(1) = p_1$. c folytonosságára való tekintettel

$$c^{-1}(U_0) \subset [0,1] \quad \text{és} \quad c^{-1}(U_1) \subset [0,1]$$

nemüres, diszjunkt nyílt halmazok, s

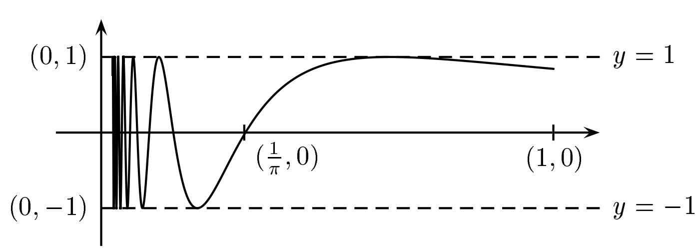
$$c^{-1}(U_0) \cup c^{-1}(U_1) = c^{-1}(S) = [0,1].$$

Ez ellentmond annak, hogy a $[0,1]$ zárt intervallum összefüggő. □

3.19. megjegyzés. A lemma megfordítása általában nem igaz; a standard ellenpélda ezzel kapcsolatban a következő: – Legyen

$$\begin{aligned} H &:= \{(0,s) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| \leqq 1\}, \\ K &:= \{(t, \sin\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t \leqq 1\}, \\ S &:= H \cup K. \end{aligned}$$

Ekkor $S \subset \mathbb{R}^2$ topologikus tér az $\mathbb{R}^2$ topológiája által indukált relatív topológiával.



A K grafikon – szemléletesen szólva – az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenletű egyenes között oszcillál végtelen sokszor, az oszcilláció az y-tengelyhez közeledve egyre gyorsul. K – mint $\mathbb{R}^2$ topologikus altere – összefüggő, ugyanis a $]0,1]$ intervallum képe a

$$t \mapsto (t, \sin \frac{1}{t})$$

folytonos leképezésnél (3.17.(1),(2)). További aprólékos munkával megmutatható, hogy S szintén összefüggő, de nem ívszerűen összefüggő.

3.20. lemma és definíció. *Vegyünk alapul egy $(S, \mathcal{T})$ topologikus teret és tegyük föl, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció az S halmazon. Egy $a \in S$ elem ekvivalenciaosztályát jelölje $[a]$, tetszőleges $A \subset S$ halmaz esetén pedig legyen $[A] := \bigcup_{a \in A} [a]$. Jelentse $S/\!\sim$ az ekvivalenciaosztályok halmazát, π pedig az*

$$S \to S/\!\sim\ , \qquad a \mapsto [a]$$

kanonikus projekciót.

(a) Ha

$$\widetilde{\mathcal{T}} := \{U \subset S/\!\sim\ \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\},$$

akkor $\widetilde{\mathcal{T}}$ topológia az $S/\!\sim$ halmazon; ezt a topológiát ***kvóciens topológiának****, az $(S/\!\sim, \widetilde{\mathcal{T}})$ topologikus teret pedig az $(S, \mathcal{T})$ topologikus tér $\sim$ ekvivalenciareláció szerinti* ***kvóciens****ének nevezzük. A kanonikus projekció folytonos a kvóciens topológiára nézve.*

(b) Amennyiben T további topologikus tér, úgy egy $f:\ S/\!\sim\ \to T$ leképezés akkor és csak akkor folytonos, ha $f \circ \pi:\ S \to T$ folytonos leképezés.

Bizonyítás.

(a) (1) Mivel $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ és $\pi^{-1}(S/\!\sim) = S$, mind az üres halmaz, mind az $S/\!\sim$ halmaz $\widetilde{\mathcal{T}}$-ba tartozik.

(2) Tegyük föl, hogy $U \in \widetilde{\mathcal{T}}$ és $V \in \widetilde{\mathcal{T}}$! $\widetilde{\mathcal{T}}$ definíciója szerint $\pi^{-1}(U)$ és $\pi^{-1}(V)$ nyílt halmaz S-ben, így $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ szintén nyílt halmaza S-nek, tehát $U \cap V \in \widetilde{\mathcal{T}}$.

(3) Legyen $(U_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\widetilde{\mathcal{T}}$-beli halmazcsalád! Ekkor $\forall i \in I:\ \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$, s ezért $\pi^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$, ami $\widetilde{\mathcal{T}}$ értelmezésére tekintettel azt jelenti, hogy $\bigcup_{i \in I} U_i \in \widetilde{\mathcal{T}}$.

(b) $f:\ S/\!\sim\ \to T$ folytonos $\overset{3.14.(a)}{\iff}$ tetszőleges $V \subset T$ nyílt halmaz esetén $f^{-1}(V) \subset S/\!\sim$ nyílt $:\iff$ $\pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ \pi)^{-1}(V) \subset S$ nyílt $\overset{3.14.(a)}{\iff}$ $f \circ \pi$ folytonos. $\square$

3.21. definíció.

(a) *Egy topologikus terek közötti leképezést* ***nyíltnak*** *(illetve* ***zártnak****) nevezünk, ha a leképezésnél bármely nyílt (illetve zárt) halmaz képe nyílt (illetve zárt) halmaz.*

(b) *Az S topologikus térben adott $\sim$* ***ekvivalenciarelációt nyíltnak*** *mondjuk, ha tetszőleges $A \subset S$ nyílt halmaz esetén $[A]$ $(:= \bigcup_{a\in A}[a]) \subset S$ nyílt halmaz.*

3.22. állítás. *Legyen S topologikus tér, $\sim$ ekvivalenciareláció S-en.*

(a) *A $\sim$ reláció akkor és csak akkor nyílt, ha a $\pi: S \to S/{\sim}$ kanonikus projekció nyílt leképezés.*

(b) *Amennyiben a $\sim$ reláció nyílt, és S megszámlálható bázisú, úgy az $S/{\sim}$ topologikus tér szintén megszámlálható bázisú.*

Bizonyítás.

(a) Vegyük először is észre, hogy bármely (nemüres) $A \subset S$ halmaz esetén

$$[A] = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

Valóban, ha $q \in [A] = \bigcup_{a\in A}[a]$ tetszőleges, akkor valamely $a \in A$-ra $q \in [a]$, s így

$$\pi(q) = [a] \in \pi(A) \Longrightarrow q \in \pi^{-1}(\pi(A));$$

következésképpen $[A] \subset \pi^{-1}(\pi(A))$. – Megfordítva, ha $q \in \pi^{-1}(\pi(A))$, akkor $\pi(q) \in \pi(A)$, s ezért van olyan $a \in A$, hogy $q \in [a] \subset [A]$, tehát a $\pi^{-1}(\pi(A)) \subset [A]$ tartalmazás is fennáll.

Tekintsünk mármost egy $A \subset S$ nyílt halmazt!

– Ha π nyílt leképezés, akkor $\pi(A) \subset S/{\sim}$ definíció szerint nyílt halmaz, és π folytonossága valamint az imént tett észrevétel szerint

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = [A] \subset S$$

ugyancsak nyílt.

– Megfordítva, ha $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ nyílt halmaz S-ben, akkor a kvóciens topológia értelmezése szerint $\pi(A)$ nyílt halmaza $S/{\sim}$-nak; ekkor tehát π nyílt leképezés.

(b) Tegyük föl, hogy az S topologikus térnek létezik $(U_i)_{i\in I}$ megszámlálható bázisa, s legyen $\sim$ nyílt ekvivalenciareláció S-en! Amennyiben $V \subset S/{\sim}$ nyílt halmaz, úgy π folytonossága miatt $\pi^{-1}(V) \subset S$ ugyancsak nyílt, s ezért

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{j\in J} U_j\ , \quad J \subset I$$

írható. Mivel föltevésünk szerint a $\sim$ ekvivalenciareláció nyílt, az (a)-ban mondottak szerint a $\pi : S \to S/\sim$ leképezés is nyílt. Így $(\pi(U_i))_{i\in I}$ az $S/\sim$ topologikus tér nyílt halmazainak egy megszámlálható családja. Ez a halmazcsalád a

$$V = \pi[\pi^{-1}(V)] = \pi(\bigcup_{j\in J} U_j) = \bigcup_{j\in J} \pi(U_j)$$

összefüggésre tekintettel bázisa $S/\sim$ topológiájának. $\square$

3.23. lemma és definíció. *Legyen* $(S_1, \mathcal{T}_1)$ *és* $(S_2, \mathcal{T}_2)$ *egy-egy topologikus tér;*

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_1,\ V \in \mathcal{T}_2\}.$$

Létezik egy és csak egy olyan topológia az $S_1 \times S_2$ *halmazon, amelynek* $\mathcal{B}$ *bázisa. Ezt a topológiát* ***szorzattopológiá****nak hívjuk, a szorzattopológiával ellátott* $S_1 \times S_2$ *halmazt az adott topologikus terekből képzett* ***szorzattér****nek mondjuk.* $\square$

3.24. állítás. *Amennyiben* ρ *nyílt ekvivalenciareláció az* S *topologikus téren, úgy*

$$\rho = \{(a, b) \in S \times S \mid a\rho b\} \subset S \times S$$

akkor és csak akkor zárt halmaza az $S \times S$ *szorzattérnek, ha az* S/ρ *topologikus tér Hausdorff-tér.*

Bizonyítás.

(a) Tegyük föl, hogy S/ρ Hausdorff-tér! – Megmutatjuk, hogy ekkor $(S \times S) \setminus \rho$ nyílt halmaz, azaz (v.ö. 3.3.) minden egyes pontjának környezete. Legyen $(a, b) \in (S \times S) \setminus \rho$ tetszőleges! $(a, b) \notin \rho$ folytán ekkor $\pi(a) \neq \pi(b)$. Mivel S/ρ Hausdorff-tér, e pontoknak léteznek $U, V \subset S/\rho$ diszjunkt nyílt környezetei:

$$\pi(a) \in U, \quad \pi(b) \in V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Ha $\widetilde{U} := \pi^{-1}(U)$, $\widetilde{V} := \pi^{-1}(V)$, akkor $\widetilde{U}$ és $\widetilde{V}$ nyílt halmaza S-nek; ennélfogva $\widetilde{U} \times \widetilde{V}$ nyílt halmaza $S \times S$-nek és $(a, b) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}$. $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \cap \rho = \emptyset$, ellenkező esetben ugyanis volna olyan $(a', b') \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}$ pont, melyre $\pi(a') = \pi(b')$ teljesül, s ez azt jelentené, hogy $U \cap V \neq \emptyset$, ami ellentmondás.

Beláttuk tehát, hogy $(S \times S) \setminus \rho$ nyílt, s ezért ρ zárt halmaz.

(b) Tegyük föl – megfordítva –, hogy $\rho \subset S \times S$ zárt halmaz! Tekintsük S/ρ különböző $\pi(a)$ és $\pi(b)$ pontját! Ekkor $(a, b) \in (S \times S) \setminus \rho$, s mivel $(S \times S) \setminus \rho$ nyílt halmaz, (a, b)-nek van olyan $\widetilde{U} \times \widetilde{V} \subset S \times S$ nyílt környezete, hogy $(\widetilde{U} \times \widetilde{V}) \cap \rho = \emptyset$. Ha $U := \pi(\widetilde{U}), V := \pi(\widetilde{V})$, akkor – nyilvánvalóan – $U \cap V = \emptyset$. U és V nyílt halmaz, hiszen ρ nyílt ekvivalenciareláció, s ezért 3.22. miatt π nyílt leképezés. U és V ilymódon diszjunkt környezetei $\pi(a)$-nak és $\pi(b)$-nek, S/ρ tehát Hausdorff-tér. $\square$

3.25. példa. Vegyük alapul a szokásos topológiával (ld. 3.9.(b)) ellátott $\mathbb{R}$ topologikus teret! Legyen

$$\rho := \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a - b \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ρ *ekvivalenciareláció*; az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\rho$ kanonikus projekciót jelölje most is π.

(2) ρ *nyílt ekvivalenciareláció.* – Ennek igazolása végett jegyezzük meg először, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}: \quad \tau_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ a \mapsto a + n$$

(„transzláció n-nel") homeomorfizmus. Egyszerűen látható, hogy

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad &: \quad [a] = \pi(a) = \{\tau_n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ \forall A \subset \mathbb{R} \quad &: \quad [A] = \bigcup_{a \in A} [a] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau_n(A). \end{aligned}$$

Ha mármost $A \subset R$ nyílt halmaz, akkor $[A]$ – mint nyílt halmazok uniója – ugyancsak nyílt halmaz, tehát a ρ ekvivalenciareláció valóban nyílt.

(3) $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *zárt halmaz.* – Ez adódik abból, hogy az

$$f:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad (a,b) \mapsto a - b$$

függvény folytonos, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz, és $\rho = f^{-1}(\mathbb{Z})$. Így 3.24. értelmében az $\mathbb{R}/\rho$ topologikus tér Hausdorff-tér.

(4) $\mathbb{R}/\rho$ *összefüggő*, hiszen a $\pi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\rho$ kanonikus projekció folytonos szürjekció, és $\mathbb{R}$ összefüggő topologikus tér (3.17./(1),(2)).

(5) $\mathbb{R}/\rho$ *kompakt* topologikus tér. – Ez adódik például annak fölhasználásával, hogy $[0,1] \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, és $\forall\ [a] \in \mathbb{R}/\rho:\ \pi^{-1}([a]) \cap [0,1] \neq \emptyset$.

(6) Tekintsük az $S^1 := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1\}$ egységkört, ellátva az $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája által indukált topológiával. $\mathbb{R}/\rho$ *homeomorf* S^1*-gyel*:

$$\mathbb{R}/\rho \cong S^1$$

Ennek vázlatos indoklásaként gondoljuk meg a következőket: A

$$c:\ \mathbb{R} \to S^1\ , \quad t \mapsto c(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

leképezés folytonos szürjekció. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha
$(t,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, akkor

$$(\cos 2\pi t = \cos 2\pi s\ \wedge\ \sin 2\pi t = \sin 2\pi s) \iff \exists\, n \in \mathbb{Z}:\ t = s + n,$$

s ennélfogva

$$c(t) = c(s) \iff (t,s) \in \rho.$$

Ilymódon c konstans az ekvivalenciaosztályokon, és különböző ekvivalencia-osztályokon különböző értékeket vesz föl; c tehát természetes módon indukál egy

$$\bar{c}: \mathbb{R}/\rho \to S^1$$

folytonos bijekciót. További egyszerű meggondolásokkal igazolható, hogy $\bar{c}$ egyben homeomorfizmus.

3.26. állítás és definíció. *Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) teret, ellátva a szokásos topológiával. Legyen $\dot{\mathbb{R}}^{n+1} := \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, s ruházzuk föl ezt a halmazt az $\mathbb{R}^{n+1}$ topológiája által indukált topológiával. Vezessük be az $\dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ topologikus téren az*

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}: \ a = \lambda b$$

előírással értelmezett $\sim$ relációt! Ekkor $\sim$ ekvivalenciareláció, s ha

$$\mathbb{R}P^n := \dot{\mathbb{R}}^{n+1}/\sim,$$

*akkor $\mathbb{R}P^n$ a kvóciens topológiával Hausdorff-tér. – Az így konstruált topologikus teret n-**dimenziós (valós) projektív tér**nek nevezzük.*

Bizonyítás. Közvetlenül látható, hogy a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, így a 3.20-ban mondottak szerint $\mathbb{R}P^n$ valóban topologikus tér. Annak igazolásához, hogy $\mathbb{R}P^n$ Hausdorff-tér, 3.24-re tekintettel elegendő azt ellenőrizni, hogy a $\sim$ reláció nyílt, a $\sim\, \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \times \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ halmaz pedig – a szorzattopológiára nézve – zárt.

(1) Tetszőleges $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén tekintsük a

$$\varphi_t: \ \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \to \dot{\mathbb{R}}^{n+1}, \quad a \mapsto \varphi_t(a) := ta$$

leképezést! Világos, hogy ekkor φ_t folytonos, bijektív ($\varphi_t^{-1} = \varphi_{t^{-1}}$), és az inverze is folytonos; φ_t tehát homeomorfizmus. Mivel tetszőleges $U \subset \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$ nyílt halmaz esetén

$$[U] = \bigcup_{t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} \varphi_t(U),$$

$[U]$ nyílt halmazok uniója, tehát nyílt halmaz. – Ezzel beláttuk, hogy *a $\sim$ reláció nyílt.*

(2) Tekintsük az

$$f: \ \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \times \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$
$$\big((a^1, \dots, a^{n+1}), (b^1, \dots, b^{n+1})\big) \mapsto \sum_{i \neq j} (a^i b^j - a^j b^i)$$

függvényt! Ez nyilvánvalóan folytonos, és

$$f(a,b) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}: \ b = ta \quad \Longleftrightarrow \quad a \sim b;$$

így

$$\big\{(a,b) \in \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \times \dot{\mathbb{R}}^{n+1} \mid a \sim b\big\} = f^{-1}(0),$$

következésképpen $\sim$, mint a $\{0\} \subset \mathbb{R}$ zárt halmaz őselképe folytonos leképezésnél, *zárt* részhalmaza $\dot{\mathbb{R}}^{n+1} \times \dot{\mathbb{R}}^{n+1}$-nek. $\square$

4. Sokaságok

4.1. definíció. *Legyen n pozitív egész szám!*

*(a) Egy M topologikus teret n-**dimenziós topologikus sokaság**nak nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(1) M Hausdorff-tér.

(2) M topológiája megszámlálható bázisú.

(3) M minden pontjának van olyan nyílt környezete, amely homeomorf az $\mathbb{R}^n$ tér egy nyílt halmazával.

*(b) Tegyük föl, hogy M n-dimenziós topologikus sokaság! – M egy **térképé**n olyan (U, x) párt értünk, ahol $U \subset M$ összefüggő nyílt halmaz, x pedig homeomorfizmusa U-nak $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazára. Az U nyílt halmazt ekkor a térkép **tartomány**ának vagy a hozzátartozó **koordinátakörnyezet**nek hívjuk, az x leképezést **koordinátaleképezés**ként vagy **koordinátázás**ként említjük. Ha $p \in U$, azt is mondjuk, hogy (U, x) a p **pont körüli térkép**, x pedig p körüli koordinátázás. Az*

$$x^i := u^i \circ x \ : \ U \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

*függvényeket az (U, x) térképhez tartozó **koordinátafüggvények**nek, ezek $(x^i)_{i=1}^n$ családját **lokális koordinátarendszer**nek nevezzük. M térképeinek egy családját a topologikus sokaság egy **atlasz**ának mondjuk, ha a térképek tartományai lefedését alkotják M-nek.*

4.2. megjegyzések.

(a) A topologikus sokaságok definíciójában szereplő (1)-(3) feltételek függetlenek. Ebben az a legérdekesebb, hogy (3) és (2) nem vonja maga után (1) teljesülését, dacára annak, hogy $\mathbb{R}^n$ Hausdorff-tér. – Ez a jelenség meglehetősen egyszerű ellenpéldával illusztrálható.

(b) A definícióbeli (3) feltétel úgy fejezhető ki, hogy a topologikus sokaságok *lokálisan homeomorfak* az $\mathbb{R}^n$ térrel. Ebből közvetlenül adódik, hogy a topologikus sokaságok *lokálisan* rendelkeznek az $\mathbb{R}^n$ tér topológiai tulajdonságaival, így például

– lokálisan kompaktak,

– lokálisan összefüggők

(azaz minden pontjuknak van kompakt illetve összefüggő környezete). *Globálisan* távolról sem ez a helyzet, mint azt már az (a)-ban tett észrevétel is jelzi.

(c) Fölvetődhet a kérdés, hogy a topologikus sokaságok dimenziója jól definiált-e, vagyis előfordulhat-e, hogy egy n-dimenziós topologikus sokaság egyidejűleg m-dimenziós is, és $m \neq n$? Világos, hogy ez utóbbi akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ között az $n \neq m$ esetben is létezik homeomorfizmus. Egy nevezetes tétel, a *Brouwer-féle tartomány-invariancia tétel* (1911) biztosítja, hogy ilyen homeomorfizmus nem létezik; Brouwer tételének bizonyítása azonban igen nehéz[1].

(d) Egy $x: \ U \subset M \to \mathbb{R}^n$ koordinátázás és a hozzátartozó $(x^i)_{i=1}^n$ lokális koordinátarendszer az I.1.4-ben mondottak mintájára azonosítható, így

$$x = (x^1, \ldots, x^n) = (x^i)_{i=1}^n$$

írható. Ezzel a lehetőséggel gyakran fogunk élni.

4.3. példák.

(a) Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ nyílt halmaz, ellátva a relatív topológiával. Ekkor M n-dimenziós topologikus sokaság. – Valóban, a definícióbeli (1) és (2) feltétel teljesülése automatikusan adódik, ezek a topológiai tulajdonságok ugyanis öröklődőek. Az

$$i: \quad M \to \mathbb{R}^n \ , \quad p \mapsto i(p) := p$$

„bemásoló leképezés” homeomorfizmusa M-nek az $M \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra, így a (3) feltétel is teljesül. Speciális esetként kapjuk, hogy maga $\mathbb{R}^n$ ugyancsak n-dimenziós topologikus sokaság. – Megjegyzendő, hogy fogalmi egyszerűségük dacára az így előálló topologikus sokaságok geometriailag rendkívül komplikáltak is lehetnek – részben erről szól a differenciálgeometria.

(b) A legegyszerűbb példákat olyan sokaságra, amely nem homeomorf $\mathbb{R}^2$, illetve $\mathbb{R}^3$ egy nyílt halmazával, az

$$S^1 := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ egységkör },$$

illetve az

$$S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ egységgömb}$$

[1] *L.E.J. Brouwer* (1881 - 1966) holland matematikus, topológiai eredményei mellett az intuicionista logika egyik úttörőjeként vált híressé.

jelentik. Mind S^1-et, mind pedig S^2-t a relatív topológiával látjuk el, ekkor 4.1./(1),(2) teljesül. S^2 esetén vázoljuk, hogy miként adható meg lokális homeomorfizmus tetszőleges $p \in S^2$ pont egy nyílt környezete és $\mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaza között. – Legyen

$$N_p := (p, \frac{1}{\|p\|}p) \in T_p\mathbb{R}^3.$$

(Ekkor $\|N_p\| := \|\frac{1}{\|p\|}p\| = 1$.) N_p nem lehet ortogonális az $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$ vektorok mindegyikére; tegyük föl, hogy például $\langle N_p, (e_2)_p \rangle \neq 0$. Ekkor p-nek megadható olyan $U \subset S^2$ nyílt környezete, hogy a

$$q \in U \mapsto (u^1(q), 0, u^3(q)) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$$

leképezés („merőleges vetítés az e_2 normálvektorú koordinátasíkra") homeomorfizmus U és egy $V \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz között. (Arra a kérdésre, hogy miként konstruálható atlasz S^2 számára, még visszatérünk.) – Megjegyezzük végül, hogy S^1 nem lehet homeomorf $\mathbb{R}$-rel, S^2 pedig $\mathbb{R}^2$-vel, mivel S^1 és S^2 kompakt tér, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^2$ viszont nem kompakt.

4.4. állítás. *Ha egy topologikus sokaság összefüggő, akkor ívszerűen összefüggő.*

Bizonyítás. Tekintsük az M n-dimenziós topologikus sokaságot, s tegyük föl, hogy M összefüggő! Tetszőleges $p \in M$ pont esetén legyen

$$E_p := \{q \in M \mid q \text{ ívvel összeköthető } p\text{-vel }\}.$$

3.15. értelmében egy topologikus térben az ívvel való összeköthetőség ekvivalenciareláció; E_p éppen a p pont ekvivalenciaosztálya. Így

$$M = \bigcup_{p \in M} E_p \; ; \; E_p \cap E_q = \begin{cases} \emptyset & , \text{ha} \quad p \not\sim q \\ E_p & , \text{ha} \quad p \sim q \end{cases}$$

(alkalmazva a relációra a 3.15-ben bevezetett jelölést). Belátjuk, hogy $\forall\, p \in M : \; E_p \subset M$ nyílt halmaz. – Tekintsünk egy tetszőleges $q \in E_p$ pontot, s válasszunk egy olyan (U, x) térképet q körül, amelyre $x(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$ és $x(U) =: B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt gömb. (Egyszerűen átgondolható, hogy ilyen térkép létezik.) Legyen $a \in U$ tetszőleges! Mivel B ívszerűen összefüggő, sőt konvex halmaz, van olyan

$$\gamma : \; [0,1] \to B$$

parametrizált egyenesszakasz, amely az $x(a)$ pontot összeköti $x(q)$-val, vagyis amelyre

$$\gamma(0) = x(a) \; , \; \gamma(1) = x(q)$$

teljesül. Ha mármost

$$c := x^{-1} \circ \gamma,$$

akkor $c:\ [0,1] \to M$ M-beli pálya (hiszen folytonos leképezések kompozíciója), és az a pontot összeköti a q ponttal:

$$\begin{aligned} c(0) &= x^{-1}[\gamma(0)] = x^{-1}(x(a)) = a, \\ c(1) &= x^{-1}[\gamma(1)] = x^{-1}(x(q)) = q. \end{aligned}$$

Mivel $q \in E_p$, q a p ponttal ívvel összeköthető; következésképpen az a pontra is teljesül, hogy p-vel ív segítségével összeköthető. Ez azt jelenti, hogy $a \in E_p$, s így – a tetszőlegessége folytán – $U \subset E_p$. Beláttuk ilymódon, hogy E_p minden egyes pontját annak egy környezetével együtt tartalmazza, E_p tehát valóban nyílt halmaz. Ekkor azonban az

$$M = \bigcup_{p \in M} E_p$$

előállításban szereplő halmazok páronként diszjunkt nyílt halmazok, amiből M összefüggősége alapján adódik, hogy közülük pontosan egy nemüres. Megállapíthatjuk: az ívvel való összeköthetőség relációjának most csupán egyetlen ekvivalenciaosztálya van, s ezért M bármely két pontja ívvel összeköthető. □

4.5. definíció. *Legyen M n-dimenziós topologikus sokaság, $k \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$.*

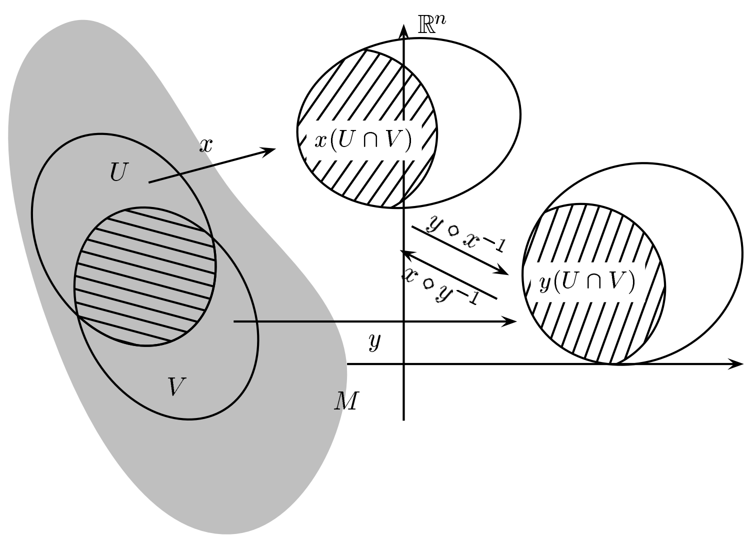
*(a) M (U,x) és (V,y) térképét C^k-**kompatibilis**nek nevezzük, ha az*

$$y \circ x^{-1}: \quad x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

és

$$x \circ y^{-1}: \quad y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

*homeomorfizmusok – az ún. **átmenetleképezések** – C^k-osztályúak az $\mathbb{R}^n$ tér szóbanforgó nyílt halmazai között, vagy ha $U \cap V = \emptyset$.*



(b) *M egy atlaszát C^k**-osztályú**nak mondjuk, ha bármely két hozzátartozó térkép C^k-kompatibilis. M-en adott C^k-osztályú **differenciálható struktúrán** olyan $\mathcal{A}$ C^k-osztályú atlaszt értünk, amely **maximális** a következő értelemben:*

> *ha (U, x) térkép M-en és C^k-kompatibilis $\mathcal{A}$ minden tagjával, akkor $(U, x) \in \mathcal{A}$.*

*Ha $\mathcal{A}$ C^k-osztályú differenciálható struktúra M-en, akkor az $(M, \mathcal{A})$ párt – illetve többnyire csak M-et – C^k**-osztályú differenciálható sokaság**nak nevezzük. A C^∞-osztályú sokaságokat **sima sokaságok**ként – illetve a továbbiakban egyszerűen **sokaságok**ként – említjük.*

4.6. megjegyzések.

(a) Egyszerűen belátható, hogy egy topologikus sokaságon minden C^k-osztályú atlasz egyértelműen meghatároz egy, azt tartalmazó differenciálható struktúrát. Így egy differenciálható struktúra megadásához elegendő egyetlen – akár minimális tagszámú – C^k-osztályú atlaszt kijelölni.

(b) Léteznek olyan topologikus sokaságok, amelyek semmiféle differenciálható struktúrával nem láthatók el. Ilyen topologikus sokaságra elsőként M. Kervaire adott példát (*Comm. Math. Helv.* **34** (1960), 257-270).

(c) H. Whitney 1935-ben megmutatta, hogy ha egy topologikus sokaságnak van C^1-osztályú atlasza, akkor van C^∞-osztályú atlasza is (*Ann. of Math.* **37** (1960), 645-680). Ilyen értelemben a C^∞-osztályú differenciálható sokaságokra való korlátozódás nem jelenti az általánosság lényeges sérelmét.

4.7. lemma és definíció. *Legyen M sokaság, amelynek differenciálható struktúráját az $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ atlasz származtatja, s tegyük föl, hogy $U \subset M$ nemüres nyílt halmaz. Lássuk el U-t az M topológiája által indukált relatív topológiával, s legyen*

$$\mathcal{A}_U := (U \cap U_\alpha,\ x_\alpha \restriction U \cap U_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

*Ekkor $\mathcal{A}_U$ (C^∞-osztályú) atlasza U-nak, s így differenciálható struktúrát határoz meg azon. A kapott $(U, \mathcal{A}_U)$ – röviden U – sokaságról azt mondjuk, hogy **nyílt részsokaság**a M-nek.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathcal{A}_U$ valamennyi tagja térkép U-n, és hogy $(U \cap U_\alpha)_{\alpha \in A}$ lefedése U-nak, $\mathcal{A}_U$ tehát atlasza U-nak. $\mathcal{A}_U$ bármely tagja kompatibilis (C^∞-értelemben) az $\mathcal{A}$ atlasz bármely tagjával, így hozzátartozik az $\mathcal{A}$ által definiált differenciálható struktúrához. Ebből következik, hogy – speciálisan – $\mathcal{A}_U$ bármely két tagja is C^∞-kompatibilis. Ilymódon $\mathcal{A}_U$ C^∞-osztályú atlasza U-nak, s mint ilyen, a 4.6.(a)-ban mondottaknak megfelelően differenciálható struktúrát határoz meg U-n. $\square$

4.8. lemma és definíció. *Legyen M_1 és M_2 n_1-, illetve n_2-dimenziós sokaság, melyeknek differenciálható struktúráját az*

$$\mathcal{A}_1 = (U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}, \text{ illetve } \mathcal{A}_2 = (V_\beta, y_\beta)_{\beta\in B}$$

atlasz származtatja. Lássuk el az $M_1 \times M_2$ Descartes-szorzatot a szorzattopológiával (3.23.)! Ekkor $M_1 \times M_2$ megszámlálható bázisú Hausdorff-tér, amelynek számára atlasz az

$$\mathcal{A} = \ (U_\alpha \times V_\beta\ ,\ x_\alpha \times y_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$$

család, ahol

$$x_\alpha \times y_\beta :\ (p,q) \in U_\alpha \times V_\beta \mapsto (x_\alpha(p), y_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \cong \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

Így $M_1 \times M_2$ $(n_1 + n_2)$-dimenziós sokasággá válik, ezt a sokaságot M_1 és M_2 ***szorzatsokaság****ának nevezzük. – Több (de véges sok) sokaság szorzatsokaságának konstrukciója analóg.* □

4.9. példa.

(a) $\mathbb{R}^n$ ***mint sokaság*** $(n \in \mathbb{N}^+)$
Tekintsük az

$$1_{\mathbb{R}^n} = (u^1, \dots, u^n) := (u^i)_{i=1}^n$$

kanonikus koordinátarendszert! $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ térkép, sőt egytagú atlasz $\mathbb{R}^n$ számára, így a 4.6.(a)-ban mondottaknak megfelelően egyértelműen meghatároz egy differenciálható struktúrát, amelyet $\mathbb{R}^n$ *természetes differenciálható struktúrája*ként említünk. – A továbbiakban az $\mathbb{R}^n$ teret a szóbanforgó differenciálható struktúrával ellátott sokaságnak (is) tekintjük.

(b) ***Körvonal.*** 4.3.(b)-ben már jeleztük, hogy

$$S^1 := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

a relatív topológiával ellátva 1-dimenziós topologikus sokaság. Most kétféleképpen is C^∞-atlaszt – s ezáltal differenciálható struktúrát – adunk meg S^1 számára.

(1) ***Lefedés félkörökkel.*** Legyen

$$U_1 := \{a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \mid \alpha^2 > 0\},\ V_1 := \{a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \mid \alpha^2 < 0\},$$

$$U_2 := \{a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \mid \alpha^1 > 0\},\ V_2 := \{a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \mid \alpha^1 < 0\}!$$

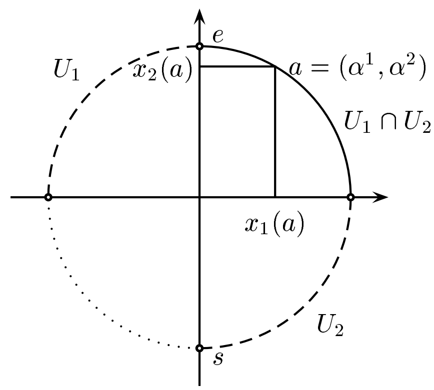
Közvetlenül látható, hogy e halmazok nyílt lefedését alkotják S^1-nek. Tekintsük az

$$\begin{aligned}
x_1 &: U_1 \to\ ]-1,1[\ ,\ (\alpha^1,\alpha^2) \mapsto x_1(\alpha^1,\alpha^2) := \alpha^1,\\
x_2 &: U_2 \to\ ]-1,1[\ ,\ (\alpha^1,\alpha^2) \mapsto x_2(\alpha^1,\alpha^2) := \alpha^2,\\
y_1 &: V_1 \to\ ]-1,1[\ ,\ (\alpha^1,\alpha^2) \mapsto y_1(\alpha^1,\alpha^2) := \alpha^1,\\
y_2 &: V_2 \to\ ]-1,1[\ ,\ (\alpha^1,\alpha^2) \mapsto y_2(\alpha^1,\alpha^2) := \alpha^2
\end{aligned}$$

leképezéseket! Ezek nyilvánvalóan homeomorfizmusok; belátjuk, hogy

$$\mathcal{A} = ((U_i, x_i), (V_i, y_i))_{i=1}^2$$

C^∞-osztályú atlasza S^1-nek.



Csupán az átmenetleképezések simaságát kell ellenőriznünk.

$$U_1 \cap U_2 = \{a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \mid \alpha^1 > 0 \text{ és } \alpha^2 > 0\},$$

így

$$x_1(U_1 \cap U_2) \ = \ x_2(U_1 \cap U_2) \ =]0,1[.$$

$$\begin{aligned} \forall\, t \in]0,1[: \quad x_2 \circ x_1^{-1}(t) \quad &= \quad x_2(t, \sqrt{1-t^2}) = \sqrt{1-t^2}, \\ x_1 \circ x_2^{-1}(t) \quad &= \quad x_1(\sqrt{1-t^2}, t) = \sqrt{1-t^2}; \end{aligned}$$

s a kapott formulákból kiolvasható, hogy mind az $x_2 \circ x_1^{-1}$, mind az $x_1 \circ x_2^{-1}$ függvény sima leképezése $]0,1[$-nek $]0,1[$-re. Hasonlóan mutatható meg, hogy a többi átmenetleképezés is sima. $\mathcal{A}$ tehát valóban C^∞-osztályú atlasza S^1-nek, s így azt sima sokasággá teszi (4.6.(a)).

(2) ***Sztereografikus atlasz.*** Legyen

$$e := (0,1)\ , \quad s := (0,-1),$$

s tekintsük a

$$p_e: \ S^1 \backslash \{e\} \to \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\}\ , \quad a \mapsto p_e(a) := \overleftrightarrow{ea} \bigcap \mathcal{L}(e_1)$$

és a

$$p_s: \ S^1 \backslash \{s\} \to \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\}, \quad a \mapsto p_s(a) := \overleftrightarrow{sa} \bigcap \mathcal{L}(e_1)$$

$\big(\overleftrightarrow{ea} := e + \mathcal{L}(a-e), \overleftrightarrow{sa} := s + \mathcal{L}(a-s)\big)$ leképezést! Ekkor

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}: \quad p_e(a) = e + \lambda(a-e).$$

$p_e(a) \in \mathcal{L}(e_1)$ folytán $u^2(p_e(a)) = 0$. Így

$$0 = u^2(e + \lambda(a - e)) = u^2(e) + \lambda u^2(a - e) = 1 + \lambda(\alpha^2 - 1),$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

adódik ($\alpha^2 \neq 1$, hiszen $a \neq e$). λ ismeretében

$$p_e(a) = e + \frac{1}{1 - \alpha^2}(a - e) = (0, 1) + \frac{1}{1 - \alpha^2}(\alpha^1, \alpha^2 - 1) = (\frac{\alpha^1}{1 - \alpha^2}, 0),$$

amiből világos, hogy az

$$a \in S^1 \backslash \{e\} \mapsto p_e(a) \in \mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R}$$

leképezés folytonos. Analóg számolással kapjuk, hogy tetszőleges $a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \backslash \{s\}$ esetén

$$p_s(a) = (\frac{\alpha^1}{1 + \alpha^2}, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R},$$

tehát a p_s leképezés szintén folytonos.

Megmutatjuk, hogy p_e invertálható. – Legyen $b = (\beta, 0) \quad \mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R}$ tetszőleges pontja! Ha $a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \backslash \{e\}$, akkor

$$\begin{aligned} p_e(a) = b \quad &\Longleftrightarrow \quad (\frac{\alpha^1}{1 - \alpha^2}, 0) = (\beta, 0) \Longleftrightarrow \beta = \frac{\alpha^1}{1 - \alpha^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\beta)^2(1 - \alpha^2)^2 = 1 - (\alpha^2)^2 \Longleftrightarrow (\beta)^2(1 - \alpha^2) = 1 + \alpha^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha^2 = \frac{(\beta)^2 - 1}{(\beta)^2 + 1}; \end{aligned}$$

ebben az esetben $\alpha^1 = \frac{2\beta}{(\beta)^2 + 1}$. Következik ilymódon, hogy

$$\forall\ b = (\beta, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} : \quad \exists!\ a = (\alpha^1, \alpha^2) \in S^1 \backslash \{e\} : \quad p_e(a) = b.$$

Ez azt jelenti, hogy p_e invertálható, és inverze a

$$(\beta, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \mapsto (\frac{2\beta}{(\beta)^2 + 1}, \frac{(\beta)^2 - 1}{(\beta)^2 + 1}) \in S^1 \backslash \{e\}$$

leképezés. Hasonló módon, p_s szintén invertálható; inverze a

$$(\beta, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \mapsto (\frac{2\beta}{(\beta)^2 + 1}, \frac{1 - (\beta)^2}{(\beta)^2 + 1}) \in S^1 \backslash \{s\}$$

leképezés. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$p_e : \ S^1 \backslash \{e\} \to \mathbb{R} \text{ és } p_s : \ S^1 \backslash \{s\} \to \mathbb{R}$$

homeomorfizmus. $(S^1 \backslash \{e\}\ ,\ S^1 \backslash \{s\})$ nyilvánvalóan nyílt lefedése S^1-nek. Mivel

$$\forall\ (\beta, 0) \in (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \times \{0\}:$$
$$\begin{aligned} p_s \circ p_e^{-1}(\beta, 0) &= p_s\left(\frac{2\beta}{(\beta)^2+1}, \frac{(\beta)^2-1}{(\beta)^2+1}\right) = \\ &= \left(\frac{2\beta}{(\beta)^2+1} \frac{1}{1+\frac{(\beta)^2-1}{(\beta)^2+1}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\beta}, 0\right); \end{aligned}$$

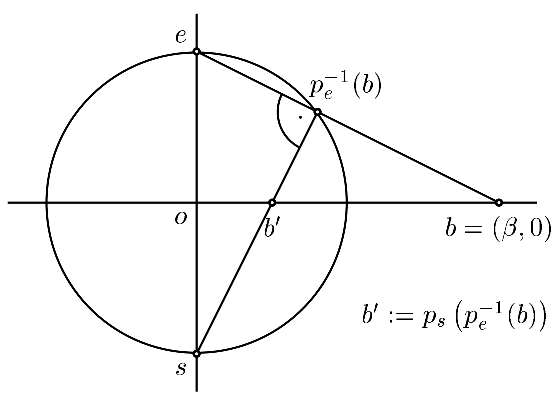
kapjuk, hogy a

$$p_s \circ p_e^{-1}: \quad \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

átmenetfüggvény – éppúgy, mint $p_e \circ p_s^{-1}$ - sima. Beláttuk ezzel, hogy

$$((S^1 \backslash \{e\}, p_e)\ ,\ (S^1 \backslash \{s\}, p_s))$$

C^∞-osztályú atlasza S^1-nek. További egyszerű számolással megmutatható, hogy S^1 most megkonstruált atlasza ugyanazt a differenciálható struktúrát származtatja, mint az (1)-ben leírt atlasz. – Érdemes megjegyeznünk, hogy a $p_s \circ p_e^{-1}$ (és a $p_e \circ p_s^{-1}$) átmenetleképezés geometriai tartalommal bír: az S^1 körvonalra vonatkozó ***inverzió***t[2] jelent. – Valóban, elemi geometriai meggondolásokkal adódik, hogy – az ábra jelöléseivel –



$$ob's\triangle \sim oeb\triangle \quad \Longrightarrow \quad \frac{\|b'\|}{\|s\|} = \frac{\|e\|}{\|b\|} \quad \Longrightarrow \quad \|b'\| = \frac{1}{\|b\|}$$

Egyszerűen látható továbbá, hogy b' b-nek pozitív skalárszorosa, azaz

$$b' = \lambda b\ (\lambda \in \mathbb{R}^+) \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{\|b'\|}{\|b\|} = \frac{1}{\|b\|^2}\ ,\ b' = \frac{1}{\|b\|^2} b.$$

[2] Az inverziók általános értelmezésével és elemi tulajdonságaival III.9.14.(b)-ben foglalkozunk.

Koordinátákra áttérve:

$$b' = \frac{1}{(\beta)^2}(\beta, 0) = (\frac{1}{\beta}, 0).$$

Ismeretes mármost, hogy az S^1-re vonatkozó inverziót éppen a kapott

$$b \mapsto \frac{1}{\|b\|^2} b \qquad (b \neq 0)$$

formula írja le.

(c) n***-dimenziós tórusz.*** Legyen $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$,

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \text{ } (n \text{ tényező}).$$

Mivel S^1 a (b)-ben mondottak szerint 1-dimenziós (sima) sokaság, 4.8-ból adódóan T^n n-dimenziós sokaság, amelyet n***-dimenziós tórusz***nak nevezünk.

(d) n***-dimenziós gömbfelület.*** – Vegyük alapul az $\mathbb{R}^{n+1}$ teret ($n \in \mathbb{N}^+$), s az eddigieknek megfelelően jelölje ennek kanonikus koordinátarendszerét $(u^i)_{i=1}^{n+1}$! $\mathbb{R}^{n+1}$ n-dimenziós gömbfelülete

$$S^n := \{a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|a\| = 1\};$$

ez a relatív topológiával ellátva megszámlálható bázisú Hausdorff-tér. Követve (némi módosítással) a körvonal esetén alkalmazott gondolatmenetet, két eljárást vázolunk atlasz kijelölésére S^n-en.

(1) ***Lefedés félgömbökkel.*** – Legyen

$$\begin{aligned} U_i &:= \{a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n+1}) \in S^n \mid \alpha^i = u^i(a) > 0\}, \\ V_i &:= \{a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{n+1}) \in S^n \mid \alpha^i = u^i(a) < 0\} \end{aligned}$$

$$(1 \leq i \leq n+1).$$

Ekkor $U_i, V_i \subset S^n$ nyílt halmazok, és

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \cup V_i = S^n.$$

Tekintsük az

$$x_i : \ a \in U_i \mapsto x_i(a) := (u^1(a), \ldots, \widehat{u^i(a)}, \ldots, u^{n+1}(a)) \in \mathbb{R}^n$$

és az

$$y_i : \ a \in V_i \mapsto y_i(a) := (u^1(a), \ldots, \widehat{u^i(a)}, \ldots, u^{n+1}(a)) \in \mathbb{R}^n$$

leképezéseket, ahol a $\widehat{\ }$ szimbólum azt jelenti, hogy az alatta levő tag törlendő. Jelölje B^n az $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ gömbfelület belsejét, azaz legyen

$$B^n := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| < 1\}.$$

Világos, hogy

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n+1\} : \quad x_i : U_i \to B^n \ , \ y_i : U_i \to B^n$$

homeomorfizmus, S^n tehát n-dimenziós topologikus sokaság.
$\mathcal{A} = ((U_i, x_i), (V_i, y_i))_{i=1}^{n+1}$ C^∞-osztályú atlasza S^n-nek, a (b)-ben elvégzetthez hasonló, egyszerű számolással ellenőrizhető ugyanis a térképek C^∞-kompatibilitásának teljesülése.

(2) ***Sztereografikus atlasz.*** Tekintsük most is az

$$e := (0, \dots, 0, 1) \in S^n, \text{ illetve az } s = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$$

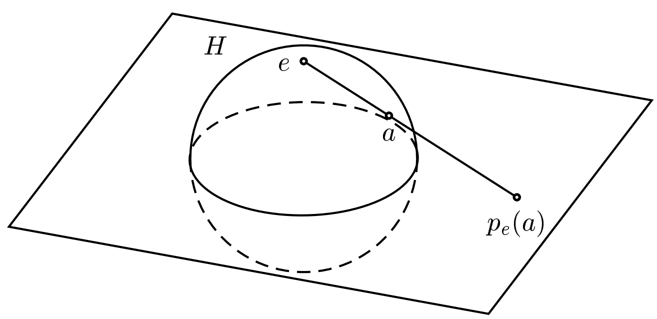
északi, illetve déli pólust, valamint a

$$H := \mathbb{R}^n \times \{0\} = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u^{n+1}(a) = 0\}$$

„egyenlítő hipersík"-ot! Az $\mathbb{R}^n$ tér az

$$(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\alpha^1, \dots, \alpha^n, 0) \in H$$

leképezés révén természetes módon azonosítható H-val, S^n egy atlaszának most következő megkonstruálásánál ezzel az azonosítási lehetőséggel élni fogunk.



Értelmezzük az északi pólusból való sztereografikus projekciót a

$$p_e : S^n \setminus \{e\} \to H \ , \quad a \mapsto p_e(a) := \overleftrightarrow{ea} \cap H$$

leképezésként! Ekkor

$$\begin{cases} p_e(a) = e + \lambda(a - e) & , \lambda \in \mathbb{R} \ ; \\ u^{n+1}(p_e(a)) = 0 & . \end{cases}$$

u^{n+1} linearitása folytán itt

$$u^{n+1}(p_e(a)) = u^{n+1}(e) + \lambda(u^{n+1}(a) - u^{n+1}(e)) = 1 + \lambda(\alpha^{n+1} - 1),$$

így a második összefüggés értelmében

$$\lambda(\alpha^{n+1} - 1) + 1 = 0,$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{1}{1 - \alpha^{n+1}}$$

$(a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \alpha^{n+1})\ ;\ \alpha^{n+1} \neq 1$, mert $a \neq e)$. Ennek alapján

$$\begin{aligned} p_e(a) &= \frac{1}{1 - \alpha^{n+1}}(a - e) + e = \frac{1}{1 - \alpha^{n+1}}(a - \alpha^{n+1} e) = \\ &= (\frac{\alpha^1}{1 - \alpha^{n+1}}, \cdots, \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^{n+1}}, 0), \end{aligned}$$

amiből kiolvasható, hogy p_e folytonos. – Belátjuk, hogy p_e invertálható, nevezetesen

$$\forall\ b = (\beta^1, \ldots, \beta^n, 0) \in H : \quad \exists! a \in S^n \backslash \{e\} : \quad p_e(a) = b. \qquad (*)$$

A mondottak szerint $(*)$ teljesüléséhez olyan $a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n, \alpha^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ egyértelmű létezését kell megmutatnunk, amelyre (b megadása után)

$$\begin{cases} \beta^i = \dfrac{\alpha^i}{1 - \alpha^{n+1}} & (1 \leqq i \leqq n); \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha^i)^2 + (\alpha^{n+1})^2 = 1 \end{cases}$$

teljesül. Az első összefüggésből

$$(1 - \alpha^{n+1})^2 (\beta^i)^2 = (\alpha^i)^2,$$

illetve összegzés után

$$(1 - \alpha^{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n} (\beta^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha^i)^2$$

adódik. Itt a második összefüggés szerint

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha^i)^2 = 1 - (\alpha^{n+1})^2,$$

tehát

$$(1 - \alpha^{n+1})^2 \sum_{i=1}^{n} (\beta^i)^2 = 1 - (\alpha^{n+1})^2,$$

azaz

$$(1-\alpha^{n+1})^2\|b\|^2 = 1-(\alpha^{n+1})^2.$$

Innen

$$(1-\alpha^{n+1})\|b\|^2 = 1+\alpha^{n+1},$$

$$\begin{aligned}\|b\|^2 - 1 &= \alpha^{n+1}(\|b\|^2+1),\\ \alpha^{n+1} &= \frac{\|b\|^2-1}{\|b\|^2+1}.\end{aligned}$$

α^{n+1} meghatározása után a keresett többi koordinátát közvetlenül kapjuk:

$$\alpha^i = \frac{2}{\|b\|^2+1}\beta^i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Létezik tehát olyan $a \in S^n\backslash\{e\}$ pont, hogy $p_e(a) = b$. a egyértelműsége adódik abból, hogy p_e a konstrukcióból kiolvashatóan injektív. Meggondolásunk egyben elvezetett p_e inverzének explicit előállításához; ez a

$$b \in H \mapsto p_e^{-1}(b) = \frac{2}{\|b\|^2+1}b + \frac{\|b\|^2-1}{\|b\|^2+1}e$$

formula szerint hat. Innen kiolvasható, hogy p_e^{-1} szintén folytonos, következésképpen p_e homeomorfizmus $S^n\backslash\{e\}$ és $H \cong \mathbb{R}^n$ között. Így $(S^n\backslash\{e\}, p_e)$ térképe S^n-nek. Analóg módon konstruálható meg és írható le a déli pólusból történő $p_s : S^n\backslash\{s\} \to H$ sztereografikus projekció, amely további, $(S^n\backslash\{s\}, p_s)$ térképhez vezet. A két térkép közötti átmenetleképezések simák, közvetlen számolással ellenőrizhető ugyanis, hogy – miként a körvonal esetén –

$$p_s \circ p_e^{-1} : \quad b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \mapsto \frac{1}{\|b\|^2}b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Így $((S^n\backslash\{e\}, p_e), (S^n\backslash\{s\}, p_s))$ C^∞-osztályú atlasza S^n-nek, s mint ilyen, egyértelműen meghatároz egy differenciálható struktúrát.
Megmutatható, hogy a most nyert differenciálható struktúra megegyezik az (1)-ben konstruálttal; speciálisan a körvonal esetén (b)-ben konstruált két atlasz is ugyanazt a differenciálható struktúrát származtatja.

(e) ***Az $\mathbb{R}P^n$ valós projektív tér.*** 3.26-ban leírtuk $\mathbb{R}P^n$-et, mint Hausdorff-féle topologikus teret. Most megadunk $\mathbb{R}P^n$ számára egy C^∞-osztályú atlaszt, s ezáltal n-dimenziós sokasággá tesszük. – Vegyük alapul $\mathbb{R}^{n+1}$ $(u_i)_{i=1}^{n+1}$ kanonikus koordinátarendszerét, s tekintsük a

$$\pi : \ \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}P^n \ , \quad a \mapsto [a] := \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$$

kanonikus projekciót! Legyen

$$\widetilde{U}_i := \{a \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \mid u^i(a) \neq 0\}, \quad U_i := \pi(\widetilde{U}_i) \subset \mathbb{R}P^n \qquad (1 \leqq i \leqq n+1)!$$

Ekkor az $\widetilde{U}_i$ halmazok nyilván nem összefüggőek, hiszen képzésükkor $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$-ból eltávolítottunk egy hipersíkot. Az U_i halmazok azonban már összefüggőek, ugyanis $U_i = \pi(\widetilde{U}_i) = \pi(\widetilde{U}_i^+)$, ahol

$$\widetilde{U}_i^+ := \{a \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \mid u^i(a) > 0\};$$

tekintettel $\mathbb{R}P^n$ és a π projekció értelmezésére. Vezessük be az

$$\tilde{x}_i : \quad \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n \ , \quad a \mapsto \tilde{x}_i(a) := (\frac{\alpha^1}{\alpha^i}, \cdots, \frac{\widehat{\alpha}^i}{\alpha^i}, \cdots, \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^i})$$

leképezéseket, ahol $\alpha^j := u^j(a) \quad (1 \leqq j \leqq n+1)$ és a $\widehat{\ }$ szimbólum jelentése ugyanaz, mint (d)/(1)-ben. E leképezések mindegyike folytonos, és egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$\tilde{x}_i(a) = \tilde{x}_i(b) \quad (1 \leqq i \leqq n+1) \quad \Longleftrightarrow \quad a \sim b.$$

Ennek alapján közvetlenül adódik, hogy az

$$x_i : \quad U_i \to \mathbb{R}^n, \pi(a) \mapsto x_i(\pi(a)) := \tilde{x}_i(a) \quad (1 \leqq i \leqq n+1)$$

leképezések jól definiált, bijektív, folytonos leképezések; explicite

$$x_i(\pi(a)) = (\frac{\alpha^1}{\alpha^i}, \cdots, \frac{\widehat{\alpha}^i}{\alpha^i}, \cdots, \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^i}).$$

Tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ esetén x_i inverze megadható az

$$\begin{tikzcd}
 & (\alpha^1, \ldots, \alpha^{i-1}, 1, \alpha^{i+1}, \ldots \alpha^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, mapsto] \\
(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto, dashed] & \pi(\alpha^1, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, \alpha^{n+1}) \in \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

diagram segítségével értelmezett kompozícióként, amiből világos, hogy x_i^{-1} szintén folytonos. Így az x_i leképezések mindegyike homeomorfizmus, (U_i, x_i) tehát térképe $\mathbb{R}P^n$-nek $(1 \leqq i \leqq n+1)$. A konstrukció alapján közvetlenül adódik, hogy $(U_i)_{i=1}^{n+1}$ lefedése $\mathbb{R}P^n$-nek. Az

$$\begin{tikzcd}
a = (\alpha^1, \ldots, \widehat{\alpha}^i, \ldots, \alpha^{n+1}) \in x_i(U_i \cap U_j) \arrow[r, mapsto, "x_i^{-1}"] \arrow[dr, mapsto, dashed, "x_j \circ x_i^{-1}"'] & \pi(\alpha^1, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, \alpha^{n+1}) \arrow[d, mapsto, "x_j"] \\
 & (\frac{\alpha^1}{\alpha^j}, \cdots, \overset{i}{\frac{1}{\alpha^j}}, \cdots, \widehat{\frac{\alpha^j}{\alpha^j}}, \cdots, \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^j}) \in x_j(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

diagramból kiolvasható, hogy az átmenetleképezések simák, ilymódon $(U_i, x_i)_{i=1}^{n+1}$ atlasza $\mathbb{R}P^n$-nek, s így azt sokasággá teszi.

(f) ***A*** $GL(n,\mathbb{R})$ ***csoport.*** Legyen

$$GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Mivel

$$A, B \in GL(n,\mathbb{R}) \Longrightarrow AB \in GL(n,\mathbb{R}), \quad A \in GL(n,\mathbb{R}) \Longrightarrow A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R});$$

$GL(n,\mathbb{R})$ valóban csoport a mátrixszorzás műveletével. Ez – mint halmaz – az

$$A = (a^i_j) \in GL(n,\mathbb{R}) \mapsto (a^1_1, a^1_2, \ldots, a^1_n, \ldots, a^n_1, \ldots, a^n_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

„természetes” leképezés révén $\mathbb{R}^{n^2}$ egy részhalmazával azonosítható. A

$$\mathcal{K} := \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A = 0\right\} = \det^{-1}(0)$$

halmaz zárt halmaza $\mathbb{R}^{n^2}$-nek, mivel az egyelemű, s ennélfogva zárt $\{0\} \subset \mathbb{R}$ halmaz ősképe a

$$\det : \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$$

folytonos leképezésnél. Azonban

$$GL(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \backslash \mathcal{K},$$

s így a mondottak értelmében $GL(n,\mathbb{R})$ (nemüres) nyílt halmaza $\mathbb{R}^{n^2}$-nek. Alkalmazható tehát 4.7., amelynek alapján megállapíthatjuk, hogy $GL(n,\mathbb{R})$, mint $\mathbb{R}^{n^2}$ nyílt részsokasága, differenciálható sokaság.

4.10. definíció. *Egy n-dimenziós sokaságot **irányítható**nak nevezünk, ha van olyan – a sokaság differenciálható struktúrájához tartozó – $\mathcal{A}$ atlasza, amelyre teljesül, hogy az átmenetleképezések deriváltjai értelmezési tartományuk minden pontjában pozitív determinánsúak, vagyis*

$$(U,x), (V,y) \in \mathcal{A}\ ,\ U \cap V \neq \emptyset \text{ esetén}$$
$$\forall\ a \in x(U \cap V) : \quad \det((y \circ x^{-1})'(a)) > 0,$$

azaz

$$\forall\ a \in x(U \cap V) : \quad (y \circ x^{-1})'(a) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

irányítástartó lineáris transzformáció.

4.11. állítás. *Ha egy sokaságnak van olyan kéttagú atlasza, amelynél a koordinátakörnyezetek metszete összefüggő, akkor a sokaság irányítható.*

Bizonyítás. Legyen M n-dimenziós sokaság, s tegyük föl, hogy $((U,x),(V,y))$ kéttagú atlasza M-nek. Ha $U \cap V = \emptyset$, akkor nincs mit bizonyítani, elegendő ezért az $U \cap V \neq \emptyset$ esettel foglalkoznunk. Mivel az

$$y \circ x^{-1} : \quad x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

átmenetleképezés diffeomorfizmus,

$$\forall\ a \in x(U \cap V): \quad \det(y \circ x^{-1})'(a) \neq 0.$$

Válasszunk ki egy $a_0 \in x(U \cap V)$ pontot! Föltehető, hogy

$$\det(y \circ x^{-1})'(a_0) > 0,$$

ellenkező esetben ugyanis a (V, y) térképet kicserélhetjük például azzal a $(V, \tilde{y})$ térképpel, ahol

$$\tilde{y} := \rho \circ y\ ,\ \rho: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\nu^1, \ldots, \nu^n) \mapsto (-\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^n);$$

ekkor $\det \rho = -1 \Longrightarrow \det(\tilde{y} \circ x^{-1})'(a_0) > 0$. – Tekintsük mármost a

$$h: \quad x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ , \quad a \mapsto h(a) := \det(x \circ y^{-1})'(a)$$

függvényt! Ez nyilvánvalóan folytonos, az értelmezési tartománya pedig összefüggő, hiszen az $U \cap V$ összefüggő halmaz képe az x folytonos leképezésnél. Mivel h seholsem tűnik el, ugyanakkor az $a_0 \in x(U \cap V)$ pontban pozitív értéket vesz föl, a közbülső-érték tételből (3.17.(3)) következik, hogy h mindenütt pozitív $x(U \cap V)$ fölött. – Ezt akartuk belátni. □

4.12. következmény. *Az $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ gömbfelület irányítható.*

Bizonyítás. S^n sztereografikus atlasza eleget tesz a 4.11-beli feltételnek. □

4.13. megjegyzések.

(a) Természetesen $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ is irányítható, ez adódni fog pl. 6.23.(a)-ból.

(b) Megmutatható, hogy az $\mathbb{R}P^n$ projektív tér akkor és csak akkor irányítható, ha n páratlan.

4.14. állítás. *Kompakt sokaságnak nincs egytagú atlasza.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy M olyan sokaság, amelynek van egytagú atlasza! Ekkor M homeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazával. Mivel $\mathbb{R}^n$ kompakt halmazai éppen a korlátos és zárt halmazok, s kompakt halmaz folytonos képe kompakt, következik, hogy ekkor M nem lehet kompakt. Ez állításunk helyességét jelenti. □

4.15. állítás. *Egydimenziós sokaság minden p pontjának van olyan U környezete, hogy $U \backslash \{p\}$ pontosan két összefüggő, diszjunkt nyílt halmaz uniója.*

Bizonyítás. Tekintsük az M 1-dimenziós sokaságot! Legyen p M-nek tetszőleges pontja, s adjunk meg egy (U, x) térképet p körül! Ekkor x homeomorfizmusa U-nak egy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumra és

$$x(U \backslash \{p\}) = I \backslash \{x(p)\} = I_1 \cup I_2$$

írható, ahol I_1 és I_2 diszjunkt nyílt intervallumok. Mivel $x^{-1}: \ I \to U$ szintén homeomorfizmus, és

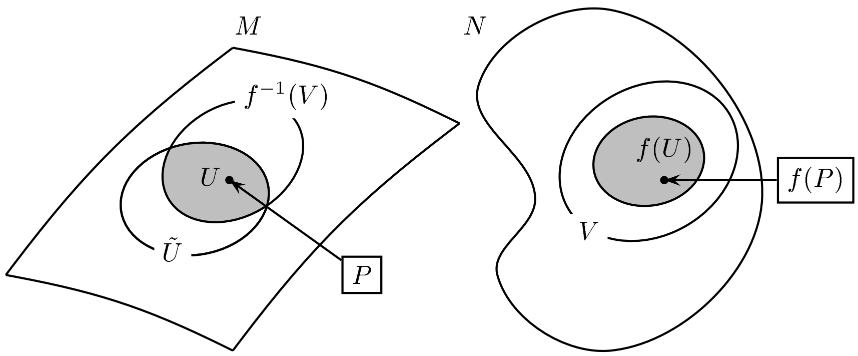
$$U \backslash \{p\} = x^{-1}(I_1) \cup x^{-1}(I_2),$$

$U \backslash \{p\}$ valóban két összefüggő nyílt halmaz uniója. □

4.16. megjegyzés. Tekintsünk egy M és egy N sokaságot, s egy $f: M \to N$ folytonos leképezést! Megadva egy $p \in M$ pontot s az N sokaság egy $f(p)$ körüli (V, y) térképét, létezik olyan (U, x) térképe M-nek p körül, hogy $f(U) \subset V$. Valóban, f folytonossága miatt $f^{-1}(V) \subset M$ nyílt halmaz, amely tartalmazza a p pontot. Ha $(\widetilde{U}, \tilde{x})$ tetszőleges térkép p körül és

$$U := \widetilde{U} \cap f^{-1}(V)\ ,\ x := \tilde{x} \restriction U,$$

akkor U környezete p-nek (hiszen két p-t tartalmazó nyílt halmaz metszete), s világos, hogy (U, x) a kívánt tulajdonságú térkép.

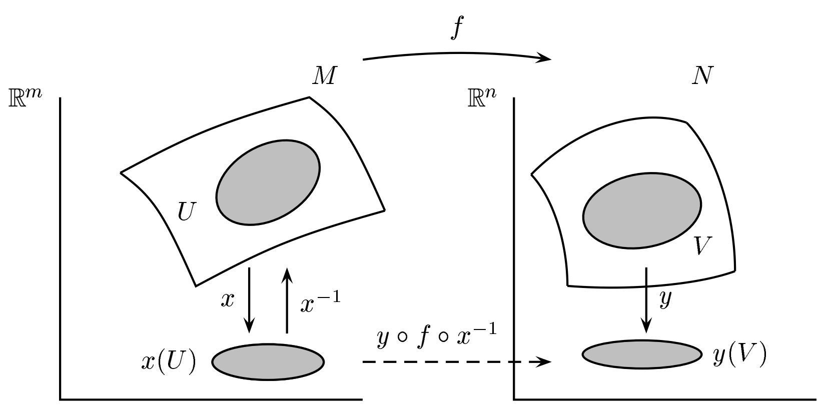


4.17. definíció. *Tekintsük az M m-dimenziós és az N n-dimenziós sokaságot!*

(a) Egy $f: M \to N$ folytonos leképezésről azt mondjuk, hogy ***differenciálható*** *($:= C^\infty$-osztályú) vagy* ***sima*** *egy $p \in M$ pontban, ha megadható olyan (U, x) térkép a p pont, (V, y) térkép az $f(p)$ pont körül, hogy $f(U) \subset V$, és az*

$$y \circ f \circ x^{-1}: \quad x(U) \subset \mathbb{R}^m \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezés differenciálható az $x(p) \in \mathbb{R}^m$ pontban.



*f-et M N-**be való differenciálható** vagy **sima leképezés**ének nevezzük, ha differenciálható M valamennyi pontjában.*

(b) *Az $f: M \to N$ leképezést **diffeomorfizmus**nak mondjuk, ha differenciálható, bijektív, és az $f^{-1}: N \to M$ leképezés is differenciálható. Két sokaság **diffeomorf**, ha létezik közöttük diffeomorfizmus; ilyenkor a sokaságokhoz tartozó differenciálható struktúrákat is említjük diffeomorfakként.*

4.18. állítás. *Sokaságok közötti leképezés egy pontban való differenciálhatósága jól definiált fogalom: független a pont és a képpont körüli térkép megválasztásának módjától.*

Bizonyítás. Megtartva 4.17. jelöléseit, tekintsük az $f: M \to N$ leképezést, s válasszunk további $(\overline{U}, \overline{x})$ térképet a p pont, $(\overline{V}, \overline{y})$ térképet az $f(p)$ pont körül úgy, hogy $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$ teljesüljön (ez utóbbi 4.16. miatt elérhető). Azt kell ellenőriznünk, hogy az

$$\overline{y} \circ f \circ \overline{x}^{-1}: \quad \overline{x}(\overline{U}) \subset \mathbb{R}^m \to \overline{y}(\overline{V}) \subset \mathbb{R}^n$$

leképezés differenciálható az $\overline{x}(p)$ pontban. Mivel lokális kérdésről van szó, elegendő a leképezésnek az $\overline{x}(p)$ illetve az $\overline{y}(f(p))$ pont alkalmas környezetére való leszűkítését vizsgálnunk. $U \cap \overline{U}$ környezete p-nek, $V \cap \overline{V}$ környezete $f(p)$-nek (3.5.(N3)), így $\overline{x}(U \cap \overline{U})$ környezete $\overline{x}(p)$-nek, $\overline{y}(V \cap \overline{V})$ pedig $\overline{y}(f(p))$-nek (hiszen $\overline{x}$ és $\overline{y}$ homeomorfizmus). Ez utóbbi környezetek fölött

$$\overline{y} \circ f \circ \overline{x}^{-1} = (\overline{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \overline{x}^{-1})$$

írható. Itt a jobboldalon $\overline{y} \circ y^{-1}$ és $x \circ \overline{x}^{-1}$ a térképek kompatibilitása, $y \circ f \circ x^{-1}$ pedig a feltétel miatt differenciálható, így a kompozíciójuk szintén differenciálható – s ezt kellett belátnunk. □

4.19. megjegyzések.

(a) Tekintsünk speciálisan egy $f: M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, ahol $\mathbb{R}$-et a kanonikus differenciálható struktúrával látjuk el (ld.4.9.(a)). f-nek egy $p \in M$ pontban való differenciálhatósága az értelmezés és 4.18. alapján azt jelenti, hogy valamely – s ennélfogva bármely – p körüli (U, x) térkép esetén az

$$f \circ x^{-1}: \quad x(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

függvény (a szokásos értelemben) differenciálható az $x(p)$ pontban; ez egyszerűen úgy adódik, hogy $\mathbb{R}$-en az $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ térképet vesszük alapul. – Az összes $M \to \mathbb{R}$ sima függvények halmazára a továbbiakban a $C^\infty(M)$ jelölést használjuk. $C^\infty(M)$ egységelemes, asszociatív, kommutatív algebra $\mathbb{R}$ fölött a függvények összeadásának, skalárral való szorzásának és szorzásának pontonkénti értelmezése esetén: ha $f, g \in C^\infty(M), \lambda \in \mathbb{R}$, úgy $\forall\ p \in M$:

$$\begin{aligned}(f+g)(p) &:= f(p)+g(p),\\ (\lambda f)(p) &:= \lambda f(p),\\ (fg)(p) &:= f(p)g(p).\end{aligned}$$

Ennek ellenőrzéséhez azt kell csupán megmutatni, hogy $f+g$, λf, $fg \in C^\infty(M)$, ami könnyű gyakorló feladat.

(b) Ha $f: M \to N$ és $g: N \to S$ sima leképezés, akkor a $g \circ f: M \to S$ kompozíció is az, speciálisan az összes $f: M \to M$ diffeomorfizmusok $\mathrm{DIFF}(M)$ halmaza csoport a leképezés-kompozíció műveletével. – Következik a mondottakból, hogy a sokaságok körében a diffeomorfizmus ekvivalenciareláció. Az egymással diffeomorf sokaságokat differenciáltopológiai szempontból azonosaknak tekintjük.

(c) Tekintsünk egy M m-dimenziós sokaságot! Ha (U,x) térkép M-en, akkor az $x: U \subset M \to x(U) \subset \mathbb{R}^m$ leképezés diffeomorfizmus, az $x^i = u^i \circ x : U \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvények pedig differenciálhatóak (az (a)-ban mondott értelemben). Amennyiben $V \subset M$ összefüggő nyílt halmaz és $\varphi: V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^m$ tetszőleges diffeomorfizmus, úgy (V,φ) szintén térképe M-nek; ez közvetlenül adódik abból, hogy (V,φ) kompatibilis M tetszőleges térképével, s így a maximalitási követelmény (4.5.(b)) szerint a differenciálható struktúrához tartozik. – Speciálisan: ha egy koordinátázást $\mathbb{R}^n$ egy diffeomorfizmusával komponálunk, akkor továbbra is koordinátázáshoz jutunk, így tetszőleges $p \in M$ pont körül megadható olyan (U,x) térkép, hogy $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$.

(d) Tekintsük $\mathbb{R}$-en a szokásos $(\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ egytagú atlaszt, s jelentse $\mathcal{A}$ az általa származtatott differenciálható struktúrát; legyen $M := (\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Az

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad t \mapsto f(t) := t^3$$

leképezés (differenciálható) homeomorfizmus, következésképpen $(\mathbb{R}, f)$ szintén egytagú atlasz, amely meghatároz egy $\mathcal{B}$ differenciálható struktúrát; legyen $N := (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Az $(\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ és az $(\mathbb{R}, f)$ térkép nem kompatibilis, mivel az

$$1_\mathbb{R} \circ f^{-1} = f^{-1}: \quad s \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[3]{s}$$

átmenetfüggvény a 0 helyen nem differenciálható. Az M és az N sokaság tehát *nem azonos*, de *azonosítható*; a

$$\varphi: \quad M \to N\ , \quad s \mapsto \varphi(s) := \sqrt[3]{s} \in \mathbb{R}$$

leképezés ugyanis diffeomorfizmus az M és az N *sokaság* között.

Valóban:

– φ bijektív,

– φ differenciálható, ui. $\forall\, t \in M$:

$$f \circ \varphi \circ 1_\mathbb{R}^{-1}(t) = f(\sqrt[3]{t}) = t \quad \Longrightarrow \quad f \circ \varphi \circ 1_\mathbb{R}^{-1} = 1_\mathbb{R};$$

– $\varphi^{-1}: N \to M$ differenciálható, mivel

$$\forall\, s \in N: \quad 1_\mathbb{R} \circ \varphi^{-1} \circ f^{-1}(s) = \varphi^{-1}(\sqrt[3]{s}) = (\sqrt[3]{s})^3 = s \Longrightarrow 1_\mathbb{R} \circ \varphi^{-1} \circ f^{-1} = 1_\mathbb{R}.$$

Megemlítendő, hogy M és N között az

$$1_{\mathbb{R}} : \quad M \to N \ , \ t \mapsto t$$

identikus transzformáció nem diffeomorfizmus, mert az

$$1_{\mathbb{R}} \circ 1_{\mathbb{R}} \circ f^{-1} = f^{-1} : \quad t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt[3]{t} \in \mathbb{R}$$

függvény a 0 helyen nem differenciálható.

(e) Fölsorolunk néhány nevezetes eredményt és problémát a sokaságok differenciáltopológiai osztályozásával kapcsolatban.

(1) Minden összefüggő 1-dimenziós sokaság diffeomorf az $\mathbb{R}$ vagy az S^1 sokasággal.

(2) Az összefüggő, 2-dimenziós, kompakt sokaságok – az ún. kompakt felületek – osztályozása elintézett, nem kompakt esetben az osztályozás reménytelen vállalkozás.

(3) Jelentse $\sigma(n)$ az S^n gömbfelület nem diffeomorf differenciálható struktúráinak számát! Régóta ismeretes, hogy $\sigma(n) = 1$, ha $n \in \{1, 2, 3\}$. Az első meglepő eredmény 1956-ban született: J. Milnor megmutatta, hogy S^7-en léteznek a szokásossal nem diffeomorf, ún. egzotikus differenciálható struktúrák (*Annals of Math.*, **64** (1956)). Milnor valamint Kervaire további vizsgálatainak köszönhetően rendelkezésünkre áll a következő táblázat:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\sigma(n)$	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

(*Annals of Math.* **77** (1963)). Nem tettünk említést $\sigma(4)$ értékéről – ezt azonban egyelőre teljes homály fedi.

(4) 1962 óta tudott, hogy ha $n \neq 4$, akkor $\mathbb{R}^n$ bármely két differenciálható struktúrája diffeomorf. S.K. Donaldson-nak 1983-ban sikerült egzotikus differenciálható struktúrát konstruálnia $\mathbb{R}^4$-en[3], ezt R. Gompf ugyanebben az évben további kettővel egészítette ki (*J. Diff. Geom.* **18** (1983) 269-316, illetve 317-328). Ma már ismeretes, hogy $\mathbb{R}^4$-en nem megszámlálható sok egzotikus differenciálható struktúra létezik!

[3] *S.K. Donaldson* (1957 -) az oxfordi egyetem professzora, a Fields Medal („matematikai Nobel-díj") 1985. évi nyertese.

5. Részsokaságok $\mathbb{R}^n$-ben

5.1. definíció. *Vegyük alapul az $\mathbb{R}^n$ teret, föltéve, hogy $n \geqq 2$, s legyen $k \in \mathbb{N}^+$.*

*(a) Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^n$ halmazt, ellátva a relatív topológiával. – Azt mondjuk, hogy M k-**dimenziós részsokaság**a $\mathbb{R}^n$-nek, ha bármely $p \in M$ ponthoz megadható p-t tartalmazó $V \subset M$ nyílt halmaz, valamint $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz s egy $f : U \to V$ leképezés olymódon, hogy teljesül*

(SM1) *f differenciálható homeomorfizmus;*

(SM2) *f immerzió U fölött:*

$$\forall\, q \in U : \quad f'(q) \ : \ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

injektív lineáris leképezés.

*Ekkor az f leképezést M egy **lokális** – mégpedig a p pont körüli – **paraméterezés**ének hívjuk.*

*(b) $\mathbb{R}^n$ 1-dimenziós részsokaságait **görbék**nek, $(n-1)$-dimenziós részsokaságait **hiperfelület**eknek nevezzük, speciálisan az $\mathbb{R}^3$ tér kétdimenziós részsokaságait **felület**eknek mondjuk. Megállapodunk abban, hogy $\mathbb{R}^n$ pontjai 0-dimenziós részsokaságok.*

5.2. állítás. *Tegyük föl, hogy M k-dimenziós részsokasága $\mathbb{R}^n$-nek $(k, n \in \mathbb{N}^+;$ $n \geqq 2)$. Ha*

$$f : \ U \subset \mathbb{R}^k \to f(U) := V \subset M$$

*paraméterezése M-nek, akkor (V, x) ; $x := f^{-1}$ térkép M-en; ezt a térképet a tekintett paraméterezéshez tartozó térképként említjük. A paraméterezésekhez tartozó térképek együttese C^∞-osztályú atlasz M számára, s ilymódon $\mathbb{R}^n$ k-*dimenziós részsokaságai k-dimenziós sokaságok *(a 4.5. szerinti értelemben).*

Bizonyítás. Azt kell ellenőriznünk, hogy a paraméterezésekhez tartozó térképek közötti átmenetleképezések simák. – Tekintsük az

$$f_1 : \ U_1 \to V_1 \text{ és az } f_2 : \ U_2 \to V_2$$

paraméterezéseket, s legyen $W := V_1 \cap V_2$. (Ekkor W nyílt halmaza M-nek.) Föltéve, hogy $W \neq \emptyset$, elegendő a

$$h := f_1^{-1} \circ f_2 \ : \ f_2^{-1}(W) \to f_1^{-1}(W)$$

homeomorfizmus differenciálhatóságát igazolnunk. – Válasszunk egy tetszőleges $q \in f_2^{-1}(W)$ pontot, s legyen $p := h(q)$.
Értelmezzük a

$$g: \quad U_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$$

leképezést az

$$(a,b) \in U_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \mapsto g(a,b) := f_1(a) + (0,b) \in \mathbb{R}^n \qquad (0 \in \mathbb{R}^k)$$

előírással! Alkalmazva a

$$\mathrm{pr}_1 : \quad U_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to U_1 \ (\subset \mathbb{R}^k) \ , \quad \mathrm{pr}_2 : \quad U_1 \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$$

természetes projekciókat,

$$g = f_1 \circ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2$$

írható (a $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ pontokat azonosítva a $(0,b) \in \mathbb{R}^n$ pontokkal). Innen kiolvasható, hogy g differenciálható, mégpedig $\forall \ (a,b) \in U_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\begin{aligned} g'(a,b)(u,v) &= (f_1'(\mathrm{pr}_1(a,b)) \circ \mathrm{pr}_1'(a,b) + \mathrm{pr}_2'(a,b))(u,v) = \\ &= (f_1'(a) \circ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2)(u,v) = f_1'(a)(u) + v \end{aligned}$$

(alkalmazva a láncszabályt (I.4.2.), s figyelembe véve, hogy pr_1 és pr_2 egyaránt lineáris leképezés). Speciálisan

$$g'(p,0)(u,v) = f_1'(p)(u) + v,$$

amiből közvetlenül adódik, hogy $g'(p,0)$ injektív, hiszen f_1 immerzió, s ennélfogva $f_1'(p)$ injektív. Azonban $g'(p,0)$ az $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \mathbb{R}^n$ vektortér endomorfizmusa, így injektív volta automatikusan azt vonja maga után, hogy lineáris izomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy g reguláris a $(p,0) \in U_1 \times \mathbb{R}^{n-k}$ pontban (I.4.1.(c)). Az inverz-leképezés tétel (I.4.22.) alapján megadható ilymódon a

$$g(p,0) = f_1(p) = f_1(h(q)) = f_2(q) \in W$$

pontnak olyan $\mathbb{R}^n$-beli V környezete, hogy V fölött létezik és differenciálható a g^{-1} inverz leképezés. Mivel f_2 folytonos leképezés, a $q \in U_2$ pontnak van olyan $U \subset U_2$ környezete, hogy $f_2(U) \subset V$. Ekkor

$$h \restriction U = (f_1^{-1} \circ f_2) \restriction U = (g^{-1} \circ f_2) \restriction U,$$

ami azt jelenti, hogy h differenciálható a tetszőlegesen választott $q \in f_2^{-1}(W)$ pontban – s ennélfogva $f_2^{-1}(W)$ minden pontjában. $\square$

5.3. következmény. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság!*

(a) Ha $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenciálható leképezés, akkor $F \restriction M: M \to \mathbb{R}^m$ szintén differenciálható (a 4.17. szerinti értelemben).

(b) Amennyiben $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, $f: U \to f(U) \subset M$ bijektív immerzió, úgy f^{-1} szintén differenciálható (speciálisan folytonos), s ennélfogva f diffeomorfizmus U és $f(U)$ között.

Bizonyítás.

(a) Tekintsük M-nek egy tetszőleges

$$\varphi: \quad U \subset \mathbb{R}^k \to \varphi(U) =: V \subset M$$

(lokális) paraméterezését! Ekkor 5.2. értelmében (V, x), $x := \varphi^{-1}$ térképe M-nek, mint k-dimenziós sokaságnak. Mivel

$$1_{\mathbb{R}^m} \circ (F \restriction M) \circ x^{-1} = F \circ \varphi$$

differenciálható, $F \restriction M$ eleget tesz a 4.17. definíció követelményének, tehát differenciálható.

(b) Jelentse g az $f: U \to M$ immerzió segítségével az 5.2. bizonyításában konstruált leképezést! g – mint láttuk – lokálisan diffeomorfizmus. g^{-1} $\mathbb{R}^n$ egy nyílt halmazán van értelmezve és – a bizonyítás jelöléseivel – $g^{-1} \restriction V \cap M = f^{-1}$. Az (a)-ban mondottak alapján ebből következik, hogy f^{-1} szintén differenciálható. □

5.4. példák.

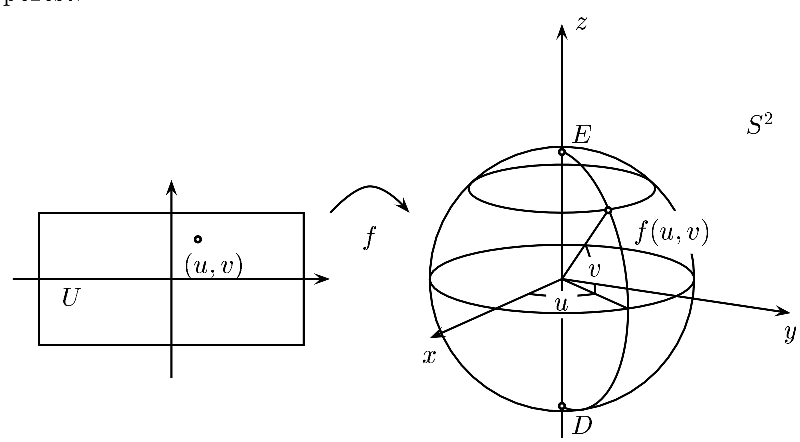
(a) S^2 ***geografikus atlasza.*** $S^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = 1\}$; legyen

$$U := \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

s tekintsük az

$$f: U \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto (\cos v \cos u \ , \ \cos v \sin u, \ \sin v)$$

leképezést!



Az u paraméter neve: *longitudo* (hosszúság), a v paraméter neve: *latitudo* (szélesség).

(1) Világos, hogy $\operatorname{Im} f \subset S^2$. A rögzített $u \in\,]-\pi,\pi[$ mellett adódó

$$c_u : \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\mapsto c_u(t) := (\cos t\cos u\ ,\ \cos t\sin u\ ,\ \sin t) \in S^2$$

parametrizált görbét *meridián*nak vagy *hosszúsági kör*nek hívjuk, míg rögzített $v \in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ esetén a

$$c_v : \quad t \in\,]-\pi,\pi[\, \mapsto c_v(t) := (\cos v\cos t\ ,\ \cos v\sin t\ ,\ \sin v) \in S^2$$

parametrizált görbe neve *paralelkör*; speciálisan a

$$t \in\,]-\pi,\pi[\, \mapsto (\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ 0)$$

paralelkört – amikor is $v = 0$ – *egyenlítő*ként említjük (ennek jelen esetben a $(-1,0,0)$ nem pontja).

(2) Legyen

$$\mathcal{C} := \{(\alpha,\beta,\gamma) \in S^2 \mid \beta = 0\ ,\ \alpha \leqq 0\}!$$

$\mathcal{C}$ az E és a D pontot az „xz-síkban” összekötő, a $(-1,0,0)$ pontra illeszkedő félkör. – Belátjuk, hogy

$$f : \quad U \subset \mathbb{R}^2 \to S^2 \backslash \mathcal{C} \text{ bijekció.}$$

Legyen $(\lambda,\mu,\nu) \in S^2\backslash\mathcal{C}$ tetszőleges! Ekkor $\nu \in\,]-1,1[$, s mivel $\sin \restriction\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ bijektív,

$$\exists!\ v \in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: \quad \sin v = \nu.$$

$v = \arcsin\nu$ birtokában a

$$\begin{cases} \lambda = \cos v\cos u \\ \mu = \cos v\sin u \end{cases}$$

összefüggések egyértelműen meghatározzák az $u \in\,]-\pi,\pi[$ paramétert. Ilymódon a $(\lambda,\mu,\nu) \in S^2\backslash\mathcal{C}$ ponthoz egyértelműen létezik $(u,v) \in U$, amelyre $f(u,v) = (\lambda,\mu,\nu)$; f tehát valóban bijektív.

(3) $f : \ U \to S^2\backslash\mathcal{C}$ *immerzió.* – f differenciálhatósága nyilvánvaló, hiszen a koordinátafüggvényei differenciálhatók. f Jacobi-mátrixa tetszőleges $(u,v) \in U$ pontban a

$$J_{(u,v)}f := \begin{pmatrix} -\cos v\sin u & -\sin v\cos u \\ \cos v\cos u & -\sin v\sin u \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$$

mátrix; az ebből képezhető másodrendű minorok

$$\begin{vmatrix} -\cos v \sin u & -\sin v \cos u \\ \cos v \cos u & -\sin v \sin u \end{vmatrix} = \sin v \cos v \ ,$$

$$\begin{vmatrix} -\cos v \sin u & -\sin v \cos u \\ 0 & \cos v \end{vmatrix} = -\cos^2 v \sin u,$$

$$\begin{vmatrix} \cos v \cos u & -\sin v \sin u \\ 0 & \cos v \end{vmatrix} = \cos^2 v \cos u.$$

Ezek akkor és csak akkor tűnnek el egyidejűleg, ha

$$\sin^2 v \cos^2 v + \cos^4 v \sin^2 u + \cos^4 v \cos^2 u = \cos^2 v(\sin^2 v + \cos^2 v) =$$
$$= \cos^2 v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos v = 0.$$

Mivel $v \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ez U fölött nem következik be. Így f Jacobi-mátrixa U fölött mindenütt 2 rangú, tehát f valóban immerzió.

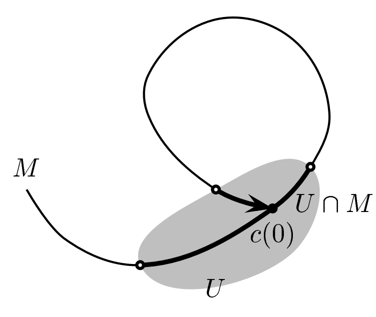
(4) Tekintettel arra, hogy $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a 4.9.(d)-ben mondottak szerint sokaság, (2),(3) és 5.3.(b) alapján következik, hogy $f : U \to S^2 \backslash \mathcal{C}$ eleget tesz az (Sm1) és (Sm2) feltételeknek, (U, f) tehát lokális paraméterezése S^2-nek, $(S^2 \backslash \mathcal{C}, f^{-1})$ pedig térkép. További, alkalmas ilyen típusú térkép segítségével S^2 egy kéttagú atlaszához jutunk, amelyet S^2 *geografikus atlaszának* nevezünk.

(b) Tegyük föl, hogy $M \subset \mathbb{R}^n$ 1-dimenziós részsokaság – azaz görbe –, s legyen $c : I \to V$ ($I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $V \subset M$ nyílt halmaz) lokálisan paraméterezése M-nek az 5.1.(a)-ban mondott értelemben. Világos, hogy ekkor c parametrizált görbe az I.5.3.(a) szerinti értelemben, sőt injektív parametrizált görbe. Megfordítva: ha $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe – vagyis immerzió – , akkor $\operatorname{Im} c \subset \mathbb{R}^n$ nem föltétlenül részsokaság, még akkor sem, ha c injektív.

Illusztráció. Tegyük föl, hogy $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ injektív parametrizált görbe, amelyre

$$\lim_{t \to \infty} c(t) = c(0)$$

teljesül.



Legyen $M := \operatorname{Im} c$, s tekintsük a $c(0)$ pont egy olyan

$$V = U \cap M$$

környezetét, ahol $U \subset \mathbb{R}^2$ a $c(0)$ pont egy összefüggő nyílt környezete. Ekkor $V \setminus \{c(0)\}$ három összefüggő, diszjunkt nyílt halmaz uniója, s így 4.15-ből következően M nem részsokaság.

5.5. állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, $g : U \to \mathbb{R}$ pedig differenciálható függvény! Az*

$$M := \operatorname{graf}(g) := \{(u, v, g(u, v)) \mid (u, v) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

ponthalmaz felület, amelynek az

$$f : \quad U \to M \ , \quad (u, v) \mapsto f(u, v) := (u, v, g(u, v))$$

*leképezés globális paraméterezése, s így az $\{(M, f^{-1})\}$ pár egytagú atlasza. – A szóbanforgó paraméterezést **Euler-Monge-féle paraméterezés**nek, magát M-et **Euler-Monge megadású felület**nek nevezzük.*

Bizonyítás. Evidens, hogy f bijekciója U-nak M-re, s a definiáló formulából az is közvetlenül kiolvasható, hogy f differenciálható, koordinátafüggvényei ui. differenciálhatók (v.ö. I.4.7.). – Tekintsük a

$$\pi : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad (p^1, p^2, p^3) \mapsto (p^1, p^2)$$

projekciót! Ez lineáris, következésképpen folytonos. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy folytonos leképezésnek egy topologikus altérre való leszűkítése (a relatív topológiára nézve) folytonos leképezés, így $\pi \restriction M$ folytonos. Azonban $\pi \restriction M = f^{-1}$, amivel beláttuk f^{-1} folytonosságát, s egyben (Sm1) teljesülését. Tetszőleges $q \in U$ pontban f Jacobi-mátrixa a 2 rangú

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1 g(q) & D_2 g(q) \end{pmatrix}$$

mátrix, ami azt jelenti, hogy f immerzió U fölött, tehát (Sm2) is teljesül. □

5.6. megjegyzés. Tekintsünk egy $f : U \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^+$; s legyen adva egy α valós szám! Az

$$f^{-1}(\alpha) := \{p \in U \mid f(p) = \alpha\}$$

halmazt f α *magasságú szinthalmaz*ának is hívjuk. Mivel az $f^{-1}(\alpha)$ halmazt az

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$$

egyenlet összes megoldásai alkotják, ezt gyakran az

$$„f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \textit{ halmaz}\text{”-ként}$$

említik. - A „szinthalmaz” és a „magasság” terminológia abból a kapcsolatból származik, amely egy függvény szinthalmazai és a grafikonja között áll fenn. Nevezetesen: mivel

$$\mathrm{graf}(f) := \{(p, f(p)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p \in U\},$$

$\alpha \geqq 0$ esetén az $f^{-1}(\alpha)$ szinthalmazt f értelmezési tartományának azon pontjai alkotják, amelyek „fölött” a grafikonnak az

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

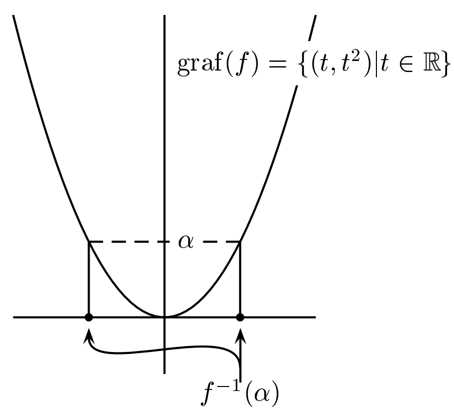
síktól α távolságra levő pontjai vannak, $\alpha < 0$ esetén pedig azok a pontok, amelyek „alatt” a $-\alpha$ távolságú grafikonpontok találhatók.

Illusztráció.

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2$ – Amennyiben $\alpha \in \mathbb{R}$ úgy

$\sim$ $\alpha < 0 \Longrightarrow f^{-1}(\alpha) = \emptyset$,

$\sim$ $\alpha \geqq 0 \Longrightarrow f^{-1}(\alpha) = \{-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\}$.

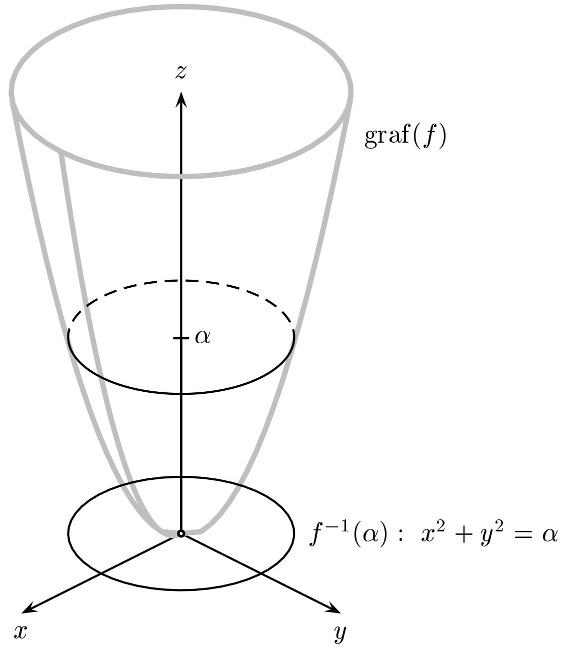


(2) $f: p \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(p) := \|p\|^2$ Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$\sim$ $\alpha < 0 \Longrightarrow f^{-1}(\alpha) = \emptyset$,

$\sim$ $\alpha = 0 \Longrightarrow f^{-1}(\alpha) = \{0\}$,

$\sim$ $\alpha > 0 \Longrightarrow f^{-1}(\alpha)$ az $x^2 + y^2 = \alpha$ egyenletű körvonal.



5.7. állítás. *Legyen* $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ *nemüres nyílt halmaz,* $f : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ *sima függvény,* $\alpha \in \operatorname{Im} f$*. Ha az* f *függvény az* $f^{-1}(\alpha)$ *szinthalmaz minden pontjában szubmerzió, akkor* $M := f^{-1}(\alpha)$ *– ellátva a relatív topológiával –* $(n-1)$*-dimenziós részsokasága – azaz hiperfelülete –* $\mathbb{R}^n$*-nek.*

Bizonyítás.

(1) Az általánosság sérelme nélkül foglalkozhatunk azzal az esettel, amikor $M = f^{-1}(0)$, ha ugyanis f helyett az

$$\tilde{f} : \quad \widetilde{U} \to \mathbb{R}\ ,\ q \mapsto \tilde{f}(q) := f(q) - \alpha$$

függvényt tekintjük, akkor

$$\tilde{f}^{-1}(0) = f^{-1}(\alpha) = M,$$

és $\tilde{f}$ szintén szubmerzió M pontjaiban.

(2) Válasszunk ki egy tetszőleges $p \in M$ pontot! Mivel az $f'(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivált a feltétel értelmében szürjektív lineáris függvény, a

$$\forall\ v \in \mathbb{R}^n : \quad f'(p)(v) = \langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle$$

kapcsolat (ld. I.4.4.) alapján $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$. Tekintettel arra, hogy

$$\langle \operatorname{grad} f(p), e_i \rangle = f'(p)(e_i) = D_i f(p) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

folytán

$$\operatorname{grad} f(p) = (\sum_{i=1}^{n} D_i f(p))e_i,$$

megállapíthatjuk, hogy a $D_i f(p)$ parciális deriváltaknak nem mindegyike zérus. Tegyük föl például a határozottság kedvéért – ezzel sem sértve az általánosságot – , hogy

$$D_n f(p) \neq 0!$$

(3) Tekintsük a

$$\varphi := (u^1, \ldots, u^{n-1}, f) \ : \ \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

leképezést! Ekkor

$$\varphi'(p) = (u^1, \ldots, u^{n-1}, f'(p)) \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n,$$

s így

$$\begin{aligned} \varphi'(p)(v) \quad &= \quad \varphi'(p)(\nu^i e_i) = (\nu^1, \ldots, \nu^{n-1}, D_i f(p)\nu^i) = (0, \ldots, 0) \\ &\iff \quad \nu^1 = \cdots = \nu^{n-1} = \nu^n = 0 \quad (\text{mivel } D_n f(p) \neq 0). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\varphi'(p)$ injektív, s ezáltal egyben szürjektív; φ tehát reguláris a p pontban.

(4) Alkalmazzuk most az inverz-leképezés tételt! – Mivel φ a p pontban reguláris, megadható p-nek $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(p)$-nek $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt környezete olymódon,hogy $\varphi \restriction \widetilde{V} : \ \widetilde{V} \to \widetilde{W}$ diffeomorfizmus. Ekkor $V := \widetilde{V} \cap M$ M-beli nyílt környezete p-nek, $U := \widetilde{W} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ nyílt halmaza $\mathbb{R}^{n-1}$-nek. φ V-t U-ra képezi le, hiszen $q \in M \iff f(q) = 0$; ha tehát

$$\psi := (\varphi \restriction V)^{-1},$$

akkor $\psi : \ U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to V$ lokális paraméterezése M-nek p körül. – Tekintettel p tetszőlegességére, ezzel beláttuk, hogy M $(n-1)$-dimenziós részsokasága $\mathbb{R}^n$-nek. □

5.8. példák.

(a) Legyen $U \subset \mathbb{R}^{n-1} \quad (n-1 \in \mathbb{N}^+)$ nyílt halmaz, $g : \ U \to \mathbb{R}$ sima függvény,

$$M := \operatorname{graf}(g) := \{(p, g(p)) \in \mathbb{R}^n \mid p \in U\}.$$

$\operatorname{graf}(g)$ megadható

$$f^{-1}(0) \ , \quad f := u^n - g$$

alakban ($(u^i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere, g-t U-ról kiterjesztjük $U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$-re a $(p,t) \in U \times \mathbb{R} \mapsto g(p) \in \mathbb{R}$ előírással). Mivel tetszőleges $q = (p, g(p)) \in M \quad (p \in U)$ pontban

$$\operatorname{grad} f(q) = (-D_1 g(p), \ldots, -D_{n-1} g(p), 1) \neq 0,$$

f szubmerzió M valamennyi pontjában, s így M hiperfelülete $\mathbb{R}^n$-nek.

Világos, hogy ez a példa 5.5. általánosítása, s egyben annak új bizonyítását adja.

(b) Tekintsük az

$$f: \quad \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\ ,\ a \mapsto f(a) := \langle a, a\rangle - 1$$

függvényt! Ekkor f differenciálható, mégpedig (ld. I.4.6.).

$$\forall\ a \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ v \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad f'(a)(v) = 2\langle a, v\rangle.$$

Mivel

$$f^{-1}(0) = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|a\| = 1\} = S^n,$$

és tetszőleges $a \in S^n$ pontban

$$\operatorname{grad} f(a) = 2a \neq 0,$$

f szubmerzió S^n pontjaiban. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tehát n-dimenziós részsokaság, amivel egyben annak is ismételt bizonyítását adtuk, hogy S^n sokaság.

(c) ***Másodrendű alakzatok.*** Legyen $\varphi \in \operatorname{End}\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ nemzérus önadjungált lineáris transzformáció; $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ adott vektor, illetve skalár. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\ , \quad v \mapsto f(v) := \langle \varphi(v), v\rangle + 2\langle a, v\rangle + \alpha$$

függvényt! Ez differenciálható, mégpedig

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ h \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad f'(p)(h) = 2(\langle \varphi(p), h\rangle + \langle a, h\rangle).$$

Innen kiolvasható, hogy

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad \operatorname{grad} f(p) = 2(\varphi(p) + a);$$

így

$$f'(p) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(p) + a = 0.$$

Az

$$M := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ponthalmazt *másodrendű alakzat*nak nevezzük; speciálisan *másodrendű kúp*ról szólunk, ha van olyan p_0 pont, amelyre

$$\varphi(p_0) + a = 0$$

teljesül, s ilyenkor a p_0 pontot *csúcspont*nak hívjuk. Amennyiben M nem kúp, úgy f M minden pontjában szubmerzió, s ennélfogva M n-dimenziós hiperfelülete $\mathbb{R}^{n+1}$-nek. Az $n = 2$ speciális esetben a *másodrendű felület*ekhez, az $n = 1$ esetben pedig a *másodrendű görbék*hez jutunk.

(d) ***Általánosított hengerek.*** Interpretáljuk $\mathbb{R}^2$-t $\mathbb{R}^3$ altereként az

$$(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u,v,0) \in \mathbb{R}^3$$

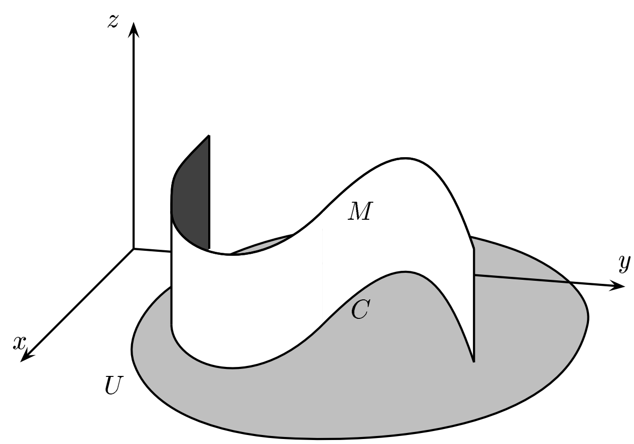
beágyazásnál! Legyen

- $\sim$ $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $\sim$ $f:\ U \to \mathbb{R}$ sima függvény,
- $\sim$ $b \in \operatorname{Im} f$, $\mathcal{C} := f^{-1}(b)$.

Tegyük föl, hogy f szubmerzió $\mathcal{C}$ pontjaiban! Ekkor 5.7. értelmében $\mathcal{C}$ 1-dimenziós részsokasága – azaz görbéje – $\mathbb{R}^2$-nek. Az

$$M := \bigcup_{q\in\mathcal{C}} \{q + \lambda(0,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{q\in\mathcal{C}} \{q + \mathcal{L}(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

ponthalmazt $\mathcal{C}$ *vezérvonalú henger*nek nevezzük.



Megmutatjuk, hogy M felület. Tekintsük ebből a célból a

$$g : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad (u,v,\lambda) \mapsto g(u,v,\lambda) := f(u,v)$$

függvényt! Vegyük észre, hogy

$$M = g^{-1}(b)\ ,$$

hiszen

$$\begin{aligned} g^{-1}(b) &:= \{(u,v,\lambda) \in U \times \mathbb{R} \mid f(u,v) = b\} \\ &= \{(u,v,0) + \lambda(0,0,1) \mid f(u,v) = b\ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{q + \lambda(0,0,1) \mid q \in \mathcal{C}\ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathcal{C}} \{q + \lambda(0,0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =: M. \end{aligned}$$

Mivel $D_1 g = D_1 f$ és $D_2 g = D_2 f$, g szubmerzió M pontjaiban, ami – ismét 5.7-re való hivatkozással – azt jelenti, hogy M csakugyan felület.

Paraméterezés. Tegyük föl, hogy

$$c:\ I \to \mathbb{R}^2\ ,\quad u \mapsto c(u) = (c^1(u), c^2(u))$$

lokális paraméterezése $\mathcal{C}$-nek. Belátjuk, hogy az

$$\tilde{f} : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ ,\quad (u,v) \mapsto \tilde{f}(u,v) := c(u) + ve_3 = (c^1(u), c^2(u), v)$$

leképezés lokális paraméterezése M-nek. – Világos, hogy $\tilde{f}$ injektív differenciálható leképezés. $\forall\,(u,v) \in I \times \mathbb{R}:\ D_1\tilde{f}(u,v) = c'(u)$ és $D_2\tilde{f}(u,v) = e_3$ lineárisan független, így $\tilde{f}$ bijektív immerziója $I \times \mathbb{R}$-nek az $\tilde{f}(I \times \mathbb{R}) \subset M$ halmazra; ez 5.3. figyelembevételével azt jelenti, hogy $\tilde{f}$ valóban lokális paraméterezés M számára.

Speciális példa: egyenes körhenger.
Legyen $\mathcal{C} := f^{-1}(0)$, $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto u^2 + v^2 - 1$.
Ekkor $c:\ [0, 2\pi[\to \mathcal{C}$, $u \mapsto (\cos u, \sin u, 0)$ (globális) paraméterezése $\mathcal{C}$-nek,

$$\tilde{f}:\ [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\ ,\ (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$$

pedig paraméterezése a $\mathcal{C}$ vezérvonalú – most *egyenes*nek mondott – körhengernek.

(e) ***Forgásfelületek.*** Tekintsük $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ egy olyan U nyílt halmazát, amelyre teljesül, hogy $\forall\ (u,v) \in U:\ v > 0$ (azaz amely $\mathbb{R}^2$ „fölső félsíkjában” van). Legyen adva egy $f:\ U \to \mathbb{R}$ sima függvény; tegyük föl, hogy $b \in \operatorname{Im} f$ és hogy f szubmerzió $\mathcal{C} := f^{-1}(b)$ pontjaiban. Így egy $\mathcal{C} \subset U$ görbét adtunk meg (5.7.). Képezzük ezután a

$$g : U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\quad (u,v,t) \mapsto f(u, \sqrt{v^2 + t^2})$$

függvényt! Világos, hogy ekkor $b \in \operatorname{Im} g$, ugyanis

$$\forall\ (u,v) \in f^{-1}(b):\quad g(u,v,0) := f(u, \sqrt{v^2}) = f(u,v) = b.$$

Legyen

$$M := g^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^3.$$

Megmutatjuk, hogy g szubmerzió M valamennyi pontjában, s ennélfogva felület. – Bevezetve a

$$g^1 : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ (u,v,t) \mapsto u,$$
$$g^2 : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ (u,v,t) \mapsto \sqrt{v^2 + t^2}$$

függvényeket,

$$\forall\ p \in M:\qquad g(p) = f(g^1(p), g^2(p))$$

írható. Így a I.4.12. láncszabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$D_i g(p) = D_1 f(q) D_i g^1(p) + D_2 f(q) D_i g^2(p) \qquad (1 \leqq i \leqq 3),$$

ahol $q = (g^1(p), g^2(p)) = (u, \sqrt{v^2+t^2})$, $p := (u, v, t)$. Mivel

$$\begin{aligned} D_i g^1(p) &= \begin{cases} 1 & ,\text{ha} \quad i = 1; \\ 0 & ,\text{ha} \quad i \neq 1; \end{cases} \qquad D_1 g^2(p) = 0 \ , \ D_2 g^2(p) = \frac{v}{\sqrt{v^2+t^2}}, \\ D_3 g^2(p) &= \frac{t}{\sqrt{v^2+t^2}} \ , \quad \text{az adódik, hogy} \\ D_1 g(p) &= D_1 f(q) \ , \quad D_2 g(p) = D_2 f(q) \frac{v}{\sqrt{v^2+t^2}}, \\ D_3 g(p) &= D_2 f(q) \frac{t}{\sqrt{v^2+t^2}}. \end{aligned}$$

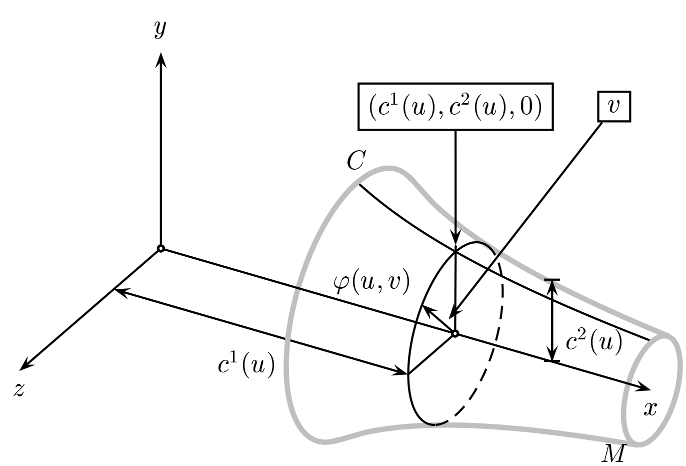
Ezek alapján

$$\|g'(p)\| = \sqrt{[D_1 f(q)]^2 + [D_2 f(q)]^2} \neq 0,$$

hiszen $g(p) = f(q) = b$, és f szubmerzió $\mathcal{C}$ pontjaiban. – M tehát valóban felület; az így konstruált felületet a $\mathcal{C}$ görbe x-tengely körüli elforgatásával nyert *forgásfelület*nek nevezzük. A szóhasználatot indokolja az a tény, hogy tetszőlegesen rögzített $(u, r, 0) \in \mathcal{C}$ pont egy, a felületre illeszkedő kört generál, mégpedig az

$$\left\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 \mid v^2 + t^2 = r^2\right\}$$

kört. (Ezt valóban tartalmazza M, hiszen $g(u, v, t) := f(u, \sqrt{v^2+t^2}) = f(u, r) = b$.) Az így adódó köröket *paralelkörök*nek hívjuk, M előáll ezek uniójaként. A kiindulásul választott $\mathcal{C}$ görbét és ennek elforgatottjait *meridián*oknak mondjuk, magát $\mathcal{C}$-t a felület *generáló görbéje*ként is említjük.



Paraméterezés. Adjunk meg $\mathcal{C}$-nek egy

$$c: \ I \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}\ ,\ u \mapsto c(u) = (c^1(u), c^2(u), 0)$$

lokális paraméterezését! Ekkor a

$$\varphi: \ I\times\ ]0, 2\pi[\ \to \mathbb{R}^3\ , \quad (u, v) \mapsto (c^1(u), c^2(u)\cos v, c^2(u)\sin v)$$

leképezés lokális paraméterezése M-nek. – Valóban, φ nyilvánvalóan differenciálható bijekció $I\times\ ]0, 2\pi[$ és $\operatorname{Im}\varphi$ között. Ellenőrizzük, hogy φ immerzió $I\times\ ]0, 2\pi[$ fölött. $\forall\ (u, v) \in I\times\ ]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}
D_1\varphi(u, v) &= (c^{1\prime}(u), c^{2\prime}(u)\cos v, c^{2\prime}(u)\sin v),\\
D_2\varphi(u, v) &= (0, -c^2(u)\sin v, c^2(u)\cos v),\\
(D_1\varphi \times D_2\varphi)(u, v) &= (c^{2\prime}(u)c^2(u), -c^{1\prime}(u)c^2(u)\cos v, -c^{1\prime}(u)c^2(u)\sin v);
\end{aligned}$$

következésképpen – figyelembe véve, hogy $c^2(u) > 0$ –

$$\|D_1\varphi \times D_2\varphi\|(u, v) = c^2(u)\sqrt{(c^{1\prime}(u))^2 + (c^{2\prime}(u))^2} > 0,$$

hiszen $c: \ I \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ immerzió. A kapott eredmény azt jelenti, hogy φ szintén immerzió.

Speciális példa: forgástórusz. Némileg módosítva az iménti elrendezést, a $\mathcal{C}$ generáló görbe gyanánt válasszuk az $\mathcal{L}(e_1, e_3)$ sík (az „xz-sík”)

$$(x - R)^2 + z^2 = r^2\ ,\ y = 0 \qquad (0 < r < R)$$

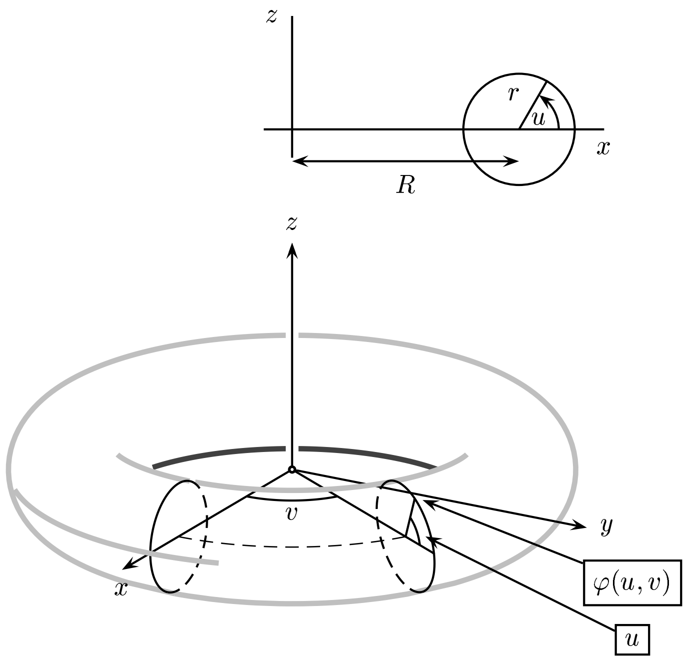
egyenletű körét! Ekkor $\mathcal{C}$ „kézenfekvő” (lokális) paraméterezése a

$$c:]0, 2\pi[\ \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3\ ,\ u \mapsto c(u) = (R + r\cos u, r\sin u)$$

leképezés; ennek segítségével a $\mathcal{C}$ által generált ún. *forgástórusz*

$$\begin{aligned}
&\varphi: \ ]0, 2\pi[\ \times\ ]0, 2\pi[\ \to \mathbb{R}^3\\
&(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)
\end{aligned}$$

lokális paraméterezéséhez jutunk.



(f) ***Csoportsokaságok.***

1. *Az unimoduláris csoport.* Legyen

$$SL(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \ !$$

Mivel 1 determinánsú mátrixok szorzata és 1 determinánsú mátrix inverze is 1 determinánsú, $SL(n,\mathbb{R})$ a mátrixszorzás műveletével csoport (mégpedig a $GL(n,\mathbb{R})$ csoportnak – lásd pl. 4.9.(f) – részcsoportja); ezt a csoportot nevezzük *unimoduláris csoport*nak vagy *speciális lineáris csoport*nak.

Megmutatjuk, hogy $SL(n,\mathbb{R})$ (n^2-1)-dimenziós részsokasága $\mathbb{R}^{n^2}$-nek. Tekintsük ebből a célból az

$$f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \mapsto f(A) := \det A \in \mathbb{R}$$

függvényt! Ekkor

$$SL(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(1).$$

Jegyezzük meg, hogy a determinánsfüggvény elemi tulajdonságaiból adódóan

$$(*) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R} : \quad f(tA) = t^n f(A).$$

Ezt is fölhasználva

$$\begin{aligned} f'(tA)(A) &\overset{\text{I.4.10.}}{=} D_A f(tA) = \lim_{\tau\to 0}\frac{f(tA+\tau A)-f(tA)}{\tau} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{\tau\to 0}\frac{(t+\tau)^n f(A)-t^n f(A)}{\tau} \\ &= \left(\lim_{\tau\to 0}\frac{(t+\tau)^n-t^n}{\tau}\right) f(A) \\ &= nt^{n-1}f(A). \end{aligned}$$

Innen $t := 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$f'(A)(A) = nf(A).$$

Amennyiben $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in SL(n,\mathbb{R})$, úgy

$$f'(A)(A) = n \neq 0,$$

ami azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $SL(n,\mathbb{R})$ pontjaiban az

$$f'(A) : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$$

derivált szürjektív. f tehát szubmerzió $SL(n,\mathbb{R})$ pontjaiban, amely így 5.7. értelmében valóban hiperfelülete $\mathbb{R}^{n^2}$-nek.

2. *Az ortogonális csoport.* Az n-dimenziós euklideszi vektortér ortogonális csoportjáról I.3.4-ben már szóltunk. Az ennek megfelelő mátrixcsoport

$$O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}.$$

A triviális esetet elkerülendő, tegyük föl, hogy $n \in \mathbb{N}^+$. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$O(n) \quad \tfrac{n(n-1)}{2}\text{-}\textit{dimenziós részsokasága } \mathbb{R}^{n^2}\textit{-nek.}$$

Jelölje $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ a szimmetrikus $n\times n$-es mátrixok vektorterét! Jól ismert, hogy $\dim M_n^s(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$; így $\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ természetes módon azonosítható az $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ térrel Tekintsük az

$$f : \ GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}), \qquad A \mapsto {}^tAA$$

leképezést! Tudjuk, hogy itt $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ nyílt halmaz (4.9.(f)), s világos, hogy az f leképezés differenciálható. A szorzatszabály alkalmazásával egyszerűen adódik, hogy

$$\forall\ A \in GL(n,\mathbb{R}),\ h \in \mathbb{R}^{n^2} : \quad f'(A)(h) = {}^thA + {}^tAh.$$

$f'(A)$ szürjektív, ha ugyanis $B \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ tetszőleges és $h := \frac{1}{2}({}^tA^{-1}B)$, akkor

$$\begin{aligned} f'(A)(h) &= \frac{1}{2}\left[{}^t\left({}^tA^{-1}B\right)A + {}^tA^tA^{-1}B)\right] = \frac{1}{2}\left({}^tBA^{-1}A + B\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left({}^tB + B\right) = \frac{1}{2}(B + B) = B. \end{aligned}$$

Beláttuk ezzel, hogy f szubmerzió $f^{-1}(I) = O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ fölött. Állításunk ezek után abból következik, hogy érvényes 5.7. következő általánosítása:

> *Tegyük föl, hogy $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz ($n, k \in \mathbb{N}^+$), s legyen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sima leképezés. Ha $0 \in \operatorname{Im} f$ és f szubmerzió $f^{-1}(0)$ pontjaiban, akkor $f^{-1}(0)$ k-dimenziós részsokasága $\mathbb{R}^{n+k}$-nak.*

(A bizonyítás az 5.7. igazolásánál alkalmazott gondolatmenetet követheti.) Esetünkben az $O(n)$ részsokaság dimenziójára

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

adódik.

5.9. definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ (nemüres) nyílt halmaz. – Egy $f : U \to \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezést **parametrizált felület**nek is mondunk. Ha speciálisan f immerzió, akkor **reguláris parametrizált felület**ről szólunk. Amennyiben egy $q \in U$ pontban $f'(q)$ nem injektív, úgy q-t f **szinguláris pont**jaként említjük.*

5.10. megjegyzés. A reguláris parametrizált felületek fogalma a parametrizált görbék fogalmával (I.5.3.) analóg, s nem tévesztendő össze a felületek, illetve azok paraméterezésének fogalmával. Az utóbbi észrevétellel kapcsolatban elég azt meggondolni, hogy ha $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület, akkor $\operatorname{Im} f$ még a reguláris esetben is lehet „önátmetsző”, míg ugyanez paraméterezésnél (Sm1) miatt nem fordulhat elő. Mégis – mint a következő eredmény mutatja – a reguláris parametrizált felületek és a felületek között szoros a kapcsolat.

5.11. állítás. *Ha $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, akkor minden $q \in U$ pontnak létezik olyan $U_q \subset \mathbb{R}^2$ nyílt környezete, hogy $f(U_q) \subset \mathbb{R}^3$ felület.*

Bizonyítás. Legyen $q \in U$ tetszőleges. Az $f = (f^1, f^2, f^3)$ írásmódot alkalmazva (I.1.4.), rang $f'(q) = 2$ folytán föltehető, hogy például

$$\begin{vmatrix} D_1f^1(q) & D_2f^1(q) \\ D_1f^2(q) & D_2f^2(q) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Képezzük f segítségével a

$$F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v, t) \mapsto (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v) + t)$$

leképezést! Ez differenciálható, hiszen koordinátafüggvényei differenciálhatóak, és

$$(*) \qquad F \restriction U \times \{0\} = f.$$

$$\det F'(q,0) = \begin{vmatrix} D_1 f^1(q) & D_2 f^1(q) & 0 \\ D_1 f^2(q) & D_2 f^2(q) & 0 \\ D_1 f^3(q) & D_2 f^3(q) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1 f^1(q) & D_2 f^1(q) \\ D_2 f^2(q) & D_2 f^2(q) \end{vmatrix} \neq 0,$$

így az inverz-leképezés tétel alapján a $(q,0)$, illetve az $F(q,0)$ pontnak megadható olyan W_1, illetve W_2 (nyílt) környezete, hogy $F \restriction W_1 : W_1 \to W_2$ diffeomorfizmus. Legyen $U_q := W_1 \cap U$. Mivel $(*)$-ra tekintettel $F \restriction U_q = f \restriction U_q$, következik, hogy $f(U_q)$ *diffeomorf* U_q-val, s ennélfogva $f(U_q)$ nyilvánvalóan eleget tesz az (SM1), (SM2) feltételeknek. Ez azt jelenti, hogy $f(U_q) \subset \mathbb{R}^3$ valóban felület. $\square$

5.12. definíció. *Tekintsük az $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbéket, s tegyük föl, hogy $\forall\, t \in I : \beta(t) \neq 0$. Legyen $J \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum! Az*

$$f : I \times J \to \mathbb{R}^3 , \quad (u,v) \mapsto \alpha(u) + v\beta(u)$$

parametrizált felületet ***vonalfelület****nek hívjuk, amelynek* ***alkotói*** *az $L_u = \alpha(u) + \{t\beta(u) \mid t \in J\}$ $(u \in I)$ szakaszok (illetve egyenesek, ha $J = \mathbb{R}$),* ***direktrix****e pedig az α parametrizált görbe.*

5.13. megjegyzés. Egy vonalfelületnek lehetnek szinguláris pontjai. – Valóban, megtartva 5.12. jelöléseit,

$$D_1 f(u,v) = \alpha'(u) + v\beta'(u) \ , \ D_2 f(u,v) = \beta(u).$$

Így f akkor és csak akkor immerzió az (u,v) pontban, ha $\alpha'(u) + v\beta'(u)$ és $\beta(u)$ lineárisan független, azaz – ekvivalens módon –, ha $\alpha'(u) \times \beta(u) + v\beta'(u) \times \beta(u) \neq 0$. Amennyiben – speciálisan – α' és β lineárisan független, úgy ez elegendően kis abszolút értékű v paraméter mellett bizonyosan bekövetkezik.

5.14. példák vonalfelületre.

(a) ***Érintőfelület.*** Legyen adva egy $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe. Az

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad (u,v) \mapsto f(u,v) := c(u) + vc'(u)$$

parametrizált felület vonalfelület, amelyet c *érintőfelület*ének hívunk. Tegyük föl speciálisan, hogy c bireguláris, és legyen $U := \{(u,v) \in I \times \mathbb{R} \mid v \neq 0\}$! Mivel ekkor $\forall\, (u,v) \in U$:

$$(D_1 f \times D_2 f)(u,v) = (c'(u) + vc''(u)) \times c'(u) = v(c''(u) \times c'(u)) \neq 0,$$

következik, hogy $f : U \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület. $f(U)$ két összefüggő, diszjunkt halmaz uniója, melyeknek közös határhalmaza $\operatorname{Im} c$.

Analóg módon nyerhető egy parametrizált görbe *főnormális* és *binormális felülete*.

(b) Az 5.12-beli konstrukcióban tegyük föl speciálisan, hogy $\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ parametrizált síkgörbe,

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad t \mapsto \beta(t) := e \notin \mathcal{L}(e_1, e_2).$$

Ekkor az

$$f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto f(u, v) := \alpha(u) + ve$$

vonalfelülethez jutunk, amelyet szintén *általánosított henger*nek hívunk, hiszen az $e = e_3 = (0, 0, 1)$ esetben visszaadja az 5.8.(d)-ben leírt paraméterezést.

(c) ***Általánosított kúpok.*** Továbbra is megtartva 5.12. feltételeit, tegyük föl, hogy

$$\tilde{f} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto \tilde{f}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

olyan vonalfelület, amelynél az $L_u = \alpha(u) + \mathcal{L}(\beta(u))$ $(u \in I)$ alkotóegyenesek mindegyike illeszkedik egy $p \notin \operatorname{Im}\alpha$ pontra. (Ha α parametrizált síkgörbe, azt is föltesszük, hogy p nem illeszkedik $\operatorname{Im}\alpha$ síkjára.) Ekkor

$$\forall\, u \in I : \ \exists\, v \in \mathbb{R} : \ p = \alpha(u) + v\beta(u),$$

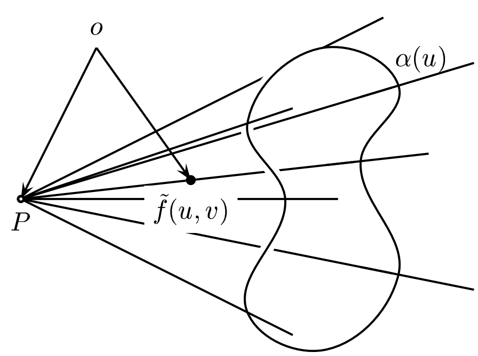
ennélfogva $\mathcal{L}(\beta(u)) = \mathcal{L}(p - \alpha(u))$ írható. Következik ilymódon, hogy $\operatorname{Im}\tilde{f}$ paraméterezése megadható

$$(u, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto p + v(\alpha(u) - p),$$

röviden

$$(*) \qquad f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 , \quad (u, v) \mapsto f(u, v) = p + v\delta(u)$$

alakban, ahol $\delta : I \to \mathbb{R}^3$ alkalmas parametrizált görbe.



A $(*)$ alakú parametrizált felületeket *általánosított kúp*oknak – röviden *kúp*oknak – nevezzük, a p pontot a kúp *csúcspont*jaként említjük. – Megvizsgáljuk f regularitásának feltételét. $\forall\ (u, v) \in I \times \mathbb{R}$:

$$D_1 f(u, v) = v\delta'(u) \ , \ D_2 f(u, v) = \delta(u) \ , \ (D_1 f \times D_2 f)(u, v) = v(\delta' \times \delta)(u),$$

következésképpen f akkor és csak akkor immerzió egy $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$ pontban, ha $v(\delta' \times \delta)(u) \neq 0$, vagyis ha $\delta'(u)$ és $\delta(u)$ lineárisan független és $v \neq 0$. Megállapíthatjuk ilymódon, hogy egy kúpnak *a csúcspont mindig szinguláris pontja.*

(d) ***Forgáshiperboloid.*** Legyen adva az $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ egységkör, s tekintsük ennek a kézenfekvő

$$\alpha : \ I := [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \ , \quad t \mapsto \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

paraméterezését! Képezzük α segítségével az

$$f : \ I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad (u,v) \mapsto f(u,v) := \alpha(u) + v(\alpha'(u) + e_3)$$

vonalfelületet (most tehát $\beta : \ u \in I \mapsto \beta(u) := \alpha'(u) + e_3$)! Részletesen kiírva:

$$\forall \ (u,v) \in I \times \mathbb{R} : \quad f(u,v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v),$$

illetve a komponensfüggvények segítségével:

$$f^1(u,v) = \cos u - v \sin u \ , \ f^2(u,v) = \sin u + v \cos u \ , \ f^3(u,v) = v.$$

Közvetlenül adódik, hogy $\forall \ (u,v) \in I \times \mathbb{R}$:

$$[f^1(u,v)]^2 + [f^2(u,v)]^2 - [f^3(u,v)]^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1,$$

így $\operatorname{Im} f$ pontjai eleget tesznek az

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

egyenletnek, ami egy *egyköpenyű hiperboloid* – mégpedig *forgáshiperboloid* – egyenlete. – Megjegyzendő, hogy ugyanehhez a felülethez jutunk akkor is, ha β helyett a $\tilde{\beta} : \ u \in I \mapsto \tilde{\beta}(u) := -\alpha'(u) + e_3$ parametrizált görbéből indulunk ki. Ez azt jelenti, hogy a forgáshiperboloid két alkotóegyenes-családdal is rendelkezik, s ilyen értelemben „duplán vonalfelület".

(e) ***Csavarfelület.*** Induljunk ki az

$$\alpha :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \ , \quad u \mapsto (\cos u, \sin u, \lambda u) \quad (\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\})$$

csavarvonalból és a

$$\beta :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \ , \quad u \mapsto \beta(u) := (\cos u, \sin u, 0)$$

parametrizált körvonalból. Ezek segítségével képezhető az

$$f :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad (u,v) \mapsto f(u,v) = \alpha(u) + (v-1)\beta(u)$$

vonalfelület. Részletesebben: $\forall\ (u,v) \in\ ]0,2\pi[\ \times \mathbb{R}:$

$$f(u,v) = (\cos u + (v-1)\cos u, \sin u + (v-1)\sin u, \lambda u) = (v\cos u, v\sin u, \lambda u).$$

f reguláris parametrizált felület, ugyanis $\forall\ (u,v) \in\ ]0,2\pi[\ \times \mathbb{R}:$

$$D_1 f(u,v) = (-v\sin u, v\cos u, \lambda)\ ,\ D_2 f(u,v) = (\cos u, \sin u, 0)\ ,$$
$$(D_1 f \times D_2 f)(u,v) = (-\lambda \sin u, \lambda\cos u, -v)\ ,$$

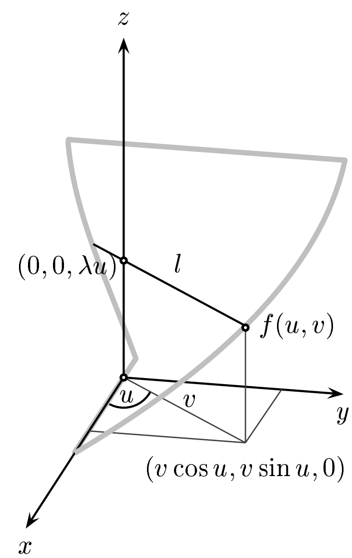
tehát

$$\|D_1 f \times D_2 f\|(u,v) = \sqrt{v^2+\lambda^2} \neq 0.$$

Következik ilymódon, hogy $\operatorname{Im} f$ felület, amelyet *csavarfelület*nek nevezünk. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\operatorname{Im} f$ szintfelületként is megadható az

$$x \sin\frac{z}{\lambda} = y\cos\frac{z}{\lambda}$$

egyenlettel.
Kinematikai interpretáció.

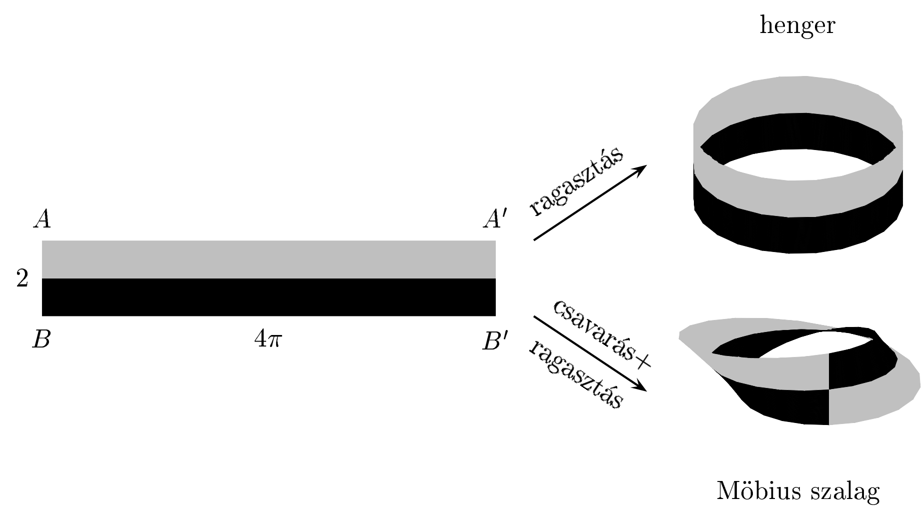


Tekintsünk egy ℓ egyenest, amely a z-tengelyt $(:= \mathcal{L}(e_3))$ merőlegesen metszi, s kiinduló helyzete az x-tengely $(:= \mathcal{L}(e_1))$. Tegyük föl, hogy ℓ egyidejűleg a z-tengely menti transzlációt és ugyanezen tengely körüli, konstans pályasebességű forgást végez. – Ekkor ℓ csavarfelületet ír le.

(f) ***Möbius szalag.***[1]
Szemléletes származtatás. – Legyen adva egy $ABB'A'$ téglalap, ahol $d(A,A') = 4\pi\ ,\ d(A,B) = 2.$

[1] *A.F. Möbius* (1790 - 1868) német matematikus, a csillagászat professzora, majd az obszervatórium igazgatója Lipcsében.

(i) *Topológiai konstrukció.* Azonosítva tetszőleges $P \in \overline{AB}$ pontot azzal a $P' \in \overline{A'B'}$ ponttal, amelyre $\overline{PP'} \perp \overline{AB}$ teljesül, hengerhez jutunk. Szemléletesen szólva, ilyenkor azt mondhatjuk, hogy a téglalap átellenes $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ oldalát „összeragasztottuk". Ez a „ragasztási eljárás" topológiailag teljesen szabatossá tehető. Jelöljük T-vel az alapul vett téglalapot, ρ-val pedig azt az ekvivalenciarelációt, amelynek ekvivalenciaosztályai az előbb leírt $\{P, P'\}$ kételemű halmazok, valamint a téglalap összes többi pontjai, mint egyelemű halmazok. Ekkor tekinthetjük a T/ρ topologikus teret (3.20.), amelyről könnyen belátható, hogy homeomorf a T téglalap $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ oldalának összeragasztásával nyert hengerpalásttal. – Ha mármost a leírt eljárást úgy módosítjuk, hogy az átellenes oldalak összeragasztását egy „csavarás" után végezzük – vagyis az ekvivalenciareláció értelmezésekor egy $P \in \overline{AB}$ pontot a téglalap centrumára vonatkozó tükörképével sorolunk egy osztályba – , akkor az ún. *Möbius-szalag*hoz jutunk.



(ii) *Geometriai konstrukció.*
Tekintsük az xy-síkban $(= \mathcal{L}(e_1, e_2))$ az $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ egyenletű $S^1(2)$ körvonalat, az xz-síkban $(= \mathcal{L}(e_1, e_3))$ pedig azt az $S^1(2)$-t metsző, 2 hosszúságú $\overset{\circ}{\overline{AB}}$ nyílt szakaszt, amelynek az x-tengely $(= \mathcal{L}(e_1))$ felezőmerőlegese. (Ekkor $\overset{\circ}{\overline{AB}} = \{(2, 0, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < \lambda < 1\}$.)

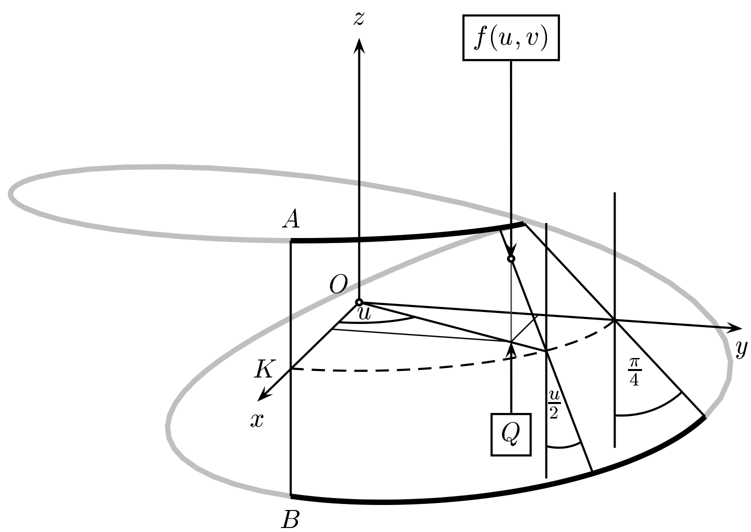
Elforgatva az xz-síkot a z-tengely körül, az $\overset{\circ}{\overline{AB}}$ szakasz K középpontja $S^1(2)$ mentén mozog. Hajtsuk végre egyidejűleg $\overset{\circ}{\overline{AB}}$ K körüli elforgatását az elmozgó xz-síkban úgy, hogy ha a sík $u \in \,]0, 2\pi[$ szöggel fordul el, akkor a szakasz elfordulásának szöge $\frac{u}{2}$. – Amennyiben az u paraméter befutja a $]0, 2\pi[$ nyílt intervallumot, úgy az $\overset{\circ}{\overline{AB}}$ nyílt szakasz pontjai olyan

Möbius-szalagot futnak be, amelyből $\overset{\circ}{\overline{AB}}$-t kivettük.

Parametrizált Möbius-szalag. Az (ii)-ben vázolt geometriai konstrukciónak a következő parametrizált felület felel meg:

$$f :]0, 2\pi\,[\times\,] - 1, 1[\, \to \mathbb{R}^3,$$

$$(u, v) \mapsto f(u, v) = ((2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u\ ,\ (2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u\ ,\ v \cos \frac{u}{2}).$$



$d(O, Q) = 2 - v \sin \frac{u}{2}$

Ha

$$\begin{aligned} \alpha :&\quad]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3\ ,\ u \mapsto \alpha(u) := (2 \cos u, 2 \sin u, 0),\\ \beta :&\quad]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3\ ,\ u \mapsto \beta(u) := (-\sin \frac{u}{2} \cos u, -\sin \frac{u}{2} \sin u, \cos \frac{u}{2}), \end{aligned}$$

akkor

$$\forall\ (u, v) \in\ ]0, 2\pi[\ \times\ ] - 1, 1[\ :\ f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u),$$

f tehát parametrizált vonalfelület.

6. $\mathbb{R}^n$-beli részsokaság érintőtere. Vektormezők részsokaságon

6.1. definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^m$ pedig differenciálható leképezés. Tetszőleges $p \in U$ pont esetén az*

$$(f_*)_p : \quad T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m \ , \quad v_p \mapsto (f_*)_p(v_p) := (f(p), f'(p)(v)) = (f'(p)(v))_{f(p)}$$

*lineáris leképezést f p-**beli érintőleképezés**ének nevezzük, az*

$$f_* : TU \cong U \times \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^m \ , \quad v_p \mapsto f_*(v_p) := (f_*)_p(v_p)$$

*leképezést pedig f U **fölötti érintőleképezés**ének mondjuk.*

6.2. megjegyzés. Megtartva a definíció jelöléseit, tekintsük $\mathbb{R}^n$ $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázisát! Ekkor $\forall\ p \in U$:

$$(f_*)_p(e_i)_p = (f(p), f'(p)(e_i)) = (f(p), D_if(p)) = (D_if(p))_{f(p)} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

6.3. állítás (Láncszabály érintőleképezésre).
Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, akkor

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Bizonyítás. $\forall\ v_p \in T_p\mathbb{R}^n :\ (g_* \circ f_*)(v_p) = g_*(f_*(v_p)) \overset{6.1.}{=}$

$$\begin{aligned} &= \quad (g_*)_{f(p)}(f(p), f'(p)(v)) := (g \circ f(p), g'[f(p)](f'(p)(v))) \overset{\mathrm{I.4.2.}(c)}{=} \\ &= \quad (g \circ f(p), (g \circ f)'(p)(v)) \overset{6.1.}{=} (g \circ f)_*(v_p) \Longrightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*. \end{aligned}$$

$\square$

6.4. megjegyzések.

(a) Geometriai szempontból az f_* érintőleképezés természetesebb, mint az f' derivált, ugyanis $(f_*)_p$ a p kezdőpontú vektorokat átviszi az $f(p)$ kezdőpontú vektorokba, míg $f'(p)$ bármely $p \in \mathbb{R}^n$ pont esetén az origó kezdőpontú vektorokon hat. – Az érintőleképezés bevezetése mellett szól a 6.3. láncszabály elegáns alakja is.

(b) f p-beli érintőleképezésére használatos a T_pf jelölés is, ekkor f_* helyett Tf-et írunk (T – tangens).

6.5. lemma. *Tekintsünk egy $c: I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét!*

(a) $\forall\ t \in I:\ \dot{c}(t) = c_*(1_t)$, ahol $1_t := (t, 1)$ a $T_t\mathbb{R}$ érintőtér kanonikus bázisa.

(b) Amennyiben $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ immerzió, úgy a $g \circ c$ $\mathbb{R}^m$-beli parametrizált görbe érintővektora egy $t \in I$ paraméterű pontban a

$$\dot{\widehat{g \circ c}}(t) = g_*(\dot{c}(t))$$

vektor, vagyis a képgörbe érintővektorai az eredeti görbe érintővektorainak képei az érintőleképezésnél.

Bizonyítás.

(a) $c_*(1_t) := (c(t), c'(t)(1)) \overset{\text{I.5.2.}}{=} (c(t), c'(t)) \overset{\text{I.5.18.}}{=:} \dot{c}(t)$.

(b) $\dot{\widehat{g \circ c}}(t) \overset{(a)}{=} (g \circ c)_*(1_t) \overset{6.3.}{=} g_*(\dot{c}(t))$. □

6.6. megjegyzés. Tegyük föl, hogy $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság. Egy $c: I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét *M-beli görbe*ként említünk, ha $\operatorname{Im} c \subset M$; az $n = 3$, $k = 2$ speciális esetben ilyenkor *felületi görbé*ről szólunk.

6.7. állítás. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság, $f: U \subset \mathbb{R}^k \to M$ lokális paraméterezése M-nek! Tekintsünk egy olyan $c: I \to M$ M-beli parametrizált görbét, amelyre $\operatorname{Im} c \subset f(U)$ teljesül. Ekkor egyértelműen létezik olyan*

$$(c^1, \dots, c^k): I \to \mathbb{R}^k, \quad t \mapsto (c^1(t), \dots, c^k(t))$$

$\mathbb{R}^k$-beli parametrizált görbe, hogy

$$c = f \circ (c^1, \dots, c^k).$$

Egy ilyen alakban megadott M-beli görbe deriváltja, illetve érintővektora egy tetszőleges t paraméterű pontban

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{k} c^{i\prime}(t) D_i f(q) =: c^{i\prime}(t) D_i f(q),$$

illetve

$$\dot{c}(t) = c^{i\prime}(t)(f_*)_q(e_i)_q,$$

ahol $q := (c^1(t), \dots, c^k(t))$, $(e_i)_{i=1}^k$ pedig $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisa.

Bizonyítás.

(a) Tekintsük az
$$\alpha := f^{-1} \circ c : \quad I \to \mathbb{R}^k$$
leképezést! Mivel f^{-1} szintén immerzió (5.3.), ez $\mathbb{R}^k$-beli parametrizált görbe. Ha $c^i := u^i \circ \alpha \quad (1 \leqq i \leqq k\ ,\ (u^i)_{i=1}^k \quad \mathbb{R}^k$ kanonikus koordinátarendszere), akkor
$$\alpha = (c^1, \ldots, c^k)$$
írható. A kapott parametrizált görbe megfelel a kívánalomnak, hiszen
$$c = (f \circ f^{-1}) \circ c = f \circ (f^{-1} \circ c) = f \circ \alpha = f \circ (c^1, \ldots, c^k).$$
c ezen előállítása az f paraméterezés rögzítése után egyértelmű, ha ugyanis $c = f \circ (\gamma^1, \ldots, \gamma^k)$ is fennáll, akkor
$$(c^1, \ldots, c^k) = f^{-1} \circ c = f^{-1} \circ [f \circ (\gamma^1, \ldots, \gamma^k)] = (\gamma^1, \ldots, \gamma^k)$$
adódik.

(b) Legyen $t \in I$ tetszőleges
$$\begin{aligned} c'(t) &\overset{(a)}{=} [f \circ (c^1, \ldots, c^k)]'(t) \overset{\text{I.4.2.,I.4.7.}}{=} \\ &= f'(c^1(t), \ldots, c^k(t))[c^{1\prime}(t), \ldots, c^{k\prime}(t)] = \\ &= f'(q)(c^{1\prime}(t)e_1 + \cdots + c^{k\prime}(t)e_k) = c^{1\prime}(t)f'(q)(e_1) + \cdots + \\ &+ c^{k\prime}(t)f'(q)(e_k) = c^{1\prime}(t)D_1 f(q) + \cdots + c^{k\prime}(t)D_k f(q) = \\ &= c^{i\prime}(t)D_i f(q). \end{aligned}$$
Ennek fölhasználásával
$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (c(t), c'(t)) = (f(q), c^{i\prime}(t)D_i f(q)) = \\ &= c^{i\prime}(t)(f(q), D_i f(q)) \overset{6.2.}{=} c^{i\prime}(t)(f_*)_q(e_i)_q. \end{aligned}$$
$\square$

6.8. definíció. *Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^n \quad k$-dimenziós részsokaságot, megadva ennek egy $f : \ U \subset \mathbb{R}^k \to M$ lokális paraméterezését. Legyen $(e_i)_{i=1}^k \quad \mathbb{R}^k$ kanonikus bázisa. Az*
$$\underline{f}_i : \quad q \in U \mapsto \underline{f}_i(q) := (f_*)_q(e_i)_q \overset{6.2.}{=} (D_i f(q))_{f(q)} \in T_{f(q)}\mathbb{R}^n$$
$$(1 \leqq i \leqq k)$$
*leképezéseket az f **paraméterezéshez tartozó koordinátavektormezők**nek hívjuk.*

6.9. megjegyzések. Tartsuk meg 6.7. illetve 6.8. jelöléseit és feltételeit!

(a) Az $\underline{f}_i$ koordinátavektormezők bevezetése után a $\dot{c}(t)$ érintővektor a $\dot{c}(t) = c^{i\prime}(t)\underline{f}_i(q) \quad (q = (c^1(t), \ldots, c^k(t)))$ alakban írható föl.

(b) Tetszőleges $q \in U$ pont rögzítése után tekintsük az

$$\alpha_{(i)} : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \ , \quad t \mapsto \alpha_{(i)}(t) := q + te_i \quad (1 \leqq i \leqq k)$$

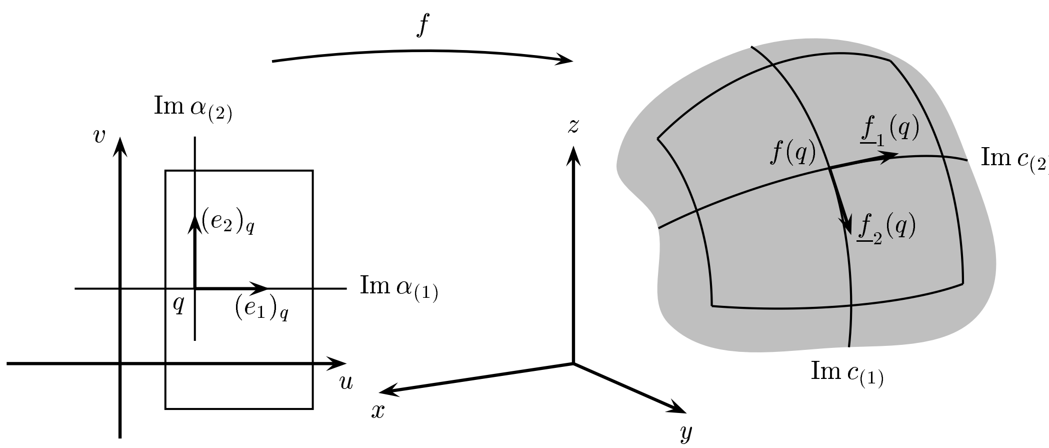
egyeneseket, s legyen

$$c_{(i)} := f \circ \alpha_{(i)} \quad (1 \leqq i \leqq k)\,!$$

Az így kapott M-beli görbéket ***paramétervonal***aknak nevezzük, $c_{(i)}$ az i-edik paramétervonal. Mivel $\alpha_{(i)}(0) = q$, az imént tett észrevétel figyelembevételével

$$\dot{c}_{(i)}(0) = (u^j \circ \alpha_{(i)})'(0)\underline{f}_j(q) = \delta_i^j \underline{f}_j(q) = \underline{f}_i(q)$$

írható (hiszen $c_{(i)}$ 6.7-ben leírt előállításánál most az $u^j \circ f^{-1} \circ (f \circ \alpha_{(i)})$ koordinátafüggvények adódnak; ld. a bizonyítás (a) részét). Eredményünk azt jelenti, hogy az $\underline{f}_i(q)$ vektor az $f(q) \in M$ ponton átmenő i-edik paramétervonal $f(q)$-beli érintővektora. Erre tekintettel az $\underline{f}_i$ leképezésekre a *„paramétervonalérintő-vektormező”* elnevezés is használatos.



$\mathbb{R}^3$-beli felület esetén az 1., illetve 2. paramétervonalakat ***u-vonal***akként illetve ***v-vonal***akként is szokás említeni.

6.10. definíció. *Egy $M \subset \mathbb{R}^n$ részsokaság egy p pontjában vett* ***érintővektor****on olyan $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ p-beli vektort értünk, amelyhez megadható $c: I \to M$ M-beli parametrizált görbe úgy, hogy*

$$\dot{c}(0) = v_p \ , \quad \text{azaz} \;\; c(0) = p \;\; \text{és} \;\; c'(0) = v.$$

Az M részsokaság összes p-beli érintővektorainak halmazát M p-beli ***érintőteré****nek nevezzük, és T_pM-mel jelöljük; speciálisan $\mathbb{R}^3$-beli felület esetén* ***érintősík****ról, görbék esetén pedig* ***érintőegyenes****ről beszélünk. Az M részsokaság összes érintőtereinek*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

unióját M ***érintősokaság****ának mondjuk.*

6.11. megjegyzések.

(a) Az $\mathbb{R}^n$ tér I.1.14-ben bevezetett érintővektorai érintővektorok a mostani definíció szerinti értelemben is, hiszen ha $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ tetszőleges, és például

$$c: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \ , \quad t \mapsto c(t) := p + tv \ , \quad \text{akkor } v_p = \dot{c}(0).$$

(b) A későbbiekben általánosabb körülmények között fogjuk jelezni, hogy TM joggal nevezhető érintősokaságnak.

6.12. állítás (Az érintővektorok lokális objektumok). *Tegyük föl, hogy M részsokasága az $\mathbb{R}^n$ térnek, p pedig tetszőleges pontja M-nek. Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ a p pontot tartalmazó nyílt halmaz. Egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ vektor akkor és csak akkor érintővektora $U \cap M$-nek p-ben, ha érintővektora M-nek p-ben.*

Bizonyítás. Vezessük be az $\widetilde{M} := U \cap M$ rövidítést!

(a) Ha $v_p \in T_p\widetilde{M}$, akkor a 6.10. definíció értelmében van olyan $c: I \to \widetilde{M}$ parametrizált görbe, amelyre $\dot{c}(0) = v_p$ teljesül. Ekkor azonban c egyúttal M-beli görbe is, s ezért $v_p \in T_pM$ ugyancsak fennáll.

(b) Tegyük föl – megfordítva –, hogy $v_p \in T_pM$, s tekintsünk olyan $c: \ I \to M$ parametrizált görbét, amely eleget tesz a $\dot{c}(0) = v_p$ feltételnek. Gondoljuk most meg, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, c folytonos leképezése az I intervallumnak M-be, s hogy a $0 \in I$ (belső) pont képe a c leképezésnél $\widetilde{M}$-nak egy belső pontja! Mindebből következik, hogy megadható a 0-nak olyan $J \subset I$ környezete, hogy $c(J) \subset \widetilde{M}$. Legyen $\tilde{c} := c \restriction J$! Ekkor a $\tilde{c}$ $\widetilde{M}$-beli parametrizált görbére $\dot{\tilde{c}}(0) = \dot{c}(0) = v_p$ teljesül, tehát $v_p \in T_p\widetilde{M}$. □

6.13. tétel. *Ha $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós ($k \in \mathbb{N}^+$) részsokaság, akkor tetszőleges $p \in M$ esetén T_pM k-dimenziós altere $T_p\mathbb{R}^n$-nek, mégpedig*

$$\boxed{T_pM = \operatorname{Im}(f_*)_q = f_*(T_q\mathbb{R}^k)},$$

ahol f egy paraméterezés a p pont körül, $f(q) = p$.

Bizonyítás. Tekintsük az $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ p-körüli paraméterezést, s legyen $(e_i)_{i=1}^k$ a szokott módon $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisa.

(a)
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f_*)_q &= \mathcal{L}((f_*)_q(e_1)_q, \dots, (f_*)_q(e_k)_q) \overset{6.2.}{=} \\ &= \mathcal{L}((p, D_1 f(q)), \dots, (p, D_k f(q))) = \\ &= p + \mathcal{L}(D_1 f(q), \dots, D_k f(q)), \end{aligned}$$

így $\operatorname{Im}(f_*)_q$ k-dimenziós altere $T_p\mathbb{R}^n$-nek, hiszen f immerzió volta miatt $(D_1 f(q), \dots, D_k f(q))$ lineárisan független.

(b) Belátjuk, hogy $T_pM \subset \operatorname{Im}(f_*)_q$. – Legyen $v_p \in T_pM$ tetszőleges! 6.7. alapján megadható olyan
$$c = f \circ (c^1, \dots, c^k) : I \to M$$
M-beli parametrizált görbe, hogy $c(0) = f(q) = p$, és
$$v_p = \dot{c}(0) = c^{i\prime}(0)\underline{f}_i(q) \in \operatorname{Im}(f_*)_q \ ;$$
így $v_p \in T_pM \implies v_p \in \operatorname{Im}(f_*)_q$.

(c) Ellenőrizzük végül, hogy $\operatorname{Im}(f_*)_q \subset T_pM$. – Tekintsünk egy $v_p := \lambda^i \underline{f}_i(q) \in \operatorname{Im}(f_*)_q$ vektort! $(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in \mathbb{R}^k$ fölhasználásával képezzük a
$$\gamma : I \to U \subset \mathbb{R}^k \ , \quad t \mapsto \gamma(t) := (q^1 + \lambda^1 t, \dots, q^k + \lambda^k t)$$
$\mathbb{R}^k$-beli parametrizált görbét, γ segítségével pedig a $c := f \circ \gamma : I \to M$ M-beli parametrizált görbét! Ennek érintővektora a 0 paraméterű pontban
$$\dot{c}(0) \overset{6.7.}{=} \lambda^1 \underline{f}_1(q) + \dots + \lambda^k \underline{f}_k(q) = v_p,$$
tehát $v_p \in T_pM$, amivel igazoltuk a kívánt tartalmazási relációt. □

6.14. tétel. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ nemüres nyílt halmaz, $g: U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, $\alpha \in \operatorname{Im} g$, s tegyük föl, hogy g szubmerzió $g^{-1}(\alpha)$ pontjaiban! Ekkor az $M := g^{-1}(\alpha)$ n-dimenziós hiperfelület tetszőleges $p \in M$ pontjához tartozó érintőtér*
$$\boxed{T_pM = [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp = \operatorname{Ker}(g_*)_p},$$
következésképpen T_pM az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér
$$\boxed{\langle x - p \ , \ \operatorname{grad} g(p) \rangle = 0}$$
egyenletű hipersíkja.

Bizonyítás. Mivel g szubmerzió a vizsgált p pontban, $g'(p) \neq 0$. Ez azt is jelenti, hogy $(\operatorname{grad} g(p))_p$ nemzérus vektora a $T_p\mathbb{R}^{n+1}$ érintőtérnek. Így $(\operatorname{grad} g(p))_p$ a $T_p\mathbb{R}^{n+1}$ vektortér $\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p$ 1-dimenziós alterét generálja. Ennek
$$[\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp \subset T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

ortogonális komplementere n-dimenziós, $T_pM = [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp$ igazolásához elegendő tehát azt belátnunk, hogy

$$T_pM \subset [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp$$

(hiszen 6.13. értelmében $\dim T_pM = n$). – Tekintsünk ebből a célból egy tetszőleges $v_p \in T_pM$ érintővektort. Ehhez a 6.10. definíció szerint megadható olyan $c: \ I \to M$ M-beli parametrizált görbe, hogy $\dot{c}(0) = v_p$. Mivel $\forall\ t \in I:$ $g \circ c(t) = \alpha$, a $g \circ c: \ I \to \mathbb{R}$ függvény konstans. Így

$$0 = (g \circ c)'(0) \overset{\text{I.5.21.}}{=} \langle \operatorname{grad} g(c(0)), c'(0)\rangle = \langle (\operatorname{grad} g(p))_p, v_p\rangle,$$

tehát $v_p \in [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp$, amivel beláttuk a kívánt tartalmazási relációt. Figyelembe véve végül, hogy

$$\forall\ v_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}: \quad \langle (\operatorname{grad} g(p))_p, v_p\rangle = \langle \operatorname{grad} g(p), v\rangle = g'(p)(v),$$

megállapíthatjuk, hogy

$$v_p \in [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp \iff v \in \operatorname{Ker} g'(p) \iff v_p \in \operatorname{Ker}(g_*)_p. \qquad \square$$

6.15. példák.

(a) Legyen adva a $g: \ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto g(p) := \langle p, p\rangle - 1$ függvény, s tekintsük a $g^{-1}(0) = S^n$ gömböt (ld. 5.8.(a))! Mivel $\forall\ p \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\operatorname{grad} g(p) = 2p$ (I.4.6.), 6.14. értelmében $\forall\ p \in S^n$:

$$T_pS^n = [\mathcal{L}(\operatorname{grad} g(p))_p]^\perp = \{v_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\}.$$

(b) Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) térben a

$$g: \ \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}\ , \quad v \mapsto g(v) := \langle \varphi(v), v\rangle - 1$$

függvény ($\varphi \in \operatorname{End} \mathbb{R}^{n+1}$ nemzérus önadjungált lineáris operátor) segítségével megadott $M := g^{-1}(0)$ másodrendű alakzatot (v.ö. 5.8.(c))! Ekkor – mint láttuk – $\forall\ p \in M$: $\operatorname{grad} g(p) = 2\varphi(p)$, így a T_pM érintőtér egyenlete $\langle x - p, \varphi(p)\rangle = 0$, illetve $\langle \varphi(p), p\rangle = 1$ folytán

$$\langle x, \varphi(p)\rangle = 1.$$

Legyen $(\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ φ mátrixa $\mathbb{R}^{n+1}$ kanonikus bázisára vonatkozóan! Ez az értelmezés és φ önadjungáltsága alapján azt jelenti, hogy

$$\alpha_{ij} = \langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle \varphi(e_j), e_i\rangle = \alpha_{ji} \quad (1 \leqq i, j \leqq n+1).$$

Amennyiben $p = \nu^i e_i$, úgy $\varphi(p) = \sum\limits_{i,j=1}^{n+1} \alpha_{ij}\nu^i e_j$, és T_pM egyenlete a

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \alpha_{ij}\nu^i x^j = 1$$

alakot ölti. – Tegyük föl speciálisan, hogy $M \subset \mathbb{R}^2$ az

$$\frac{x^2}{(\alpha)^2} + \frac{y^2}{(\beta)^2} = 1$$

egyenletű ellipszis! Most az (α_{ij}) mátrix az $\begin{pmatrix} \frac{1}{(\alpha)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\beta)^2} \end{pmatrix}$ mátrix, s egy $p = (\nu^1, \nu^2) \in M$ pontban az érintőegyenes egyenlete a mondottak szerint

$$\frac{\nu^1 x}{(\alpha)^2} + \frac{\nu^2 y}{(\beta)^2} = 1.$$

(c) ***Csoportsokaságok érintőterei.***

1. *Az általános lineáris csoport.* $GL(n,\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^{n^2}$-nek nyílt részsokasága. Mivel a részsokaságok érintővektorai lokális objektumok (6.12.), tetszőleges $p \in GL(n,\mathbb{R})$ esetén $T_pGL(n,\mathbb{R})$ természetes módon azonosítható $T_p\mathbb{R}^{n^2}$-tel, ez utóbbi viszont $\mathbb{R}^{n^2}$-tel. Tehát:

$$\forall\, p \in GL(n,\mathbb{R}): \quad T_pGL(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

s valamennyi izomorfizmus természetes.

2. A következőkben az $O(n)$ ortogonális csoport és az $SL(n,\mathbb{R})$ unimoduláris csoport $I = (\delta_i^j)$ egységelemben vett érintőterét fogjuk meghatározni. Ehhez szükségünk lesz néhány alapvető analízisbeli tényre, amelyeket most röviden összefoglalunk. Részletes kifejtésük – általánosabb keretek között, de igen világos tárgyalásban – megtalálható például A. Avez Irodalomjegyzékben szereplő munkájában.

(1) Tegyük föl, hogy V véges dimenziójú, valós vektortér, amelyben adva van egy $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ függvény, eleget téve a következő feltételeknek:

(N1) $\forall v \in V : \|v\| \geq 0; \qquad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

(N2) $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|;$

(N3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|.$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\| \ \|$ normafüggvény V-n, a $(V, \| \ \|)$ párt pedig (véges dimenziójú) ***Banach-tér***nek nevezzük[1]. Triviális példa: minden euklideszi

[1] *S. Banach* (1892 - 1945) lengyel matematikus, 1927-től a lvowi egyetem professzora.

vektortér Banach-tér a belső szorzatból származó normával; lásd I.1.5.,1.6. – Jelen alpont további részében V véges dimenziójú Banach-teret jelent.

(2) Ha $A \in \mathrm{End}(V)$ és

$$\|A\| := \max\{\|A(v)\| \mid v \in V,\, \|v\| = 1\},$$

akkor az így értelmezett

$$\|\ \| : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény normafüggvény, s ezáltal $\mathrm{End}(V)$ is Banach-térré válik. (A definícióban szereplő maximum valóban létezik, ugyanis V egységnyi normájú elemei kompakt halmazt alkotnak, az endomorfizmusai pedig folytonos leképezések.)

(3) Ha tetszőleges $A \in \mathrm{End}(V)$ és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n,$$

akkor a (σ_n) sorozat konvergens. Ennek határértékét az A endomorfizmus *exponens*ének nevezzük és $\exp A$-val vagy e^A-val jelöljük:

$$\exp A = e^A := \lim_{n\to\infty} \sigma_n =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(4) $\forall\, A \in \mathrm{End}(V) : \|\exp A\| \leq \exp \|A\|$.

(5) Ha $A, B \in \mathrm{End}(V)$ és $AB = BA$, akkor

$$\exp(A + B) = \exp A \exp B;$$

speciálisan

$$\exp A \in GL(V), \qquad (\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

(6) Rögzített $A \in \mathrm{End}(V)$ esetén a

$$c :\ \mathbb{R} \to GL(V), \quad t \mapsto c(t) := \exp tA$$

leképezés sima és

$$\forall t \in \mathbb{R} : c'(t) = Ac(t).$$

(7) $\forall A \in \mathrm{End}(V) : \det \exp A = \exp \mathrm{tr}\, A$,

ahol $\mathrm{tr}\, A \in \mathbb{R}$, amelyet úgy képezünk, hogy tekintjük A tetszőleges mátrixreprezentását, s vesszük a főátlóbeli elemek összegét. (Ennek megfelelően formulánk jobboldalán természetesen a szokásos exponencális függvény szerepel.) – Azt, hogy $\mathrm{tr}\, A$ definíciója korrekt, illetve hogy bevezetésének elegánsabb módja is lehetséges, III.6.4-ben fogjuk megmutatni.

3. Legyen

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = -A\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall v \in \mathbb{R}^n : \langle Av, v\rangle = 0\}.$$

Belátjuk, hogy

$$T_I O(n) = \mathcal{A}.$$

Tetszőlegesen rögzített $A \in \mathcal{A}$ mellett tekintsük a

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}), \qquad t \mapsto c(t) := \exp tA$$

parametrizált görbét, s képezzük segítségével az

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \mapsto f(t) := \langle c(t)(v), c(t)(v)\rangle$$

függvényt! Ez differenciálható; a Leibniz-szabály és (6) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = 2\langle Ac(t)(v),\, c(t)(v)\rangle = 0,$$

tekintettel arra is, hogy $A \in \mathcal{A}$. Eszerint f konstans, így

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(0) = \langle \exp 0(v), \exp 0(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2.$$

Ilymódon

$$\forall t \in \mathbb{R} : c(t) \in GL(n, \mathbb{R}) \textit{ normatartó},$$

tehát

$$\operatorname{Im} c \subset O(n).$$

Mivel

$$c(0) = \exp 0 \cdot A = I, \qquad c'(0) \overset{(6)}{=} A \exp 0 \cdot A = A;$$

következik, hogy

$$\mathcal{A} \subset T_I O(n).$$

Itt azonban ténylegesen egyenlőség áll fönn, ugyanis

$$\dim T_I O(n) = \dim O(n) \overset{5.8.(f)}{=} \frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{A}.$$

Meggondolásaink során $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ elemeit $\mathbb{R}^n$ endomorfizmusaiként interpretáltuk, mint $v \in \mathbb{R}^n \mapsto Av$ (mátrixszorzat!) leképezéseket. Ekkor $GL(n, \mathbb{R})$ $GL(\mathbb{R}^n)$-nel, $O(n)$ $O(\mathbb{R}^n)$-nel válik azonosíthatóvá. Ezzel az azonosítási lehetőséggel a folytatásban is élünk.

4. Legyen

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid trA = 0\}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$T_I SL(n, \mathbb{R}) = \mathcal{N}.$$

Tekintsük, ezúttal rögzített $A \in \mathcal{N}$ mellett, a

$$c : t \in \mathbb{R} \longrightarrow c(t) := \exp tA$$

parametrizált görbét! (7)-ből azonnal adódik, hogy $\operatorname{Im} c \subset SL(n, \mathbb{R})$.

$$c(0) = I, \quad c'(0) = A$$

folytán így következik, hogy

$$\mathcal{N} \subset T_I SL(n, \mathbb{R}).$$

Itt

$$\dim T_I SL(n, \mathbb{R}) = \dim SL(n, \mathbb{R}) \overset{5.8.(f)}{=} n^2 - 1.$$

$\mathcal{N}$ azonban szintén $(n^2 - 1)$-dimenziós, hiszen a

$$tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad A \mapsto trA$$

szürjektív lineáris függvény nulltere, s mindez azt jelenti, hogy

$$T_I SL(n, \mathbb{R}) = \mathcal{N}.$$

6.16. definíció. *Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^n$ részsokaságot! M-en adott **vektormezőn** olyan $\underline{X} : M \to T\mathbb{R}^n$ leképezést értünk, amelyre teljesülnek a következők:*

(1) $\forall\, p \in M : \underline{X}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$.

(2) az

$$X : M \to \mathbb{R}^n, \ p \mapsto X(p) := v, \text{ ha } \underline{X}(p) = (p, v)$$

*leképezés, az $\underline{X}$ vektormező ún. **csatolt leképezése**, differenciálható (a 4.17. szerinti értelemben).*

Azt mondjuk, hogy egy $\underline{X} : M \to T\mathbb{R}^n$ vektormező

***érintővektormező**, ha $\forall\, p \in M : \underline{X}(p) \in T_pM$;*

***normális vektormező**, ha $\forall\, p \in M : \underline{X}(p) \in (T_pM)^\perp$. Az $\underline{X}$ normális vektormezőt **normálegységvektormezőként** említjük, ha $\forall\, p \in M$: $\|\underline{X}(p)\| = 1$ ($T_p\mathbb{R}^n$ szokásos normáját szerepeltetve).*

6.17. megjegyzések.

(a) Egy $M \subset \mathbb{R}^n$ részsokaságon adott összes érintővektormezők halmazát $\mathfrak{X}(M)$-mel jelöljük. $\mathfrak{X}(M)$ a $C^\infty(M)$ gyűrű fölötti modulussá válik, ha két vektormező összegét, illetve egy vektormező függvényszeresét az

$$(\underline{X} + \underline{Y})(p) := \underline{X}(p) + \underline{Y}(p) \ \text{, illetve } \ (f\underline{X})(p) := f(p)\underline{X}(p)$$

$$(\underline{X}, \underline{Y} \in \mathfrak{X}(M) \ , \ f \in C^\infty(M) \ , \ p \in M \text{ tetszőleges})$$

előírással értelmezzük.

(b) A vektormezőkre adott definíció vonatkozik arra az esetre is, amikor $M := U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz (illetve ha speciálisan $M = \mathbb{R}^n$). Egy U-n adott vektormező ekkor olyan

$$\underline{X}: \; U \to T\mathbb{R}^n \;, \; p \mapsto \underline{X}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

leképezést jelent, amely mint U-nak $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$-be való leképezése a szokásos értelemben differenciálható. Az $\mathbb{R}^n$-en adott vektormezők $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-modulusára az $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ jelölést használjuk; $\mathfrak{X}(U)$ az U fölötti vektormezők $C^\infty(U)$-modulusa.

6.18. lemma. *Legyen adva egy $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság, s tegyük föl, hogy $f: U \to M$ és $h: V \to M$ olyan lokális paraméterezései M-nek, amelyeknél $W := f(U) \cap h(V) \neq \emptyset$. Tekintsük a*

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^k) := f^{-1} \circ h: \; h^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^k \to f^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^k$$

átmenetleképezést! Ha $p = f(a) = h(b) \in W$, akkor a T_pM érintőtér $(\underline{f}_i(a))_{i=1}^k$ és $(\underline{h}_i(b))_{i=1}^k$ bázisa közötti átmenet mátrixa a

$$(D_i\varphi^j(b)) \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$$

Jacobi-mátrix, azaz a bázisvektorok a paraméterezés tekintett megváltozása esetén a

$$\underline{h}_i(b) = (D_i\varphi^j)(b)\underline{f}_j(a) \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

összefüggés szerint transzformálódnak.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\underline{h}_i(b) &\overset{6.8.}{=} (h(b), D_ih(b)) = (h(b), h'(b)(e_i)) = \\
&= (p, (f \circ \varphi)'(b)(e_i)) \overset{\mathrm{I.4.2.(c)}}{=} (p, f'[\varphi(b)]\varphi'(b)(e_i)) = \\
&= (p, f'(a)\varphi'(b)(e_i)) \overset{\mathrm{I.4.7.}}{=} (p, f'(a)[\varphi^{1\prime}(b)e_i, \dots, \varphi^{k\prime}(b)e_i]) = \\
&= (p, f'(a)(D_i\varphi^1(b), \dots, D_i\varphi^k(b)) = \\
&= (p, f'(a)(D_i\varphi^1(b)e_1 + \dots + D_i\varphi^k(b)e_k)) = \\
&= (p, D_i\varphi^1(b)D_1f(a) + \dots + D_i\varphi^k(b)D_kf(a)) = \\
&= (p, \sum_{j=1}^k D_i\varphi^j(b)D_jf(a)) =: (p, D_i\varphi^j(b)D_jf(a)) = \\
&= D_i\varphi^j(b)(p, D_jf(a)) = \\
&\overset{6.8.}{=} D_i\varphi^j(b)\underline{f}_j(a) \qquad (1 \leqq i \leqq k).
\end{aligned}$$

□

6.19. megjegyzés. Mivel $\mathbb{R}^n$ részsokaságai az 5.2-ben leírtak szerint differenciálható sokaságok (a differenciálható struktúrát a paraméterezések származtatják), a sokaságok irányíthatóságának 4.10-ben bevezetett fogalma ezekre szintén értelemmel bír. Ebben az esetben egy $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság irányíthatósága azt jelenti, hogy megadható M (lokális) paraméterezéseinek egy olyan családja, amelyre teljesülnek a következők:

(1) a paraméterezésekhez tartozó koordinátakörnyezetek lefedését alkotják M-nek;

(2) ha az $f: U \subset \mathbb{R}^k \to M$ és $h: V \subset \mathbb{R}^k \to M$ paraméterezésnél $W := f(U) \cap h(V) \neq \emptyset$, akkor az $f^{-1} \circ h: h^{-1}(W) \to f^{-1}(W)$ átmenetleképezés deriváltja $h^{-1}(W)$ minden pontjában irányítástartó:

$$\forall\, a \in h^{-1}(W): \ \det(f^{-1} \circ h)'(a) > 0.$$

6.20. tétel. *Egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület pontosan akkor irányítható, ha megadható M-en seholsem zérus normális vektormező.*

Bizonyítás.

(a) Tegyük föl, hogy M irányítható, és legyen $\mathcal{O}$ M lokális paraméterezéseinek olyan családja, amely eleget tesz a 6.19./(1),(2) feltételeknek. Tekintve egy $p \in M$ pontot, válasszunk egy-egy $\mathcal{O}$-hoz tartozó

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M, \quad \text{illetve} \quad h: V \subset \mathbb{R}^2 \to M$$

paraméterezést a p pont körül. Ekkor $p \in f(U) \cap h(V)$, mondjuk $p = f(a) = h(b)$; $a \in U$, $b \in V$. Az f-hez tartozó $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ koordinátavektormezők segítségével képezhetők az

$$\underline{X}_i := \underline{f}_i \circ f^{-1}: \ f(U) \subset M \to TM \qquad (1 \leqq i \leqq 2)$$

vektormezők. Ekkor

$$\underline{N} := \frac{1}{\|\underline{X}_1 \times \underline{X}_2\|} \underline{X}_1 \times \underline{X}_2$$

(a vektormezők vektoriális szorzatát pontonként értelmezve, v.ö. I.5.23.) normálegységvektormező $f(U)$ fölött – s így speciálisan seholsem tűnik el. Jegyezzük meg, hogy

$$\underline{N}(p) = \frac{1}{\|\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a)\|} \underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a).$$

Hasonló módon konstruálhatjuk a $h: V \to M$ paraméterezés segítségével az

$$\widetilde{\underline{N}} := \frac{1}{\|\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2\|} \underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2 \ , \ \underline{Y}_i := \underline{h}_i \circ h^{-1} \qquad (1 \leqq i \leqq 2)$$

$h(V)$ fölötti normálegységvektormezőt. Megmutatjuk, hogy $\widetilde{\underline{N}}(p) = \underline{N}(p)$.

Tekintsük a

$$\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) := f^{-1} \circ h : \ h^{-1}(W) \to f^{-1}(W) \quad (W := f(U) \cap h(V))$$

átmenetleképezést! Ekkor

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_1(p) \times \underline{Y}_2(p) &= \underline{h}_1(b) \times \underline{h}_2(b) \overset{6.18.}{=} [D_1\varphi^1(b)\underline{f}_1(a) + D_1\varphi^2(b)\underline{f}_2(a)] \times \\
&\times \ [D_2\varphi^1(b)\underline{f}_1(a) + D_2\varphi^2(b)\underline{f}_2(a)] = \\
&= D_1\varphi^1(b)D_2\varphi^2(b)\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a) + \\
&+ \ D_1\varphi^2(b)D_2\varphi^1(b)\underline{f}_2(a) \times \underline{f}_1(a) = \\
&= [D_1\varphi^1(b)D_2\varphi^2(b) - D_1\varphi^2(b)D_2\varphi^1(b)]\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a) = \\
&= \begin{vmatrix} D_1\varphi^1(b) & D_2\varphi^1(b) \\ D_1\varphi^2(b) & D_2\varphi^2(b) \end{vmatrix} \underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a) = \\
&= \det \varphi'(b)\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a).
\end{aligned}$$

A föltevés folytán itt $\det \varphi'(b) > 0$, s így

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{N}}(p) &= \frac{1}{\| \det \varphi'(b)\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a)\|} \det \varphi'(b)\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a) = \\
&= \frac{1}{\|f_1(a) \times f_2(a)\|}\underline{f}_1(a) \times \underline{f}_2(a) = \underline{N}(p)
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ha az $\mathcal{O}$-hoz tartozó paraméterezések segítségével a leírtak szerint lokálisan normálegységvektormezőket konstruálunk, akkor ez az eljárás egy jól definiált, globálisan értelmezett $\underline{N} : \ M \to T\mathbb{R}^3$ normálegységvektormezőt eredményez M-en. – Beláttuk ilymódon, hogy ha az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület irányítható, akkor létezik M-en seholsem zérus normális vektormező.

(b) Megfordítva, tegyük föl, hogy *M-en megadható seholsem zérus normális vektormező.* Ekkor egyben létezik $\underline{N} : \ M \to T\mathbb{R}^3$ normálegységvektormező is M-en. Tekintsük M paraméterezéseinek egy olyan családját, amelynél a koordinátakörnyezetek összefüggők,és lefedését adják M-nek. Legyen (U, f) és (V, h) e család két olyan tagja, hogy $W := f(U) \cap h(V) \neq \emptyset$. Megmutatjuk: mindig elérhető,hogy $h^{-1}(W)$ pontjaiban a $\varphi = f^{-1} \circ h$ átmenetleképezés deriváltja pozitív determinánsú. – Képezzük a bizonyítás (a) részében látottak szerint az

$$\frac{1}{\|\underline{X}_1 \times \underline{X}_2\|}\underline{X}_1 \times \underline{X}_2 \ \text{ és az } \ \frac{1}{\|\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2\|}\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2$$

$f(U)$ illetve $h(V)$ fölötti normálegységvektormezőt! Ekkor a

$$g : \ f(U) \subset M \to \mathbb{R} \ , \ p \mapsto g(p) := \langle \underline{N}(p) \ , \frac{\underline{X}_1(p) \times \underline{X}_2(p)}{\|\underline{X}_1(p) \times \underline{X}_2(p)\|} \rangle$$

függvény értelmezési tartományának tetszőleges pontjában 1-et vagy -1-et vesz föl. Mivel g nyilvánvalóan folytonos, és föltevésünk szerint $f(U)$ összefüggő, következik, hogy g jeltartó (v.ö. 3.17.(3)). Az is föltehető, hogy g értékkészlete az $\{1\}$ halmaz, ha ugyanis nem ez a helyzet, akkor f-nek az

$$f \circ \rho, \quad \rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ (u, v) \mapsto (-u, v)$$

leképezéssel való kicserélése ehhez az esethez vezet. Következik tehát, hogy

$$\underline{N} \restriction f(U) = \frac{1}{\|\underline{X}_1 \times \underline{X}_2\|} \underline{X}_1 \times \underline{X}_2.$$

Ugyanilyen meggondolással kapjuk, hogy

$$\underline{N} \restriction h(V) = \frac{1}{\|\underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2\|} \underline{Y}_1 \times \underline{Y}_2.$$

Ha mármost valamely $p = f(a) = h(b)$ pontban $\det \varphi'(b) < 0$ volna, akkor az (a)-ban látottak szerint

$$\frac{1}{\|\underline{Y}_1(p) \times \underline{Y}_2(p)\|} \underline{Y}_1(p) \times \underline{Y}_2(p) = -\frac{1}{\|\underline{X}_1(p) \times \underline{X}_2(p)\|} \underline{X}_1(p) \times \underline{X}_2(p),$$

azaz $\underline{N}(p) = -\underline{N}(p)$, s ennélfogva $\underline{N}(p) = \underline{0}$ következne, ami ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy M-en létezik a 6.19./(1),(2) feltételeknek eleget tevő paraméterezés-család, M tehát irányítható. $\square$

6.21. megjegyzés. Jelentősen kihasználtuk, hogy a vektormező fogalmába belefoglaltunk egy simasági feltételt (ld. 6.16./(2)), ami speciálisan folytonosságot von maga után. Ennek híján a tétel nyilvánvalóan érvényét veszítené!

6.22. következmény. *Minden szinthalmazként megadható felület irányítható.*

Bizonyítás. Tekintsük az $M := g^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$ felületet, ahol $g : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sima függvény, $\alpha \in \operatorname{Im} g$, és g szubmerzió M pontjaiban. Észrevételünk igazolásaként elegendő arra utalnunk, hogy 6.14-ből adódóan a

$$p \in M \mapsto (p, \operatorname{grad} g(p)) \in T_p\mathbb{R}^3$$

leképezés seholsem zérus normális vektormező M-en. $\square$

6.23. megjegyzések.

(a) 6.22. általánosítható az $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$ tér hiperfelületeire, tehát az is igaz, hogy $\mathbb{R}^{n+1}$ minden szinthalmazként megadható – másként: *implicit megadású* – hiperfelülete irányítható.

(b) Megmutatható, hogy a Möbius-szalag (5.14.(f)) nem irányítható.

(c) Megemlítünk végül az irányíthatósággal kapcsolatban két finomabb eredményt.

(i) *Ha $M \subset \mathbb{R}^3$ irányítható felület, akkor M megadható implicit módon.* (Ennek bizonyítása még kompakt M esetén is meglehetősen nehéz!)

(ii) $\mathbb{R}^3$ *minden kompakt felülete irányítható.* (H. Samelson tétele; Proc. A.M.S. **22** (1969), 301–302. old.)

6.24. definíció. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós sokaság, $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ pedig (lokális) paraméterezése M-nek. Egy $\underline{X} : U \to T\mathbb{R}^n$ differenciálható leképezést f-**menti vektormező**nek nevezünk, ha $\forall\, q \in U : \underline{X}(q) \in T_{f(q)}\mathbb{R}^n$. Amennyiben – speciálisan – $\forall\, q \in U : \underline{X}(q) \in T_{f(q)}M$, úgy f-**menti érintővektormező**ről beszélünk, ha pedig $\forall\, q \in U : \underline{X}(q) \in (T_{f(q)}M)^{\perp}$, akkor f-**menti normális vektormező**ről szólunk.*

6.25. következmény és definíció. *Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaságot, s adjuk meg ennek egy $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ lokális paraméterezését! Jelentse $(e_i)_{i=1}^k$ $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisát!*

(a) Az f-hez tartozó

$$\underline{f}_i : q \in U \mapsto \underline{f}_i(q) := (f_*)_q(e_i)_q = (D_i f(q))_{f(q)} \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

koordinátavektormezők (ld. 6.8.) f-menti érintővektormezők.

(b) Tegyük föl speciálisan, hogy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület! Ekkor az

$$\underline{f}_1 \times \underline{f}_2 : q \in U \mapsto \underline{f}_1(q) \times \underline{f}_2(q) \in T_{f(q)}\mathbb{R}^3$$

leképezés seholsem zérus normális vektormező, az

$$\underline{N} := \frac{1}{\|\underline{f}_1 \times \underline{f}_2\|}\underline{f}_1 \times \underline{f}_2 : q \in U \mapsto \frac{1}{\|\underline{f}_1(q) \times \underline{f}_2(q)\|}\underline{f}_1(q) \times \underline{f}_2(q)$$

leképezés pedig normálegységvektormező f-mentén. Ez utóbbi csatolt leképezése

$$N = \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} D_1 f \times D_2 f : U \to S^2;$$

*erre a **Gauss-leképezés** elnevezés is használatos. Az $(\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{N})$ hármast a felület f paraméterezéshez tartozó **Gauss-féle háromélmező**jének mondjuk. Tetszőleges $q \in U$ esetén $(\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q), \underline{N}(q))$ bázisa $T_{f(q)}\mathbb{R}^3$-nak, ez az $f(q)$ pontbeli **Gauss-féle háromél**.*

6.26. megjegyzés. Ha $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ reguláris parametrizált felület, akkor az

$$\operatorname{Im}(f_*)_q = (f_*)_q(T_q\mathbb{R}^2) \subset T_{f(q)}\mathbb{R}^3 \qquad (q \in U)$$

kétdimenziós alteret nevezzük f q-**beli érintősík**jának. Ezek után az f-menti vektormezők, az f-hez tartozó Gauss-féle háromélmező (s így tovább …) értelmezése a 6.24-ben és 6.25-ben látottaknak megfelelően történhet.

6.27. példák.

(a) Tekintsük az

$$\begin{aligned} & f :]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \ , \ (u, v) \mapsto f(u, v) := \\ := \quad & ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u) \qquad (0 < r < R) \end{aligned}$$

parametrizált tóruszt (v.ö. 5.8.(e))! A Gauss-féle hároméi tagjai tetszőleges $q := (u, v)$ pontban

$$\begin{aligned} \underline{f}_1(q) &= r(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)_{f(q)}, \\ \underline{f}_2(q) &= (r + R\cos u)(-\sin v, \cos v, 0)_{f(q)}, \\ \underline{N}(q) &= -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)_{f(q)}. \end{aligned}$$

(b) Meghatározzuk az

$$f : \ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u, v) := (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$$

parametrizált felület $q = (1, 2)$-beli érintősíkjának egyenletét.

$$\begin{aligned} & f(q) = (-3, 4, 5); \\ & D_1 f(u, v) = (2u, 2v, 2u) \ , \ D_1 f(q) = (2, 4, 2); \\ & D_2 f(u, v) = (-2v, 2u, 2v) \ , \ D_2 f(q) = (-4, 2, 4); \\ & (D_1 f \times D_2 f)(q) = (12, -16, 20) \parallel (3, -4, 5), \end{aligned}$$

tehát $\mathrm{Im}(f_*)_q$ egyenlete:

$$3x - 4y + 5z = 0.$$

7. Absztrakt sokaság érintőtere

7.1. lemma és definíció. *Legyen M egy (absztrakt) sokaság, $p \in M$, s tekintsük a p pont egy tetszőleges U környezetét! – Létezik a p pontnak V környezete, valamint $f \in C^\infty(M)$ függvény olymódon, hogy*

(1) U tartalmazza V lezártját: $\overline{V} \subset U$;

(2) $\forall\, q \in M: \quad 0 \leqq f(q) \leqq 1$;

(3) $f(q) = 1$, ha $q \in V$; $f(q) = 0$, ha $q \in M \backslash U$.

*A fölsorolt tulajdonságokkal rendelkező f függvényt p-beli **dudorfüggvény**ként (**bump function**) említjük.*

Bizonyítás. (Vázlat) – Legyen az M sokaság n-dimenziós ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Szükség esetén „összehúzva” a megadott U környezetet, elérhető, hogy U egy (U, x) térkép tartománya legyen. Az általánosság sérelme nélkül föltehető az is, hogy $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ (ld. 4.19.(c)), és $\forall\, q \in U: \ \|x(q)\| < \alpha$, ahol α egy rögzített pozitív szám. Válasszunk ezután egy, a $0 < \beta < \alpha$ feltételnek eleget tevő β valós számot, s legyen

$$V := \{q \in M \mid \|x(q)\| < \beta\}.$$

Világos, hogy ekkor V (nyílt) környezete p-nek, és hogy $\overline{V} \subset U$. Tekintsük most a I.4.21-ben konstruált $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt! Értelmezzük ennek segítségével az $f: M \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(q) := \begin{cases} g(x^1(q)) \cdot \ldots \cdot g(x^n(q)) & \text{, ha } \ q \in U; \\ 0 & \text{, ha } \ q \notin U \end{cases}$$

előírással ($x^i := u^i \circ x$, $1 \leqq i \leqq n$)! Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ekkor $f \in C^\infty(M)$, és f eleget tesz a 7.1./(2),(3) feltételeknek. □

7.2. következmény (Függvények globalizálása). *Legyen U nyílt környezete az M sokaság egy p pontjának, s tegyük föl, hogy $h \in C^\infty(U)$. – Megadható p-nek egy V környezete s egy $\widetilde{h} \in C^\infty(M)$ függvény úgy, hogy $\overline{V} \subset U$ és $\widetilde{h} \restriction V = h \restriction V$. A $\widetilde{h}$ függvényt a h függvény egy **globalizáció**jának mondjuk.*

Bizonyítás. Megtartva 7.1. jelöléseit, legyen $f \in C^\infty(M)$ egy p-beli dudorfüggvény. Értelmezzük a $\widetilde{h}$ függvényt a következő előírással:

$$\widetilde{h} := \begin{cases} (fh)(q) & \text{, ha} \quad q \in U; \\ 0 & \text{, ha} \quad q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Ekkor $\widetilde{h} \in C^\infty(M)$, és $\forall\, q \in V:\ \widetilde{h}(q) = f(q)h(q) \overset{7.1./(3)}{=} h(q)$, tehát $\widetilde{h} \restriction V = h \restriction V$. □

7.3. definíció. *Az M sokaság egy p pontjában vett **érintővektor**on a $C^\infty(M)$ valós algebra egy **p-beli, valós értékű deriváció**ját értjük, azaz olyan*

$$v: \quad C^\infty(M) \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto v(f)$$

függvényt, amely

(1) $\mathbb{R}$***-lineáris:***

$$\forall\ f, g \in C^\infty(M);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g);$$

*(2) rendelkezik a **Leibniz-tulajdonság**gal:*

$$\forall\ f, g \in C^\infty(M): \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

7.4. lemma és definíció. *Tekintsük az M sokaság egy p pontját, s válasszunk egy $(U, x) = (U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül! – A*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p:\ f \in C^\infty(M) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) := [D_i(f \circ x^{-1})](x(p))$$

függvények p-beli érintővektorok. A

$$[D_i(f \circ x^{-1})] \circ x:\ U \subset M \to \mathbb{R}$$

*függvényt az f függvény adott térképre vonatkozó i**-edik parciális derivált**jának $(1 \leqq i \leqq n)$ mondjuk.*

Bizonyítás. Legyen $f, g \in C^\infty(M)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Fölhasználva a „közönséges” parciális deriválás linearitási és Leibniz-tulajdonságát, a következők írhatók:

$$\begin{aligned}
(1)\quad \frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x^i}(p) \quad &:= \quad (D_i[(\alpha f + \beta g) \circ x^{-1}])(x(p)) = \\
&= \quad (D_i[(\alpha f) \circ x^{-1} + (\beta g) \circ x^{-1}])(x(p)) = \\
&= \quad [D_i((\alpha f) \circ x^{-1})](x(p)) + [D_i((\beta g) \circ x^{-1})](x(p)) = \\
&= \quad \alpha[D_i(f \circ x^{-1})](x(p)) + \beta[D_i(g \circ x^{-1})](x(p)) = \\
&=: \quad \alpha \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + \beta \frac{\partial g}{\partial x^i}(p);
\end{aligned}$$

$$(2)\quad \frac{\partial(fg)}{\partial x^i}(p) \;:=\; [D_i((fg)\circ x^{-1})](x(p)) = [D_i(f\circ x^{-1})(g\circ x^{-1})](x(p)) =$$
$$= [D_i(f\circ x^{-1})]x(p)\cdot g(p) + f(p)[D_i(g\circ x^{-1})](x(p)) =$$
$$=: \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot g(p) + f(p)\frac{\partial g}{\partial x^i}(p).$$

□

7.5. lemma és definíció. *Egy M sokaság tetszőleges p pontjában vett összes érintővektorok T_pM halmaza* ***valós vektortér****, ha* $\forall\ v,w\in T_pM;\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$:

$$\lambda v+\mu w:\quad f\in C^\infty(M)\mapsto \lambda v(f)+\mu w(f)\in\mathbb{R}.$$

Ezt a vektorteret az M sokaság ***p-pontbeli érintőterének*** *nevezzük.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy $\lambda v+\mu w\in T_pM$, s hogy a leírt módon értelmezett összeadás és skalárral való szorzás eleget tesz a vektortér-axiómáknak. Mindez csupán rutin számolási gyakorlat; példaként megmutatjuk a Leibniz-szabály teljesülését. $\forall\ f,g\in C^\infty(M)$:

$$(\lambda v+\mu w)(fg) \;:=\; \lambda v(fg)+\mu w(fg) \overset{7.3.(2)}{=}$$
$$= \lambda(v(f)g(p)+f(p)v(g))+\mu(w(f)g(p)+f(p)w(g)) =$$
$$= (\lambda v(f)+\mu w(f))g(p)+f(p)(\lambda v(g)+\mu w(g)) =$$
$$=: (\lambda v+\mu w)(f)g(p)+f(p)(\lambda v+\mu w)(g).$$

□

7.6. lemma. *Legyen adva egy M sokaság, s tekintsünk egy $p\in M$ pontot.*

(1) Ha az $f\in C^\infty(M)$ függvény előállítható olyan $g,h\in C^\infty(M)$ függvények szorzataként, amelyek zérust vesznek föl a p pontban, akkor

$$\forall\ v\in T_pM:\quad v(f)=0.$$

(2) Amennyiben $k:\ M\to\mathbb{R}$ konstans függvény,úgy $\forall\ v\in T_pM:\quad v(k)=0$.

Bizonyítás.

(1) $v(f)=v(gh)=v(g)h(p)+g(p)v(h)=v(g)\cdot 0+0\cdot v(h)=0.$

(2) Jelentse ℓ az $M\to\mathbb{R},\quad q\mapsto \ell(q):=1$ konstans függvényt! Erre teljesül, hogy $\forall\ v\in T_pM$:

$$v(\ell)=v(\ell\cdot\ell)=v(\ell)\ell(p)+\ell(p)v(\ell)=2v(\ell)\Longrightarrow v(\ell)=0.$$

Amennyiben k értékkészlete $\{\kappa\}\subset\mathbb{R}$, úgy $k=\kappa\ell$ írható, és a most tett észrevétel figyelembevételével $\forall\ v\in T_pM:\ v(k)=v(\kappa\ell)=\kappa v(\ell)=\kappa\cdot 0=0.$

□

7.7. állítás és definíció (Sokaság érintővektorai lokális objektumok). *Tekintsünk egy M sokaságot s egy $f \in C^\infty(M)$ függvényt! Tetszőleges $p \in M$ pont és $v \in T_pM$ érintővektor esetén a $v(f)$ szám csakis f-nek a pont egy környezetében fölvett értékeitől függ. Másként fogalmazva: ha U egy környezete p-nek és $h \in C^\infty(U)$, akkor h tetszőleges $\widetilde{h}$ globalizációja esetén a $v(\widetilde{h})$ érték ugyanaz. Ezt v h-**n fölvett** értékének nevezzük és $v(h)$-val jelöljük.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan elegendő az állítás második verzióját igazolnunk. Tegyük föl, hogy $\widetilde{h}$ és $\widetilde{h}_1$ egyaránt globalizációja h-nak:

$$\widetilde{h}, \widetilde{h}_1 \in C^\infty(M); \quad \widetilde{h} \restriction U = \widetilde{h}_1 \restriction U = h.$$

Tekintsük a $g := \widetilde{h} - \widetilde{h}_1$ függvényt! Ekkor $g \in C^\infty(M)$ és $g \restriction U = 0$. Válasszuk meg a p pont egy V környezetét s az $F \in C^\infty(M)$ függvényt úgy, hogy $\overline{V} \subset U$ és

$$F(q) = 0, \quad \text{ha} \quad q \in V; \; F(q) = 1, \quad \text{ha} \quad q \in M \backslash U.$$

Ilyen függvény létezését 7.1. biztosítja, ha ugyanis f egy, a 7.1-ben leírt p-beli dudorfüggvény, akkor $F := \ell - f$ rendelkezik a mondott tulajdonsággal. F segítségével $g = Fg$ írható, s mivel $F(p) = g(p) = 0$, 7.6./(1) alapján

$$0 = v(g) = v(\widetilde{h} - \widetilde{h}_1) = v(\widetilde{h}) - v(\widetilde{h}_1) \implies v(\widetilde{h}) = v(\widetilde{h}_1). \qquad \square$$

7.8. lemma. *Legyen g a $p = \nu^i e_i := \sum_{i=1}^{n} \nu^i e_i \in \mathbb{R}^n$ pont egy*

$$B_\rho(p) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|p - v\| < \rho\} \quad (\rho \in \mathbb{R}^+)$$

gömbkörnyezetében értelmezett sima függvény! Léteznek olyan $g_i : \; B_\rho(p) \to \mathbb{R}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sima függvények, amelyek segítségével g a

$$g = g(p)\ell + \sum_{i=1}^{n} (u^i - \nu^i \ell) g_i$$

alakban állítható elő, ahol $\ell : \; B_\rho(p) \to \mathbb{R}$ az $\{1\}$ értékkészletű konstans függvény, $(u^i)_{i=1}^n$ – a szokásos módon – $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere.

Bizonyítás. Kiválasztva és rögzítve egy $a = \alpha^i e_i \in B_\rho(p)$ pontot, tekintsük a

$$c_a : \quad [0,1] \to B_\rho(p) \;, \quad t \mapsto c_a(t) := p + t(a - p)$$

parametrizált egyenesszakaszt! Közvetlenül ellenőrizhető, hogy

$$g(a) = g(p) + \int_0^1 (g \circ c_a)'.$$

Mivel $\forall\ t \in\ ]0,1[$:

$$\begin{aligned}(g\circ c_a)'(t) &= g'[c_a(t)]c_a'(t) = g'(p+t(a-p))(a-p) = \\ &= g'(p+t(a-p))(\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i-\nu^i)e_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha^i-\nu^i)g'(p+t(a-p))(e_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha^i-\nu^i)D_ig(p+t(a-p)) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha^i-\nu^i)(D_ig)\circ c_a(t)\ ,\end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy

$$g(a) = g(p) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha^i-\nu^i)\int_0^1 (D_ig)\circ c_a.$$

Ha mármost

$$g_i:\quad B_\rho(p)\to\mathbb{R}\ ,\ a\mapsto g_i(a) := \int_0^1 [(D_ig)\circ c_a] \qquad (1\leqq i\leqq n),$$

akkor az így értelmezett függvények simák, és segítségükkel g kívánt előállításához jutunk. – Jegyezzük meg, hogy speciálisan

$$g_i(p) = \int_0^1 D_ig\circ c_p = \int_0^1 D_ig(p) = D_ig(p) \quad (1\leqq i\leqq n). \qquad \square$$

7.9. tétel (Bázistétel).
Legyen M n-dimenziós sokaság ($n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$) és $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképe M-nek egy p pont körül! Ekkor a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $(1\leqq i\leqq n)$ érintővektorok (ld.7.4.) bázisát alkotják a T_pM érintőtérnek. Ebben a bázisban tetszőleges $v\in T_pM$ érintővektor a

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p}$$

formula szerint állítható elő.

Bizonyítás.

(a) A p pont körüli (U,x) térkép megválasztható úgy, hogy $x(p)=0\in\mathbb{R}^n$ legyen (4.19.(c)). Ilyen térképválasztás nem sérti az általánosságot, mert csupán bizonyos konstansok eltűnését vonja maga után, s konstans függvényhez 7.6. értelmében az érintővektorok eleve 0-t rendelnek. U szükség szerinti, alkalmas „összehúzásával” az is elérhető, hogy $x(U)$ $\mathbb{R}^n$-nek egy 0 középpontú nyílt gömbje legyen, azaz hogy $x(U)=B_\rho(0)$ $\quad(\rho\in\mathbb{R}^+)$ teljesüljön. Figyelembe véve végül, hogy az érintővektorok 7.7. értelmében lokális objektumok, szoríthatunk U-n definiált sima függvényekre.

(b) Legyen $f \in C^\infty(U)$, s tekintsük a $g := f \circ x^{-1} : B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ függvényt! 7.8. alapján ($p := 0$ választással)

$$f \circ x^{-1} = (f \circ x^{-1})(0)\ell + \sum_{i=1}^{n} (f \circ x^{-1})_i u^i = f(p)\ell + \sum_{i=1}^{n} (f \circ x^{-1})_i u^i$$

írható. Jobbról komponálva mindkét oldalt az x leképezéssel, innen

$$f = f(p)(\ell \circ x) + \sum_{i=1}^{n} [(f \circ x^{-1})_i \circ x] x^i$$

adódik (hiszen $u^i \circ x =: x^i$). Bevezetve az $f_i := (f \circ x^{-1})_i \circ x \quad (1 \leqq i \leqq n)$ rövidítést, végül az

$$f = f(p)(\ell \circ x) + \sum_{i=1}^{n} f_i x^i$$

előállításhoz jutunk. Mivel a jobboldalon az 1. tag konstans függvény, és $x(p) = 0$ folytán $x^i(p) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n)$, a $\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$ érintővektor mindkét oldalra való alkalmazása a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^k}(p) x^i(p) + f_i(p) \frac{\partial x^i}{\partial x^k}(p)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \frac{\partial x^i}{\partial x^k}(p)$$

összefüggéshez vezet. Itt

$$(*) \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^k}(p) := D_k(x^i \circ x^{-1})(x(p)) = D_k u^i(0) = u^{i\prime}(0)(e_k) = u^i(e_k) = \delta^i_k,$$

következésképpen $\frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\delta^i_k = f_k(p)$. Fölhasználva a tett észrevételt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \forall\, v \in T_pM: \quad v(f) &= v\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i x^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} [v(f_i) x^i(p) + f_i(p) v(x^i)] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(p) v(x^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v(x^i) = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\Big)(f). \end{aligned}$$

f tetszőlegessége folytán ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, v \in T_pM: \quad v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p =: v(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)_{1 \leqq i \leqq n}$ generátorrendszere a T_pM érintőtérnek, s egyben az érintővektorok előállítására megadott formulát is levezettük.

(c) Ellenőrizzük, hogy a $((\frac{\partial}{\partial x^i})_p)_{1\leqq i\leqq n}$ generátorrendszer lineárisan független.

Tegyük föl, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = 0$! Ekkor $\forall\ k \in \{1,\dots,n\}$:

$$0 = (\sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p)(x^k) = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial x^k}{\partial x^i}(p) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta_i^k = \lambda^k,$$

tehát az adott generátorrendszerből a zérusvektor csak triviális módon kombinálható lineárisan. □

7.10. következmény. *n-dimenziós sokaság tetszőleges pontjában vett érintőtér n-dimenziós vektortér.* □

7.11. állítás (A bázisvektorok transzformációs formulája).
Legyen $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ és $(V,(y^i)_{i=1}^n)$ egy-egy térképe az M sokaságnak, s tegyük fel, hogy $p \in U\cap V$! Ekkor

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p =: \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Bizonyítás. $\forall\ f \in C^\infty(M):\ \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial y^i}(p) := D_i(f\circ y^{-1})y(p) =$

$$\begin{aligned} &= D_i[(f\circ x^{-1})\circ(x\circ y^{-1})]y(p) \overset{\text{I.4.12.}}{=} D_j(f\circ x^{-1})x(p)D_i(u^j\circ x\circ y^{-1})y(p) = \\ &= D_j(f\circ x^{-1})x(p)D_i(x^j\circ y^{-1})y(p) \overset{7.4.}{=} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (f)\end{aligned}$$

– s ez az állítás helyességét jelenti. □

7.12. definíció. *Egy M sokaság p pontjához tartozó* ***koérintő tér****en a T_pM érintőtér $T_p^*M := (T_pM)^*$ konjugált (vagy duális) vektorterét értjük.*

7.13. állítás és definíció. *Vegyünk alapul egy M n-dimenziós sokaságot!*

(a) Ha $f \in C^\infty(M)$, és $\forall\ v \in T_pM$:

$$(df)_p(v) := v(f),$$

akkor $(df)_p \in T_p^*M$; ezt a kovektort az f függvény p ***pontbeli (külső) differenciál****jának mondjuk.*

(b) Válasszunk egy $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet a $p\in M$ pont körül! Ekkor:

(1) A $(dx^i)_p$, $1 \leqq i \leqq n$ differenciálok bázisát, mégpedig a $((\frac{\partial}{\partial x^i})_p)_{i=1}^n$ bázishoz duális bázisát képezik a T_p^*M koérintő térnek. E bázis segítségével tetszőleges $\omega_p \in T_p^*M$ kovektor az

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \left[\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right](dx^i)_p =: \left[\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right](dx^i)_p$$

alakban állítható elő.

(2) $\forall\ f \in C^\infty(M):\quad (df)_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(dx^i)_p.$

(3) Amennyiben $(V, (y^i)_{i=1}^n)$ *további térkép a* p *pont körül , úgy érvényes a*

$$(dy^i)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)(dx^j)_p =: \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)(dx^j)_p \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

transzformációs szabály.

Bizonyítás.

(a) $\forall\ v, w \in T_pM\ ;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}:\quad (df)_p(\lambda v + \mu w) := (\lambda v + \mu w)(f) :=$
$= \lambda v(f) + \mu w(f) =: \lambda(df)_p(v) + \mu(df)_p(w) \Longrightarrow (df)_p \in T_p^*M.$

(b) (1) $\forall\ i, j \in \{1, \ldots, n\}:\ (dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p := \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p(x^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)(p) \stackrel{(*)}{=} \delta^i_j;$
ez azt jelenti, hogy $((dx^i)_p)_{i=1}^n$ a $(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p)_{i=1}^n$ bázis duálisa.
Ha $\omega_p \in T_p^*M$ tetszőleges és $\omega_p = \lambda_j(dx^j)_p$, akkor
$\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}:\ \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \lambda_j(dx^j)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \lambda_j\delta^j_i = \lambda_i$, tehát

$$\omega_p = [\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p](dx^i)_p.$$

(2) $(df)_p \stackrel{(1)}{=} [(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p](dx^i)_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i(p).$

(3) $f := y^i\quad (1 \leqq i \leqq n)$ választással következik (2)-ből. $\square$

7.14. lemma és definíció. *Legyen adva az* M *és az* N *sokaság, s tegyük föl, hogy* $f:\ M \to N$ *sima leképezés! Tetszőleges* $v \in T_pM$ *érintővektor esetén jelentse* $(f_*)_p(v)$ a

$$C^\infty(N) \to \mathbb{R}\ ,\ g \mapsto (f_*)_p(v)(g) := v(g \circ f)$$

függvényt! Ekkor

(1) $(f_*)_p(v) \in T_{f(p)}N;$

(2) az $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N\ ,\ v \mapsto (f_*)_p(v)$ *leképezés lineáris.*

Az így értelmezett lineáris leképezést az f *leképezés* p ***pontbeli érintőleképezésének*** *nevezzük.*

Bizonyítás.

(a) Ellenőrizzük, hogy $(f_*)_p(v)$ eleget tesz a 7.3. definícióbeli (1),(2) tulajdonságoknak. – Legyen $g_1, g_2 \in C^\infty(N), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges!
$\mathbb{R}$-*linearitás.* $(f_*)(v)(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) := v[(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \circ f] =$
$= v[\lambda_1(g_1 \circ f) + \lambda_2(g_2 \circ f)] = \lambda_1 v(g_1 \circ f) + \lambda_2 v(g_2 \circ f) =$
$=: \lambda_1(f_*)_p(v)(g_1) + \lambda_2(f_*)_p(v)(g_2).$

Leibniz-tulajdonság. $(f_*)_p(v)(g_1 g_2) := v[(g_1 g_2) \circ f] =$
$= v[(g_1 \circ f)(g_2 \circ f)] = v(g_1 \circ f)g_2(f(p)) + g_1(f(p))v(g_2 \circ f) =$
$= (f_*)_p(v)(g_1) \cdot g_2(f(p)) + g_1(f(p))(f_*)_p(v)(g_2).$

(b) Belátjuk, hogy $(f_*)_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_{f(p)}N)$.

$$\begin{aligned}
&\forall\, v_1, v_2 \in T_pM;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};\ g \in C^\infty(N) :\\
&\quad [(f_*)_p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(g) := (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(g \circ f) =\\
&\quad = \lambda_1 v_1(g \circ f) + \lambda_2 v_2(g \circ f) = \lambda_1 (f_*)_p(v_1)(g) + \lambda_2 (f_*)_p(v_2)(g) =\\
&\quad [\lambda_1 (f_*)_p(v_1) + \lambda_2 (f_*)_p(v_2)](g)\\
&\quad \Longrightarrow (f_*)_p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (f_*)_p(v_1) + \lambda_2 (f_*)_p(v_2).
\end{aligned}$$

7.15. állítás. *Legyen M m-dimenziós, N n-dimenziós sokaság; $f \in C^\infty(M, N)$! Tekintsünk egy $p \in M$ pontot, és válasszunk p körül egy $(U, (x^i)_{i=1}^m)$, $f(p)$ körül egy $(V, (y^j)_{j=1}^n)$ térképet! Ekkor*

$$\forall\, j \in \{1, \dots, m\} :\ (f_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)},$$

azaz $(f_*)_p$ mátrixa a $\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right)_{i=1}^m$, $\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(p)}\right)_{j=1}^n$ bázispárra vonatkozóan a

$$\left(\frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\right) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$$

mátrix.

Bizonyítás. Legyen a rövidség kedvéért $w_j := (f_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ $\quad (1 \leqq j \leqq m)$! A bázistétel (7.9.) értelmében

$$w_j = \sum_{i=1}^n w_j(y^i) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)},$$

ahol $w_j(y^i) = (f_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (y^i) := \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (y^i \circ f) = \frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)$. Ez a tett észrevétel helyességét jelenti. □

7.16. állítás (Láncszabály).
Ha $f \in C^\infty(M, N)$, $g \in C^\infty(N, P)$, akkor $\forall\, p \in M$:

$$[(g \circ f)_*]_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p.$$

Bizonyítás. Legyen $v \in T_pM$ tetszőleges, $w := (f_*)_p(v)$. $\forall\, h \in C^\infty(P)$:
$[(g \circ f)_*]_p(v)(h) := v(h \circ (g \circ f)) = v((h \circ g) \circ f) =: (f_*)_p(v)(h \circ g) =$
$w(h \circ g) =: (g_*)_{f(p)}(w)(h) = (g_*)_{f(p)}[(f_*)_p(v)](h) = [(g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p](v)(h)$,
így h és v tetszőlegessége folytán

$$[(g \circ f)_*]_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p.$$

□

7.17. definíció. *Legyen M egy sokaság, $I \subset \mathbb{R}$ pedig egy nyílt intervallum! Egy $c : I \to M$ sima leképezést M-en adott parametrizált görbének – röviden:* ***görbé****nek – nevezünk. Amennyiben $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nem egypontú zárt intervallum, úgy egy $c : [a,b] \to M$ leképezést akkor mondunk görbének, ha megadható egy ϵ pozitív valós szám s egy $\widetilde{c} :]a-\epsilon, b+\epsilon[\to M$ sima leképezés úgy, hogy $\widetilde{c} \restriction [a,b] = c$. Egy $c : [a,b] \to M$ folytonos leképezést* ***szakaszonként sima görbé****nek hívunk, ha $[a,b]$-nek létezik olyan felosztása, amelynek részintervallumai fölött c sima görbe.*

7.18. definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, M egy sokaság! Tekintsük $\mathbb{R}$-et 1-dimenziós sokaságnak az $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t) := t$ természetes koordinátázással! Egy $c : I \to M$ görbének a $t \in I$ paraméterű ponthoz tartozó* ***érintővektor****a vagy* ***sebességvektor****a*

$$\dot{c}(t) := (c_*)_t \left(\frac{d}{du}\right)_t \in T_{c(t)}M.$$

c-t ***reguláris****nak mondjuk, ha $\forall\ t \in I :\ \dot{c}(t) \neq 0$.*

7.19. megjegyzések.

(a) Emlékeztetünk rá, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli parametrizált görbék definíciójába a regularitást eleve belefoglaltuk (ld. I.5.3.(a)); most ezt nem tesszük.

(b) Értelemszerűen szólhatunk érintővektorról szakaszonként sima görbék esetén is, ekkor azonban a töréspontokban két érintővektor lép föl.

7.20. állítás (A görbeérintők alaptulajdonságai). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, M n-dimenziós sokaság, s tekintsünk egy $c : I \to M$ görbét!*

(a) ***(Iránymenti deriváltak)***

$$\forall\ t \in I\ ,\ f \in C^\infty(M) :\ \dot{c}(t)(f) = (f \circ c)'(t);$$

tehát ha $v \in T_pM$, és $c : I \to M$ olyan görbe, hogy $\dot{c}(0) = v$, akkor

$$v(f) = (f \circ c)'(0).$$

(b) ***(Koordinátakifejezés)*** *Ha $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en és $c(t) \in U$, akkor*

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n (x^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)} =: (x^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}.$$

(c) ***(Paramétertranszformáció)*** *Amennyiben $J \subset \mathbb{R}$ szintén nyílt intervallum és $h : J \to I$ diffeomorfizmus, úgy $\widetilde{c} := c \circ h$ is görbe, amelyre*

$$\forall\ t \in J :\quad \dot{\widetilde{c}}(t) = h'(t)\dot{c}[h(t)].$$

(d) ***(Leképezés hatása)*** *Ha N további sokaság és $\varphi: \ M \to N$ sima leképezés, akkor $\widetilde{c} := \varphi \circ c$ N-beli görbe, s teljesül, hogy φ tetszőleges pontban vett érintőleképezése megőrzi a sebességvektorokat:*

$$\forall\ t \in I: \quad (\varphi_*)_{c(t)}\dot{c}(t) = \dot{\widetilde{c}}(t).$$

Bizonyítás.

(a) $\dot{c}(t)(f) = (c_*)_t\left(\frac{d}{du}\right)_t(f) \overset{7.14.}{=} \left(\frac{d}{du}\right)_t(f\circ c) \overset{7.4.}{=} (f\circ c)'(t).$

(b) $\dot{c}(t) \overset{\text{bázistétel}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \dot{c}(t)(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)} \overset{(a)}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}(x^i\circ c)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}.$

(c)
$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{c}}(t) \quad &:= \quad (\widetilde{c}_*)_t\left(\frac{d}{du}\right)_t = [(c\circ h)_*]_t\left(\frac{d}{du}\right)_t \overset{7.16.}{=} (c_*)_{h(t)}\circ(h_*)_t\left(\frac{d}{du}\right)_t \\ &= \quad (c_*)_{h(t)}(\dot{h}(t)) \overset{(b)}{=} (c_*)_{h(t)}(h'(t)\left(\frac{d}{du}\right)_{h(t)}) = \\ &= \quad h'(t)(c_*)_{h(t)}\left(\frac{d}{du}\right)_{h(t)} =: h'(t)\dot{c}[h(t)].\end{aligned}$$

(d) $(\varphi_*)_{c(t)}\dot{c}(t) = (\varphi_*)_{c(t)}[(c_*)_t\left(\frac{d}{du}\right)_t] \overset{7.16.}{=} [(\varphi\circ c)_*]_t\left(\frac{d}{du}\right)_t =$
$= (\widetilde{c}_*)_t\left(\frac{d}{du}\right)_t =: \dot{\widetilde{c}}(t).$

□

7.21. megjegyzés. A görbeérintők most levezetett tulajdonságaival speciálisabb körülmények között már találkoztunk, ld.I.5.21., I.5.25. és 6.5.

7.22. konstrukció: sokaság érintősokasága. Vegyünk alapul egy M n-dimenziós sokaságot, legyen $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$, s tekintsük a

$$\pi: TM \to M\ , \quad v \mapsto \pi(v) := p\ , \ \text{ha } v \in T_pM$$

leképezést, az ún. természetes projekciót. Válasszunk M-en egy $(U,x) = (U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet! Ha $p\in U$, akkor a bázistétel értelmében tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor egyértelműen előállítható $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p =: v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ alakban. Másként fogalmazva:

$$\forall\ v \in \pi^{-1}(U): \quad v = v(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(v)}.$$

Értelmezzük ennek alapján az

$$\widetilde{x}: \quad \pi^{-1}(U) \to x(U)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

leképezést a

$$v \in \pi^{-1}(U) \mapsto \widetilde{x}(v) := (x(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

előírással! Világos, hogy ekkor $\widetilde{x}$ bijekció. Legyen

$$(**) \qquad V \subset TM \text{ nyílt } :\iff \begin{array}{l} M \text{ tetszőleges } (U,x) \text{ térképe esetén} \\ \text{az } \widetilde{x}(V \cap \pi^{-1}(U)) \text{ halmaz nyílt} \\ \text{részhalmaza az } \widetilde{x}(\pi^{-1}(U)) = x(U) \times \mathbb{R}^n \\ \text{halmaznak.} \end{array}$$

Rendre megmutathatók ezek után a következők:

(1) A $(**)$ előírás topológiát ad meg TM-en. Ez a topológia Hausdorff, és az $\widetilde{x}$ leképezés homeomorfizmus a konstruált topológiára nézve.

(2) Amennyiben $(U_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ atlasza M-nek, úgy $(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{x}_\alpha)$ atlasza TM-nek, s ennélfogva TM $2n$-dimenziós topologikus sokaság.

(3) A $(\pi^{-1}(U_\alpha), \widetilde{x}_\alpha)$ atlasz térképei C^∞-kompatibilisek.

(1)–(3) együttesen azt jelenti, hogy TM a leírt atlasszal $2n$-dimenziós sima sokasággá válik; ezt nevezzük M *érintősokaságá*nak. – A tett észrevételek bizonyítása nem különösebben nehéz, de igen aprólékos munkát igényel, úgyhogy igazolásukat mellőzzük. Annyit jegyzünk még meg, hogy

(4) $\pi : TM \to M$ sima leképezés.

Valóban, vegyünk alapul M-en egy (U,x) térképet, s tekintsük TM-en az általa indukált $(\pi^{-1}(U), \widetilde{x})$ térképet. Az $x \circ \pi \circ \widetilde{x}^{-1} : \widetilde{x}(\pi^{-1}(U)) \to x(U)$ leképezés simaságát kell ellenőriznünk. Legyen $(a,b) \in \widetilde{x}(\pi^{-1}(U))$ tetszőleges!
Ha $\widetilde{x}^{-1}(a,b) = v \in T_pM$, akkor $(a,b) = \widetilde{x}(v) := (x(\pi(v)); v(x^1), \dots, v(x^n))$, s így

$$x \circ \pi \circ \widetilde{x}^{-1}(a,b) = x(\pi(v)) = a.$$

Ez azt jelenti, hogy a vizsgált leképezés éppen az

$$(a,b) \in x(U) \times \mathbb{R}^n \mapsto a \in x(U)$$

kanonikus projekció, ami sima.

7.23. interpretáció: $\mathbb{R}^n$ érintővektorai mint valós értékű derivációk.
Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér egy p pontbeli érintőterét I.1.14-ben a

$$T_p\mathbb{R}^n := \{(p,v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

halmazként értelmeztük, amelyet aztán kézenfekvő módon valós vektortérré tettünk. $\mathbb{R}^n$ ugyanakkor n-dimenziós, sima sokaság is (4.9.(a)), tehát egy p pontjában vett érintővektorról szólhatunk egyben a 7.3. definícióban mondottak szerint. Megmutatjuk most, hogy a kétféle megközelítés egymással természetes módon izomorf vektortereket eredményez. – Nevezetesen: ha – átmenetileg – $\mathrm{Der}(p)$ jelöli $\mathbb{R}^n$-nek a 7.3. definíció szerinti értelemben vett érintőterét, akkor $T_p\mathbb{R}^n$ és $\mathrm{Der}(p)$ kanonikusan izomorf, ilyen izomorfizmust ad meg közöttük a

$$v_p = (p, v) \in T_p\mathbb{R}^n \mapsto D_{v_p} \ , \ \forall\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ D_{v_p} f := D_v f(p)$$

leképezés. Ez a következők szerint látható be:

(1) $\forall\ v_p \in T_p\mathbb{R}^n : \ D_{v_p} \in \mathrm{Der}(p)$. – Valóban, $\forall\ f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$D_{v_p}(\lambda f + \mu g) \overset{\text{I.4.10.}}{=} (\lambda f + \mu g)'(p)(v) = \lambda f'(p)(v) + \mu g'(p)(v) =$$
$$= \lambda D_v f(p) + \mu D_v g(p) = \lambda D_{v_p} f + \mu D_{v_p} g$$ – tehát a linearitás teljesül;

$$D_{v_p}(fg) := D_v(fg)(p) \overset{\text{I.4.10.}}{=} (fg)'(p)(v) = g(p)f'(p)(v) + f(p)g'(p)(v) =$$
$$= g(p)D_{v_p} f + f(p) D_{v_p} g$$ – érvényes a Leibniz-tulajdonság is.

(2) A $v_p \in T_p\mathbb{R}^n \mapsto D_{v_p} \in \mathrm{Der}(p)$ *leképezés lineáris.*
$\forall\ v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ ; \ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} D_{\lambda v_p + \mu w_p} f &:= D_{\lambda v + \mu w} f(p) = f'(p)(\lambda v + \mu w) = \\ &= \lambda f'(p)(v) + \mu f'(p)(w) = \lambda D_{v_p} f + \mu D_{w_p} f = \\ &= (\lambda D_{v_p} + \mu D_{w_p})(f) \Longrightarrow D_{\lambda v_p + \mu w_p} = \lambda D_{v_p} + \mu D_{w_p}. \end{aligned}$$

(3) A $v_p \in T_p\mathbb{R}^n \mapsto D_{v_p} \in \mathrm{Der}(p)$ *leképezés injektív.* – Tekintsük ennek ellenőrzése céljából $\mathbb{R}^n$ $(u^i)_{i=1}^n$kanonikus koordinátarendszerét! Jegyezzük meg először, hogy

$$\forall\ i \in \{1, \dots, n\} : \ D_{v_p} u^i := D_v u^i(p) = u^{i\prime}(p)(v) = u^i(v).$$

Ha ármost $D_{v_p} = D_{w_p}$, akkor ennek alapján

$$\begin{aligned} \forall\ i \in \{1, \dots, n\} : \ D_{v_p} u^i = D_{w_p} u^i \quad &\Longrightarrow \quad u^i(v) = u^i(w) \ , \ 1 \leqq i \leqq n \\ &\Longrightarrow \quad v = w \Longrightarrow v_p = w_p, \end{aligned}$$

s ezt kellett belátnunk.

(4) Mivel 7.10. figyelembevételével $\dim \mathrm{Der}(p) = n = \dim T_p\mathbb{R}^n$, (3) automatikusan implikálja, hogy a vizsgált leképezés egyben szürjektív; tanulságos volta miatt azonban megadjuk ennek egy 7.10-től független bizonyítását is. – Legyen $\theta \in \mathrm{Der}(p)$ tetszőleges! Ha $\theta(u^i) = \alpha^i \quad (1 \leqq i \leqq n)$, akkor képezzük a

$$v_p := \alpha^i (e_i)_p \in T_p\mathbb{R}^n$$

érintővektort. Megmutatjuk, hogy erre $D_{v_p} = \theta$ teljesül. – Választva egy tetszőleges $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvényt,

$$D_{v_p} f = D_v f(p) = D_{\alpha^i e_i} f(p) = \alpha^i D_i f(p).$$

Másrészt a p pont egy alkalmas $B_\rho(p)$ gömbkörnyezetében 7.8. alapján (az ottani jelölések értelemszerű megtartásával)

$$f \restriction B_\rho(p) = f(p)\ell + \sum_{i+1}^{n}(u^i - \nu^i\ell)f_i$$

írható. Így – fölhasználva, hogy egy sokaság érintővektorai lokális objektumok – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\theta(f) &= \theta(f(p)\ell) + \theta(\sum_{i=1}^{n}(u^i - \nu^i\ell)f_i) \overset{7.6.}{=} \sum_{i=1}^{n}\theta[(u^i - \nu^i\ell)f_i] = \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\theta(u^i)f_i(p) + u^i(p)\theta(f_i) - \nu^i\theta(f_i)] = \sum_{i=1}^{n}\alpha^i f_i(p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha^i D_i f(p) =: \alpha^i D_i f(p)\end{aligned}$$

(alkalmazva a 7.8. bizonyításban tett utolsó észrevételt is). – Ez azt jelenti, hogy $\theta(f) = D_{v_p}f$, amiből f tetszőlegessége folytán valóban $\theta = D_{v_p}$ következik. $\square$

7.24. megjegyzés. Tekintettel a mondottakra, a továbbiakban – ha a célszerűség úgy diktálja – külön kommentár nélkül azonosítjuk a $v_p = (p, v)$ érintővektorokat a nekik megfelelő D_{v_p} derivációkkal. – Kiemeljük az imént elvégzett számításokból a következőket: ha $p \in \mathbb{R}^n$, $v = \nu^i e_i \in \mathbb{R}^n$, és $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges, akkor

$$v_p(f) = \nu^i D_i f(p); \tag{1}$$

speciálisan

$$v_p(u^i) = u^i(v) = \nu^i \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{2}$$

$$(e_i)_p(f) = D_i f(p) \qquad (1 \leqq i \leqq n). \tag{3}$$

Az $(e_i)_p$, $1 \leqq i \leqq n$ bázisvektoroknak ilymódon a $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$ derivációk felelnek meg, ugyanis

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p f \overset{7.4.}{:=} D_i(f \circ u^{-1})u(p) = D_i f(p),$$

hiszen u $\mathbb{R}^n$ identikus transzformációja. $T_p^*\mathbb{R}^n$-nek az $((e_i)_p)_{i=1}^n = (\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p)_{i=1}^n$ bázishoz duális bázisát a $(du^i)_p$ kovektorok alkotják ($1 \leqq i \leqq n$); egy $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ függvény p-beli differenciálja így ebben a speciális esetben a

$$(df)_p = D_i f(p)(du^i)_p$$

alakban állítható elő. – Rámutatunk végül, hogy az érintőleképezésre adott „új” definíció (7.14.) visszaadja a „régit” (6.1.). Tekintsünk ebből a célból egy

$F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sima leképezést. Legyen $a \in \mathbb{R}^k$, $v = \sum\limits_{i=1}^{k} \nu^i e_i \in \mathbb{R}^k$, $b = F(a)$. A „régi” definíció szerint $(F_*)_a(v_a) = (F(a), F'(a)(v)) = (b, F'(a)(v)) \in T_b\mathbb{R}^n$, így $\forall\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}(F_*)_a(v_a)(g) &= (F'(a)(v))_b(g) = \sum_{i=1}^{k}(\nu^i D_i F(a))_b(g) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \nu^i (D_i F(a))_b(g).\end{aligned}$$

Itt $\forall\, i \in \{1, \dots, k\}$: $(D_i F(a))_b(g) = (D_{D_i F(a)} g)(b) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} u^j (D_i F(a)) D_j g(b)$, tehát egyrészt

$$(F_*)_a(v_a)(g) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \nu^i u^j (D_i F(a)) D_j g(b).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}v_a(g \circ F) &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{k} \nu^i D_i (g \circ F)(a) \overset{\text{I.4.12.}}{=} \sum_{i=1}^{k} \nu^i \sum_{j=1}^{n} D_j g(b) D_i (u^j \circ F)(a) = \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \nu^i (u^j \circ F)'(a)(e_i) D_j g(b) = \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \nu^i u^j (D_i F(a)) D_j g(b),\end{aligned}$$

amivel beláttuk, hogy $(F_*)_a(v_a)(g) = v_a(g \circ F)$, azaz hogy a „régi” definíció ugyanazt adja, mint az „új”.

7.25. megjegyzés. *(Történeti háttér; az érintővektorok különböző értelmezési lehetőségei.)*

(a) H. Whitney 1936-ban bebizonyította, hogy *ha M d-dimenziós (absztrakt) sokaság, akkor M beágyazható $\mathbb{R}^{2d+1}$-be, abban az értelemben, hogy M diffeomorf egy $\mathbb{R}^{2d+1}$-beli d-dimenziós részsokasággal.* Ez a nevezetes eredmény kézenfekvő eljárást kínál az érintővektorok bevezetésére absztrakt sokaságok esetén is, a differenciálgeometria fejlődése szempontjából azonban igen lényeges volt az absztrakt sokaságok érintővektorainak olyan értelmezése, amely független a sokaság bármiféle koordinátatérbe való beágyazásától. Történetileg nincs teljesen földerítve az az út, amely végül is elvezetett az érintővektoroknak egy tisztán a sokaság belső adataitól függő, „intrinsic” definíciójához. Annyi bizonyos, hogy a fogalom a 20-as években már a „jól ismert” kategóriába tartozott, s hogy kikristályosításában meghatározó szerepe volt B. Riemann,

H. Weyl[1] (1885 - 1955), és T. Lévi-Civita (1873 - 1941) olasz matematikus elgondolásainak. (Közülük az utóbbiról III.4.3-ban még említést teszünk!)

(b) Az érintővektorok intrinsic értelmezésére ma már számos lehetőség áll rendelkezésre. Ezek durván három csoportba sorolhatók:

- (A) az algebrista definíciója;
- (F) a fizikus definíciója;
- (G) a geométer definíciója.

Az általunk alapulvett 7.3. definíció az algebrai nézőpontnak felel meg. E választás mellett szól az algebrai megközelítés nagyfokú eleganciája, a definíció térképválasztást nem igénylő megfogalmazhatósága – s az is, hogy az így bevezetett érintővektorok közvetlenül alkalmazhatók számolási célokra. Szubjektíve nehézséget jelenthet, hogy az érintővektorok, mint valós értékű derivációk, meglehetősen absztrakt képződmények, ez a nehézség azonban rövid idő alatt leküzdhető. Elvi szempontból tényleges hátránya viszont a választott eljárásnak, hogy a C^∞-kategóriához kötődik (azaz $k < \infty$ esetén a C^k-osztályú differenciálható sokaságokra nem működik), s nem általánosítható végtelen dimenziós sokaságokra sem. (Végtelen dimenziós sokaságokhoz úgy jutunk, hogy koordinátatér gyanánt $\mathbb{R}^n$ helyett végtelen dimenziós Hilbert- vagy Banachteret választunk; az ilyen sokaságok fontos szerepet játszanak például bizonyos fizikai alkalmazásokban.)

(c) Röviden vázoljuk a jelzett két további megközelítési lehetőséget. – A „fizikus definíció” motivációja az $\mathbb{R}^n$-beli részsokaságok esetén a paramétervonal-érintők szolgáltatta bázisra 6.18-ban levezetett transzformációs szabály; eszerint térképcsere esetén a kérdéses bázis tagjai az átmenetleképezés Jacobi-mátrixával transzformálódnak. Így fizikus nézőpontból – s kissé leegyszerűsítve – egy *n-dimenziós sokaság egy pontjában vett érintővektor olyan szám n-est jelent, amely térképcsere esetén az átmenetleképezés Jacobi-mátrixával transzformálódik.*

Ennek a gondolatnak pontosabb formába öntése az

(F) definíció. *Legyen M n-dimenziós sokaság, $p \in M$. Tekintsük mindazon (U, x, a) hármasok halmazát, ahol (U, x) térkép p körül és $a \in \mathbb{R}^n$! Az*

$$(U, x, a) \sim (V, y, b) \colon \Leftrightarrow (y \circ x^{-1})'(x(p))(a) = b$$

előírással értelmezett $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, ennek ekvivalenciaosztályait p-beli érintővektoroknak nevezzük.

Annak ellenőrzése, hogy valóban ekvivalenciarelációt adtunk meg, a láncszabály alkalmazásával igen egyszerű. $\widetilde{T_pM}$-mel jelölve a most bevezetett p-beli

[1] 1913 és 1930 között a Zürichi Egyetem, 1933-as emigrációja után a princetoni egyetem professzora; D. Hilbert és H. Poincare mellett a XX. századi matematika legmélyebb és legsokoldalúbb alkotója.

érintővektorok halmazát, ugyancsak könnyen belátható, hogy a

$$\theta_p \colon T_pM \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto \theta_p(v) := a, \quad \text{ha}\,(U, x, a) \in v$$

leképezés bijekció $\widetilde{T_pM}$ és $\mathbb{R}^n$ között. Ennek segítségével $\mathbb{R}^n$ vektortér-struktúrája „visszahúzható” $\widetilde{T_pM}$-re: ha $v, w \in \widetilde{T_pM}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor legyen

$$\lambda v + \mu w := \theta_p^{-1}[\lambda\theta_p(v) + \mu\theta_p(w)].$$

A $\widetilde{T_pM}$-en így nyert vektortér-struktúra térképválasztástól független; ezáltal $\widetilde{T_pM}$-et kanonikus módon n-dimenziós vektortérré tettük.

(d) 6.10-ben egy $\mathbb{R}^n$-beli részsokaság érintővektorait a részsokaságbeli görbék sebességvektoraiként értelmeztük. A „geométer-megközelítés” közvetlenül ezt az elgondolást absztrahálja.

(G) definíció. *Alapulvéve egy M sokaságot, válasszunk ki egy $p \in M$ pontot s egy p körüli (U, x) térképet! Legyen $I \subset \mathbb{R}$ a 0-t tartalmazó nyílt intervallum, s tekintsünk olyan c_1, $c_2 \colon I \to M$ görbéket, melyekre $c_1(0) = c_2(0) = p$. Azt mondjuk, hogy c_1 és c_2 érinti egymást a p pontban az (U, x) térképre vonatkozóan, ha*

$$(x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0).$$

Ilyenkor azt írjuk, hogy $c_1 \underset{p}{\approx} c_2$. Az így bevezetett $\approx$ reláció jól definiált (térképválasztástól független) ekvivalenciareláció a p-n ámenő M-beli görbék halmazában, ennek ekvivalenciaosztályait p-beli érintővektoroknak nevezzük.

Jelöljük $\widetilde{\widetilde{T_pM}}$-mel a (G) szerinti értelemben vett p-beli érintővektorok halmazát! Ha $[c]_p \in \widetilde{\widetilde{T_pM}}$ a $c \colon I \to M$ görbe által reprezentált vektor, akkor a

$$[c]_p \mapsto (x \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^n$$

leképezés bijekció $\widetilde{\widetilde{T_pM}}$ és $\mathbb{R}^n$ között, amelynek révén a (c)-ben vázolt eljárással kanonikus n-dimenziós vektortér-struktúra adható meg $\widetilde{\widetilde{T_pM}}$-en.

(e) Ha M véges dimenziójú, sima sokaság – azaz sokaság a szó általunk használt, 4.5-ben rögzített értelmében –, akkor az (A), (F) és (G) definíció „ugyanazt a geometriai objektumot” adja meg, azaz egymással kanonikusan izomorf vektortereket eredményez:

$$\forall\, p \in M: \quad T_pM \cong \widetilde{T_pM} \cong \widetilde{\widetilde{T_pM}}.$$

Ennek bizonyítása kicsit hosszadalmas, de meglehetősen kézenfekvő; mellőzve a részleteket elegendő a következőket jeleznünk:

Ha $v \in T_pM$, $(U,x) = (U,(x_i)_{i=1}^n)$ térkép a p pont körül, akkor a 7.9. bázistétel értelmében egyértelműen $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ írható. Legyen $a := (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, s a $T_pM \to \widetilde{T_pM}$ leképezést adjuk meg a

$$v \mapsto (U,x,a) \quad \textit{ekvivalenciaosztálya} \tag{$*$}$$

előírással! Ez jól definiált, ha ugyanis (V,y) további térkép p körül és $v = \sum_{j=1}^n \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p$, akkor 7.11. alkalmazásával

$$\sum_{j=1}^n \beta^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

írható, s így

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^n \beta^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p), \quad \text{illetve} \quad \beta^j = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)$$

következik. Mivel

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) := D_i(y^j \circ x^{-1})(x(p)) = D_i((u^j \circ y) \circ x^{-1})(x(p)),$$

az utóbbi összefüggés a $b := (\beta^1, \ldots, \beta^n)$ rövidítés bevezetés után azt jelenti, hogy

$$b = (y \circ x^{-1})'(x(p))(a),$$

tehát $(V,y,b) \sim (U,x,a)$. Egyszerűen átgondolható ezek után, hogy a $(*)$ leképezés kanonikus izomorfizmus T_pM és $\widetilde{T_pM}$ között.

A $\widetilde{T_pM}$ és $\widetilde{\widetilde{T_pM}}$ közötti kanonikus izomorfizmus megadása ugyancsak kézenfekvő: az (U,x,a) reprezentánsú $\widetilde{T_pM}$-beli érintővektornak feleltessük meg azt a $[c]_p \in \widetilde{T_pM}$ érintővektort, ahol $c := x^{-1} \circ \gamma$, itt pedig $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ olyan parametrizált görbe, amelyre $\gamma'(0) = a$ teljesül.

Megemlítjük végül, hogy az (F) és a (G) definíció ((A)-val ellentétben) szó szerint átvihető tetszőleges C^k-osztályú, valamint végtelen dimenziós differenciálható sokaságokra is.

8. Vektormezők és tenzorok sokaságon

8.1. definíció és lemma. *Egy M sokaságon adott **vektormezőn** olyan $X:\ p \in M \mapsto X(p) =: X_p \in T_pM$ leképezést értünk, amely eleget tesz a következő **simasági feltételnek**: $\forall\ f \in C^\infty(M)$:*

$$Xf:\ M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto (Xf)(p) := X_p(f)$$

sima függvény. M összes vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$ halmaza $C^\infty(M)$-modulus, ha két vektormező összegét, illetve vektormező függvényszeresét az

$$\begin{aligned}(X+Y)(p) &:= X(p)+Y(p),\\ (fX)(p) &:= f(p)X(p)\end{aligned}$$

($X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$) előírással értelmezzük. Egy $U \subset M$ (nemüres) nyílt halmaz fölötti vektormezők fogalma analóg; az ezek alkotta $C^\infty(U)$-modulust $\mathfrak{X}(U)$-val jelöljük.

8.2. megjegyzések.

(a) Ha $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép az M sokaságon, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: \quad p \in U \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_pM \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

leképezések U fölötti vektormezők, hiszen

$$\forall\ f \in C^\infty(U): \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \overset{7.4.}{=} [D_i(f \circ x^{-1})] \circ x : U \to \mathbb{R}$$

sima függvény. Ezeket a vektormezőket az alapulvett térképhez tartozó ***koordinátavektormezőknek*** hívjuk. Közvetlenül adódik a bázistétel alapján, hogy a koordinátavektormezők segítségével bármely $X \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező egyértelműen előállítható az

$$X = \sum_{i=1}^n X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

alakban, $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1}^n$ tehát bázisa az $\mathfrak{X}(U)$ $C^\infty(U)$-modulusnak. Mivel tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén ugyanez az előállítás érvényes az $X \restriction U$

leszűkítésre, azt is mondhatjuk, hogy $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1}^n$ *lokális bázis*a az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-modulusnak.

(b) Fölhasználva az érintősokaság 7.22-ben vázolt konstrukcióját, az M fölötti vektormezők olyan $X : M \to TM$ sima leképezésekként is értelmezhetők, amelyekre $\pi \circ X = 1_M$ teljesül. Némi munkával megmutatható, hogy X-nek, mint TM-be való leképezésnek a 4.17. szerinti értelemben vett simasága ekvivalens a 8.1-ben előírt simasági követelménnyel.

8.3. állítás. *Egy sokaság vektormezőinek valós vektortere kanonikusan izomorf a sokaság differenciálható függvényeinek valós algebráján ható derivációk vektorterével. Nevezetesen: tetszőleges M sokaság esetén az*

$$\mathfrak{X}(M) \to \operatorname{Der} C^\infty(M),\ X \mapsto L_X; \qquad \forall\ f \in C^\infty(M) :\ L_X(f) := Xf$$

leképezés lineáris izomorfizmus.

Bizonyítás.

(1) Az Xf függvény definíciója (8.1.), s az a körülmény, hogy az érintővektorok $\mathbb{R}$-lineárisan és a Leibniz-szabálynak eleget téve hatnak $C^\infty(M)$-en (ld. 7.3.), közvetlenül implikálja, hogy $\forall\ X \in \mathfrak{X}(M) :\ \ L_X \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$. Ugyancsak nehézség nélkül ellenőrizhető, hogy az $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto L_X \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris.

(2) *Az $X \mapsto L_X$ leképezés injektív.* – Ennek igazolásához elegendő azt belátni, hogy a leképezés nullterét egyedül a 0 vektormező alkotja, azaz hogy $L_X = 0 \implies X = 0$. Tegyük föl tehát, hogy $L_X = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\forall\ f \in C^\infty(M) : \quad L_X(f) = Xf = M \text{ zérusfüggvénye.}$$

Tekintve egy tetszőleges $p \in M$ pontot, válasszunk egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül! Mivel a föltevés folytán $Xx^i = 0,\ 1 \leqq i \leqq n$; a bázistétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$X_p = X_p(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = (Xx^i)(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = 0\ ,$$

tehát az X vektormező tetszőleges $p \in M$ pontban 0-t vesz föl. Ez azt jelenti, hogy $X = 0$.

(3) *Az $X \mapsto L_X$ leképezés szürjektív.* – Legyen $\theta \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$ tetszőleges! Értelmezzük az

$$X :\ p \in M \mapsto X(p) =: X_p$$

leképezést olymódon, hogy X_p a

$$C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto X_p(f) := (\theta f)(p)$$

függvényt jelentse. Mivel θ derivációja $C^\infty(M)$-nek, közvetlenül adódik, hogy ekkor X_p eleget tesz a 7.3./(1),(2) feltételeknek, vagyis hogy $X_p \in T_pM$. X definíciójából az is kiolvasható, hogy

$$\forall\ f \in C^\infty(M): \quad Xf = \theta f \in C^\infty(M),$$

tehát X-re teljesül a simasági feltétel. Nyilvánvaló végül, hogy $\theta = L_X$; s ezzel a bizonyítás teljes. □

8.4. következmény. *$\mathfrak{X}(M)$ Lie-algebra, ha az X és Y vektormező Lie-zárójelén azt az egyértelműen meghatározott $[X,Y]$ vektormezőt értjük, amelyre*

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X\ .$$

Bizonyítás. Megadva az $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket, tekintsük az ezeknek 8.3. értelmében megfelelő L_X és L_Y derivációkat! Mivel – hivatkozással 1.21.(b)-re – $[L_X, L_Y] \in \operatorname{Der} C^\infty(M)$, ugyancsak 8.3. alapján létezik pontosan egy olyan $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $[L_X, L_Y] = L_Z$. Jelentse mármost $[X,Y]$ az így meghatározott Z vektormezőt! Világos, hogy ekkor az $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ művelettel $\mathfrak{X}(M)$ (valós) Lie-algebrává válik. □

8.5. megjegyzés. A konstrukció alapján $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}[X,Y]f &= L_{[X,Y]}(f) = (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(f) = \\ &= L_X(L_Y(f)) - L_Y(L_X(f)) = X(Yf) - Y(Xf)\ ,\end{aligned}$$

így $\forall\ p \in M:\ [X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$.

8.6. lemma. $\forall\ f, g \in C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M): \quad (fX)g = f(Xg)$.

Bizonyítás. $\forall\ p \in M: \quad [(fX)g](p) := (fX)_p(g) := [f(p)X_p](g) =$
$= f(p)[X_p(g)] = f(p)(Xg)_p =: [f(Xg)](p) \implies (fX)g = f(Xg)$. □

8.7. állítás. *$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M);\ f, g \in C^\infty(M)$:*

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X\ ;$$

speciálisan

$$[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X, \qquad [X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y\ .$$

Bizonyítás. $\forall\ h \in C^\infty(M):$

$$\begin{aligned}[fX, gY]h &\overset{8.5.}{=} (fX)[(gY)h] - (gY)[(fX)h] \overset{8.6.}{=} (fX)[g(Yh)] - (gY)[f(Xh)] \overset{\mathrm{Der}\,2}{=} \\ &= [(fX)g]Yh + g[(fX)Yh] - [(gY)f]Xh - f[(gY)Xh] \overset{8.6.}{=} \\ &= fg[X(Yh) - Y(Xh)] + [f(Xg)Y - g(Yf)X]h \overset{8.5.}{=} \\ &= [fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X]h.\end{aligned}$$

□

8.8. megjegyzés. Fölhívjuk a figyelmet arra a levezetett formulákból szembeszökő tényre, hogy a vektormezők körében bevezetett Lie-zárójel *nem* $C^\infty(M)$-bilineáris (bár $\mathbb{R}$-bilineáris).

8.9. lemma. *Vegyünk alapul az M sokaságon egy $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet, s legyen $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Ekkor*

$$X\restriction U = X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y\restriction U = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad (X^i = Xx^i,\ Y^i = Yx^i;\ 1\leqq i\leqq n)$$

és

$$[X,Y]\restriction U = \left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\ ;$$

speciálisan a koordinátavektormezők Lie-zárójelei eltűnnek:

$$\forall\ i,j\in\{1,\dots,n\}:\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0\ .$$

Bizonyítás. A második észrevétel ellenőrzésével kezdjük.

$$\forall\ f\in C^\infty(U):\quad \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]f = \frac{\partial}{\partial x^i}\ \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j}\ \frac{\partial f}{\partial x^i} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\ ,$$

s itt a jobboldal a klasszikus vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlősége miatt zérus. Ezt fölhasználva, 8.7. alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}[X,Y]\restriction U &= \left[X^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\ \frac{\partial}{\partial x^i} =\\ &= \left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\ .\end{aligned}$$

□

8.10. példa. Vegyük alapul az $\mathbb{R}^2$ sokaságon az (u^1,u^2) kanonikus koordinátarendszert, s tekintsük az

$$X := u^2\frac{\partial}{\partial u^2},\qquad Y := u^1\frac{\partial}{\partial u^2}$$

vektormezőket! Kiszámítjuk az $[X,Y]$ Lie-zárójelet közvetlenül a definíció, valamint 8.7. alkalmazásával.

(a) $\forall\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^2):\quad [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = u^2\dfrac{\partial}{\partial u^2}\left(u^1\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\right) -$

$$-u^1\frac{\partial}{\partial u^2}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial u^2}\right) \overset{\text{Der 2}}{=} u^2\frac{\partial u^1}{\partial u^2}\ \frac{\partial f}{\partial u^2} + u^1u^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2\partial u^2} - u^1\frac{\partial u^2}{\partial u^2}\ \frac{\partial f}{\partial u^2} -$$

$$-u^1u^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2\partial u^2} = -u^1\frac{\partial}{\partial u^2}(f) = -Yf\quad\Longrightarrow\quad [X,Y] = -Y.$$

(b) $[X,Y] = \left[u^2\frac{\partial}{\partial u^2}, u^1\frac{\partial}{\partial u^2}\right] \overset{8.7.}{=} u^1u^2\left[\frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right] + u^2\frac{\partial u^1}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u^2} - u^1\frac{\partial u^2}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial u^2} =$
$= -u^1\frac{\partial}{\partial u^2} = -Y$.

8.11. interpretáció. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret, kijelölve az $(e_i)_{i=1}^n$ kanonikus bázist s ennek duálisát, az $(u^i)_{i=1}^n$ kanonikus koordinátarendszert. Az

$$E_i : \quad \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n, \quad p \mapsto E_i(p) := (e_i)_p; \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

leképezések vektormezők a 6.16-ban adott „geometriai” definíció szerinti értelemben (ld. még 6.17.(b)). Nyilvánvaló, hogy $(E_i)_{i=1}^n$ – amelyet $\mathbb{R}^n$ ***természetes n-élmező***jének mondunk – bázisa az $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-modulusnak:

$$\forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) : \qquad X = \sum_{i=1}^n X^i E_i = X^i E_i$$

írható, egyértelmű módon. Mivel a 7.23-ban leírt algebrai interpretáció szerint az $(e_i)_p$ bázisvektoroknak a $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$ derivációk felelnek meg, következik, hogy E_i a $\frac{\partial}{\partial u^i}$ koordinátavektormezővel azonosítható ($1 \leqq i \leqq n$), mely utóbbi jelen speciális esetben éppen a „szokásos” i-edik parciális derivált operátora (ld. 7.24.).

Összefoglalva korábbi észrevételeinket és a most mondottakat, megállapíthatjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ sokaság esetén az érintővektorok és a vektormezők kézenfekvő „geometriai” módon és a sokaságok általános elmélete szerint egyaránt bevezethetők. A kétféle megközelítés közötti átjárást a következő „szótár” mutatja:

„Geometriai nyelv”	*„Algebrai nyelv”*
$v_p := (p,v) \in T_p\mathbb{R}^n$ p-beli vektor	$D_{v_p} :\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto D_v f(p)$ valós értékű deriváció
$(e_i)_p \in T_p\mathbb{R}^n$ – a kanonikus bázis i-edik tagja	$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p :\ f \mapsto D_i f(p)$ – a „szokásos” i-edik parciális derivált képzése p-ben
E_i – a természetes n-élmező i-edik tagja	$\frac{\partial}{\partial u^i} = D_i$ – az i-edik parciális derivált operátora
$X = X^i E_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$	$X = X^i D_i \in \operatorname{Der} C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Az algebrai interpretációban az $X = X^i E_i$ és $Y = Y^j E_j$ vektormezők Lie-zárójele (8.9. figyelembevételével) az

$$[X,Y] = (X^j D_j Y^i - Y^j D_j X^i) D_i$$

alakot ölti, speciálisan

$$[E_i, E_j] = [D_i, D_j] = D_i \circ D_j - D_j \circ D_i = 0.$$

A 8.10. példában szereplő vektormezők így $X = u^2 D_2,\ Y = u^1 D_2$ alakban írhatók; a Lie-zárójelük

$$[X, Y] = [u^2 D_2, u^1 D_2] = u^2(D_2 u^1) D_2 - u^1(D_2 u^2) D_2 = -u^1 D_2 = -Y\ .$$

8.12. definíció és lemma. *Egy M sokaságon adott **elsőfokú differenciálformán**, röviden **1-formán** olyan $\omega:\ p \in M \mapsto \omega(p) =: \omega_p \in T_p^* M$ leképezést értünk, amelyre teljesül a következő simasági feltétel:*

$$\forall\ X \in \mathfrak{X}(M): \qquad \omega(X):\ M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \omega(X)(p) := \omega_p(X_p)$$

sima függvény. M összes elsőfokú differenciálformáinak halmaza $C^\infty(M)$-modulussá válik, ha két 1-forma összegét, illetve egy 1-forma függvényszeresét az

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) := \omega_1(p) + \omega_2(p),$$

illetve az

$$(f\omega)(p) := f(p)\omega_p$$

előírással értelmezzük. Ezt a modulust $\mathfrak{X}^*(M)$-mel jelöljük; egy $U \subset M$ (nemüres) nyílt halmaz esetén az U fölötti 1-formák $\mathfrak{X}^*(U)$ $C^\infty(U)$-modulusának értelmezése analóg. □

8.13. megjegyzések.

(a) Legyen $f \in C^\infty(M)$. A függvények tetszőleges p pontbeli differenciáljának fogalmát ismerve (ld. 7.13.), tekinthetjük a $df:\ p \in M \mapsto (df)_p \in T_p^* M$ leképezést. Ez eleget tesz a simasági feltételnek, mivel – könnyen ellenőrizhető módon –

$$\forall\ X \in \mathfrak{X}(M): \qquad df(X) = Xf\ .$$

Így $df \in \mathfrak{X}^*(M)$; ezt az 1-formát az f függvény ***(külső) differenciál***jának nevezzük.

(b) Tekintsünk M-en egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet! A dx^i differenciálok segítségével a 7.13./(b)-ben mondottak alapján tetszőleges $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ esetén egyértelmű módon

$$\omega \restriction U = \sum_{i=1}^n \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

írható, tehát $(dx^i)_{i=1}^n$ lokális bázisa $\mathfrak{X}^*(M)$-nek (v.ö. 8.2.(a)). Speciálisan

$$\forall\ f \in C^\infty(M): \qquad df \restriction U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

A dx^i 1-formákat a továbbiakban az alapulvett térképhez tartozó ***koordináta 1-formák***ként is említjük.

8.14. lemma. *Az M sokaságon adott tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektorhoz létezik olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $X(p) = v$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül! Ekkor $v = v^i \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ írható, s ha

$$Y^i : \ U \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto Y^i(q) := v^i \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

akkor $Y := \displaystyle\sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ és $Y(p) = v$. Legyen $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvény (7.1.)! f segítségével Y M fölötti vektormezővé terjeszthető ki az

$$X := \begin{cases} fY, & U \text{ fölött} \\ 0, & M \setminus U \text{ fölött} \end{cases}$$

előírással. Ekkor $X \in \mathfrak{X}(M)$, X a p pont egy környezetében egybeesik Y-nal, és $X(p) = v$; X tehát a kívánt tulajdonságú vektormező. □

8.15. állítás. *Az*

$$\omega \in \mathfrak{X}^*(M) \mapsto \tilde{\omega} \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)), \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M) : \ \tilde{\omega}(X) := \omega(X)$$

leképezés természetes izomorfizmust ad az 1-formák $C^\infty(M)$-modulusa és az $\mathfrak{X}(M)$ modulus duális modulusa között.

Bizonyítás.

(1) Triviális számolással ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ esetén $\tilde{\omega}$ valóban $C^\infty(M)$-lineáris leképezése $\mathfrak{X}(M)$-nek $C^\infty(M)$-be, és hogy az $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ leképezés is $C^\infty(M)$-lineáris.

(2) *Az $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ leképezés injektív.* – Tegyük föl, hogy $\omega, \eta \in \mathfrak{X}^*(M)$ és hogy $\tilde{\omega} = \tilde{\eta}$. Választva egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet M-en, U fölött 8.13.(b) értelmében

$$\omega \restriction U = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i, \qquad \text{illetve} \qquad \eta \restriction U = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

írható. Így $\tilde{\omega} = \tilde{\eta}$ miatt $\omega \restriction U = \eta \restriction U$, ebből pedig a választott térkép tetszőlegessége folytán $\omega = \eta$ következik.

(3) *Az $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ leképezés szürjektív.* – Legyen $\tilde{\omega} \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ tetszőleges! Értelmezzük az $\omega : \ p \in M \mapsto \omega_p$ leképezést olymódon, hogy

$$\forall\, v \in T_pM : \qquad \omega_p(v) := \tilde{\omega}(X)(p) \ ,$$

ahol $X \in \mathfrak{X}(M)$ olyan vektormező, hogy $X(p) = v$. Ez a definíció 8.14. folytán lehetséges. Megmutatjuk, hogy „korrekt” is: független a fölhasznált $X \in \mathfrak{X}(M)$

vektormező megválasztásának módjától. Először azt látjuk be, hogy ha egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre $X(p) = 0$ teljesül, akkor $\tilde{\omega}(X)(p) = 0$. Kijelölve egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül, 8.2.(a) értelmében $X \restriction U = X(x^i)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ írható. $X(p) = 0$ miatt

$$[X(x^i)](p) = X(p)(x^i) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n),$$

így

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(X)(p) &\overset{(*)}{=} \tilde{\omega}\left(X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p) = \left[X(x^i)\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right](p) = \\ &= [X(x^i)](p)\left[\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p)\right] = 0.\end{aligned}$$

Ha mármost az X és $\tilde{X}$ vektormező olyan, hogy $X(p) = \tilde{X}(p) = v$, akkor $(X - \tilde{X})(p) = 0$, és a tett észrevétel alapján

$$[\tilde{\omega}(X) - \tilde{\omega}(\tilde{X})](p) = [\tilde{\omega}(X - \tilde{X})](p) = 0.$$

Ezzel igazoltuk, hogy ω jól definiált. Közvetlenül kiolvasható a konstrukcióból, hogy $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, és hogy ω képe a vizsgált leképezésénél éppen a megadott $\tilde{\omega}$. $\square$

8.16. megjegyzés. A következőkben az $\mathfrak{X}^*(M)$ modulust külön említés nélkül azonosnak tekintjük az $\mathfrak{X}(M)$ modulus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ duálisával. (A jelölést már eleve ennek megfelelően választottuk!)

8.17. definíció. *Egy M **sokaságon adott tenzor**on az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-moduluson adott tenzort értünk.*

8.18. megjegyzések.

(a) Az M sokaság (r, s)-típusú tenzorainak $C^\infty(M)$-modulusára 2.4. alapján a $\mathcal{T}_s^r[\mathfrak{X}(M)]$ jelölés adódik, ehelyett azonban a következőkben egyszerűen $\mathcal{T}_s^r(M)$-et írunk. Az ugyancsak 2.4-ben tett megállapodás értelmében $\mathcal{T}_0^0(M) := C^\infty(M)$.

(b) Mivel $\mathfrak{X}(M)$ duális modulusa $\mathfrak{X}^*(M)$, $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ a 2.3-ban adott értelmezés szerint azt jelenti, hogy

$$A : \quad \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s} \to C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$-multilineáris, közelebbről $(r+s)$-lineáris leképezés. Képletesen szólva, A olyan „multilineáris automata”, amely r számú $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-forma és s számú $X_1, \dots, X_s$ vektormező betáplálása esetén kidob egy

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) : M \to \mathbb{R}$$

(∗) Annak indoklására, hogy ez a lépés valóban lehetséges, 8.21. bizonyításában fog sor kerülni.

sima függvényt. Annak ellenőrzésekor, hogy egy adott leképezés tenzorként funkcionál-e, a kritikus kérdés többnyire a függvényekben való homogenitás eldöntése.

8.19. példák.

(a) ***A Kronecker-delta tenzor*** (v.ö. 2.7. és 2.8.) Ha

$$\delta : \quad \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \quad (\theta, X) \mapsto \delta(\theta, X) := \theta(X) \ ,$$

akkor $\delta \in \mathcal{T}_1^1(M)$. – Az additivitás mindkét változóban közvetlenül látható; ellenőrizzük a $C^\infty(M)$-homogenitást. Legyen $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$ tetszőleges!

$$\delta(f\theta, X)(p) := [(f\theta)(X)](p) \overset{8.12.}{:=} (f\theta)(p)(X_p) \overset{8.12.}{=} f(p)\theta_p(X_p) =:$$
$$=: f(p)[\theta(X)](p) = [f\theta(X)](p) = [f\delta(\theta, X)](p) \implies \delta(f\theta, X) = f\delta(\theta, X).$$

$$\delta(\theta, fX)(p) := [\theta(fX)](p) \overset{8.15.}{=} [f\theta(X)](p) = [f\delta(\theta, X)](p) \implies$$
$$\implies \delta(\theta, fX) = f\delta(\theta, X).$$

(b) *(Ellenpélda)* Legyen $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)\backslash\{0\}$ rögzített 1-forma, s tekintsük az

$$A : \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \quad (X, Y) \mapsto A(X, Y) := X[\delta(\omega, Y)]$$

leképezést! Közvetlenül látható, hogy ekkor A X-ben $C^\infty(M)$-lineáris, Y-ban pedig additív. Nem teljesül azonban az Y-ban való homogenitás, ha ugyanis $f \in C^\infty(M)$, akkor

$$\begin{aligned} A(X, fY) \ &:= \ X[\delta(\omega, fY)] \overset{(a)}{=} X[f\delta(\omega, Y)] \overset{(\mathrm{Der}\,2)}{=} \\ &= \ (Xf)\delta(\omega, Y) + fX[\delta(\omega, Y)] = (Xf)\omega(Y) + fA(X, Y). \end{aligned}$$

A dolgot az „rontotta” el, hogy A derivációként is működik, szemben a Kronecker-delta tenzor tisztán algebrai karakterével.

8.20. állítás. *Érvényesek a következő természetes modulus-izomorfizmusok:*

$$\boxed{\mathcal{T}_1^0(M) \cong \mathfrak{X}^*(M), \qquad \mathcal{T}_0^1(M) \cong \mathfrak{X}(M), \qquad \mathcal{T}_s^1(M) \cong \mathcal{L}([\mathfrak{X}(M)]^s, \mathfrak{X}(M))}\,.$$

($\mathcal{L}([\mathfrak{X}(M)]^s, \mathfrak{X}(M))$ az $[\mathfrak{X}(M)]^s \to \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-multilineáris leképezések modulusa, $s \in \mathbb{N}^+$).

Bizonyítás. (Vázlat)

(1) $\mathcal{T}_1^0(M) := \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)) \cong \mathfrak{X}^*(M) \quad$ (ld. 8.15.).

(2) Az $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \tilde{X}$, $\forall\, \theta \in \mathfrak{X}^*(M) : \ \tilde{X}(\theta) := \delta(\theta, X) := \theta(X)$ leképezésről az előzőekben már alkalmazott gondolatmenettel látható, hogy izomorfizmus az $\mathfrak{X}(M)$ és a $\mathcal{T}_0^1(M) := \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}^*(M), C^\infty(M))$ modulus között.

(3) Tekintve egy $A \in \mathcal{T}_s^1(M)$ tenzort, értelmezzük az $\tilde{A} : [\mathfrak{X}(M)]^s \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést azzal az előírással, hogy $\forall\ X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M),\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M)$:

$$\theta[\tilde{A}(X_1, \dots, X_s)] = A(\theta, X_1, \dots, X_s)\ .$$

Egyszerűen átgondolható, hogy ekkor $\tilde{A}$ jól definiált, $\tilde{A} \in \mathcal{L}([\mathfrak{X}(M)]^s, \mathfrak{X}(M))$, és az $A \mapsto \tilde{A}$ leképezés izomorfizmus a vizsgált modulusok között. □

8.21. lemma. *Legyen $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$! – Ha a $\theta^1, \dots, \theta^r$ 1-formák vagy az $X_1, \dots, X_s$ vektormezők valamelyike eltűnik egy $p \in M$ pontban, akkor*

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0\ .$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy például $X_1(p) = 0$, s válasszunk egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet a p pont körül! Ekkor

$$X_1 \restriction U = X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_1^i = X_1 x^i \in C^\infty(U) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

írható. Adjunk meg egy $f \in C^\infty(M)$ p-beli dudorfüggvényt a 7.1-ben mondottak szerint! Ha

$$\tilde{X}_1^i := \begin{cases} f X_1^i \\ 0 \end{cases}, \qquad \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i} := \begin{cases} f \dfrac{\partial}{\partial x^i} & U \text{ fölött,} \\ 0 & M \setminus U \text{ fölött;} \end{cases}$$

akkor $\tilde{X}_1^i \in C^\infty(M)$, $\dfrac{\tilde{\partial}}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, és az

$$X_1 = \tilde{X}_1^i \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i} + (1 - f^2) X_1$$

előállításhoz jutunk. Ennek alapján

$$\begin{aligned} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= \tilde{X}_1^i A(\theta^1, \dots, \theta^r, \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}, X_2, \dots, X_s) + \\ &+ (1 - f^2) A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \end{aligned}$$

adódik. A jobboldal 2. tagja $f(p) = 1$ folytán eltűnik p-ben, 0-t vesz föl p-ben azonban az 1. tag is, mivel

$$X_1(p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall\ i \in \{1, \dots, n\} : \quad \tilde{X}_1^i(p) = f(p) X_1^i(p) = X_1^i(p) = 0\ .$$

Ilymódon $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$. □

8.22. állítás. *Tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ tenzort! Ha $\theta^i, \bar{\theta}^i \in \mathfrak{X}^*(M)$; $X_j, \overline{X}_j \in \mathfrak{X}(M)$, és egy $p \in M$ pontban*

$$\theta^i(p) = \bar{\theta}^i(p),\ 1 \leqq i \leqq r;\ X_j(p) = \overline{X}_j(p),\ 1 \leqq j \leqq s,$$

akkor

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_s)(p).$$

Bizonyítás. Szorítkozzunk a könnyebb áttekinthetőség érdekében az $r = 1,\ s = 2$ eset vizsgálatára! Azt mutatjuk meg, hogy $\theta(p) = \bar{\theta}(p),\ X(p) = \overline{X}(p), Y(p) = \overline{Y}(p)$ esetén

$$A(\bar{\theta}, \overline{X}, \overline{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p)\ .$$

Triviális számolással ellenőrizhető, hogy érvényes az alábbi ún. „teleszkóp-azonosság”:

$$A(\bar{\theta}, \overline{X}, \overline{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\bar{\theta} - \theta, \overline{X}, \overline{Y}) + A(\theta, \overline{X} - X, \overline{Y}) + A(\theta, X, \overline{Y} - Y)\ .$$

Mivel a föltevés értelmében $\bar{\theta} - \theta,\ \overline{X} - X$ és $\overline{Y} - Y$ egyaránt eltűnik a p pontban, 8.21. alapján a jobboldal p-beli eltűnése, ebből pedig $A(\bar{\theta}, \overline{X}, \overline{Y})(p) = A(\theta, X, Y)(p)$ adódik. □

8.23. következmény és definíció. *Legyen adva egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor! Amennyiben $p \in M,\ \vartheta^1, \dots, \vartheta^r \in T^*_p M;\ v_1, \dots, v_s \in T_p M$, és*

$$A_p(\vartheta^1, \dots, \vartheta^r, v_1, \dots, v_s) := A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

$$\text{ha } \theta^i(p) = \vartheta^i,\ 1 \leqq i \leqq r;\ X_j(p) = v_j,\ 1 \leqq j \leqq s,$$

akkor $A_p \in \mathcal{T}^r_s(T_p M)$ jól definiált (r, s)-típusú tenzor a $T_p M$ érintőtéren; ezt a tenzort az A ***tenzor*** *p* ***pontban fölvett értéké****nek nevezzük.* □

8.24. megjegyzés. 8.23. lehetővé teszi, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort „mező”-ként, azaz olyan $p \in M \mapsto A_p$ leképezésként interpretáljunk, ahol $A_p \in \mathcal{T}^r_s(T_p M)$. Így arra is mód nyílik, hogy szólhassunk az A tenzornak egy (nemüres) $U \subset M$ halmazra való leszűkítéséről az $(A \restriction U)_p := A_p$ értelmezéssel. Ezekkel a lehetőségekkel a továbbiakban rutinszerűen élni fogunk.

8.25. definíció. *(v.ö. 2.13.) Legyen adva az M sokaságon egy $(U, (x^i)^n_{i=1})$ térkép! Egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ $((s, r) \neq (0, 0))$ tenzornak a tekintett térképre vonatkozó* ***komponensei****n az*

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} := (A \restriction U)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}) :\ U \to \mathbb{R}$$

(sima) függvényeket értjük, ahol valamennyi index 1-től n-ig fut.

8.26. példák.

(a) Speciálisan egy (1,0)-típusú tenzormező, azaz egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, illetve egy (0,1)-típusú tenzormező, vagyis egy $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ elsőfokú differenciálforma esetén a most értelmezett tenzorkomponensek az

$$X \restriction U = \sum_{i=1}^{n} X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\ , \quad \text{illetve az} \quad \omega \restriction U = \sum_{i=1}^{n} \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^i$$

előállításban (ld. 8.2.(a), illetve 8.13.(b)) szereplő $X(x^i)$, illetve $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ függvények. – Ez a második esetben evidens, az első esetben pedig abból a triviális észrevételből adódik, hogy

$$\begin{aligned}(X \restriction U)(dx^i) &\overset{8.20.}{=} dx^i(X \restriction U) = dx^i\left[(Xx^j)\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \\ &= (Xx^j)dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (Xx^j)\delta^i_j = Xx^i.\end{aligned}$$

(b) Tekintsük a $\delta :\ \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto C^\infty(M)$, $(\theta, X) \mapsto \theta(X)$ Kronecker-delta tenzort (8.19.(a))! Ennek tetszőleges $(U, (x^i)^n_{i=1})$ térképre vonatkozó komponensei a

$$(\delta \restriction U)\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$$

Kronecker-szimbólumok.

(c) Legyen $A \in \mathcal{T}^1_2(M)$, $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Adjunk meg M-en egy $(U, (x^i)^n_{i=1})$ térképet. Ha U fölött

$$\theta = \theta_i dx^i, \quad X = X^j\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Y = Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}\ ,$$

akkor – az egyszerűség kedvéért továbbra is mellőzve a leszűkítés jelét –

$$\begin{aligned}A(\theta, X, Y) &= A\left(\theta_i dx^i, X^j\frac{\partial}{\partial x^j}, Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \theta_i X^j Y^k A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \\ &= A^i_{jk}\theta_i X^j Y^k\end{aligned}$$

írható a tenzorkomponensek fölhasználásával.

(d) Tekintsük az $A_1 \in \mathcal{T}^1_2(M)$ és az $A_2 \in \mathcal{T}^1_1(M)$ tenzort! Ezek $A_1 \otimes A_2 \in \mathcal{T}^2_3(M)$ tenzori szorzatának (2.9.) egy $(U, (x^i)^n_{i=1})$ térképre vonatkozó komponensei

$$\begin{aligned}(A_1 \otimes A_2)^{ij}_{klm} &:= A_1 \otimes A_2\left(dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \\ &= A_1\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)A_2\left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = (A_1)^i_{kl}(A_2)^j_m\end{aligned}$$

(a leszűkítés jelét most sem írtuk ki).

8.27. állítás. *Az M sokaság egy $(U, (x^i)^n_{i=1})$ térképének rögzítése után minden $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ $(r, s \in \mathbb{N}^+)$ tenzor egyértelműen előállítható U fölött az*

$$A \restriction U = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

alakban, ahol az $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ függvények A komponensei az alapulvett térképre vonatkozóan, s valamennyi kétszer előforduló indexre összegzés értendő 1-től n-ig.

Bizonyítás. A könnyebb áttekinthetőség érdekében az $r = 1,\ s = 2$ eset leírására szorítkozunk; az okoskodás teljes általánosságban ugyanilyen. – Tegyük föl tehát, hogy $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Belátjuk:

$$A \restriction U = A^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \ , \qquad (*)$$

ahol $A^i_{jk} = (A \restriction U)\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$. Mivel $(*)$ mindkét oldalán $C^\infty(M)$-multilineáris leképezés szerepel, elegendő azt ellenőrizni, hogy a bal- és jobboldal ugyanazt az értéket veszi föl a $\left(dx^l, \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^r}\right) \in \mathfrak{X}^*(U) \times \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)$ hármason, tetszőleges $1 \leqq l, s, r \leqq n$ indexválasztás esetén. Ez valóban fennáll, hiszen egyrészt

$$(A \restriction U)\left(dx^l, \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^r}\right) =: A^l_{sr} \ ,$$

másrészt

$$\begin{aligned} A^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \left(dx^l, \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^r}\right) &= A^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}(dx^l) dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right) dx^k \left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right) = \\ &= A^i_{jk} \delta^l_i \delta^j_s \delta^k_r = A^l_{sr} \ , \end{aligned}$$

fölhasználva, hogy a 8.20-ban adott interpretáció szerint

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^l) := \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^i}(dx^l) := \delta\left(dx^l, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) := dx^l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta^l_i \ .$$

Meggondolásunkkal a $(*)$ alakú előállítás egyértelműsége is azonnal következik, mert ha $A \restriction U = B^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k$ szintén teljesülne, akkor számolásunkkal $B^i_{jk} = A^i_{jk}$ adódna. □

8.28. állítás (Transzformációs szabály). *(v.ö. 2.17.)*
Tekintsünk egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzort! Legyenek $(U, (x^i)^n_{i=1})$ és $(V, (y^i)^n_{i=1})$ térképek M-en, föltéve, hogy $U \cap V \neq \emptyset$. Amennyiben A komponensei az (U, x) térképre vonatkozóan az $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$, a (V, y) térképre vonatkozóan pedig az $\tilde{A}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ függvények, úgy $U \cap V$ fölött érvényes az

$$\tilde{A}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}} A^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$$

transzformációs formula.

Bizonyítás. 7.11-ből és 7.13-ból következően az (U, x) és a (V, y) térképhez tartozó koordinátavektormezők, illetve koordináta 1-formák kapcsolata:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \ , \quad \text{illetve} \quad dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Így

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} &:= (A \upharpoonright U)\left(dy^{i_1},\dots,dy^{i_r},\frac{\partial}{\partial y^{j_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial y^{j_s}}\right) = \\
&= (A \upharpoonright U)\left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}dx^{k_1},\dots,\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}dx^{k_r},\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\ \frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\dots,\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\ \frac{\partial}{\partial x^{l_s}}\right) = \\
&= \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\ \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\ A^{k_1\dots k_r}_{l_1\dots l_s}.
\end{aligned}$$

□

8.29. definíció és állítás. *(v.ö. 2.19.) Legyen adva az M és az N sokaság, s egy $\varphi : M \to N$ sima leképezés. Egy $A \in \mathcal{T}^0_s(N)$ kovariáns tenzor φ általi* ***pull-back****jén $s \geqq 1$ esetén a*

$$\varphi^*A: \quad p \in M \mapsto (\varphi^*A)_p \in \mathcal{T}^0_s(T_pM);$$

$$\forall\ v_1,\dots,v_s \in T_pM: \quad (\varphi^*A)_p(v_1,\dots,v_s) := A_{\varphi(p)}((\varphi_*)_p(v_1),\dots,(\varphi_*)_p(v_s))$$

előírással értelmezett leképezést értjük; ha $s = 0$ (azaz $A \in \mathcal{T}^0_0(N) := C^\infty(N)$), akkor $\varphi^*A := A \circ \varphi \in C^\infty(M)$. – A pull-back képzésére teljesülnek a következők:

(1) $\forall\ A \in \mathcal{T}^0_s(N):\ \varphi^*A \in \mathcal{T}^0_s(M)$.

(2) A $\varphi^*:\ \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M),\ A \mapsto \varphi^*A$ *leképezés* $\mathbb{R}$*-lineáris.*

(3) Ha P további sokaság és $\psi \in C^\infty(N,P)$, akkor

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*:\ \mathcal{T}^0_s(P) \to \mathcal{T}^0_s(M)\ .$$

(4) Amennyiben φ diffeomorfizmus, úgy φ^* izomorfizmus.

(5) $A \in \mathcal{T}^0_{s_1}(N),\ B \in \mathcal{T}^0_{s_2}(N)$ *esetén* $\varphi^*(A \otimes B) = \varphi^*A \otimes \varphi^*B$.

Bizonyítás. Egyszerű gyakorló feladat. □

III. rész

Riemann-struktúrák

Az előző részben lefektettük azokat a nélkülözhetetlen algebrai és topológiai alapokat, amelyek szükségesek ahhoz, hogy differenciálgeometriai problémákat megfelelő keretek között fogalmazhassunk meg és tárgyalhassunk. Bár arra már van módunk, hogy értelmesen szólhassunk sokaságok közötti leképezések differenciálhatóságáról, s egy differenciálható leképezés érintőleképezése is hasonlóan funkcionál, mint a „lokális analízis”-ben a derivált, a klasszikus analízis fontosabb eszközeinek sokaságokra való általánosításából még alig került sor valamire. A feladat nem triviális és nem is egyszerű. Első lépésként azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy adott $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén miként értelmezhető olyan – $D_X Y$-nal jelölt – vektormező, amelynek tetszőleges $p \in M$ pontban fölvett értéke az Y vektormező „változási sebessége” az $X(p)$ irányban.

A válasz kézenfekvő az $\mathbb{R}^n$ sokaság esetén. Tekintsük az $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormezőket! Ha

$$v_p := X(p) \quad \text{és} \quad c:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto c(t) := p + tv\ ,$$

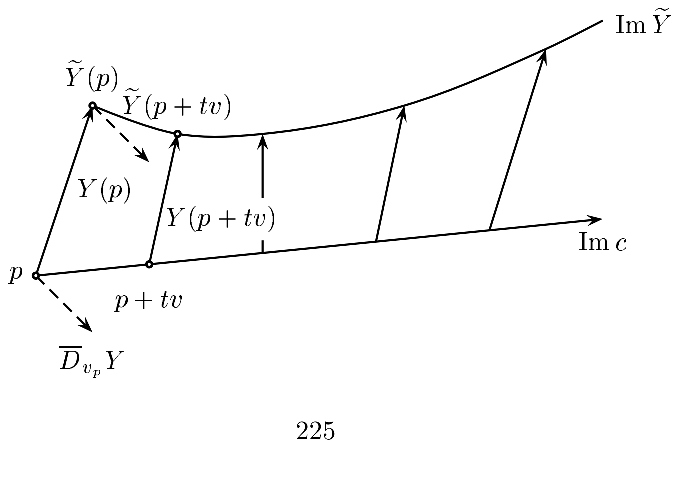
akkor legyen

$$\overline{D}_{v_p} Y := \dot{\overline{Y \circ c}}(0)\ .$$

Amennyiben Y csatolt leképezése $\widetilde{Y}$, úgy

$$\dot{\overline{Y \circ c}}(0) \overset{\text{I.5.15.}}{:=} \big(c(0), (\widetilde{Y} \circ c)'(0)\big) \overset{\text{I.5.21.(b)}}{=} \big(p, D_v \widetilde{Y}(p)\big) \in T_p\mathbb{R}^n\ ,$$

ahol $D_v\widetilde{Y}(p)$ a „szokásos” iránymenti derivált.



Ha mármost

$$(\overline{D}_X Y)(p) := \overline{D}_{X(p)} Y \ ,$$

akkor $\overline{D}_X Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, s az így értelmezett

$$\overline{D}:\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n), \quad (X,Y) \mapsto \overline{D}_X Y \tag{$*$}$$

leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) rögzített $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ mellett az $X \mapsto \overline{D}_X Y$ leképezés $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-*lineáris*;

(2) rögzített $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ mellett az $Y \mapsto \overline{D}_X Y$ leképezés *additív*;

(3) $\forall\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \quad \overline{D}_X fY = (Xf)Y + f\overline{D}_X Y$.

Ha megkiséreljük a leírt eljárást tetszőleges sokaságra általánosítani, áthidalhatatlan akadályokba ütközünk. Az $\mathbb{R}^n$-beli iránymenti deriválás erősen fölhasználja a vektortér-struktúrát, márpedig $\overline{D}_{v_p} Y$ láthatólag a szokásos iránymenti derivált adaptációja a vektormező-szituációhoz. Képzése – burkoltan – támaszkodik az Y vektormező különböző pontokban fölvett értékeinek „összehasonlítására": $\dot{\overline{Y \circ c}}$ definíciójában el van rejtve egy

$$\frac{Y(p+tv) - Y(p)}{t}$$

alakú különbségi hányados, ahol a számláló amiatt bír értelemmel, hogy

$$\forall\ p \in \mathbb{R}^n: \quad T_p\mathbb{R}^n \cong T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \ ,$$

s mindkét izomorfizmus kanonikus. (Ez a körülmény $\widetilde{Y}$ szerepeltetésével lett kihasználva.) Egy, úgymond „általános" differenciálható sokaságnál a különböző pontokhoz tartozó érintővektorok természetes azonosítására nincs mód, ehhez további struktúrára van szükség. Ezt a további struktúrát fogjuk *lineáris konnexió*nak nevezni; így jutunk tárgyalásunk harmadik kulcsfontosságú fogalmához. Bevezetésekor a technikailag legegyszerűbb megközelítéssel élünk: az előbb vázolt differenciálási eljárás (1)-(3) tulajdonságait *axiómák*nak választjuk, s az M sokaságon adott lineáris konnexión olyan

$$D:\ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X,Y) \mapsto D_X Y$$

leképezést értünk, amely teljesíti az (1)-(3) feltételeket. Ezek után a $(*)$ leképezés *példa* lesz lineáris konnexióra, amelyet $\mathbb{R}^n$ *természetes konnexió*jának fogunk nevezni. 1.9-ben $\mathbb{R}^n$ természetes konnexiója formailag kicsit másként, a

$$\overline{D}_X Y := X(Y^i)\frac{\partial}{\partial u^i} \ ; \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i} \ , \quad (u^i)_{i=1}^n \ \mathbb{R}^n \ \textit{kanonikus koordinátarendszere}$$

explicit összefüggéssel kerül majd megadásra. Absztrakt sokaság esetén ilyenfajta definiálási kisérlet sem vezetne célhoz, kitüntetett, „kanonikus" koordinátarendszer ugyanis nem áll rendelkezésre. – Megjegyezzük, hogy a lineáris konnexiók most körvonalazott fogalmához vezető út valójában távolról sem volt ennyire egyenesvonalú, s mint oly gyakran, ebben az esetben is az történt, hogy a legpraktikusabb definíció született meg legutoljára (v.ö. 1.2.).

Az értelmezést követően rögtön bevezetjük a lineáris konnexiók két fontos adatát, a

$$T : \quad (X,Y) \mapsto T(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y]$$

*torziótenzor*t és az

$$R : \quad (X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$$

*görbületi tenzor*t, végrehajtjuk továbbá a D_X operátor kiterjesztését tetszőleges M-en adott tenzorra.

Tegyük föl, hogy D lineáris konnexió az M sokaságon! Ha $c : I \to M$ egy parametrizált görbe, s $\mathfrak{X}(c)$ jelöli a c-menti vektormezők $C^\infty(I)$-modulusát, akkor D egyértelmű módon egy *c-menti kovariáns deriválás*ként említett

$$D_c : \; \mathfrak{X}(c) \to \mathfrak{X}(c), \quad X \mapsto D_c X$$

differenciáloperátort indukál, amelyet D-vel a

$$\forall \; X \in \mathfrak{X}(M), \; t \in I : \quad D_c(X \circ c)(t) = D_{\dot{c}(t)} X$$

reláció köt össze. Egy $X \in \mathfrak{X}(c)$ vektormezőt *párhuzamos*nak mondunk, ha $D_c X = 0$; a c görbét *autoparalel görbé*nek, vagy a lineáris konnexió *geodetikus*ának nevezzük, ha $D_c \dot{c} = 0$. $\mathbb{R}^n$ természetes konnexiójára nézve a geodetikusok a parametrizált egyenesek, egy sokaság geodetikusai így éppen az egyenesek általánosításait jelentik.

Bevezető differenciálgeometriánk negyedik kulcsfogalma, a *Riemann-* (illetve általánosabban a *pszeudo-Riemann*) *struktúra* nem igényel előzetes kommentárt: éppoly egyszerű és természetes, mint amilyen fontos. Megadásakor egy

$$g : \quad p \in M \mapsto g_p \in \mathcal{T}_2^0(T_p M)$$

szimmetrikus tenzort jelölünk ki M-en, előírva, hogy

$$\forall \; p \in M : \quad g_p \textit{ belső szorzat (illetve nemelfajuló bilineáris forma) } T_p M\textit{-en.}$$

A *Riemann-geometria alaplemmája* az a meglepően szép tétel, miszerint *minden pszeudo-Riemann-struktúrával ellátott sokaságon létezik egy és csak egy olyan lineáris konnexió, amelynek torziótenzora eltűnik, s amely metrikus a következő értelemben:*

$$\forall \; X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M) : \quad Xg(Y,Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z) \; .$$

Ezt a lineáris konnexiót nevezzük a sokaság *Levi-Civita konnexió*jának.

Elkövetkező fejtegetéseink jelentős részében a most körvonalazott eszközöket $\mathbb{R}^n$-beli hiperfelületek, illetve – konkrétabban – $\mathbb{R}^3$-beli felületek alapvető geometriai tulajdonságainak leírására alkalmazzuk. A vizsgálatok jellegének előzetes érzékeltetése céljából tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő, s az $\underline{N}$ normálegységvektormező által irányított felületet! Már Gauss fölvetette, s az akkor rendelkezésre álló lokális apparátus segítségével meg is oldotta „M $\mathbb{R}^3$-ban fölvett formája" leírásának problémáját. Intuitíve világos, hogy kiválasztva és rögzítve egy $p \in M$ pontot, a különböző p-beli irányokban M különböző módon „görbül"; a feladat az, hogy ésszerű és egzakt módszert találjunk e görbülések mérésére és átlagolására. Erre fog szolgálni az

$$S: \quad p \in M \mapsto S_p \in \mathrm{End}(T_pM) \ , \qquad \forall\, \underline{v} \in T_pM: \quad S_p(\underline{v}) := -\overline{D}_v\underline{N}$$

ún. *formatenzor*, ahol $\overline{D}$ $\mathbb{R}^3$ természetes konnnexiója. (S bevezetése hiperfelületek általánosságában ugyanígy történik.) Kiderül, hogy S_p tetszőleges $p \in M$ esetén *önadjungált lineáris operátor*a a T_pM érintősíknak, amelynek alapvető algebrai invariánsai (sajátértékek, sajátvektorok, determináns, átlósösszeg) mind érzékletes geometriai jelentéssel bírnak. Ezeket az invariánsokat részletesen tárgyaljuk, s egyben hatékony eljárásokat mutatunk be tényleges meghatározásukra. Az invariánsok közül a legnevezetesebb a

$$K: \ M \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto K(p) := \det S_p$$

Gauss-görbület. Különleges fontosságát az adja, hogy belső, „intrinsic" adata a felületnek abban az értelemben, hogy *a felület ($\mathbb{R}^3$-tól örökölt) Riemann-struktúrája teljesen meghatározza* – annak ellenére, hogy a bevezetése kifejezetten külső eszközök igénybevételével történt. Explicite:

$$\forall\, p \in M: \quad K(p) = \left\langle R(\underline{b}_1, \underline{b}_2)\underline{b}_2, \underline{b}_1 \right\rangle,$$

ahol R a felület Levi-Civita konnexiójának görbületi tenzora (intrinsic adat!); $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ ortonormált bázisa T_pM-nek. – Ez a Gauss-féle „theorema egregium", az a kimagasló eredmény, amely a talán legfőbb ihletője volt Riemann 1854-es, sokat emlegetett habilitációs előadásának és későbbi differenciálgeometriai munkásságának. A felírt összefüggés által motiválva, Riemann hatásosan általánosította a Gauss-görbület fogalmát tetszőleges (ma már:) Riemann-sokaságra, bevezetve egy adott pontban, adott síkálláshoz (azaz egy kétdimenziós T_pM-beli altérhez) tartozó ún. *metszetgörbület*et. Ha a metszetgörbület bármely pontban, bármely irányhoz tartozóan ugyanaz az érték, akkor *konstans görbületű Riemann-sokaság*ról beszélünk. A klasszikus geometriák közül az euklideszi, a hiperbolikus és a gömbi rendre 0, -1, illetve 1 konstans görbületű Riemann-sokasággal modellezhető. A modellek közül viszonylagos részletességgel foglalkozunk a klasszikus hiperbolikus sík Poincaré-féle félsík-modelljével, leíva annak geodetikusait (azaz „egyeneseit"), s meghatározva az izometriacsoportját. – Így eljutunk egy csodálatosan gazdag világ kapujába, amelybe átfogó és mély betekintést nyújt például JOSEPH WOLF *Spaces of constant curvature* című, sok kiadást megért monográfiája.

1. Lineáris konnexiók, görbületi- és torziótenzor

1.1. definíció. *Vegyünk alapul egy M sokaságot!*

(a) M-en adott ***lineáris konnexió**n* – röviden ***konnexió**n* – *olyan*

$$D: \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X,Y) \mapsto D_X Y$$

leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(D1) *Rögzített $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén az $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto D_X Y$ leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, azaz $\forall\ X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M),\ f_1, f_2 \in C^\infty(M)$:*

$$D_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 D_{X_1} Y + f_2 D_{X_2} Y.$$

(D2) *Rögzített $X \in \mathfrak{X}(M)$ mellett az $Y \in \mathfrak{X}(M) \mapsto D_X Y$ leképezés additív: $\forall\ Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$D_X(Y_1 + Y_2) = D_X Y_1 + D_X Y_2\ .$$

(D3) *(Leibniz-szabály) $\forall\ f \in C^\infty(M)$:*

$$D_X f Y = (Xf)Y + f D_X Y\ .$$

*Ha D lineáris konnexió M-en, akkor az (M,D) párt – vagy egyszerűen M-et – **affinösszefüggő sokaság**nak hívjuk.*

(b) A $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ lineáris konnexió

– ***torzió**ja a $T:\ (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto T(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$T(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y];$$

– ***görbület**e az $R:\ (X,Y,Z) \in [\mathfrak{X}(M)]^3 \mapsto R(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$R(X,Y)Z := D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z$$

leképezés.

1.2. megjegyzés.

(a) A lineáris konnexiók bevezetésére számos eljárás ismeretes, az általunk választott megközelítés minden bizonnyal a legegyszerűbb. Ez a definíció elsőként K. Nomizu japán matematikus egy dolgozatában került publikálásra (*Amer. J. Math.* **76** (1954), 33-65), ahol azonban a szerző egy lábjegyzetben megemlíti, hogy az értelmezés J. L. Koszul francia matematikustól származik, s hogy ő egy vele való beszélgetés során ismerte meg. – Erre tekintettel 1.1-et a lineáris konnexiók ***Koszul-féle definíciója***ként is idézzük.

(b) Lineáris konnexió minden sokaságon létezik. – Ez a tény igen erősen azon a topológiai feltételen múlik, amelyet a sokaságok definíciójában a 2. megszámlálhatósági axiómaként említettünk; a bizonyítást az Appendixben találja meg az Olvasó.

(c) Ha D lineáris konnexió az M sokaságon és $(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, akkor a $D_X Y$ vektormezőt az Y vektormező X szerinti ***kovariáns derivált***jának mondjuk (a D konnexióra vonatkozóan). A (D1) axióma és a II.8.20-beli (harmadik) interpretáció alapján rögzített $Y \in \mathfrak{X}(M)$ mellett az $X \mapsto D_X Y$ leképezés (1,1)-tenzor az M sokaságon. Így II.8.23-ra tekintettel tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor esetén jól definiált $D_v Y \in T_pM$ érintővektort eredményez a

$$D_v Y := (D_X Y)(p), \quad \text{ha } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ és } X_p = v$$

előírás. – Fölhívjuk végül a figyelmet arra, hogy (D3)-ból kiolvashatóan egy lineáris konnexió sohasem lehet tenzor!

1.3. lemma. *Legyen (M,D) affinösszefüggő sokaság, s tekintsük D T torzióját, illetve R görbületét.*

(a) T (1,2)-típusú antiszimmetrikus tenzor:

$$\forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M): \quad T(X,Y) = -T(Y,X)\ .$$

(b) R (1,3)-típusú tenzor, amelyre

$$\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M): \quad R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z\ .$$

Bizonyítás.

(1) $T(X,Y) := D_X Y - D_Y X - [X,Y] = -(D_Y X - D_X Y - [Y,X]) =$
$= -T(Y,X).$

(2) $\forall\, f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &:= D_{fX}Y - D_Y fX - [fX,Y] \overset{\text{(D1),(D3),II.8.7.}}{=} \\ &= fD_X Y - (Yf)X - fD_Y X - f[X,Y] + (Yf)X = \\ &= f(D_X Y - D_Y X - [X,Y]) = fT(X,Y); \end{aligned}$$

ebből (1) figyelembevételével az is következik, hogy $T(X, fY) = fT(X, Y)$. Még egyszerűbben látható, hogy T mindkét változójában additív, tehát a $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezés $C^\infty(M)$-bilineáris. Ez a II.8.20-beli (megfelelő) interpretáció alapján azt jelenti, hogy $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$.

(3)
$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &:= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z = \\ &= -(D_Y D_X Z - D_X D_Y Z - D_{[Y,X]}Z) = \\ &=: -R(Y,X)Z \ . \end{aligned}$$

(4) $\forall\, f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &:= D_{fX} D_Y Z - D_Y D_{fX} Z - D_{[fX,Y]}Z \overset{\text{(D1),II.8.7.}}{=} \\ &= f D_X D_Y Z - D_Y(f D_X Z) - f D_{[X,Y]}Z + (Yf) D_X Z \overset{\text{(D3)}}{=} \\ &= f(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z) = fR(X,Y)Z \ , \end{aligned}$$

s így (3)-ra tekintettel $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$ is fennáll.

Hasonlóan egyszerű számolással kapjuk, hogy $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$. Mivel az additivitás teljesülése most is triviálisan adódik, megállapíthatjuk, hogy az

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

leképezés $C^\infty(M)$-trilineáris, s ennélfogva – ismét II.8.20-ra való hivatkozással – $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$. □

1.4. definíció. *Egy lineáris konnexiót* ***szimmetrikus****nak nevezünk, ha a torziótenzora eltűnik.*

1.5. állítás. *Szimmetrikus lineáris konnexió görbületi tenzorára teljesül a következő összefüggés, az ún.* ***1. Bianchi-azonosság***[1]*:*

$$\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) : \qquad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \ .$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y := \\ &:= \ D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z + D_Y(D_Z X) - D_Z(D_Y X) - \\ &- \ D_{[Y,Z]}X + D_Z(D_X Y) - D_X(D_Z Y) - D_{[Z,X]}Y = D_X(D_Y Z - D_Z Y) + \\ &+ \ D_Y(D_Z X - D_X Z) + D_Z(D_X Y - D_Y X) - D_{[X,Y]}Z - D_{[Y,Z]}X - \\ &- \ D_{[Z,X]}Y \overset{(*)}{=} (D_X[Y,Z] - D_{[Y,Z]}X) + (D_Y[Z,X] - D_{[Z,X]}Y) + \\ &+ \ (D_Z[X,Y] - D_{[X,Y]}Z) \overset{(*)}{=} [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0; \end{aligned}$$

az utolsó lépésben az $\mathfrak{X}(M)$ Lie-algebrában érvényes Jacobi-identitást (II.1.17. Lie2) alkalmazva, a $(*)$-gal jelölt lépésekben pedig a torzió eltűnését használva föl ($T(Y,Z) = 0 \implies D_Y Z - D_Z Y = [Y,Z], \ \dots, \ T(Z,[X,Y]) = 0 \implies$ $\implies D_Z[X,Y] - D_{[X,Y]}Z = [Z,[X,Y]], \ \dots$). □

[1] *L. Bianchi* (1856 - 1928) olasz matematikus, a kiváló olasz differenciálgeometriai iskola egyik megalapítója.

1.6. definíció (A kovariáns deriválás kiterjesztése). *Legyen D lineáris konnexió az M sokaságon, X pedig vektormező M-en!*

(a) *Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor $D_X f := Xf$.*

(b) *Egy $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-forma X szerinti kovariáns deriváltja az a $D_X\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-forma, amelyre*

$$\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M): \qquad (D_X\omega)(Y) := X[\omega(Y)] - \omega(D_X Y)\ .$$

(c) *Tegyük föl, hogy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$; $r, s \in \mathbb{N}^+$. Az A tenzor X szerinti kovariáns deriváltja az a $D_X A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor, amelyre*

$$\begin{aligned}
&(D_X A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) := \\
&:= \quad X[A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)] - \\
&- \quad \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, D_X\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) - \\
&- \quad \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, D_X X_j, \dots, X_s)
\end{aligned}$$

($\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M),\ 1 \leqq i \leqq r;\ X_j \in \mathfrak{X}(M),\ 1 \leqq j \leqq s$).

(d) *Egy $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ tenzor* ***kovariáns differenciál****ja a*

$$\begin{aligned}
DA: \qquad &(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, X) \in [\mathfrak{X}^*(M)]^r \times [\mathfrak{X}(M)]^{s+1} \mapsto \\
&\mapsto (D_X A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in C^\infty(M)
\end{aligned}$$

$(r, s+1)$-típusú tenzor. Egy tenzort – speciálisan egy vektomezőt – ***párhuzamos****nak (olykor* ***abszolút párhuzamos****nak) mondunk, ha a kovariáns differenciálja eltűnik.*

1.7. megjegyzések.

(a) Triviális számolással ellenőrizhető, hogy $D_X\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, $D_X A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ és $DA \in \mathcal{T}^r_{s+1}(M)$ valóban teljesül.

(b) Ha $f \in C^\infty(M) = \mathcal{T}^0_0(M)$, akkor $Df \in \mathcal{T}^0_1(M) \cong \mathfrak{X}^*(M)$, mégpedig $Df = df$, mivel

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}(M): \qquad Df(X) := D_X f := Xf = df(X)\ .$$

(c) Egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek a D konnexióra vonatkozó párhuzamossága az értelmezés szerint azt jelenti, hogy

$$DY = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M): \quad DY(X) = D_X Y = 0\ .$$

(d) Tekintsünk egy $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ kovariáns tenzort!
g párhuzamos a D konnexióra vonatkozóan $:\iff \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:
$0 = Dg(Y, Z, X) := (D_X g)(Y, Z) \overset{1.6.(c)}{:=} X[g(Y, Z)] - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z)$
$\iff \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M):\ Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$.

(e) Legyen R a D lineáris konnexió görbületi tenzora! Tetszőlegesen rögzített $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett az

$$R(X, Y): \quad Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$$

leképezés endomorfizmusa $\mathfrak{X}(M)$-nek:

$$R(X, Y) \in \operatorname{End} \mathfrak{X}(M) \overset{\text{II.8.20.}}{\cong} \mathcal{T}_1^1(M)\ .$$

Mivel $\forall\ X \in \mathfrak{X}(M):\ D_X R \in \mathcal{T}_3^1(M)$, ugyanígy képezhető rögzített $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett a

$$(D_X R)(Y, Z): \quad \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

endomorfizmus. – Ezt az észrevételt fölhasználjuk a következő eredmény megfogalmazásakor, a bizonyítás során pedig élni fogunk a

$$\begin{aligned} [D_X, R(Y, Z)] &:= D_X \circ R(Y, Z) - R(Y, Z) \circ D_X\ , \\ [D_X, D_Y] &:= D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X\ ,\ \ldots \end{aligned}$$

típusú rövidítésekkel (v.ö. II.1.21.(b)).

1.8. állítás (A 2. Bianchi-azonosság). *Legyen D szimmetrikus lineáris konnexió! Ha D görbületi tenzora R, akkor* $\operatorname{End} \mathfrak{X}(M)$*-ben érvényes a következő összefüggés:*

$$\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M): \qquad (D_X R)(Y, Z) + (D_Y R)(Z, X) + (D_Z R)(X, Y) = 0\ .$$

Bizonyítás. Legyen $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges! Az 1.6.(b) és (c) definíció, valamint a II.8.20-beli megfelelő interpretáció alkalmazásával egyszerűen adódik, hogy a $D_X R$ kovariáns derivált a

$$\begin{aligned} &(D_X R)(Y, Z, U) = \\ &= D_X[R(Y, Z)U] - R(D_X Y, Z)U - R(Y, D_X Z)U - R(Y, Z)D_X U = \\ &= ([D_X, R(Y, Z)] - R(D_X Y, Z) - R(Y, D_X Z))U \end{aligned}$$

formula szerint hat, amely $\operatorname{End} \mathfrak{X}(M)$-ben a

$$(D_X R)(Y, Z) = [D_X, R(Y, Z)] - R(D_X Y, Z) - R(Y, D_X Z)$$

relációhoz vezet. Itt R definíciója értelmében

$$\begin{aligned} [D_X, R(Y, Z)] &= [D_X, [D_Y, D_Z] - D_{[Y,Z]}] = \\ &= [D_X, [D_Y, D_Z]] - [D_X, D_{[Y,Z]}]. \end{aligned}$$

Mivel $R(X,[Y,Z]) = [D_X, D_{[Y,Z]}] - D_{[X,[Y,Z]]}$, kapjuk, hogy

$$[D_X, R(Y,Z)] = [D_X,[D_Y,D_Z]] - R(X,[Y,Z]) - D_{[X,[Y,Z]]}\ ,$$

következésképpen

$$\begin{aligned}(D_X R)(Y,Z) &= [D_X,[D_Y,D_Z]] - D_{[X,[Y,Z]]} - R(X,[Y,Z]) - \\ &- R(D_X Y, Z) - R(Y, D_X Z).\end{aligned}$$

Ciklikusan permutálva az X,Z,Y változókat, innen a

$$\begin{aligned}(D_Y R)(Z,X) &= [D_Y,[D_Z,D_X]] - D_{[Y,[Z,X]]} - R(Y,[Z,X]) - \\ &- R(D_Y Z, X) - R(Z, D_Y X),\end{aligned}$$

és a

$$\begin{aligned}(D_Z R)(X,Y) &= [D_Z,[D_X,D_Y]] - D_{[Z,[X,Y]]} - R(Z,[X,Y]) - \\ &- R(D_Z X, Y) - R(X, D_Z Y),\end{aligned}$$

további összefüggésekhez jutunk. Összeadva a nyert relációk megfelelő oldalait, a jobboldali első és a második tagok összege a Jacobi-identitás alapján azonnal 0-t eredményez. 0-hoz vezet azonban az R-et tartalmazó tagok összege is, mert például

$$\begin{aligned}R(X,[Y,Z]) &\overset{T=0}{=} R(X, D_Y Z - D_Z Y) = R(X, D_Y Z) - R(X, D_Z Y) = \\ &\overset{1.3.(\mathrm{b})}{=} -R(D_Y Z, X) - R(X, D_Z Y).\end{aligned}$$

□

1.9. példa. $\mathbb{R}^n$ ***természetes konnexiója***

(a) Tekintsük $\mathbb{R}^n$ $(E_i)_{i=1}^n = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{i=1}^n$ természetes n-élmezőjét (II.8.11.)! Ekkor tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormező egyértelműen előállítható

$$Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad Y^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ (1 \leqq i \leqq n)$$

alakban. Értelmezzük a

$$\overline{D}: \quad \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \quad (X,Y) \mapsto \overline{D}_X Y$$

leképezést a

$$\overline{D}_X Y := \sum_{i=1}^n X(Y^i) E_i = X(Y^i) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

előírással (ahol X derivációként hat az Y^i függvényeken)! Közvetlenül látható, hogy ekkor $\overline{D}$ a (D1) és a (D2) feltételnek eleget tesz. Mivel $\forall\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\overline{D}_X fY \quad &:= \quad X(fY^i)\frac{\partial}{\partial u^i} = [(Xf)Y^i + fX(Y^i)]\frac{\partial}{\partial u^i} = \\ &= \quad (Xf)Y + f\overline{D}_X Y,\end{aligned}$$

(D3) is teljesül. $\overline{D}$ tehát lineáris konnexió $\mathbb{R}^n$-en, ezt a lineáris konnexiót az $\mathbb{R}^n$ sokaság ***természetes konnexió***jának nevezzük.

(b) Megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ *természetes konnexiójának torzió- és görbületi tenzora egyaránt eltűnik.* Mivel $(E_i)_{i=1}^n$ bázisa $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$-nek, a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-multilinearitásra tekintettel elegendő azt ellenőriznünk, hogy T és R zérust vesz föl $(E_i)_{i=1}^n$ tagjain.
$\forall\ i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}T(E_i, E_j) \quad &:= \quad \overline{D}_{E_i}E_j - \overline{D}_{E_j}E_i - [E_i, E_j] \overset{\text{II.8.9.}}{=} \overline{D}_{E_i}\delta_j^k E_k - \overline{D}_{E_j}\delta_i^k E_k := \\ &:= \quad E_i(\delta_j^k)E_k - E_j(\delta_i^k)E_k = 0;\end{aligned}$$

$\forall\ i, j, k \in \{1, \dots, n\}$:

$$R(E_i, E_j)E_k = \overline{D}_{E_i}\overline{D}_{E_j}E_k - \overline{D}_{E_j}\overline{D}_{E_i}E_k - \overline{D}_{[E_i,E_j]}E_k = 0.$$

(c) Szabadon élve a II.8.11-ben leírt interpretációs lehetőségekkel, megadjuk $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ egy $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektor szerinti kovariáns deriváltját.

$$\overline{D}_{v_p}Y \overset{1.2.(c)}{:=} (\overline{D}_X Y)(p), \quad \text{ha } X(p) = v_p,\ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n).$$

Itt a jobboldal

$$\begin{aligned}(\overline{D}_X Y)(p) \quad &:= \quad (X(Y^i)E_i)(p) = X_p(Y^i)(e_i)_p = v_p(Y^i)(e_i)_p = \\ &= \quad (D_{v_p}(Y^i)(e_i))_p = ({Y^i}'(p)(v)e_i)_p = \\ &= \quad ({Y^1}'(p)(v), \dots, {Y^n}'(p)(v))_p\ .\end{aligned}$$

Ha Y csatolt leképezését (II.6.16.) $\tilde{Y}$ jelöli, s ennélfogva
$\forall\ p \in \mathbb{R}^n : Y(p) = (p, \tilde{Y}(p))$, akkor

$$\overline{D}_{v_p}Y = (p, \tilde{Y}'(p)(v))$$

írható, hiszen $\tilde{Y}$ koordinátafüggvényei éppen $Y^1, \dots, Y^n$. – $\mathbb{R}^n$ természetes konnexiója tehát „lényegében” a szokásos iránymenti deriválást jelenti.

1.10. lemma. *Tegyük föl, hogy D lineáris konnexió az M sokaságon, s legyen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ha $U \subset M$ nyílt halmaz, és $X \restriction U = 0$ vagy $Y \restriction U = 0$, akkor $(D_X Y) \restriction U = 0$.*

Bizonyítás. Foglalkozzunk pl. az $Y \restriction U = 0$ esettel; ha $X \restriction U = 0$, akkor az okoskodás analóg. Legyen $p \in U$ tetszőlegesen rögzített, s válasszunk olyan $f \in C^\infty(M)$ függvényt, amely p-ben eltűnik, U-n kívül pedig 1-et vesz föl:

$$f(p) = 0, \qquad \forall\, q \in M \backslash U: \quad f(q) = 1.$$

Ilyen tulajdonságú függvény létezése a dudorfüggvények létezése (II.7.1.) folytán közvetlenül adódik. Ekkor $fY = Y$ és

$$\begin{aligned}(D_X Y)(p) &= (D_X fY)(p) \overset{\text{(D3)}}{=} [(Xf)Y + fD_X Y](p) = \\ &= (Xf)(p)Y(p) + f(p)(D_X Y)(p) = 0\ ,\end{aligned}$$

ami p tetszőlegessége folytán azt jelenti, hogy $(D_X Y) \restriction U = 0$. □

1.11. állítás. *Tekintsük az (M, D) affinösszefüggő sokaságot! Legyen $U \subset M$ nyílt halmaz, s válasszunk ki egy $p \in U$ pontot! Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőkhöz adjunk meg olyan $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket, amelyek az X, illetve az Y vektormezővel esnek egybe a p pont egy V környezetében! Ekkor a*

$$D_U: \quad (X, Y) \in \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \mapsto (D_U)_X Y,$$

$$\forall\, q \in V: \quad [(D_U)_X Y](q) := (D_{\tilde{X}} \tilde{Y})(q)$$

előírás lineáris konnexiót értelmez az $U \subset M$ nyílt részsokaságon.

Bizonyítás. A II.8.14. igazolása során alkalmazott gondolatmenettel adódik, hogy a konstrukcióban szereplő $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ vektormezők valóban léteznek. Az 1.10. lemma (D1) és (D2) alapján biztosítja, hogy D_U független $\tilde{X}$ és $\tilde{Y}$ megválasztásának módjától; közvetlenül ellenőrizhető végül, hogy D_U eleget tesz a (D1)-(D3) feltételeknek. □

1.12. megjegyzés. Az $U \subset M$ nyílt részsokaságon 1.11. által megadott D_U lineáris konnexiót a D által ***indukált konnexió***ként említjük. A későbbiekben D_U helyett többnyire egyszerűen D-t írunk.

1.13. definíció. *Legyen (M, D) affinösszefüggő sokaság, s adjunk meg M-en egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet. A*

$$(D_U)_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

összefüggések által értelmezett n^3 számú

$$\Gamma_{ij}^k: \ U \to \mathbb{R}$$

sima függvényt a D lineáris konnexió adott térképre vonatkozó ***Christoffel-szimbólumai****nak nevezzük*[2].

[2] *E.B. Christoffel* (1829 - 1900) német matematikus, egyetemi tanár Berlinben, Zürichben, majd Strassburgban.

1.14. állítás (A Christoffel-szimbólumok transzformációs szabálya). *Legyenek $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ és $(V, (y^i)_{i=1}^n)$ térképei az (M, D) affinösszefüggő sokaságnak, föltéve, hogy $U \cap V \neq \emptyset$. Ha D Christoffel-szimbólumai az (U, x) térképre vonatkozóan a Γ_{ij}^k, a (V, y) térképre vonatkozóan pedig a $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ függvények, akkor érvényes a*

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}$$

transzformációs szabály.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \quad &:= \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \overset{\text{II.7.11.}}{=} D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} \overset{\text{(D3)}}{=} \\
&= \quad \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^j} \overset{\text{II.7.11.,(D1)}}{=} \\
&= \quad \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \\
&= \quad \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ .
\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a baloldalon $\frac{\partial}{\partial y^\lambda} = \frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^k}$, és alkalmazva a koordinátavektormezőkből való előállítás egyértelműségét, következik, hogy

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} + \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \Gamma_{ij}^k \ .$$

Megszorozva végül mindkét oldalt a $\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda} \right)$ mátrix $\left(\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^k} \right)$ inverzének (γ, k) indexű elemével, $\frac{\partial x^k}{\partial y^\lambda} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k} = \delta_\lambda^\gamma$ folytán a kívánt összefüggéshez jutunk. □

1.15. következmény. *Legyen D lineáris konnexió az M sokaságon, T torzió- és R görbületi tenzorral. Válasszunk M-en egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet, s tekintsük T-nek és R-nek a*

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ ,$$

illetve

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

összefüggésekkel értelmezett T_{ij}^k, illetve R_{ijk}^l $(1 \leqq i, j, k, l \leqq n)$ komponensfüggvényeit. Ha D Christoffel-szimbólumai az (U, x) térképre vonatkozóan a Γ_{ij}^k $(1 \leqq i, j, k \leqq n)$ függvények, akkor

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k, \qquad R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l \ .$$

Bizonyítás. $\forall\ i,j,k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &:= D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] \overset{\text{II.8.9.,1.13.}}{=} \\
&= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}\ ; \\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &:= D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k} - D_{[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}]}\frac{\partial}{\partial x^k} = \\
&= D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^l_{jk}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) - D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \overset{\text{(D3)}}{=} \\
&= \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il}\frac{\partial}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl}\frac{\partial}{\partial x^s} = \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^l_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{jr}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\ .
\end{aligned}$$

□

1.16. példák. Vegyünk alapul egy (M,D) affinösszefüggő sokaságot, s rögzítsünk M-en egy $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet!

(a) ***Vektormező kovariáns deriváltjának koordinátakifejezése.***

Tekintsük az $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in C^\infty(U)$ vektormezőket! Ekkor

$$\begin{aligned}
D_X Y &= D_{X^i\frac{\partial}{\partial x^i}}Y^j\frac{\partial}{\partial x^j} \overset{\text{(D1)}-\text{(D3)}}{=} X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \\
&= X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\ .
\end{aligned}$$

(b) ***1-forma kovariáns deriváltja.***

Legyen adva az $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező és a $\theta = \theta_j dx^j \in \mathfrak{X}^*(U)$ 1-forma! 1.6.(b) értelmében $\forall\ j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
(D_X\theta)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &:= X\left[\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right] - \theta\left(D_X\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\theta_k dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) - \theta_k dx^k\left(X^i\Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(\theta_j) - \theta_k X^i\Gamma^k_{ij} = X^i\left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \theta_k\Gamma^k_{ij}\right)\ ;
\end{aligned}$$

ez azt jelenti, hogy

$$D_X\theta = X^i\left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \theta_k\Gamma^k_{ij}\right)dx^j\ .$$

(c) $(1,1)$-***tenzor kovariáns deriváltja***.

Tekintsük az $A = A_i^j \dfrac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i \in \mathcal{T}_1^1(U)$, $A_i^j = A\left(dx^j, \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ (1,1)-tenzort!

Ha $X = X^k \dfrac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{X}(U)$, akkor a $D_X A \in \mathcal{T}_1^1(U)$ tenzor komponensei a $(D_X A)\left(dx^j, \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ függvények. Alkalmazva az 1.6.(c) definíciót,

$$\begin{aligned}
(D_X A)\left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= X\left[A\left(dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] - A\left(D_X dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \\
&- A\left(dx^j, D_X \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^k \frac{\partial A_i^j}{\partial x^k} - X^k A\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \\
&- X^k A\left(dx^j, D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \overset{\text{(b)}}{=} \\
&= X^k \left(\frac{\partial A_i^j}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^j A_i^l - \Gamma_{ki}^l A_l^j\right).
\end{aligned}$$

(d) ***Vektormező kovariáns differenciálja.***

Ha $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$, akkor $DX \in \mathcal{T}_1^1(U)$, amelynek komponensei 1.6.(d) értelmében a

$$DX\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) := D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \overset{\text{(a)}}{=} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

koordinátaelőállításból adódó függvények. Így

$$DX = \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^k\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \ .$$

2. Geodetikusok, párhuzamos eltolás

2.1. definíció. *Legyen adva egy M sokaság, s tekintsünk egy $c : I \to M$ görbét! **c-menti vektormezőn** olyan $X : t \in I \mapsto X(t) \in T_{c(t)}M$ leképezést értünk, amelyre teljesül, hogy $\forall\ f \in C^\infty(M)$:*

$$Xf : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto (Xf)(t) := X(t)f$$

sima függvény.

2.2. megjegyzések.

(a) Két c-menti vektormező összegét, s egy c-menti vektormezőnek egy $h \in C^\infty(I)$ függvénnyel képzett függvényszeresét most is úgy értelmezzük, mint I.5.13-ban. Ezáltal az összes c-menti vektormezők halmaza $C^\infty(I)$-modulussá válik, amelyet – ugyanúgy, mint az I. fejezetben – $\mathfrak{X}(c)$-vel jelölünk.

(b) Ha adva van egy $c : I \to M$ görbe és $Y \in \mathfrak{X}(M)$, akkor – nyilvánvalóan – $Y \circ c \in \mathfrak{X}(c)$. Megfordítva, belátható, hogy amennyiben $X \in \mathfrak{X}(c)$ és $\dot{c}(0) \neq 0$, úgy létezik a $c(0)$ pontnak $U \subset M$, a 0-nak pedig $J \subset I$ nyílt környezete, valamint egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező olymódon, hogy

$$\forall\ t \in J : \quad X(t) = Y[c(t)]\ .$$

(c) Tetszőleges $c : I \to M$ görbe esetén a

$$\dot{c} :\ t \in I \mapsto \dot{c}(t) := (c_*)_t \left(\frac{d}{du}\right)_t \in T_{c(t)}M$$

leképezés c-menti vektormező, amelyet továbbra is – v.ö. I.5.18. – c *érintővektormezőjének* vagy *sebességvektormezőjének* nevezünk.

2.3. állítás és definíció. *Tegyük föl, hogy (M, D) affinösszefüggő sokaság, s legyen adva egy $c : I \to M$ görbe! – Létezik pontosan egy olyan*

$$D_c : \quad \mathfrak{X}(c) \to \mathfrak{X}(c), \quad X \mapsto D_cX$$

leképezés, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

($\mathrm{D_c}1$) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ X, Y \in \mathfrak{X}(c): \quad D_c(\alpha X + \beta Y) = \alpha D_c X + \beta D_c Y$
($\mathbb{R}$-linearitás);

($\mathrm{D_c}2$) $\forall\, f \in C^\infty(I),\ X \in \mathfrak{X}(c): \quad D_c fX = f'X + f D_c X$
(Leibniz-szabály);

($\mathrm{D_c}3$) *ha* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *akkor* $\forall\, t \in I: \quad [D_c(X \circ c)](t) = D_{\dot{c}(t)} X$.

*Ezt a leképezést a D lineáris konnexióhoz csatolt c-**menti kovariáns deriválás**nak nevezzük.*

Bizonyítás.

Egyértelműség. Tegyük föl, hogy D_c a ($\mathrm{D_c}1$)-($\mathrm{D_c}3$) feltételeknek eleget tevő leképezés! Adjunk meg M-en egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképet! Mivel lényegét tekintve lokális probémáról van szó, nem sértjük az általánosságot, ha az $\operatorname{Im} c \subset U$ eset vizsgálatára szorítkozunk. Ekkor a bázistétel (II.7.9.) figyelembevételével tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(c)$ vektormező egyértelmű módon az

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c \right)$$

alakban írható fel, ahol

$$X^i: \quad I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto X^i(t) := X(t)x^i \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

($\mathrm{D_c}1$) és ($\mathrm{D_c}2$) alapján

$$D_c X = D_c \left(\sum_{i=1}^n X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c \right) \right) = \sum_{i=1}^n \left[X^{i\prime} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c \right) + X^i D_c \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c \right) \right] .$$

Itt ($\mathrm{D_c}3$) értelmében $\forall\, t \in I$:

$$D_c \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c \right)(t) = D_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

s ennélfogva

$$(*) \qquad (D_c X)(t) = \sum_{i=1}^n \left[X^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)} + X^i(t) D_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] .$$

A kapott formula a $D_c X$ vektormező egyértelműségét mutatja.

Létezés. Tetszőleges $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép és olyan $c: I \to M$ görbe esetén, amelyre $\operatorname{Im} c \subset U$, értelmezzük a D_c leképezést a $(*)$ előírással! Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy ekkor ($\mathrm{D_c}1$)-($\mathrm{D_c}3$) teljesül; példaként levezetjük, miként adódik

($\mathrm{D_c}3$). – Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X \upharpoonright U = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, s tekintsük az $X \circ c \in \mathfrak{X}(c)$ vektormezőt! $\forall\, t \in I$:

$$\begin{aligned}
[D_c(X \circ c)](t) &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[(X^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)} + X^i[c(t)] D_{\dot c(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = \\
&\overset{\text{II.7.20.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[\dot c(t) X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)} + (X^i \circ c)(t) D_{\dot c(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = \\
&\overset{\text{1.2.(c),(D3)}}{=} D_{\dot c(t)} \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = D_{\dot c(t)} X \ .
\end{aligned}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy bármely $U \subset M$ koordinátakörnyezet esetén D_U-nak (ld. 1.11.) létezik $(D_U)_c$ csatolt kovariáns deriválása, mégpedig – mint láttuk – egyértelműen. Ezen egyértelműség folytán átfedő U és V koordinátakörnyezet esetén $U \cap V$ fölött a $(D_U)_c$ és a $(D_V)_c$ csatolt kovariáns deriválásnak egybe kell esnie. Így tetszőleges $c : I \to M$ görbét tekintve, a mondottak szerint lokálisan megkonstruált csatolt kovariáns deriválások jól definiált $D_c : \mathfrak{X}(c) \to \mathfrak{X}(c)$ c-menti kovariáns deriválássá rakhatók össze. $\square$

2.4. definíció. *Vegyünk alapul egy (M, D) affinösszefüggő sokaságot, s legyen adva egy $c : I \to M$ görbe!*

*(a) Azt mondjuk, hogy az $X \in \mathfrak{X}(c)$ vektormező **párhuzamos** c **mentén**, ha $D_c X = 0$.*

*(b) A c görbét az affinösszefüggő sokaság **geodetikus**ának vagy **autoparalel görbé**jének nevezzük, ha a sebességvektormezője párhuzamos c mentén, vagyis ha $D_c \dot c = 0$.*

2.5. állítás. *Legyen (M, D) affinösszefüggő sokaság, $c : I \to M$ egy görbe $(0 \in I)$, $v \in T_{c(0)}M$! – Létezik egy és csak egy olyan $X \in \mathfrak{X}(c)$ vektormező, amely párhuzamos c mentén, és amelyre $X(0) = v$ teljesül.*

Bizonyítás. Mivel a probléma most is alapvetően lokális jellegű, M egy $(U, x) = (U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképének rögzítése után föltehetjük, hogy $\operatorname{Im} c \subset U$. A fentebbi $(*)$ formula alapján

$$D_c X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, t \in I : \quad X^{j\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{c(t)} + X^j(t) D_{\dot c(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0 \ .$$

Tekintve a D konnexió (U, x) térképre vonatkozó Γ^k_{ij} $(1 \leqq i, j, k \leqq n)$ Christoffel-szimbólumait, itt

$$\begin{aligned}
D_{\dot c(t)} \frac{\partial}{\partial x^j} &= D_{c^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}} \frac{\partial}{\partial x^j} = c^{i\prime}(t) \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (c(t)) = \\
&= c^{i\prime}(t) \Gamma^k_{ij}(c(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{c(t)}
\end{aligned}$$

írható, tehát

$$\begin{aligned} D_cX = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (X^{k\prime} + (\Gamma^k_{ij} \circ c)c^{i\prime}X^j)\frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} : \quad X^{k\prime} + (\Gamma^k_{ij} \circ c)c^{i\prime}X^j = 0 \,. \qquad (**) \end{aligned}$$

$(**)$ közönséges, lineáris differenciálegyenlet-rendszert ad az X^k függvényekre nézve, így a megfelelő egzisztencia-unicitás tételből (ld. I.6.23. bizonyításában szereplő I. és II. tételt!) következik az állítás, mivel a lineáris esetben a megoldásfüggvények értelmezve vannak a megadott függvények teljes értelmezési tartományán. □

2.6. következmény. *Legyen $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképe az (M, D) affinösszefüggő sokaságnak! – Egy $c : I \to M$ görbe akkor és csak akkor geodetikus, ha a $c^k := x^k \circ c$ $(1 \leqq k \leqq n)$ koordinátafüggvényekre*

$$c^{k\prime\prime} + (\Gamma^k_{ij} \circ c)c^{i\prime}c^{j\prime} = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

teljesül. □

2.7. példa. Tekintsük a $\mathbb{R}^n$ sokaságot, ellátva a $\overline{D}$ természetes konnexióval! Mivel $\overline{D}$-nek az $(u^i)_{i=1}^n$ kanonikus koordinátarendszerre vonatkozó Christoffel-szimbólumai eltűnnek, egy $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbe akkor és csak akkor geodetikusa $(\mathbb{R}^n, \overline{D})$-nak, ha a $c^k = u^k \circ c$ koordinátafüggvényekre

$$c^{k\prime\prime} = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

teljesül, azaz ha

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R} : \qquad & c^k(t) = \alpha^k + \nu^k t; \quad \alpha^k, \nu^k \in \mathbb{R}\ (1 \leqq k \leqq n) \\ \Longleftrightarrow \qquad & c(t) = a + tv; \quad a, v \in \mathbb{R}^n \text{ rögzített.} \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$ geodetikusai a parametrizált egyenesek.

2.8. definíció és állítás. *Legyen (M, D) affinösszefüggő sokaság, $c : I \to M$ egy görbe, s tegyük föl, hogy $0 \in I$ és $t \in I$! – Azt a*

$$P(c)^t_0 : \quad T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M, \quad v \mapsto P(c)^t_0(v) := X(t)$$

*leképezést, ahol $X \in \mathfrak{X}(c)$ az a c mentén párhuzamos vektormező, amelyre $X(0) = v$, a $c(0)$ pontból a $c(t)$ pontba való, **c-menti párhuzamos eltolás**nak nevezzük. A párhuzamos eltolás **lineáris izomorfizmus** a $T_{c(0)}M$ és a $T_{c(t)}M$ érintőtér között.*

Bizonyítás. 2.5. biztosítja, hogy a $P(c)^t_0$ leképezés létezik és jól definiált. Vezessük be a $p := c(0)$, $q := c(t)$ rövidítéseket! Megadva a $v, w \in T_pM$ vektorokat, 2.5-re való hivatkozással tekintsük azokat az $X, Y \in \mathfrak{X}(c)$ c mentén párhuzamos vektormezőket, amelyekre $X(0) = v$, $Y(0) = w$ teljesül. Mivel $(X+Y)(0) = v+w$, és (D_c1) alapján $X + Y$ is c mentén párhuzamos vektormező, kapjuk, hogy

$$P(c)_0^t(v + w) := (X + Y)(t) = X(t) + Y(t) = P(c)_0^t(v) + P(c)_0^t(w)\ .$$

Ugyanilyen meggondolással adódik a

$$P(c)_0^t(\lambda v) = \lambda P(c)_0^t(v) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

összefüggés, $P(c)_0^t$ tehát lineáris leképezése T_pM-nek T_qM-be. Ha $P(c)_0^t(v) = 0$, akkor 2.5. unicitás állítása folytán $X \in \mathfrak{X}(c)$ a zérus vektormező, s ezért $v = X(0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $P(c)_0^t$ injektív, amiből $P(c)_0^t$ szürjektív volta automatikusan következik, hiszen T_pM és T_qM megegyező dimenziójú. Beláttuk ezzel, hogy $P(c)_0^t$ lineáris izomorfizmus. $\square$

2.9. megjegyzés. Ha $c_1 : [0, 1] \to M$ és $c_2 : [0, 1] \to M$ a $p = c_1(0) = c_2(0)$ és a $q = c_1(1) = c_2(1)$ pontot összekötő különböző görbék, akkor a $P(c_1)_0^1$ és $P(c_2)_0^1$ párhuzamos eltolások általában különbözők!

3. Riemann-sokaságok

3.1. definíció. *Legyen V véges dimenziójú valós vektortér! Egy $B : V \times V \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát – azaz egy olyan $B \in \mathcal{T}_2^0(V)$ tenzort, amelyre $\forall\ v, w \in V :\ B(v,w) = B(w,v)$ –* ***nemelfajuló****nak nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal:*

$$\textit{amennyiben} \quad \forall\ w \in V :\ b(v,w) = 0\ , \quad \textit{úgy} \quad v = 0\ .$$

3.2. lemma. *Egy szimmetrikus bilineáris forma akkor és csak akkor nemelfajuló, ha mátrixa valamely – s ezért bármely – bázisra vonatkozóan invertálható.*

Bizonyítás. Tekintsük a V n-dimenziós ($n \in \mathbb{N}^+$) valós vektorteret, s a $B \in \mathcal{T}_2^0(V)$ szimmetrikus bilineáris formát. Legyen $(v_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek. B erre vonatkozó mátrixa $(B_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ahol $B_{ij} := B(v_i, v_j)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$. Rögzítsünk egy $v = \nu^i v_i \in V$ vektort! Világos, hogy $\forall\ w \in V$:

$$\begin{aligned} B(v,w) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad & \forall\ i \in \{1, \ldots, n\} : \quad 0 = B(v, v_i) = \\ & = B\left(\sum_{j=1}^n \nu^j v_j, v_i\right) = \sum_{j=1}^n \nu^j B_{ji} = \sum_{j=1}^n B_{ji} v^j\ . \end{aligned}$$

Ezt azt jelenti, hogy B pontosan akkor nemelfajuló, ha a

$$\sum_{j=1}^n B_{ji} x^j = 0\ , \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

homogén lineáris egyenletrendszernek csak triviális megoldása létezik. Ez utóbbi jól ismert módon ekvivalens (B_{ij}) invertálhatóságával. □

3.3. definíció. *Legyen M egy sokaság! – M-en adott* ***pszeudo-Riemann struktúrá****n olyan $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ tenzort értünk, amelyre teljesülnek a következők:*

(1) g szimmetrikus: $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M) :\ g(X,Y) = g(Y,X)$;

(2') $\forall\ p \in M :\quad g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ nemelfajuló bilineáris forma.

Ha M összefüggő sokaság és g pszeudo-Riemann struktúra M-en, akkor az (M, g) párt (többnyire egyszerűen csak M-et) ***pszeudo-Riemann sokaság****nak nevezzük, g-t pedig* ***metrikus tenzor****ként is említjük. Amennyiben (2') helyett az erősebb*

(2) $\forall\, p \in M: \quad g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ pozitív definit bilineáris forma

*feltételt írjuk elő, úgy **Riemann-struktúrá**ról, s ennek megfelelően **Riemann-sokaság**ról beszélünk.*

3.4. megjegyzések. Vegyünk alapul egy (M, g) pszeudo-Riemann sokaságot!

(a) A metrikus tenzorra g helyett gyakran a kényelmesebb $\langle , \rangle$ jelölést alkalmazzuk. Ekkor

$$\begin{aligned} \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M): &\qquad \langle X, Y \rangle := g(X, Y) \in C^\infty(M); \\ \forall\, v, w \in T_pM: &\qquad \langle v, w \rangle_p =: \langle v, w \rangle := g_p(v, w) \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

(b) Amennyiben $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, úgy a g metrikus tenzor erre vonatkozó komponensei a

$$g_{ij} \overset{\text{II.8.25.}}{:=} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) =: \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle :\ U \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

sima függvények, melyeknek segítségével g-re a

$$g \restriction U = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j =: g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

koordinátaelőállítás adódik. g szimmetriája ekkor abban tükröződik, hogy $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}:\ g_{ij} = g_{ji}$. g nemelfajultsága miatt tetszőleges $p \in U$ pontban $(g_{ij}(p))$ invertálható mátrix (3.2.), amelynek inverzére a $(g^{ij}(p))$ jelölést használjuk. Az így adódó $g^{ij} : U \to \mathbb{R}$ függvények az inverz mátrix kiszámítási formulájából kiolvashatóan szintén simák.
Ha $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ és $X \restriction U = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i},\ Y \restriction U = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, akkor

$$g(X, Y) \restriction U = g_{ij} X^i Y^j\ .$$

3.5. definíció. *Tegyük föl, hogy (M, g_M) és (N, g_N) pszeudo-Riemann sokaság, s legyen $\varphi : M \to N$ egy leképezés.*

*(a) φ-t **izometriá**nak nevezzük, ha diffeomorfizmus és $\varphi^* g_N = g_M$.*

*(b) φ-t **lokális izometriá**nak mondjuk, ha tetszőleges $p \in M$ pont esetén megadható p-nek U, $\varphi(p)$-nek V nyílt környezete úgy, hogy $\varphi \restriction U : U \to V$ izometria.*

*Két pszeudo-Riemann sokaság **izometrikus**, illetve **lokálisan izometrikus**, ha létezik izometria, illetve lokális izometria közöttük.*

3.6. megjegyzések.

(a) A $\varphi^* g_N = g_M$ feltétel a pull-back értelmezése (II.8.29.) szerint azt jelenti, hogy $\forall\ p \in M;\ v, w \in T_pM$:

$$g_N((\varphi_*)_p(v), (\varphi_*)_p(w)) = g_M(v, w)\ ,$$

illetve egyszerűbben: $\langle(\varphi_*)_p(v), (\varphi_*)_p(w)\rangle = \langle v, w\rangle$; $(\varphi_*)_p$ tehát megtartja az érintővektorok skaláris szorzatát (illetve a Riemann-esetben a belső szorzatát). Mivel – definíció szerint – φ diffeomorfizmus (illetve lokálisan diffeomorfizmus), $\forall\ p \in M:\ (\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ lineáris izomorfizmus, tehát M és N egyező dimenzójú. Így a 3.5.(a) feltétel értelmében a $(\varphi_*)_p$ érintőleképezések mindegyike lineáris izometria (v.ö. I.3.4.).

(b) Egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy pszeudo-Riemann sokaság esetén

(1) az identikus transzformáció izometria,

(2) izometriák kompozíciója izometria,

(3) izometria inverze izometria.

Egy pszeudo-Riemann sokaság összes izometriái ilymódon csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével; az erlangeni program (I.3.10.) szellemében „a Riemann-geometria tárgya az izometriacsoport invariánsainak vizsgálata”.

3.7. definíció. *Legyen* (M, g) *Riemann-sokaság,* $c : [a, b] \to M$ *szakaszonként sima görbe, amelynél*

$$a =: a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n := b$$

$[a, b]$*-nek olyan felosztása, hogy*

$$c \restriction [a_i, a_{i+1}]\ , \qquad 0 \leqq i \leqq n-1$$

sima. Ekkor c ***ívhossz****án az*

$$L(c) := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\dot{c}\|$$

számot értjük, ahol

$$\|\dot{c}\| : \quad t \in [a, b] \mapsto \|\dot{c}(t)\| := \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\rangle^{\frac{1}{2}}\ .$$

3.8. megjegyzések. Vegyünk alapul egy (M, g) Riemann-sokaságot!

(a) Tekintsünk speciálisan egy $c : [a, b] \to M$ (sima) görbét! Paramétertranszformációról most is ugyanúgy szólhatunk, mint az $\mathbb{R}^n$-beli parametrizált görbék esetén (ld. I.5.3.): ha $\theta : [c, d] \to [a, b]$ diffeomorfizmus, akkor a $\tilde{c} := c \circ \theta$ görbét

c θ általi átparaméterezettjének mondjuk. Az I.5.6-ban látottak szerint adódik, hogy ha $\forall\ t \in [c,d]:\ \theta'(t) > 0$ – azaz θ irányítástartó –, akkor $L(\tilde{c}) = L(c)$. Amennyiben c reguláris (II.7.18.), úgy a

$$\sigma :\ [a,b] \to [0, L(c)], \quad t \mapsto \sigma(t) := \int_a^t \|\dot{c}\|$$

ívhosszfüggvény szigorúan monoton növekvő, létezik ezért a $\sigma^{-1} : [0, L(c)] \to [a,b]$ inverz függvény (amely szintén diffeomorfizmus) és a $\tilde{c} := c \circ \sigma^{-1}$ átparaméterezett görbe. Ez – v.ö. I.5.7. – egységpályasebességű:

$$\forall\ t \in [0, L(c)] : \qquad \|\dot{\tilde{c}}(t)\| = [g(\dot{\tilde{c}}, \dot{\tilde{c}})]^{\frac{1}{2}} = 1 \ .$$

(b) Legyen adva M-en egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép! Egy $c : [a,b] \to U$ görbe ívhossza kiszámítható az

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{(g_{ij} \circ c) c^{i\prime} c^{j\prime}}$$

formula alapján, ahol a g_{ij} függvények g komponensfüggvényei, $c^i = x^i \circ c$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$. – Valóban, ez közvetlenül adódik abból, hogy $\forall\ t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} \|\dot{c}(t)\| &= \left[g \left(c^{i\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{c(t)}, c^{j\prime}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{c(t)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [g_{ij}(c(t)) c^{i\prime}(t) c^{j\prime}(t)]^{\frac{1}{2}} \ . \end{aligned}$$

(c) Tekintve M tetszőleges p és q pontját, jelentse $\Omega(p,q)$ a p-t q-val összekötő, szakaszonként sima görbék halmazát! A

$$d :\ M \times M \to \mathbb{R}, \quad (p,q) \mapsto d(p,q) := \inf\{L(c) \mid c \in \Omega(p,q)\}$$

függvény távolságfüggvény M-en (azaz eleget tesz a II.3.6. (1)-(3) feltételeknek), teljesül továbbá, hogy a d által meghatározott topológia (II.3.8.) egybeesik M (eleve adott) sokaság-topológiájával. – Ezeket az állításokat nem bizonyítjuk, mert további előkészületeket igényelnének. Annyit jegyzünk meg csupán, hogy a d függvény nemnegatív volta evidens az értelmezésből, s a szimmetria-tulajdonság, valamint a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése is meglehetősen egyszerűen igazolható – az Olvasó a siker reményében vállalkozhat az ellenőrzésükre. A nehézségek annak megmutatásánál jelentkeznek, hogy $d(p,q) = 0 \implies p = q$, illetve – ekvivalens módon – hogy $p \neq q \implies d(p,q) \neq 0$.

(d) Egyszerűen belátható, hogy ha egy $\varphi : M \to M$ transzformáció izometria a 3.5.(a) szerinti értelemben, akkor távolságtartó a (c)-ben bevezetett d távolságfüggvényre nézve, azaz $\forall\ p, q \in M :\ d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p,q)$. Igaz a megfordítás is: ha $\varphi : M \to M$ távolságtartó transzformáció d-re nézve, akkor φ izometria:

diffeomorfizmus és $\varphi^* g = g$. – Ez már egy finom eredmény, S.B. Myers és N. Steenrod[1] tétele (*Annals of Mathematics*, **40** (1939), 400-416).

3.9. példák.

(a) $\mathbb{R}^n$***, mint Riemann-sokaság.*** – Lássuk el $\mathbb{R}^n$-et az $(u^i)_{i=1}^n$ kanonikus koordinátarendszer által származtatott differenciálható struktúrával! Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormező egyértelműen előállítható az

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} , \quad \text{illetve} \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

alakban. „Geometriai nyelven” (ld. II.8.11.):

$$X = X^i E_i , \quad Y = Y^i E_i \qquad (X^i, Y^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ 1 \leqq i \leqq n).$$

Ha

$$g :\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (X, Y) \mapsto g(X, Y) := \sum_{i=1}^n X^i Y^i ,$$

akkor g Riemann-struktúra $\mathbb{R}^n$-en. Mivel ekkor

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n),$$

a g metrikus tenzor a

$$g = \sum_{i=1}^n du^i \otimes du^i = du^1 \otimes du^1 + \dots + du^n \otimes du^n$$

alakban állítható elő. Tradicionális okokból használatos a $g = (du^1)^2 + \dots +$ $+(du^n)^2$ írásmód, s itt a jobboldali kifejezésre az „ívelem-négyzet” elnevezés is, mi ezt mellőzzük.

Pontonkénti vagy ***mezőként való interpretáció.***

$$g :\ p \in \mathbb{R}^n \mapsto g_p \in \mathcal{T}_2^0(T_p\mathbb{R}^n);$$

$$g_p(v, w) = \sum_{i=1}^n v^i w^i , \quad \text{ha} \quad v = v^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p , \ w = w^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p .$$

Alkalmazzuk itt is a geometriai nyelvet! Ekkor $T_p\mathbb{R}^n$ elemeit $v_p := (p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ rendezett pároknak tekintjük. Emlékeztetünk rá, hogy $T_p\mathbb{R}^n$-en belső szorzat is rendelkezésre áll a

$$\langle v_p, w_p \rangle := \langle v, w \rangle , \qquad \langle\ ,\ \rangle \quad \mathbb{R}^n \text{ kanonikus belső szorzata}$$

[1] *N.E. Steenrod* (1910 - 1971) vezető amerikai matematikus; a chicagoi, a michigani, majd a princetoni egyetem professzora.

értelmezéssel (I.1.14.). Ezt fölhasználva g megadható a

$$p \in \mathbb{R}^n \mapsto g_p \ ; \quad \forall\ (v_p, w_p) \in T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n : \quad g_p(v_p, w_p) := \langle v, w \rangle$$

előírással is. Az így leírt (majdnem triviális) g Riemann-struktúrát az $\mathbb{R}^n$ sokaság ***szokásos*** vagy ***kanonikus Riemann-struktúrájá***nak hívjuk; az $(\mathbb{R}^n, g)$ Riemann-sokaságot n***-dimenziós euklideszi tér***nek nevezzük és $\mathbb{E}^n$-nel jelöljük.

(b) ***Indukált metrikus tenzor*** $\mathbb{R}^n$ ***részsokaságain.***
Tegyük föl, hogy $2 \leqq n \in \mathbb{N}$, és legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő k-dimenziós részsokaság ($k \in \mathbb{N}^+$). Jelölje most $\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszerét $(x^i)_{i=1}^n$, $\mathbb{R}^k$ kanonikus koordinátarendszerét pedig $(u^j)_{j=1}^k$. Az érintővektorok, vektormezők, érintőleképezés,... tárgyalásánál ebben a speciális szituációban kényelmesen használhatjuk a II.6-ban kidolgozott geometriai megközelítést, úgyhogy ezzel fogunk élni. $\mathbb{R}^n$ (a)-ban leírt szokásos Riemann-struktúráját jelölje $\langle , \rangle$; ekkor $\forall\ p \in \mathbb{R}^n,\ v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n :\ \langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle$, $\langle , \rangle$ tehát azonosítható $\mathbb{R}^n$ kanonikus belső szorzatával.

1. Az indukált metrikus tenzor. – Jelentse $j : M \to \mathbb{R}^n$ a $p \in M \mapsto j(p) := p$ természetes befoglaló leképezést! Ha $g := j^*\langle , \rangle$, akkor g metrikus tenzor M-en, (M, g) pedig Riemann-sokaság. Ez világos abból, hogy $\forall\ p \in M;\ v_p, w_p \in T_pM$:

$$\begin{aligned} g_p(v_p, w_p) &:= \langle (j_*)_p(v_p), (j_*)_p(w_p) \rangle = \\ &= \langle j'(p)(v)_{j(p)}, j'(p)(w)_{j(p)} \rangle = \\ &= \langle v_p, w_p \rangle = \langle v, w \rangle \ , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$g_p = \langle , \rangle_p \upharpoonright \begin{matrix} T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \\ T_pM \times T_pM \end{matrix} \ .$$

A kapott $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ metrikus tenzort az $\mathbb{R}^n$ sokaság kanonikus Riemann-struktúrája által ***indukált Riemann-struktúrának***, vagy egyszerűen az M részsokaság ***szokásos Riemann-struktúrájának*** nevezzük. Hagyományosan g-re az ***1. alapforma*** elnevezés is használatos.

2. Az 1. alapmennyiségek. – Tegyük föl, hogy $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ (lokális) paraméterezése M-nek, s tekintsük a g 1. alapforma f általi, f^*g pull-backjét! Ekkor $f^*g \in \mathcal{T}_2^0(U)$, s így – egyértelműen –

$$f^*g = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}\, du^i \otimes du^j$$

írható. Az itt föllépő $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$ függvényeket – hagyományosan

– ***1. alapmennyiségek***nek nevezzük. Most explicite meghatározzuk ezeket.

$$\begin{aligned}\forall\ a \in U:\ g_{ij}(a) &= (f^*g)_a((e_i)_a,(e_j)_a) = g_{f(a)}((f_*)_a(e_i)_a,(f_*)_a(e_j)_a) = \\ &\overset{\text{II.6.2.}}{=} g_{f(a)}((D_if(a))_{f(a)},(D_jf(a))_{f(a)}) = \\ &= \langle D_if(a),D_jf(a)\rangle\ ,\end{aligned}$$

tehát

$$g_{ij} = \langle D_if, D_jf\rangle\ , \qquad 1 \leqq i,j \leqq k\ .$$

Az f paraméterezéshez tartozó

$$\underline{f}_i:\quad q \in U \mapsto \underline{f}_i(u) := (f_*)_q(e_i)_q = (D_if(q))_{f(q)}$$

koordinátavektormezők (ld. II.6.8.) segítségével képezhetők az

$$\underline{X}_i := \underline{f}_i \circ f^{-1}:\quad f(U) \subset M \to TM \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

vektormezők (v.ö. II.6.20. bizonyítása), amelyek lokális – mégpedig $f(U)$ fölötti – bázisát alkotják $\mathfrak{X}(M)$-nek. $\forall\ i,j \in \{1,\dots,k\},\ p = f(q) \in f(U) \subset M$:

$$\begin{aligned}g(\underline{X}_i,\underline{X}_j)(p) &= g_p(\underline{X}_i(p),\underline{X}_j(p)) = g_p(\underline{f}_i(q),\underline{f}_j(q)) = \\ &= \langle D_if(q),D_jf(q)\rangle = g_{ij}\circ f^{-1}(p)\ .\end{aligned}$$

A g metrikus tenzor $(\underline{X}_i)_{i=1}^k$ lokális bázisra vonatkozó komponensei ilymódon a $g_{ij}\circ f^{-1}$ $(1 \leqq i,j \leqq k)$ függvények. Azonnal adódik ebből az észrevételből az is, hogy f^*g *Riemann-struktúra* az $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmazon. Az $\mathbb{R}^n$-beli részsokaságok – speciálisan az $\mathbb{R}^3$-beli felületek – metrikus viszonyainak lokális leírására ezt a visszahúzott metrikus tenzort, illetve komponenseit, az 1. alapmennyiségeket használjuk.

3. Részsokaságbeli görbe ívhossza. – Legyen $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ továbbra is paraméterezése M-nek, s tekintsünk egy olyan $c : [a,b] \to M$ görbét, amelyre $\operatorname{Im} c \subset f(U)$ teljesül. Ekkor a II.6.7-ben mondottak szerint

$$c = f \circ (c^1,\dots,c^k)\ ,\quad c^i : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

írható, és

$$\forall\ t \in [a,b]:\quad \dot c(t) = \sum_{i=1}^k c^{i\prime}(t)(f_*)_q(e_i)_q\ ,\quad q := (c^1(t),\dots,c^k(t))\ .$$

Így $\forall\ t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\langle \dot c(t),\dot c(t)\rangle &= \sum_{i,j=1}^k c^{i\prime}(t)c^{j\prime}(t)\langle \underline{f}_i(q),\underline{f}_j(q)\rangle \overset{2.}{=} \\ &= \sum_{i,j=1}^k [g_{ij}\circ(c^1,\dots,c^k)c^{i\prime}c^{j\prime}](t)\ ,\end{aligned}$$

következésképpen c-nek, *mint* $\mathbb{R}^n$*-beli görbének* az ívhossza

$$L(c) \overset{\text{I.5.3.}}{=} \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{\frac{1}{2}} = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \circ (c^1, \ldots, c^k) c^{i\prime} c^{j\prime}} \ .$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha c-t az (M, g) Riemann-sokaság görbéjeként fogjuk föl, és ívhosszát a 3.7. definícióból adódó 3.8.(b)-beli formula alapján számítjuk ki, ugyanis a 2-ben mondottak szerint g komponensei az ott leírt $(\underline{X}_i)_{i=1}^k$ bázisra vonatkozóan $g_{ij} \circ f^{-1}$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$, és

$$(g_{ij} \circ f^{-1} \circ c) c^{i\prime} c^{j\prime} = g_{ij} \circ (c^1, \ldots, c^k) c^{i\prime} c^{j\prime} \ .$$

Az M részsokaságon a 3.8.(c) alapján adódó távolságfüggvényt szokás ***intrinsic távolság***ként is említeni, utalva ezzel a megkülönböztető jelzővel arra, hogy most két $p, q \in M$ pont távolságának kiszámítására egy további, „külső" metrika is rendelkezésre áll, amely $\mathbb{R}^n$ kanonikus belső szorzatából származik.

4. Gauss-féle jelölések. – Az 1. alapmennyiségeket az indukált metrikus tenzorral ellátott $M \subset \mathbb{R}^3$ felületek esetén C.F. Gauss vezette be *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* című, 1827-ben megjelent alapvető munkájában (persze eltérő fogalmi keretek között). Ő az

$$\begin{aligned} E &:= g_{11} = \langle \underline{f}_1, \underline{f}_1 \rangle = \langle D_1 f, D_1 f \rangle \ , \\ F &:= g_{12} = g_{21} = \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2 \rangle = \langle D_1 f, D_2 f \rangle \ , \\ G &:= g_{22} = \langle \underline{f}_2, \underline{f}_2 \rangle = \langle D_2 f, D_2 f \rangle \ , \end{aligned}$$

jelöléseket alkalmazta, s ezek mindmáig használatosak. – Megjegyezzük végül, hogy ha $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizált felület (II.5.9.), akkor ennek 1. alapmennyiségein a

$$g_{ij} : \quad U \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto g_{ij}(a) := \langle \underline{f}_i(a), \underline{f}_j(a) \rangle = \langle D_i f(a), D_j f(a) \rangle$$

függvényeket értjük. Általánosabban: ha $U \subset \mathbb{R}^k$ (nemüres) nyílt halmaz, akkor egy $f : U \to \mathbb{R}^n$ sima leképezést k***-dimenziós parametrizált sokaság***nak (is) mondunk, amely ***reguláris***, ha f immerzió. Az f-hez tartozó koordinátavektormezőket ugyanúgy vezetjük be, mint II.6.8-ban:

$$\forall \ a \in U : \quad \underline{f}_i(a) := (f_*)_a (e_i)_a = (D_i f(a))_{f(a)} \qquad (1 \leqq i \leqq k) \ ;$$

a parametrizált sokaság 1. alapmennyiségei a

$$g_{ij} := \langle \underline{f}_i, \underline{f}_j \rangle = \langle D_i f, D_j f \rangle : \ U \to \mathbb{R} \qquad (1 \leqq i, j \leqq k)$$

függvények.

3.10. definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$; $k \in \mathbb{N}^+$.*

*(a) Tegyük föl, hogy $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság, ellátva a g indukált metrikus tenzorral. Adjuk meg M-nek egy $f : U \subset \mathbb{R}^k \to M$ (lokális) paraméterezését, s tekintsük az ehhez tartozó $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$ 1. alapmennyiségeket. M U fölötti k-**dimenzós térfogat**án a*

$$V(f) := \int_U \sqrt{\det(g_{ij})}$$

integrált értjük.

*(b) Amennyiben $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ k-dimenziós parametrizált részsokaság, úgy f k-**dimenziós térfogata** szintén*

$$V(f) := \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} \; .$$

3.11. megjegyzés. Ha $n = 3$, $k = 2$, akkor ***felszín***ről, az $n = k = 3$ esetben pedig egyszerűen ***térfogat***ról szólunk. Amennyiben $k = 1$, úgy visszakapjuk az ívhossz fogalmát. Ha $M \subset \mathbb{R}^3$ felület és $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ paraméterezése M-nek, akkor a Lagrange-identitás (I.2.8./(9)) alkalmazásával $\forall\ a \in U$:

$$\begin{aligned}
&\|D_1 f(a) \times D_2 f(a)\| = \\
&= \sqrt{\langle D_1 f(a), D_1 f(a)\rangle\langle D_2 f(a), D_2 f(a)\rangle - \langle D_1 f(a), D_2 f(a)\rangle^2} = \\
&= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{\det(g_{ij})} \; ,
\end{aligned}$$

tehát az U fölötti felszín számítható a

$$V(f) = \int_U \|D_1 f \times D_2 f\|$$

formula alapján is.

3.12. állítás. *Tartsuk meg 3.10. jelöléseit és feltételeit! A k-dimenziós térfogat jól definiált abban az értelemben, hogy ha $\varphi : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^k \to U$ irányítástartó diffeomorfizmus ($\forall\ q \in \tilde{U}$: $\det \varphi'(q) > 0$), $h := f \circ \varphi$, $h_{ij} := \langle \underline{h}_i, \underline{h}_j \rangle$ $(1 \leqq i, j \leqq k)$, akkor*

$$\int_{\tilde{U}} \sqrt{\det(h_{ij})} = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} \; .$$

Bizonyítás. Legyen $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^k)$! Választva egy tetszőleges $a \in U$ pontot, tekintsük a $b := \varphi^{-1}(a) \in \tilde{U}$ pontot. A II.6.18-ban mondottak alapján

$$\underline{h}_i(b) = \sum_{l=1}^{k} (D_i \varphi^l)(b) \underline{f}_l(a) \qquad (1 \leqq i \leqq k) \; ,$$

így

$$\begin{aligned} h_{ij}(b) &= \langle \underline{h}_i(b), \underline{h}_j(b)\rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{k} (D_i\varphi^l)(b)\underline{f}_l(a), \sum_{s=1}^{k}(D_j\varphi^s)(b)\underline{f}_s(a) \right\rangle = \\ &= \sum_{l,s=1}^{k} D_i\varphi^l(b) D_j\varphi^s(b) g_{ls}(a) \ , \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \int_{\tilde U} \sqrt{\det(h_{ij})} &= \int_{\tilde U} \sqrt{\det(D_i\varphi^l)\det(D_j\varphi^s)\det(g_{ls}\circ\varphi)} = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(U)} \left(\sqrt{\det(g_{ij})}\circ\varphi\right)\det\varphi' = \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} \ , \end{aligned}$$

az utolsó lépésben az integráltranszformáció tételét alkalmazva. □

3.13. példák.

(a) Legyen adva az $S^2(r) := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| = r\}$ $(r \in \mathbb{R}^3)$ origó középpontú, r sugarú gömbfelület, s tekintsük ennek a II.5.4.(a)-ban leírt

$$f: \ U := \,]-\pi,\pi[\, \times \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}^3 \ ,$$

$$(u,v) \mapsto f(u,v) := (r\cos v\cos u,\ r\cos v\sin u,\ r\sin v)$$

lokális paraméterezését! Ekkor

$$\begin{aligned} D_1 f(u,v) &= (-r\cos v\sin u,\ r\cos v\cos u,\ 0) \ , \\ D_2 f(u,v) &= (-r\sin v\cos u,\ -r\sin v\sin u,\ r\cos v) \ , \\ (g_{ij}(u,v)) &= \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \ , \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_U \sqrt{\det(g_{ij})} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(u,v)\mapsto r^2\cos v] = \\ &= r^2 \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\right) = r^2\int_{-\pi}^{\pi} 2 = 4r^2\pi \ . \end{aligned}$$

(b) Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $M := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p\| < r\}$,

$$U :=]0, r[\, \times \,] - \pi, \pi[\, \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R}^3 .$$

Ekkor M origó középpontú, r sugarú nyílt gömbtest, s mint nyílt halmaz, $\mathbb{R}^3$-nak 3-dimenziós részsokasága. Ha

$$f : U \to \mathbb{R}^3, \quad (\varrho, u, v) \mapsto f(\varrho, u, v) = (\varrho \cos v \cos u,\ \varrho \cos v \sin u,\ \varrho \sin v) ,$$

akkor f lokális paraméterezése M-nek. Az f-hez tartozó 1. alapmennyiségek mátrixa

$$(g_{ij}(\varrho, u, v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^2 \end{pmatrix} ,$$

így

$$\sqrt{\det(g_{ij}(\varrho, u, v))} = \varrho^2 \cos v ,$$

és

$$\begin{aligned} V(f) &= \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(\varrho, u, v) \mapsto \varrho^2 \cos v] = \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} [(\varrho, u) \mapsto 2\varrho^2] = \\ &= \int_0^r (\varrho \mapsto 4\varrho^2 \pi) = \frac{4r^3\pi}{3} . \end{aligned}$$

(c) Tekintsük az

$$f :]0, 2\pi[\, \times \,]0, m[\, \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (r \cos u,\ r \sin u,\ v) \qquad (m \in \mathbb{R}^+)$$

parametrizált hengerpalástot! Ennél

$$D_1 f(u, v) = (-r \sin u,\ r \cos u,\ 0) , \qquad D_2 f(u, v) = (0, 0, 1) ,$$

így

$$(g_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$V(f) = \int_{]0,2\pi[\times]0,m[} \sqrt{\det(g_{ij})} = r \int_0^{2\pi} \int_0^m 1 = 2r\pi m .$$

(d) Legyen $m, r \in \mathbb{R}^+$ rögzített! Tekintsük a $(0, 0, m) \in \mathbb{R}^3$ csúcspontú

$$f :]0, 2\pi[\, \times \,]0, 1[\, \to \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{aligned} (u, v) \quad \mapsto \quad & (0, 0, m) + v[(r \cos u,\ r \sin u,\ 0) - (0, 0, m)] = \\ & = (vr \cos u,\ vr \sin u,\ (1 - v)m) \end{aligned}$$

parametrizált kúppalástot (v.ö. II.5.14.(c))! Most

$$D_1 f(u,v) = (-vr\sin u,\ vr\cos u,\ 0)\ , \qquad D_2 f(u,v) = (r\cos u,\ r\sin u,\ -m)\ ,$$

$$\sqrt{\det(g_{ij}(u,v))} = \begin{vmatrix} v^2r^2 & 0 \\ 0 & r^2+m^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = rv\sqrt{r^2+m^2}\ ,$$

így

$$V(f) = r\sqrt{r^2+m^2} \int\limits_{]0,2\pi[\times]0,1[} [(u,v)\mapsto v] = r\pi\sqrt{r^2+m^2}\ .$$

3.14. megjegyzés. Amennyiben (M,g) tetszőleges Riemann-sokaság és $(U,x) = (U,(x^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, úgy M U fölötti térfogatát 3.10. mintájára a

$$V(x) := \int\limits_{x(U)} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} \circ x^{-1}\right)$$

formulával értelmezzük.

4. A Levi-Civita konnexió

4.1. lemma. *Legyen* (M, g) *pszeudo-Riemann sokaság! Ekkor a*

$$\flat : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M),\ X \mapsto X^\flat; \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(M): \quad X^\flat(Y) := g(X, Y)$$

leképezés természetes izomorfizmus a vektormezők és az 1-formák $C^\infty(M)$*-modulusa között.*

Bizonyítás. Mivel g $(0,2)$-típusú tenzor M-en, az

$$Y \in \mathfrak{X}(M) \mapsto g(X, Y) \in C^\infty(M)$$

leképezés rögzített $X \in \mathfrak{X}(M)$ mellett $C^\infty(M)$-lineáris, $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$ tehát valóban fennáll. Ugyanilyen közvetlenül adódik, hogy a

$$\flat :\ X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$$

leképezés is $C^\infty(M)$-lineáris. Ellenőriznünk kell még, hogy $\flat$ injektív és szürjektív.

- Tegyük föl, hogy $X_1^\flat = X_2^\flat$! Ekkor $\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M):\ g(X_1, Y) = g(X_2, Y)$. Tekintve az $X := X_1 - X_2$ vektormezőt, innen azt kapjuk, hogy

  $$\forall\, p \in M: \quad g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = 0\ .$$

  Mivel II.8.14-re tekintettel $\forall\, v \in T_pM:\ \exists\, Y \in \mathfrak{X}(M):\ Y_p = v$, g_p nemelfajuló volta miatt a felírt összefüggés alapján következik, hogy $\forall\, p \in M:\ X_p = 0$; így $X = 0$ és $X_1 = X_2$. – Ezzel beláttuk, hogy $\flat$ *injektív.*

- A *szürjektivitás* igazolásához nyilvánvalóan elegendő azt megmutatnunk, hogy ha $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en és $\theta = \theta_i dx^i \in \mathfrak{X}^*(U)$, akkor van olyan $X \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező, hogy $X^\flat = \theta$. – Tekintve g (U, x)-re vonatkozó komponenseinek (g_{ij}) mátrixát és ennek (g^{ij}) inverzét, legyen

  $$X := g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}\ .$$

  Ekkor $X \in \mathfrak{X}(U)$, és ez a vektormező „megfelel”, ugyanis $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$:

  $$\begin{aligned} g\left(X, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= g\left(g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = g^{ij}\theta_i g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \\ &= \theta_i g^{ij} g_{jk} = \theta_k = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\ , \end{aligned}$$

amiből a $C^\infty(M)$- (illetve most a $C^\infty(U)$-) linearitás alapján adódik, hogy tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(U)$ esetén

$$X^\flat(Y) = g(X,Y) = \theta(Y) \quad \Longrightarrow \quad X^\flat = \theta\ .$$

□

4.2. definíció. *Tegyük föl, hogy (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, és legyen D lineáris konnexió M-en! A D konnexiót a pszeudo-Riemann sokaság* ***Levi-Civita konnexiójának*** *nevezzük, ha rendelkezik a következő (további) tulajdonságokkal:*

(D4) $\forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M):\ D_XY - D_YX = [X,Y]$, *azaz D torziótenzora eltűnik;*

(D5) $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$: $\quad Xg(Y,Z) = g(D_XY,Z) + g(Y,D_XZ)$ *(metrikusság).*

4.3. megjegyzés. A „névadó”-ról, T. Lévi-Civita olasz matematikusról 7.25-ben már említést tettünk. Ténylegesen a most bevezetett kulcsfontosságú fogalomnak megfelelő (5.2-ben tárgyalásra kerülő) *geometriai* konstrukciót fedezte föl. Felfedezésének dátuma 1917, ami meglepően késői időpont a felületelmélet hosszú történetében. Mindaddig nem állt rendelkezésre ésszerű párhuzamosság-fogalom a felületi érintővektorok körében!

4.4. tétel. (A Riemann-geometria alaplemmája, *avagy* **„deus ex machina”).** *Minden pszeudo-Riemann sokaságon egyértelműen létezik Levi-Civita konnexió, amelyet jellemez a következő összefüggés, az ún.* ***Koszul-formula****:*

$$\begin{aligned} 2g(D_XY,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - \\ &- g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

$(X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M),\ D$ a Levi-Civita konnexió).

Bizonyítás. Tekintsük az

$$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \quad (X,Y,Z) \mapsto F(X,Y,Z),$$

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &:= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - \\ &- g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \\ &(= \text{a Koszul-formula jobboldala }) \end{aligned}$$

leképezést!

(a) Tegyük föl, hogy D Levi-Civita konnexió M-en! Alkalmazva az F-et megadó képlet jobboldalának első három tagjára a (D5), második három tagjára a (D4) tulajdonságot, azt kapjuk, hogy $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &= g(D_XY,Z) + g(Y,D_XZ) + g(D_YZ,X) + g(Z,D_YX) - \\ &- g(D_ZX,Y) - g(X,D_ZY) - g(X,D_YZ) + g(X,D_ZY) + \\ &+ g(Y,D_ZX) - g(Y,D_XZ) + g(Z,D_XY) - g(Z,D_YX) = \\ &= 2g(D_XY,Z)\ . \end{aligned}$$

Ha mármost $\tilde{D}$ olyan további lineáris konnexió, amely szintén eleget tesz a (D4) és a (D5) feltételnek, akkor így tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mellett

$$g(\tilde{D}_X Y, Z) = g(D_X Y, Z) \ (= \frac{1}{2} F(X, Y, Z)),$$

illetve 4.1. jelöléseivel

$$(\tilde{D}_X Y)^\flat(Z) = (D_X Y)^\flat(Z)$$

adódik. Innen $(\tilde{D}_X Y)^\flat = (D_X Y)^\flat$, ebből pedig $\flat$ injektívsége miatt $\tilde{D}_X Y = D_X Y$ következik. X és Y tetszőlegessége folytán ez azt jelenti, hogy $\tilde{D} = D$. A tétel *unicitás*-állítása így igazolást nyert.

(b) Megmutatjuk, hogy M-en *létezik* Levi-Civita konnexió. – Tetszőlegesen rögzített $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők mellett a

$$Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto F(X, Y, Z) \in C^\infty(M)$$

leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, ezért 4.1-re tekintettel megadható pontosan egy olyan vektormező M-en – jelölje ezt $D_X Y$ –, hogy

$$F(X, Y, Z) = 2g(D_X Y, Z) \ .$$

Meggondolásunk egy

$$D : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto D_X Y$$

leképezést eredményez, amellyel automatikusan teljesül a Koszul-formula. Ennek alkalmazásával belátjuk, hogy D rendelkezik a (D1)-(D5) tulajdonságokkal.

(D1) Legyen $X, X_1, X_2, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ tetszőleges.

$$\begin{aligned} F(X_1 + X_2, Y, Z) &:= (X_1 + X_2) g(Y, Z) + Y g(Z, X_1 + X_2) - \\ &- \ Z g(X_1 + X_2, Y) - g(X_1 + X_2, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X_1 + X_2]) + \\ &+ \ g(Z, [X_1 + X_2, Y]) = X_1 g(Y, Z) + Y g(Z, X_1) - Z g(X_1, Y) - \\ &- \ g(X_1, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X_1]) + g(Z, [X_1, Y]) + X_2 g(Y, Z) + \\ &+ \ Y g(Z, X_2) - Z g(X_2, Y) - g(X_2, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X_2]) + \\ &+ \ g(Z, [X_2, Y]) = F(X_1, Y, Z) + F(X_2, Y, Z) \ . \end{aligned}$$

Ez D értelmezésére tekintettel azt jelenti, hogy $\forall \ Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} g(D_{X_1 + X_2} Y, Z) &= g(D_{X_1} Y, Z) + g(D_{X_2} Y, Z) = \\ &= g(D_{X_1} Y + D_{X_2} Y, Z) \ , \end{aligned}$$

s így 4.1-re való hivatkozással $D_{X_1+X_2}Y = D_{X_1}Y + D_{X_2}Y$ következik.

$$\begin{aligned} F(fX,Y,Z) &:= (fX)g(Y,Z) + Yg(Z,fX) - Zg(fX,Y) - \\ &- g(fX,[Y,Z]) + g(Y,[Z,fX]) + g(Z,[fX,Y]) = \\ &= fXg(Y,Z) + (Yf)g(Z,X) + fYg(Z,X) - (Zf)g(X,Y) - \\ &- fZg(X,Y) - fg(X,[Y,Z]) + g(Y,f[Z,X] + (Zf)X) + \\ &+ g(Z,f[X,Y] - (Yf)X) = f[Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - \\ &- g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])] = fF(X,Y,Z)\ , \end{aligned}$$

fölhasználva a számolás során, hogy a vektormezők derivációi $C^\infty(M)$-nek, és alkalmazva a II.8.7-ben levezetett formulákat. – A nyert eredményből az iménti érveléssel következik, hogy $D_{fX}Y = fD_XY$.

(D2) $\forall\ X, Y_1, Y_2, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} F(X,Y_1+Y_2,Z) &:= Xg(Y_1+Y_2,Z) + (Y_1+Y_2)g(Z,X) - \\ &- Zg(X,Y_1+Y_2) - g(X,[Y_1+Y_2,Z]) + g(Y_1+Y_2,[Z,X]) + \\ &+ g(Z,[X,Y_1+Y_2]) = Xg(Y_1,Z) + Y_1g(Z,X) - Zg(X,Y_1) - \\ &- g(X,[Y_1,Z]) + g(Y_1,[Z,X]) + g(Z,[X,Y_1]) + Xg(Y_2,Z) + \\ &+ Y_2g(Z,X) - Zg(X,Y_2) - g(X,[Y_2,Z]) + g(Y_2,[Z,X]) + \\ &+ g(Z,[X,Y_2]) = F(X,Y_1,Z) + F(X,Y_1,Z) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ D_X(Y_1+Y_2) = D_X(Y_1) + D_X(Y_2)\ .$$

(D3) Legyen $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M)$ tetszőleges. Az értelmezés és II.8.7. fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(X,fY,Z) &:= Xg(fY,Z) + fYg(Z,X) - Zg(X,fY) - g(X,[fY,Z]) + \\ &+ g(fY,[Z,X]) + g(Z,[X,fY]) = (Xf)g(Y,Z) + fXg(Y,Z) + \\ &+ fYg(Z,X) - (Zf)g(X,Y) - fZg(X,Y) - fg(X,[Y,Z]) + \\ &+ (Zf)g(X,Y) + fg(Y,[Z,X]) + fg(Z,[X,Y]) + (Xf)g(Z,Y) = \\ &= fF(X,Y,Z) + 2(Xf)g(Y,Z)\ . \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\forall\ Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} 2g(D_XfY,Z) &= 2fg(D_XY,Z) + 2g((Xf)Y,Z) = \\ &= 2g((Xf)Y + fD_XY,Z) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ D_XfY = (Xf)Y + fD_XY\ .$$

(D4) $\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} 2g(D_XY - D_YX,Z) &= F(X,Y,Z) - F(Y,X,Z) = \\ &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + \\ &+ g(Z,[X,Y]) - [Yg(X,Z) + Xg(Z,Y) - Zg(Y,X) - g(Y,[X,Z]) + \\ &+ g(X,[Z,Y]) + g(Z,[Y,X])] = 2g([X,Y],Z) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ D_XY - D_YX = [X,Y]\ .$$

(D5) $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}2[g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ)] &= F(X,Y,Z)+F(X,Z,Y)=\\ = \quad & Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+\\ + \quad & g(Z,[X,Y])+Xg(Z,Y)+Zg(Y,X)-Yg(X,Z)-g(X,[Z,Y])+\\ + \quad & g(Z,[Y,X])]+g(Y,[X,Z])=2Xg(Y,Z)\ ,\end{aligned}$$

tehát $Xg(Y,Z)=g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ)$.

Beláttuk ilymódon, hogy D az M pszeudo-Riemann sokaság Levi-Civita konnexiója, s ezzel igazoltuk a tétel egzisztencia-állítását is. □

4.5. megjegyzések.

(a) Közvetlenül kiolvasható a Koszul-formulából, hogy egy pszeudo-Riemann sokaság Levi-Civita konnexióját a metrikus tenzor teljesen meghatározza. – A (D5) feltétel 1.6.(d) figyelembevételével röviden úgy fogalmazható meg, hogy *g párhuzamos D-re nézve*, azaz hogy $Dg=0$.

(b) A továbbiakban egy pszeudo-Riemann sokasággal együtt adottnak vesszük annak Levi-Civita konnexióját is, s azt – absztrakt általánosságban – D-vel jelöljük.

4.6. állítás. *Legyen adva az (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, s tekintsünk egy $c: I \to M$ görbét. A Levi-Civita konnexió által indukált*

$$D_c:\ X\in\mathfrak{X}(c)\mapsto D_cX\in\mathfrak{X}(c)$$

c-menti kovariáns deriválásra a 2.3./($\mathrm{D_c}1$) – ($\mathrm{D_c}3$) tulajdonságok mellett teljesül még

($\mathrm{D_c}4$) $\forall\ X,Y\in\mathfrak{X}(c):\quad g(X,Y)'=g(D_cX,Y)+g(X,D_cY)$
$(\ g(X,Y):\ I\to\mathbb{R},\quad t\mapsto g(X,Y)(t):=g_{c(t)}(X(t),Y(t))\ )$.

Bizonyítás.

(a) Megmutatjuk először, hogy ($\mathrm{D_c}4$) érvényes minden olyan $t_0\in I$ helyen, ahol $\dot{c}(t_0)=0$. – Válasszunk $c(t_0)$ körül egy $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet, s tekintsük a metrikus tenzor erre vonatkozó g_{ij} $(1\leqq i,j\leqq n:=\dim M)$ komponenseit! Legyen $J\subset I$ olyan nyílt intervallum, hogy $\forall\ t\in J:\ c(t)\in U$. Ekkor J fölött

$$X=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\circ c\right),\quad Y=Y^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\circ c\right);\quad X^i,Y^i\in C^\infty(J)\quad (1\leqq i\leqq n);$$

$$g(X,Y)=X^iY^j(g_{ij}\circ c)\ .$$

Így

$$\begin{aligned}g(X,Y)'(t_0) &= ({X^i}'Y^j+X^i{Y^j}')(g_{ij}\circ c)(t_0)+\\ &+ (X^iY^j)(t_0)(g_{ij}\circ c)'(t_0)\ ;\end{aligned}$$

itt azonban $(g_{ij} \circ c)'(t_0) \overset{\text{II.7.20.}}{=} \dot{c}(t_0) g_{ij} = 0$, tehát

$$g(X,Y)'(t_0) = (X^{i\prime} Y^j + X^i Y^{j\prime})(g_{ij} \circ c)(t_0) \ .$$

Másrészt a 2.3. bizonyításában látottak szerint

$$\begin{aligned} D_c X(t_0) &= X^{i\prime}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t_0)} + X^i(t_0) D_{\dot{c}(t_0)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= X^{i\prime}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t_0)} \ , \end{aligned}$$

s ugyanígy

$$D_c Y(t_0) = Y^{i\prime}(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t_0)} \ ,$$

következésképpen

$$\begin{aligned} &[g(D_c X, Y) + g(X, D_c Y)](t_0) = g_{c(t_0)}(D_c X(t_0), Y(t_0)) + \\ &\quad + g_{c(t_0)}(X(t_0), D_c Y(t_0)) = (X^{i\prime} Y^j + X^i Y^{j\prime})(g_{ij} \circ c)(t_0), \end{aligned}$$

tehát ($\mathrm{D_c}4$) valóban fennáll a t_0 helyen.

(b) Tegyük föl a továbbiakban, hogy c reguláris! Ekkor 2.2.(b) figyelembevételével a c-menti vektormezők megadhatók $X \circ c$, $Y \circ c$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ alakban. Válasszunk tetszőlegesen egy $t \in I$ pontot, s legyen $Z \in \mathfrak{X}(M)$ olyan vektormező, hogy $Z(c(t)) = \dot{c}(t)$! (Z létezése a korábban mondottak alapján biztosítva van.) Azt kapjuk így, hogy

$$\begin{aligned} g(X \circ c, Y \circ c)'(t) &= [g(X,Y) \circ c]'(t) = \dot{c}(t) g(X,Y) = \\ &= Z[c(t)] g(X,Y) = [Z g(X,Y)](c(t)) \overset{\text{(D5)}}{=} \\ &= [g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)](c(t)) = \\ &= g_{c(t)}(D_{\dot{c}(t)} X, Y(c(t))) + g_{c(t)}(X(c(t)), D_{\dot{c}(t)} Y) \overset{(\mathrm{D_c}3)}{=} \\ &= [g(D_c(X \circ c), Y \circ c) + g(X \circ c, D_c(Y \circ c))](t) \ , \end{aligned}$$

amivel most is beláttuk ($\mathrm{D_c}4$) teljesülését. □

4.7. következmény.

(a) *Pszeudo-Riemann sokaság esetén a párhuzamos eltolások lineáris izometriák: ha (M, g) pszeudo-Riemann sokaság és $c : [a, b] \to M$ egy görbe, akkor a $P(c)_a^b : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$ párhuzamos eltolásra teljesül, hogy*

$$\forall\ v, w \in T_{c(a)}M : \quad g_{c(a)}(v, w) = g_{c(b)}(P(c)_a^b(v), P(c)_a^b(w)) \ .$$

(b) *A pszeudo-Riemann sokaságok geodetikusai konstans pályasebességű görbék.*

Bizonyítás.

(a) Tekintsük azt az $X \in \mathfrak{X}(c)$, illetve $Y \in \mathfrak{X}(c)$ c mentén párhuzamos vektormezőt, amely eleget tesz az $X(a) = v$, illetve az $Y(a) = w$ feltételnek (2.5.). Ekkor (ld. 2.8.)
$$P(c)_a^b(v) := X(b) \ , \qquad P(c)_a^b(w) := Y(b) \ .$$
Mivel $g(X,Y)' \overset{(\mathrm{D_c}4)}{=} g(D_cX,Y) + g(X,D_cY) = 0$ (hiszen $D_cX = D_cY = 0$), a $g(X,Y) : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény konstans. Így
$$g_{c(a)}(v,w) = g(X,Y)(a) = g(X,Y)(b) = g_{c(b)}(P(c)_a^b(v), P(c)_a^b(w)) \ ,$$
amint állítottuk.

(b) Legyen $c : [a,b] \to M$ geodetikusa az (M,g) pszeudo-Riemann sokaságnak! c pályasebessége (v.ö. I.5.3.(b))
$$v := |g(\dot{c},\dot{c})|^{\frac{1}{2}} : \ t \in [a,b] \mapsto v(t) = |g_{c(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))|^{\frac{1}{2}} \ ,$$
($|g(\dot{c},\dot{c})|$ szerepeltetendő, mivel $g(\dot{c},\dot{c}) < 0$ is lehet). ($\mathrm{D_c}4$) alapján $g(\dot{c},\dot{c})' = 2g(D_c\dot{c},\dot{c}) = 0$, így a v függvény valóban konstans. $\square$

4.8. megjegyzés. Sebességvektormezőjük párhuzamosságának köszönhetően a geodetikusok meglehetősen egyöntetű viselkedést mutatnak. – Nyilvánvaló, hogy minden konstans görbe geodetikus. Ha $c : I \to M$ geodetikusa az M pszeudo-Riemann sokaságnak, és valamely $t \in I$ pontban $\dot{c}(t) \neq 0$, akkor 4.7.(b)-ből adódóan $\dot{c}$ seholsem tűnhet el. Szemléletesen szólva: a geodetikusok nem gyorsulhatnak föl, nem lassulhatnak le – speciálisan nem állhatnak meg. Ebből következően a pszeudo-Riemann sokaságok esetén a geodetikusok paraméterezésének módja geometriai szempontból nem közömbös: az átparaméterezés megváltoztathatja a geodetikus-jelleget. Ezzel kapcsolatos a következő észrevétel.

4.9. állítás. *Legyen (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, $c : I \to M$ pedig egy nemkonstans geodetikus. Tekintsünk egy $h : J \to I$ paramétertranszformációt! $c \circ h : J \to M$ pontosan akkor geodetikus, ha a h függvény affin, azaz ha $\forall\ t \in J :$ $h(t) = \alpha t + \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R};\ \alpha \neq 0)$.*

Bizonyítás.

(a) Tegyük föl először, hogy $c : I \to M$ egy tetszőleges görbe, s legyen $X \in \mathfrak{X}(c)$. Ekkor $X \circ h \in \mathfrak{X}(c \circ h)$; megmutatjuk, hogy
$$D_{c\circ h}(X \circ h) = h'[(D_cX) \circ h] \ .$$
Tekintve M-en egy $(U,(x^i)_{i=1}^n)$ térképet,
$$X \restriction c^{-1}(U) = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \circ c\right), \quad X^i := Xx^i : \ t \in I \mapsto X^i(t) = X(t)x^i \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

írható. Így $\forall\ i \in \{1, \dots, n\},\ t \in J$:

$$[X \circ h(x^i)](t) = X[h(t)]x^i = Xx^i(h(t)) = X^i \circ h(t)\ ,$$

ami azt jelenti, hogy az $X \circ h$ $c \circ h$-menti vektormező komponensfüggvényei az $X^i \circ h$ függvények. Alkalmazva mármost a 2.3. bizonyításában levezetett $(*)$ formulát, azt kapjuk, hogy $\forall\ t \in J$:

$$\begin{aligned} D_{c\circ h}(X \circ h)(t) &= (X^i \circ h)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c[h(t)]} + X^i[h(t)] D_{\dot{\overline{c \circ h}}(t)} \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= h'(t) X^{i\prime}[h(t)] \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c[h(t)]} + h'(t) X^i[h(t)] D_{\dot{c}[h(t)]} \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{(*)}{=} \\ &= h'(t)(D_c X)(h(t)) \implies D_{c\circ h}(X \circ h) = h'[(D_c X) \circ h]\ . \end{aligned}$$

(b) Legyen ezek után $c : I \to M$ nemkonstans geodetikus, s tekintsük a $c \circ h : J \to M$ átparaméterezett görbét! Ennek sebességvektormezője $h'(\dot{c} \circ h) \in \mathfrak{X}(c \circ h)$. ($\mathrm{D_c}2$) és az (a)-ban tett észrevétel alkalmazásával

$$\begin{aligned} D_{c\circ h} h'(\dot{c} \circ h) &= h''(\dot{c} \circ h) + h' D_{c\circ h} \dot{c} \circ h = \\ &= h''(\dot{c} \circ h) + (h')^2[(D_c \dot{c}) \circ h] = h''(\dot{c} \circ h)\ , \end{aligned}$$

hiszen c geodetikus volta miatt $D_c\dot{c} = 0$. Mivel c nemkonstans, $\dot{c}$ seholsem tűnik el (4.8.). Így

$$c \circ h \text{ geodetikus} \iff D_{c\circ h} \dot{\overline{c \circ h}} = 0 \iff$$

$$\iff D_{c\circ h} h'(\dot{c} \circ h) = 0 \iff h'' = 0 \iff h \ \text{ affin.} \qquad \square$$

4.10. megjegyzés. Egy pszeudo-Riemann sokaságon adott görbét ***pregeodetikus***nak mondunk, ha átparaméterezhető geodetikussá.

4.11. állítás. *Ha D az (M, g) pszeudo-Riemann sokaság Levi-Civita konnexiója, és g komponensei egy $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozóan a g_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq n)$ függvények, akkor D-nek a tekintett térképre vonatkozó Christoffel-szimbólumait a*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \qquad (1 \leqq i, j, k \leqq n)$$

formula adja.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Koszul-formulát (4.4.) az $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép fölött

$$X := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y := \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z := \frac{\partial}{\partial x^l}$$

választással! Mivel e vektormezők közül bármelyik kettő Lie-zárójele eltűnik (II.8.9.), azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2g\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^j}\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)- \\ &- \frac{\partial}{\partial x^l}\, g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{li}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\ . \end{aligned}$$

A Christoffel-szimbólumok értelmezése szerint

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\ ;$$

így a

$$2\Gamma^k_{ij}g_{kl}=\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{li}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}$$

összefüggéshez jutunk. Megszorozva ennek mindkét oldalát a (g_{ij}) mátrix (g^{ij}) inverzének alkalmas elemével, innen a Christoffel-szimbólumok kívánt kifejezése adódik. □

4.12. példa. *Az* $\mathbb{E}^n=(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$ *euklideszi tér Levi-Civita konnexiója a természetes konnexió.* – 1.9-ben már láttuk, hogy a $\overline{D}$ természetes konnexió torziótenzora eltűnik, így csupán a metrikusság teljesülését kell ellenőriznünk. Tekintsük ebből a célból az $X=X^iE_i, Y=Y^iE_i, Z=Z^iE_i\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ vektormezőket! Ekkor

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= X\left(\sum_{i=1}^n Y^iZ^i\right)\overset{\text{(Der1),(Der2)}}{=}\sum_{i=1}^n X(Y^i)Z^i+\sum_{i=1}^n Y^iX(Z^i)= \\ &= \langle X(Y^i)E_i,Z^kE_k\rangle+\langle Y^iE_i,X(Z^k)E_k\rangle\overset{1.9.(a)}{=} \\ &= \langle\overline{D}_XY,Z\rangle+\langle Y,\overline{D}_XZ\rangle\ , \end{aligned}$$

érvényes tehát (D5).

5. Hiperfelületek Levi-Civita konnexiója. Geodetikusok felületen

5.1. megjegyzések.

(a) Legyen $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2$. Ebben és a következő három fejezetben az $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi tér $(n-1)$-dimenziós részsokaságaival – azaz hiperfelületeivel –, speciálisan $\mathbb{E}^3$ felületeivel foglalkozunk. A vizsgált hiperfelületről föltesszük, hogy *összefüggő, el van látva a g indukált metrikus tenzorral, és megadható rajta seholsem zérus normális vektormező.* Az utóbbi feltétel ekvivalens az *irányíthatóság*gal; ezt II.6.20-ban felületek esetén igazoltuk. Mivel alapvetően lokális jellegű kérdéseket fogunk tárgyalni, az irányíthatóság megkövetelése nem sérti az általánosságot.

(b) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ sokaság $\overline{D}$ természetes konnexióját (azaz $\mathbb{E}^n$ Levi-Civita konnexióját)! Legyen $Y = Y^i E_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$! Az 1.9.(c)-ben mondottak szerint

$$\overline{D}_{v_p} Y = (p, \widetilde{Y}'(p)(v)) \ , \ \widetilde{Y} = (Y^1, \ldots, Y^n).$$

Válasszunk most olyan $c : \ I \to \mathbb{R}^n$ parametrizált görbét, amelyre $\dot{c}(0) = v_p$ teljesül! Ekkor

$$\dot{\overline{Y \circ c}}\,(0) \overset{\text{I.5.15.}}{:=} (c(0)\ ,\ (\widetilde{Y} \circ c)'(0)) = (c(0), \widetilde{Y}'(c(0))c'(0)) = (p, \widetilde{Y}'(p)(v)),$$

tehát

$$\overline{D}_{v_p} Y = \dot{\overline{Y \circ c}}\,(0),$$

függetlenül a $\dot{c}(0) = v_p$ feltételnek eleget tevő görbe megválasztásának módjától. – Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy tetszőleges $M \subset \mathbb{R}^n$ részsokaság, $Y : \ M \to T\mathbb{R}^n$ vektormező (speciálisan normális vektormező vagy érintővektormező) és $v_p \in T_pM$ érintővektor esetén szólhassunk a $\overline{D}_{v_p} Y$ kovariáns deriváltról, noha Y csak M pontjaiban van értelmezve. Beszélhetünk ezek után Y-nak egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ érintővektormező szerinti kovariáns deriváltjáról is a

$$(\overline{D}_X Y)(p) = \overline{D}_{X(p)} Y$$

értelmezéssel. Természetesen nem várható, hogy ekkor $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $\overline{D}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ is teljesüljön, $\overline{D}$ tehát nem ad konnexiót M-en (eltekintve nagyon speciális esetektől). A következő, tulajdonképpen kézenfekvő, de igen fontos konstrukció válasz arra, hogy miként lehet ezen a helyzeten változtatni.

5.2. tétel. *Vegyük alapul az* $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n\ ,\ \langle\ \ ,\ \rangle)$ *euklideszi teret, ellátva a* $\overline{D}$ *természetes konnexióval! Legyen adva az* $M \subset \mathbb{R}^n$ *hiperfelület, s tekintsük az* $\underline{N}$ *normálegységvektormezőt* M*-en! Ekkor* M *Levi-Civita konnexiója a*

$$D:\ (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto D_XY := \overline{D}_XY - \langle\ \overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N}$$

leképezés.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy D eleget tesz a (D1)–(D5) feltételeknek. $\mathbb{R}^n$ természetes konnexiójának megfelelő tulajdonságai és a $\langle\ ,\ \rangle$ metrikus tenzor $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-bilinearitása alapján (D1) és (D2) teljesülése közvetlenül kiolvasható az értelmezésből. (D3)–(D5) ellenőrzése céljából legyen $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)\ ,\ f \in C^\infty(M)$ tetszőleges!

(D3)
$$\begin{aligned} D_XfY &:= \overline{D}_XfY - \langle\ \overline{D}_XfY, \underline{N}\ \rangle \underline{N} = \\ &= (Xf)Y + f\overline{D}_XY - \langle\ (Xf)Y + f\overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N} = \\ &= (Xf)Y + f\overline{D}_XY - (Xf)\langle\ Y, \underline{N}\ \rangle \underline{N} - f\langle\ \overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N} = \\ &\overset{(*)}{=} (Xf)Y + f(\overline{D}_XY - \langle\ \overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N}) = \\ &= (Xf)Y + fD_XY, \end{aligned}$$

a $(*)$-gal jelölt lépésnél azt használva föl, hogy $\underline{N}$ – mint normális vektormező – ortogonális az Y érintővektormezőre, s így $\langle\ Y, N\ \rangle = 0$.

(D4)
$$\begin{aligned} D_XY - D_YX &= \overline{D}_XY - \langle\ \overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N} - \overline{D}_YX + \langle\ \overline{D}_YX, \underline{N}\ \rangle \underline{N} = \\ &\overset{1.9.(b)}{=} [X,Y] - \langle\ [X,Y]\ ,\ \underline{N}\ \rangle \underline{N} = [X,Y], \end{aligned}$$

hiszen $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$, s ezért $\langle\ [X,Y]\ ,\ \underline{N}\ \rangle = 0$.

(D5) Jegyezzük meg először, hogy g értelmezése (3.9.(b)) szerint

$$\forall\ p \in M:\ g(X,Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)) = \langle\ X(p), Y(p)\ \rangle = \langle\ X, Y\ \rangle(p),$$

tehát $g(X,Y) = \langle\ X, Y\ \rangle$. Így

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= X\langle\ Y, Z\ \rangle \overset{4.12.}{=} \langle\ \overline{D}_XY, X\ \rangle + \langle\ Y, \overline{D}_XZ\ \rangle = \\ &= \langle\ D_XY + \langle\ \overline{D}_XY, \underline{N}\ \rangle \underline{N}, Z\ \rangle + \langle\ Y, D_XZ + \langle\ \overline{D}_XZ, \underline{N}\ \rangle \underline{N}\ \rangle = \\ &= \langle\ D_XY, Z\ \rangle + \langle\ Y, D_XZ\ \rangle = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ), \end{aligned}$$

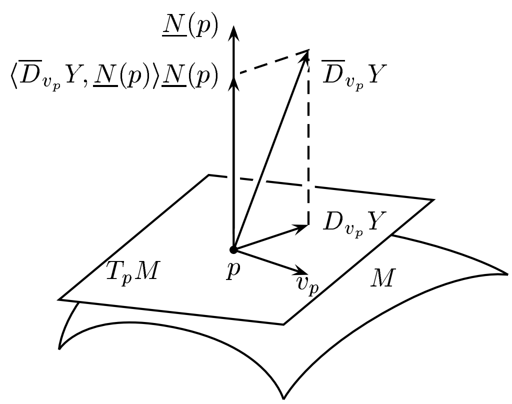
itt is fölhasználva, hogy $\langle\ Y, \underline{N}\ \rangle = \langle\ Z, \underline{N}\ \rangle = 0$. □

5.3. megjegyzések.

(a) Az alkalmazott konstrukció geometriai tartalma közvetlenül kiolvasható az értelmezésből: tetszőleges $v_p \in T_pM$ esetén $\langle \overline{D}_{v_p}Y, \underline{N}(p) \rangle \underline{N}(p)$ a $\overline{D}_{v_p}Y \in T_p\mathbb{R}^n$ vektor $\underline{N}(p)$-re való ortogonális vetülete (I.1.7.), így

$$D_{v_p}Y = \overline{D}_{v_p}Y - \langle \overline{D}_{v_p}Y, \underline{N}(p) \rangle \underline{N}(p)$$

a $\overline{D}_{v_p}Y$ vektornak a T_pM érintősíkra való ortogonális vetülete.



(b) D_XY nyilvánvalóan nem változik, ha $\underline{N}$-et $-\underline{N}$-nel cseréljük ki. A Riemann-geometria alaplemmájából azonban ennél jóval többre is következtethetünk: D_XY egyáltalán nem függ a megkonstruálásához fölhasznált normálegységvektormezőtől, egyértelműen meghatározza ugyanis M metrikus tenzora (ami esetünkben a g indukált Riemann-struktúra). Ebben az értelemben *a Levi-Civita konnexió a hiperfelületek belső geometriájához tartozik.*

5.4. lemma. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós részsokaság, $f: U \subset \mathbb{R}^k \to M$ pedig paraméterezése M-nek. Tekintsük az $(f(U), x)$, $x := f^{-1}$ térképet M-en! Az ehhez tartozó koordináta-vektormezők az*

$$\underline{X}_i := \underline{f}_i \circ f^{-1}: \ f(U) \subset M \to TM \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

leképezések.

Bizonyítás. Az $(f(U), x)$-hez tartozó koordináta-vektormezők definíció szerint (ld. II.8.2.,7.4.) a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: \ h \in C^\infty(f(U)) \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(h) = D_i(h \circ x^{-1}) \circ x = D_i(h \circ f) \circ f^{-1}$$

$$(1 \leqq i \leqq k)$$

leképezések. Mivel tetszőleges $a \in U$ esetén a $p := f(a)$ pontban

$$\begin{aligned}(\underline{X}_i h)(p) &:= (\underline{X}_i)_p h = \underline{f}_i(a) h \overset{\text{II.6.8.}}{=} (D_i f(a))_p h \overset{\text{II.7.24.(1)}}{=} \\ &= h'(p)(D_i f(a)) = h'(p)[f'(a)(e_i)] = (h \circ f)'(a)(e_i) = \\ &= [D_i(h \circ f) \circ f^{-1}](p)\end{aligned}$$

($(e_i)_{i=1}^k$ $\mathbb{R}^k$ kanonikus bázisa), következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \underline{X}_i \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

□

5.5. állítás. *Tekintsük (a fentebb rögzített feltételek mellett) az $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet! Legyen $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ lokális paraméterezése M-nek, amelyhez a $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ $(1 \leqq i, j \leqq n-1)$ első alapmennyiségek tartoznak. Ha*

$$\underline{X}_i := \underline{f}_i \circ f^{-1}, \; D_{\underline{X}_i} \underline{X}_j = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \underline{X}_k \qquad (1 \leqq i, j \leqq n-1),$$

akkor $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \circ f^{-1}$, ahol

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell}(D_i g_{j\ell} + D_j g_{\ell i} - D_\ell g_{ij})$$

($(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$; $1 \leqq i, j, k \leqq n-1$).

Bizonyítás. Tekintsük M-en az $(f(U), x)$, $x := f^{-1}$ térképet! Ha g erre vonatkozó komponensei $\tilde{g}_{ij}$, akkor az előrebocsátott lemma és a 3.9.(b)/2-ben mondottak alapján

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} \circ f^{-1} \qquad (1 \leqq i, j \leqq n-1).$$

A Levi-Civita konnexió Christoffel-szimbólumait az $(f(U), x)$ térképre vonatkozóan 4.11. értelmében, 5.4. figyelembevételével a

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \tilde{g}^{k\ell}(\underline{X}_i \tilde{g}_{j\ell} + \underline{X}_j \tilde{g}_{\ell i} - \underline{X}_\ell \tilde{g}_{ij})$$

formula adja. Mivel itt $\tilde{g}^{k\ell} = g^{k\ell} \circ f^{-1}$, és az 5.4. bizonyításában látottak szerint

$$\underline{X}_i \tilde{g}_{j\ell} = D_i(\tilde{g}_{j\ell} \circ f) \circ f^{-1} = (D_i g_{j\ell}) \circ f^{-1} \text{ , s így tovább,}$$

következik az állítás. □

5.6. lemma és definíció. *Tekintsük (az 5.1.(a)-beli megállapodások mellett) az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, s legyen $\underline{N}$ normálegységvektormező M-en! A*

$$\begin{aligned}&J : \; p \in M \mapsto J_p \in \operatorname{End} T_p M, \\ &\forall\, \underline{v} \in T_p M : \; J_p(\underline{v}) := \underline{N}(p) \times \underline{v}\end{aligned}$$

*leképezést az M felület **majdnem komplex struktúrájának** nevezzük. Erre teljesül, hogy*

$$\forall\, p \in M : \; J_p^2 = -1_{T_p M} \quad \text{– röviden: } J^2 = -1_{TM}.$$

Bizonyítás.

(a) $J_p \quad T_pM$-et valóban T_pM-be képezi le, hiszen
$\forall\, \underline{v} \in T_pM : \ \underline{N}(p) \times \underline{v} \perp \underline{N}(p) \Longrightarrow \underline{N}(p) \times \underline{v} \in T_pM$.
Az, hogy J_p endomorfizmusa T_pM-nek, a vektoriális szorzat tulajdonságai (I.2.8.) alapján közvetlenül adódik.

(b) $\forall\, \underline{v} \in T_pM : \ J_p^2(\underline{v}) = J_p(J_p(\underline{v})) := J_p(\underline{N}(p) \times \underline{v}) =$
$= \underline{N}(p) \times (\underline{N}(p) \times \underline{v}) \overset{\text{I.2.8.}}{=} \langle\, \underline{N}(p), \underline{v} \,\rangle \underline{N}(p) - \langle\, \underline{N}(p), \underline{N}(p) \,\rangle \underline{v}$
$= -\underline{v} \quad \Longrightarrow \quad J_p^2 = -1_{T_pM}$. □

5.7. definíció. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület, s egy $c : \ I \to M$ természetes paraméterezésű felületi görbe! A*

$$\kappa_g : \ I \to \mathbb{R} \ , \ t \mapsto \kappa_g(t) := \langle\ (D_c\dot{c})(t), J_{c(t)}\dot{c}(t) \ \rangle$$

*függvényt (ahol D_c a Levi-Civita konnexióhoz csatolt c-menti kovariáns deriválás) a c görbe **geodetikus görbület**ének nevezzük.*

5.8. állítás. *Tekintsük – az eddigi feltételek mellett – az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet! Legyen $\underline{N}$ normálegységvektormezője M-nek, a csatolt leképezését jelölje $\widetilde{\mathrm{N}}$! Ha $c : \ I \to M$ természetes paraméterezésű felületi görbe, akkor*

(a) c geodetikus görbülete kiszámítható a

$$\kappa_g = \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ \widetilde{\mathrm{N}} \circ c \end{pmatrix}$$

formula szerint;

(b) c geodetikus görbülete és sebességvektormezőjének kovariáns deriváltja között fennáll a

$$\kappa_g J(\dot{c}) = D_c\dot{c}$$

összefüggés, ahol $J(\dot{c})$ a

$$t \in I \mapsto J(\dot{c})(t) := J_{c(t)}\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$$

c-menti vektormezőt jelenti.

Bizonyítás. Jegyezzük meg először, hogy

$$(*) \qquad D_c\dot{c} = \ddot{c} - \langle\ \ddot{c}\ ,\ \underline{N} \circ c \ \rangle \underline{N} \circ c.$$

Valóban, válasszunk olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, amelyre $X \circ c = \dot{c}$ teljesül. Ez lokálisan lehetséges (v.ö. 4.6. bizonyítása); az egyszerűség kedvéért azonban föltesszük, hogy a felírt összefüggés az egész I fölött érvényes. Ekkor

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I:\ (D_c\dot{c})(t) &= (D_c(X\circ c))(t) \overset{\mathrm{D_c3}}{=} D_{\dot{c}(t)}X \overset{5.2.}{=} \\ &= \overline{D}_{\dot{c}(t)}X - \langle\, \overline{D}_{\dot{c}(t)}X, \underline{N}[c(t)]\,\rangle \underline{N}[c(t)] = \\ &\overset{5.1.(b)}{=} \dot{\overline{X\circ c}}(t) - \langle\, \dot{\overline{X\circ c}}(t)\ ,\ \underline{N}[c(t)]\,\rangle \underline{N}[c(t)] = \\ &= \ddot{c}(t) - \langle\, \ddot{c}(t), \underline{N}[c(t)]\,\rangle \underline{N}[c(t)],\end{aligned}$$

ami $(*)$ helyességét jelenti.

(a) $\forall\, t \in I:\ \kappa_g(t) := \langle\, (D_c\dot{c})(t), J_{c(t)}\dot{c}(t)\,\rangle \overset{(*)}{=}$

$$\begin{aligned} &= \langle\, \ddot{c}(t) - \langle\, \ddot{c}(t), \underline{N}[c(t)]\,\rangle \underline{N}[c(t)], \underline{N}[c(t)] \times \dot{c}(t)\,\rangle = \\ &\overset{\mathrm{I.2.8.(3)}}{=} \langle\, \ddot{c}(t), \underline{N}[c(t)] \times \dot{c}(t)\,\rangle = \langle\, \widetilde{N}[c(t)] \times c'(t), c''(t)\,\rangle = \\ &\overset{\mathrm{I.2.8.}}{=} \det\begin{pmatrix} c''(t) \\ \widetilde{N}[c(t)] \\ c'(t)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} c'(t) \\ c''(t) \\ \widetilde{N}[c(t)]\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) $(*)$-ból kiolvashatóan $\forall\, t \in I:\ (D_c\dot{c})(t) \in \mathcal{L}(\ddot{c}(t), \underline{N}[c(t)])$. Azonban $\dot{c}(t) \perp \ddot{c}(t)$ (I.5.10.) és $\dot{c}(t) \perp \underline{N}[c(t)]$, így

$$(D_c\dot{c})(t) \perp \dot{c}(t).$$

Ugyancsak fennáll a

$$J_{c(t)}\dot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$$

reláció, s mivel a $(D_c\dot{c})(t)$, $\dot{c}(t)$ és $J_{c(t)}\dot{c}(t)$ vektorok egyaránt a kétdimenziós $T_{c(t)}M$ érintősíkban vannak, továbbá $J_{c(t)}\dot{c}(t) \neq 0$, a két merőlegességi relációból

$$(D_c\dot{c})(t) = \lambda J_{c(t)}\dot{c}(t), \lambda \in \mathbb{R}$$

következik. Véve itt mindkét oldal belső szorzatát a $J_{c(t)}\dot{c}(t)$ vektorral, s fölhasználva, hogy a Lagrange-identitás figyelembevételével

$$\begin{aligned}\langle\, J_{c(t)}\dot{c}(t), J_{c(t)}\dot{c}(t)\,\rangle &= \|\underline{N}(c(t)) \times \dot{c}(t)\|^2 = \\ &= \|\underline{N}(c(t))\|^2\ \|\dot{c}(t)\|^2 - \langle\, \underline{N}(c(t)), \dot{c}(t)\,\rangle^2 = 1,\end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \langle\, (D_c\dot{c})(t), J_{c(t)}\dot{c}(t)\,\rangle =: \kappa_g(t),$$

tehát $D_c\dot{c} = \kappa_g J(\dot{c})$. □

5.9. következmény. *Egy természetes paraméterezésű (vagy konstans pályasebességű) felületi görbe pontosan akkor geodetikus, ha a geodetikus görbülete eltűnik.* □

5.10. megjegyzés. 2.6. alapján 5.5. figyelembevételével következik, hogy egy $c: I \to M$ konstans pályasebességű felületi görbe akkor és csak akkor geodetikus, ha egy $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ paraméterezéshez tartozó c^1, c^2 koordináta függvényei (II.6.7.) eleget tesznek a

$$\text{(G1)} \qquad c^{k\prime\prime} + (\Gamma_{ij}^k \circ (c^1, c^2))c^{i\prime}c^{j\prime} = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq 2)$$

összefüggésnek, ahol a $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ függvények az 5.5-ben leírtak szerint számíthatók ki az 1. alapmennyiségekből. (G1) közönséges másodrendű differenciálegyenletet jelent a kérdéses koordinátafüggvényekre. Másrészt 5.8. és 5.9. alapján az adódik, hogy c pontosan akkor geodetikus, ha

$$\text{(G2)} \qquad \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ \widetilde{N} \circ c \end{pmatrix} = 0.$$

(G2) szintén közönséges másodrendű differenciálegyenlet c-re. A geodetikusok differenciálegyenletének ez az alakja – $\underline{N}$ szereplése folytán – nem intrinsic, a felületelméleti alkalmazások szempontjából azonban (G2) gyakran praktikusabb, mint (G1).

5.11. állítás. *Tegyük föl, hogy $c: I \to M$ konstans pályasebességű, bireguláris felületi görbe az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületen! – A következő kijelentések ekvivalensek:*

(1) c geodetikus.

(2) c tetszőleges pontbeli simulósíkja tartalmazza az illető pontbeli felületi normálist.

(3) c tetszőleges pontbeli főnormálisa párhuzamos az illető pontbeli felületi normálissal.

Bizonyítás. Jelölje $\underline{N}$ az M-en adott normálegységvektormezőt, $\widetilde{N}$ pedig $\underline{N}$ csatolt leképezését.

(a) A c görbe $c(t)$ pontbeli simulósíkjának normálvektora $\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)$, így

$$\begin{aligned} c \text{ geodetikus} \quad &\overset{\text{(G2)}}{\iff} \det \begin{pmatrix} c' \\ c'' \\ \widetilde{N} \circ c \end{pmatrix} = 0 \iff \langle \dot{c} \times \ddot{c}\ ,\ \underline{N} \circ c\ \rangle = 0 \\ &\iff \forall\, t \in I:\ \dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) \perp \underline{N}[c(t)] \\ &\iff \forall\, t \in I:\ \underline{N}[c(t)] \text{ a } c(t)\text{-beli simuló-} \\ &\qquad \text{síkban van.} \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy (1) $\iff$ (2).

(b) Tegyük föl, hogy c pályasebessége v! I.6.8.(b) értelmében $\ddot{c} = v'\underline{T} + v^2\kappa\underline{F}$, így konstans pályasebesség esetén

$$\ddot{c} = v^2\kappa\underline{F}.$$

Másrészt a föntebbi $(*)$ formulából

$$\ddot{c} = D_c\dot{c} + \langle\, \ddot{c}, \underline{N} \circ c \,\rangle \underline{N} \circ c,$$

így

$$\begin{aligned} c \text{ geodetikus} \quad &:\Longleftrightarrow \quad D_c\dot{c} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{c} = \langle\, \ddot{c}, \underline{N} \circ c \,\rangle \underline{N} \circ c \\ &\Longleftrightarrow \quad v^2\kappa\underline{F} = \langle\, \ddot{c}, \underline{N} \circ c \,\rangle \underline{N} \circ c \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, t \in I : \ \underline{F}(t) \parallel \underline{N}[c(t)]; \end{aligned}$$

ezzel (1) $\Longleftrightarrow$ (3) is igazolást nyert. □

5.12. példák.

(a) Tekintsük az $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ origó középpontú, r sugarú gömböt, s legyen $c : \ I \to S^2(r)$ konstans pályasebességű parametrizált főkör! Ekkor c síkgörbe, tetszőleges pontbeli simulósíkja megegyezik a síkjával, így tartalmazza a gömb középpontját, s ennélfogva az illető pontbeli felületi normálist is. Ez 5.11. alapján azt jelenti, hogy c geodetikus. – A következő fejezetben igazolni fogjuk, hogy ha $c : \ I \to S^2(r)$ geodetikus, akkor c konstans pályasebességű főkör.

(b) Legyen adva $\mathbb{R}^3$-ban az

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (r \in \mathbb{R}^+)$$

egyenletű M egyenes körhenger! Megmutatjuk, hogy M geodetikusai a

$$c : \ t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = (r\cos(\alpha t + \beta), r\sin(\alpha t + \beta), \gamma t + \delta)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$$

alakú felületi görbék és csakis ezek. – Világos először is, hogy M felületi görbéi kizárólag

$$t \in \mathbb{R} \mapsto c(t) = (r\cos\vartheta(t), r\sin\vartheta(t), h(t))$$

alakúak lehetnek, ahol $\vartheta, h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Mivel

$$M = f^{-1}(r)\ , \ f : \ p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (p^1)^2 + (p^2)^2 - r^2,$$

kapjuk, hogy $\forall\ p \in M : \ \operatorname{grad} f(p) = 2(p^1, p^2, 0)$. Ebből következik, hogy M (bármelyik) $\underline{N}$ normálegységvektormezőjének 3. komponense zérus.

Tegyük föl mármost, hogy a c felületi görbe geodetikus! Ekkor az 5.11. bizonyításában látottak szerint

$$\begin{aligned} &\forall\ t \in \mathbb{R} : \ \ddot{c}(t) \parallel \underline{N}[c(t)] \Longrightarrow \forall\ t \in \mathbb{R} : \ h''(t) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall\ t \in \mathbb{R} : \ h(t) = \gamma t + \delta \qquad (\gamma, \delta \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

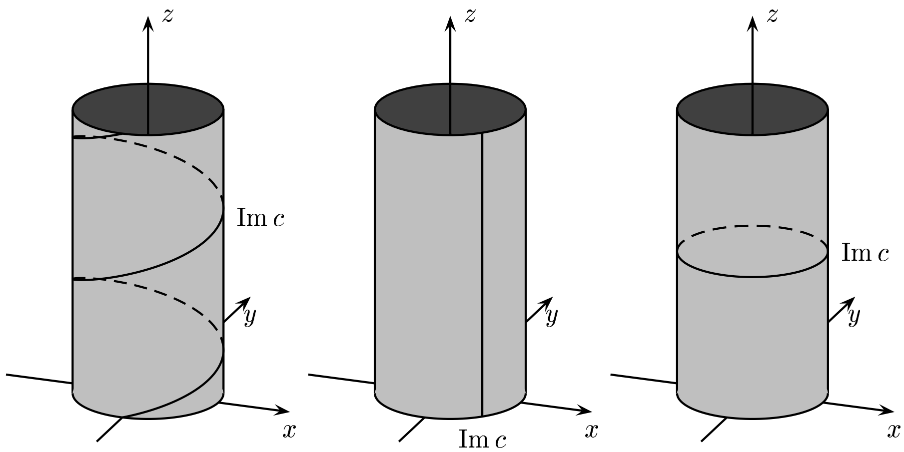
Másrészt a geodetikusok pályasebessége konstans; ez azt eredményezi, hogy

$$\|\dot{c}\|^2 = r^2(\vartheta')^2 + \gamma^2 \text{ konstans } \Longrightarrow \vartheta' \text{ konstans}$$
$$\Longrightarrow \quad \forall\, t \in \mathbb{R}: \ \vartheta(t) = \alpha t + \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Beláttuk így, hogy ha $c : \mathbb{R} \to M$ geodetikus, akkor c csakis a megadott alakú parametrizált görbe lehet. Ez

- $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ esetén *csavarvonal* (I.6.21.(a));
- ha $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$, akkor (parametrizált) *alkotóegyenes*;
- amennyiben $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, úgy (parametrizált) *keresztmetszetkör*.

Megfordítva, közvetlen számolással ellenőrizhető (például (G2) alkalmazásával), hogy a szóbanforgó görbék mindegyike geodetikus. Tehát *az egyenes körhenger geodetikusai a ráilleszkedő csavarvonalak, az alkotóegyenesek, a keresztmetszetkörök – és csakis ezek.*



6. Formaoperátor

6.1. lemma. *Legyen V nemtriviális* ($\neq \{0\}$) *euklideszi vektortér,* $\varphi \in \operatorname{End} V$ *pedig önadjungált lineáris operátor* ($\forall\ v, w \in V :\ \langle\ \varphi(v), w\ \rangle = \langle\ v, \varphi(w)\ \rangle$)*! – Az*

$$f :\ V\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ v \mapsto f(v) := \frac{\langle\varphi(v), v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

függvény V egységgömbjén fölveszi a szélsőértékeit, a szélsőértékhelyek φ-nek sajátvektorai.

Bizonyítás. Legyen V n-dimenziós, az egységgömbjét jelölje az eddigi gyakorlatnak megfelelően S^{n-1} ($S^{n-1} := \{a \in V \mid \|a\| = 1\}$).

(1) Az f függvény differenciálható, következésképpen folytonos is. Így – könnyen ellenőrizhető módon – $f \restriction S^{n-1}$ szintén folytonos. S^{n-1} V-nek korlátos és zárt, s ezért kompakt halmaza; egy kompakt halmazon folytonos függvény pedig jól ismert módon fölveszi a szélsőértékeit. Létezik tehát olyan $e \in S^{n-1}$ vektor, amely például minimumhelye $f \restriction S^{n-1}$-nek, azaz amelyre teljesül, hogy

$$\forall\ a \in S^{n-1} :\ f(e) \leqq f(a).$$

(2) Vegyük észre, hogy

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ ,\ \forall\ v \in V\backslash\{0\} :\ f(\lambda v) = f(v)$$

(ezt úgy szokás kifejezni, hogy a függvény *nulladfokú homogén*). Ennek alapján egyszerűen adódik, hogy az e vektor $V\backslash\{0\}$ fölött is minimumhelye f-nek, azaz

$$\forall\ v \in V\backslash\{0\} :\ f(e) \leqq f(v).$$

Valóban, tetszőleges $v \in V\backslash\{0\}$ esetén $v^0 := \frac{1}{\|v\|}v \in S^{n-1}$, és a nulladfokú homogenitás alkalmazásával kapjuk, hogy

$$f(v) = f(\|v\|v^0) = f(v^0) \geqq f(e).$$

(3) Megmutatjuk, hogy az e vektor *sajátvektora* φ-nek. – Tekintve egy tetszőleges $u \in V$ vektort, képezzük a

$$c :\ \mathbb{R} \to V\ ,\ t \mapsto c(t) := e + tu$$

parametrizált görbét, s legyen

$$h := f \circ c.$$

Ekkor $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, hiszen differenciálható leképezések kompozíciója; deriváltja a láncszabály alapján $h' = (f' \circ c)c'$. Speciálisan

$$h'(0) = f'[c(0)]c'(0) = f'(e)(u).$$

Mivel e szélsőértékhelye a differenciálható f függvénynek, itt $f'(e) = 0$, s ennélfogva $h'(0) = 0$. Másrészt

$$\forall\ t \in \mathbb{R} :\ h(t) = f(e + tu) = \frac{\langle \varphi(e + tu), e + tu \rangle}{\langle e + tu, e + tu \rangle}$$

írható. Innen közvetlen differenciálással – fölhasználva a számolás során φ önadjungált voltát – azt kapjuk, hogy

$$h'(0) = 2\langle\ \varphi(e), u\ \rangle - 2\langle\ \varphi(e), e\ \rangle\langle e, u\rangle = 0,$$

azaz, hogy

$$\langle\ \varphi(e) - \langle\ \varphi(e), e\ \rangle e, u\ \rangle = 0.$$

Az $u \in V$ vektor tetszőlegessége folytán ebből

$$\varphi(e) = \langle\ \varphi(e), e\ \rangle e$$

következik, e tehát valóban sajátvektora φ-nek, a hozzátartozó sajátérték $\langle\ \varphi(e), e\ \rangle = f(e)$. $\square$

6.2. megjegyzés. A lemma garantálja, hogy az önadjungált lineáris operátoroknak létezik sajátvektora. Ennek az eredménynek a birtokában a lineáris algebrából jól ismert induktív érveléssel levezethető a következő ún. *spektráltétel:* egy (nemtriviális) *euklideszi vektortér minden önadjungált lineáris operátorához megadható a vektortérnek olyan ortonormált bázisa, amelyet a lineáris operátor sajátvektorai alkotnak.*

6.3. megjegyzés. Tekintsünk egy V végesen generált, szabad R-modulust, legyen $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek, az ehhez duális bázist jelölje $(b^i)_{i=1}^n$. Ha $A \in \mathcal{T}_1^1(V)$, akkor A egyértelműen előállítható

$$A = A^i_j b_i \otimes b^j$$

alakban, ahol $A^i_j := A(b^i, b_j)$ $\quad (1 \leqq i, j \leqq n)$ a tenzor $(b_i)_{i=1}^n$ bázishoz tartozó komponensei. – Valóban, $\forall\ k, \ell \in \{1, \dots, n\}$:

$$A^i_j b_i \otimes b^j(b^k, b_\ell) = A^i_j b_i(b^k) b^j(b_\ell) = A^i_j \delta^k_i \delta^j_\ell = A^k_\ell = A(b^k, b_\ell),$$

fölhasználva, hogy a V és V^{**} közötti természetes izomorfizmus alapján
$b_i(b^k) = b^k(b_i) = \delta^k_i$; ld. II.2.5. bizonyítását. – A most igazolt észrevétel kovariáns tenzorokra vonatkozó megfelelőjét II.2.12-ben tárgyaltuk, az (r, s)-típusú

tenzorokkal kapcsolatos állítást pedig a sokaságelmélet keretei között láttuk (II.8.27.). Természetesen II.8.27. analogonja érvényes a jelen absztrakt szituációban is, a következő eredmény megfogalmazásához azonban elegendő volt $(1,1)$-típusú tenzorokra szorítkoznunk.

6.4. lemma és definíció. *Legyen V végesen generált szabad R-modulus!*

(a) Létezik egy és csak egy olyan

$$C_1^1 : \mathcal{T}_1^1(V) \to R \ , \ A \mapsto C_1^1(A)$$

R-lineáris leképezés, amelyre teljesül, hogy

$$\forall\ v \in V,\ \ell \in V^* :\ C_1^1(v \otimes \ell) = \ell(v).$$

*Ezt a leképezést **(1,1)-kontrakció**nak nevezzük.*

(b) Ha $\varphi \in \mathrm{End}_R(V)$, β pedig az $\mathrm{End}_R(V)$ és $\mathcal{T}_1^1(V)$ közötti természetes izomorfizmus (II.2.5.), akkor a

$$\operatorname{tr}\varphi := C_1^1(\beta(\varphi))$$

*skalárt a φ endomorfizmus **átlósösszeg**ének („trace") mondjuk. Amennyiben $(A_j^i) \in \mathcal{M}_n(R)$ tetszőleges mátrixreprezentánsa φ-nek, úgy*

$$\operatorname{tr}\varphi = A_i^i (:= \sum_{i=1}^n A_i^i).$$

Bizonyítás. Legyen $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa v-nek, $(b^i)_{i=1}^n$ pedig az ehhez duális bázisa V^*-nak.

(a) Mivel a C_1^1 leképezésre kirótt feltétel szerint

$$\forall\ i,j \in \{1,\dots,n\} :\ C_1^1(b_i \otimes b^j) = b^j(b_i) = \delta_i^j,$$

C_1^1 értelmezésére egyetlen lehetőség kínálkozik:

$$\textit{amennyiben } A = A_j^i b_i \otimes b^j \in \mathcal{T}_1^1(V) \text{ , \textit{úgy legyen}}$$

$$C_1^1(A) := A_i^i := \sum_{i=1}^n A_i^i = \sum_{i=1}^n A(b^i, b_i).$$

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ha a C_1^1 leképezést ezzel az előírással adjuk meg, akkor eleget tesz a kívánalmaknak. Be kell még látnunk, hogy az így értelmezett C_1^1 leképezés bázisválasztástól független. – Tegyük föl, hogy $(\bar{b}_i)_{i=1}^n$ további bázisa V-nek, mégpedig $\bar{b}_i = \alpha_i^j b_j \quad (1 \leqq i \leqq n)$. Ha $(\beta_i^j) := (\alpha_i^j)^{-1}$, akkor a megfelelő duális bázis tagjai $\bar{b}^k = \beta_i^k b^i \quad (1 \leqq k \leqq n$; ld. II.2.16.) és

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n A(\bar{b}^k, \bar{b}_k) &= \sum_{k=1}^n A(\beta_j^k b^j, \alpha_k^i b_i) = \sum_{k=1}^n \beta_j^k \alpha_k^i A(b^j, b_i) = \\ &= \delta_j^i A(b^j, b_i) = \sum_{i=1}^n A(b^i, b_i) = C_1^1(A),\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $C_1^1(A)$ valóban független a fölhasznált bázistól.

(b) Ha φ mátrixa a $(b_i)_{i=1}^n$ bázisra vonatkozóan $(A_j^i) \in \mathcal{M}_n(R)$, akkor a II.2.14-ben látottak szerint a $\beta(\varphi) \in \mathcal{T}_1^1(V)$ tenzor az illető bázisban az

$$\beta(\varphi) = A_j^i b_i \otimes b^j$$

alakban állítható elő, s így

$$\operatorname{tr}\varphi := C_1^1(\beta(\varphi)) = \sum_{i=1}^n A_i^i.$$

□

6.5. definíció. *Megtartva 5.1.(a) feltételeit, tekintsük az $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet, s legyen $\underline{N}$ normálegységvektormező M-en. – A hiperfelület **p-beli formaoperátor**án az*

$$S_p : \ \underline{v} \in T_pM \mapsto S_p(\underline{v}) := -\overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}$$

leképezést értjük, ahol $\overline{D}$ $\mathbb{R}^n$ kanonikus konnexiója.

6.6. megjegyzések.

(a) A formaoperátor függ az M-en kijelölt normálegységvektormezőtől: ha $\underline{N}$-et $-\underline{N}$-nel helyettesítjük, akkor S_p $-S_p$-re változik. Az értelmezésben a „$-$" jel szerepeltetése mesterkéltnek tűnhet, a későbbiekben azonban éppen ennek köszönhetően fog jelentősen redukálódni a „$-$" jelek száma.

(b) A formaoperátor (angolul: *shape operator* – innen a jelölés –) elnevezés mellett a *Weingarten-leképezés* elnevezés is használatos.

6.7. tétel. *Egy hiperfelület tetszőleges pontjában tekintett formaoperátor önadjungált lineáris operátora a pontbeli érintőtérnek.*

Bizonyítás. Legyen $p \in M$ tetszőleges, s tekintsük az $\underline{N}$ normálegységvektormezőhöz tartozó

$$S_p : \ \underline{v} \in T_pM \mapsto S_p(\underline{v}) := -\overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}$$

formaoperátort!

(a) $\forall\, v \in T_pM : \ S_p(v) \in T_pM.$
Valóban, az $\langle\, \underline{N}, \underline{N}\,\rangle : \ M \to \mathbb{R}$ függvény konstans, így a természetes konnexió metrikussága miatt

$$\begin{aligned}&\forall\, \underline{v} \in T_pM : \ 0 = \underline{v}\langle\, \underline{N}, \underline{N}\,\rangle = \langle\, \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}, \underline{N}(p)\,\rangle + \langle\, \underline{N}(p), \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}\,\rangle = \\ &= 2\langle\, \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}, \underline{N}(p)\,\rangle = -2\langle\, S_p(\underline{v}), \underline{N}(p)\,\rangle \quad \Longrightarrow S_p(\underline{v}) \in T_pM.\end{aligned}$$

(b) $S_p \in \operatorname{End} T_pM$
Ezt triviális számolás mutatja:

$$\begin{aligned}&\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in T_pM \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \ S_p(\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}) := -\overline{D}_{\alpha\underline{v}+\beta\underline{w}}\underline{N} = \\ &\overset{(D1)}{=} -(\alpha\overline{D}_{\underline{v}}\underline{N} + \beta\overline{D}_{\underline{w}}\underline{N}) = \alpha S_p(\underline{v}) + \beta S_p(\underline{w}).\end{aligned}$$

(c) $\forall\, v, w \in T_pM :\ \langle\, S_p(\underline{v}), \underline{w}\,\rangle = \langle\, \underline{v}, S_p(\underline{w})\,\rangle$.
Ennek ellenőrzése végett, II.8.14-re való hivatkozással, tekintsünk olyan $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket, melyekre $X(p) = \underline{v},\ Y(p) = \underline{w}$ teljesül! Ekkor

$$\begin{aligned}
\langle\, S_p(\underline{v}), \underline{w}\,\rangle - \langle\, \underline{v}, S_p(\underline{w})\,\rangle &= -\langle\, \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N}, \underline{w}\,\rangle + \langle\, \underline{v}, \overline{D}_{\underline{w}}\underline{N}\,\rangle = \\
&= -\langle\, \overline{D}_{X(p)}\underline{N}, Y(p)\,\rangle + \langle\, X(p), \overline{D}_{Y(p)}\underline{N}\,\rangle = \\
&= (\langle\, X, \overline{D}_Y\underline{N}\,\rangle - \langle\, \overline{D}_X\underline{N}, Y\,\rangle)(p) \overset{(D5)}{=} \\
&= (Y\langle\, X, \underline{N}\,\rangle - \langle\, \overline{D}_Y X, \underline{N}\,\rangle - X\langle\, \underline{N}, Y\,\rangle + \langle\, \underline{N}, \overline{D}_X Y\,\rangle)(p) = \\
&\overset{(*)}{=} \langle\, \overline{D}_X Y - \overline{D}_Y X, \underline{N}\,\rangle(p) \overset{(D4)}{=} \langle\, [X, Y], \underline{N}\,\rangle(p) \overset{(*)}{=} 0,
\end{aligned}$$

a $(*)$-gal jelölt lépéseknél azt használva föl, hogy $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ és $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ folytán

$$\langle\, X, \underline{N}\,\rangle = \langle\, Y, \underline{N}\,\rangle = \langle\, [X, Y], \underline{N}\,\rangle = 0.$$

□

6.8. következmény és definíció. *Megtartva 6.5. feltételeit, az*

$$S :\ X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto S(X),$$
$$\forall\, p \in M :\ S(X)(p) := S_p(X_p)$$

*leképezés ($C^\infty(M)$-) endomorfizmusa $\mathfrak{X}(M)$-nek – s így $(1,1)$-tenzor M-en – ; ezt az $(1,1)$ tenzort az M hiperfelület **formaoperátor**ának vagy **formatenzor**ának nevezzük.* □

6.9. példa. *Gömbök formaoperátora*
Tekintsük az $S^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ origó középpontú, r-sugarú gömböt! Ekkor az

$$\underline{N} :\ p \in S^{n-1}(r) \mapsto \underline{N}(p) := (p, -\frac{1}{\|p\|}p) = -\frac{1}{r}(p, p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

leképezés normálegységvektormező $S^{n-1}(r)$-en (v.ö. II.6.15.(a)).
Ha

$$\widehat{N} :\ q \in \mathbb{R}^n \mapsto \widehat{N}(q) := -\frac{1}{r}(q, q) \in T_q\mathbb{R}^n,$$

akkor $\widehat{N} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ és $\widehat{N} \restriction S^{n-1}(r) = \underline{N}$. A lineáris konnexiók lokális jellegéből adódóan (ld. pl. 1.10.)

$$\forall\, p \in S^{n-1}(r)\ ,\ \underline{v} \in T_pS^{n-1}(r) :\ \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N} = \overline{D}_{\underline{v}}\widehat{N}.$$

Mivel $\widehat{N} = -\frac{1}{r}u^i E_i$ $\quad((u^i)_{i=1}^n$ $\quad\mathbb{R}^n$ kanonikus koordinátarendszere, $(E_i)_{i=1}^n$ a természetes n-élmező), azt kapjuk így, hogy

$$\begin{aligned}
&\forall\, \underline{v} \in T_pS^{n-1}(r) :\ S_p(\underline{v}) = -\overline{D}_{\underline{v}}\widehat{N} = \frac{1}{r}\overline{D}_{\underline{v}}u^i E_i \overset{1.9.}{:=} \\
&= \frac{1}{r}\underline{v}(u^i)E_i(p) = \frac{1}{r}\underline{v} \Longrightarrow S_p = \frac{1}{r}1_{T_pS^{n-1}(r)}.
\end{aligned}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy r-sugarú gömbfelület esetén a formaoperátor minden pontban $\frac{1}{r}$-rel vagy $-\frac{1}{r}$-rel való szorzást jelent, a normálegységvektormező megválasztásától függően.

6.10. állítás. *Tegyük föl, hogy $M \subset \mathbb{R}^3$ (összefüggő, irányítható) felület, $\underline{N}$ normálegységvektormező M-en, és S az $\underline{N}$-hez tartozó formaoperátor. Ha $c: I \to M$ természetes paraméterezésű, bireguláris geodetikus, akkor*

$$S(\underline{T}) = \kappa\underline{T} - \tau\underline{B}.$$

Bizonyítás. A biregularitás miatt a $\kappa: I \to \mathbb{R}$ görbületfüggvény seholsem tűnik el (s így mindenütt pozitív; ld. I.6.5.). Az (F1) Frenet-formula alapján

$$\ddot{c} = \underline{\dot{T}} = \kappa\underline{F},$$

innen $\underline{F} = \frac{1}{\kappa}\ddot{c}$. c geodetikus, ezért 5.11. értelmében $\underline{F} \parallel \underline{N} \circ c$. Föltehetjük – hiszen $\underline{N}$ fölött előjel erejéig szabadon rendelkezhetünk – hogy

$$\underline{F} = \underline{N} \circ c.$$

Mivel $\forall\, t \in I$:

$$S(\underline{T})(t) := S_{c(t)}\underline{T}(t) = S_{c(t)}\dot{c}(t) := -\overline{D}_{\dot{c}(t)}\underline{N} \overset{5.1.(b)}{=} -\dot{\overline{\underline{N} \circ c}}(t),$$

kapjuk, hogy

$$S(\underline{T}) = -\dot{\overline{\underline{N} \circ c}}.$$

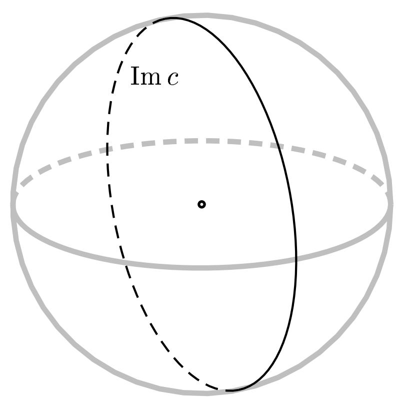
Összerakva a tett észrevételeket:

$$S(\underline{T}) = -\dot{\overline{\underline{N} \circ c}} = -\underline{\dot{F}} \overset{\text{(F2)}}{=} \kappa\underline{T} - \tau\underline{B}.$$

□

6.11. következmény. *Ha $c: I \to S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű, bireguláris geodetikus, akkor* $\operatorname{Im} c$ *főkör(ív).*

Bizonyítás. I.6.18. alapján $\forall\, t \in I: \kappa(t) \geqq \frac{1}{r}$. A 6.9-ben mondottakból adódóan – a normálegységvektormező választásától függően – $S(\underline{T}) = \pm\frac{1}{r}\underline{T}$, így 6.10. figyelembevételével $\kappa\underline{T} - \tau\underline{B} = \pm\frac{1}{r}\underline{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\tau = 0$, $\kappa = \frac{1}{r}$, $\operatorname{Im} c$ tehát (ld. I.6.17.) valóban főkör(ív). □



6.12. definíció. *Tekintsük az $M \subset \mathbb{R}^n$ (összefüggő, irányítható) hiperfelületet! Legyen $\underline{N}$ normálegységvektormező M-en, S pedig jelentse az $\underline{N}$-hez tartozó formaoperátort!*

(a) *Tetszőleges $p \in M$ pont esetén az $S_p :\ T_pM \to T_pM$ p-beli formaoperátor sajátértékeit a hiperfelület p-beli* ***főgörbület****einek, a megfelelő saját-egységvektorokat p-beli* ***főirányok****nak nevezzük.*

(b) *A p-beli formaoperátor $K(p) := \det S_p$ determinánsát a hiperfelület p-beli* ***Gauss-Kronecker görbület****ének hívjuk, speciálisan $n = 3$ – azaz felület – esetén* ***Gauss-görbület****ről szólunk. A*

$$K :\ M \to \mathbb{R}\ ,\ p \mapsto K(p) = \det S_p$$

függvény M Gauss-Kronecker-görbülete, illetve $n = 3$ esetén a Gauss-görbülete.

(c) *A hiperfelület* ***középgörbület****e vagy* ***Minkowski-görbület****e*[1] *a p pontban*

$$H(p) := \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} S_p;$$

$H :\ M \to \mathbb{R}\ ,\ p \mapsto H(p)$ a középgörbület-függvény.

(d) *A*

$$k_p :\ T_pM \backslash \{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ \underline{v} \mapsto k_p(\underline{v}) := \frac{g_p(S_p(\underline{v}), \underline{v})}{g_p(\underline{v}, \underline{v})} = \frac{\langle S_p(\underline{v}), \underline{v} \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

függvényt a p pontbeli ***normálgörbületfüggvény****nek, tetszőleges $\underline{v} \in T_pM \backslash \{0\}$ esetén a $k_p(\underline{v})$ valós számot a hiperfelület p-beli, $\underline{v}$ irányban vett* ***normálgörbület****ének mondjuk.*

6.13. megjegyzés. A k_p normálgörbület-függvény a 6.1. bizonyításában mondottaknak megfelelően nulladfokú homogén, amelyet így teljesen meghatároz a T_pM érintőtér egységgömbjén való hatása: ha $\underline{v} \in T_pM \backslash \{0\}$, akkor $k_p(\underline{v}) = k_p(\frac{1}{\|\underline{v}\|}\underline{v})$. Mivel a szövegkörnyezetből mindig ki fog derülni, hogy melyik pontban vizsgálódunk, a továbbiakban k_p helyett egyszerűen k-t írunk.

6.14. tétel (O. Rodrigues)[2]**.**
Tekintsük 6.12. feltételeinek és jelöléseinek megtartása mellett az $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet, s válasszunk ezen egy $p \in M$ pontot!

(a) *p-ben létezik $n-1$ (nem föltétlenül különböző) főgörbület, ezek legkisebbike minimuma, legnagyobbika maximuma a p-beli normálgörbület-függvénynek. Speciálisan felület esetén az adott pontbeli főgörbületek éppen a normálgörbület-függvény szélsőértékei.*

[1] *H. Minkowski* (1864 - 1908) német matematikus, a bonni, a königsbergi s a zürichi egyetem professzora.

[2] *O. Rodriques* (1794 - 1851) francia közgazdász, az utópista szocialista C.H. Saint-Simon követője.

(b) *A p-beli Gauss-Kronecker görbület a főgörbületek szorzata, a Minkowski-görbület a főgörbületek számtani közepe.*

Bizonyítás.

(a) Mivel $S_p \in \operatorname{End} T_pM$ önadjungált, a spektráltétel alapján létezik S_p-nek $n-1$ – nem föltétlenül különböző – sajátértéke; legyenek ezek

$$k_1(p) \leqq k_2(p) \leqq \cdots \leqq k_{n-1}(p).$$

Ekkor – per definitionem – $k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)$ a p-beli főgörbületek. 6.1. értelmében $k_1(p)$ minimuma, $k_{n-1}(p)$ maximuma a normálgörbület-függvénynek.

(b) Ugyancsak a spektráltételből adódik, hogy a p-beli főirányok ortonormált bázisát alkotják T_pM-nek, amelyre vonatkozóan S_p mátrixa éppen a

$$\begin{pmatrix} k_1(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}(p) \end{pmatrix}$$

diagonálmátrix. Így

$$K(p) := \det S_p = k_1(p) \cdot k_2(p) \cdot \ldots \cdot k_{n-1}(p),$$
$$H(p) = \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} S_p = \frac{1}{n-1}(k_1(p) + k_2(p) + \cdots + k_{n-1}(p)).$$

□

6.15. állítás. *Tekintsük az $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet a szokásos feltételekkel! Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot, s legyen $(k_i(p))_{i=1}^{n-1}$ a p-beli főgörbületek, $(\underline{v}_i)_{i=1}^{n-1}$ a megfelelő ortogonális főirányok sorozata. Ha $\underline{v} \in T_pM$, $\|\underline{v}\| = 1$, akkor a $\underline{v}$ irányban vett normálgörbület megadható a*

$$k(\underline{v}) = \sum_{i+1}^{n-1} k_i(p)\langle\ \underline{v}, \underline{v}_i\ \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(p) \cos^2\theta_i$$

formulával, ahol $\theta_i := \arccos\langle\ \underline{v}, \underline{v}_i\ \rangle$ a $\underline{v}$ és a $\underline{v}_i$ vektor szöge $(1 \leqq i \leqq n-1)$.

Bizonyítás. Mivel $(\underline{v}_i)_{i=1}^{n-1}$ ortonormált bázisa T_pM-nek, a Fourier-előállítás (I.1.8.) szerint

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle\ \underline{v}, \underline{v}_i\ \rangle \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\cos\theta_i)\underline{v}_i$$

írható. Így

$$\begin{aligned} k(\underline{v}) &= \langle\ S_p(\underline{v}), \underline{v}\ \rangle = \langle\ \sum_{i=1}^{n-1} (\cos\theta_i) S_p(\underline{v}_i), \underline{v}\ \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \cos\theta_i \langle\ k_i(p)\underline{v}_i, \underline{v}\ \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(p)\cos^2\theta_i, \end{aligned}$$

amint állítottuk. □

6.16. megjegyzés. Tegyük föl speciálisan, hogy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület (a szokásos feltételekkel)! Tetszőleges $p \in M$ esetén a p-beli főirányok megválaszthatók úgy, hogy $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ *pozitív* ortonormált bázisa legyen T_pM-nek. Ekkor tetszőleges $\underline{v} \in T_pM$ egységvektor előállítható

$$\underline{v} = (\cos\theta)\underline{v}_1 + (\sin\theta)\underline{v}_2$$

alakban, ahol $\theta \in \mathbb{R} \mod 2\pi$ erejéig egyértelműen meghatározott. Ennek figyelembevételével az állításban levezetett összefüggés a

$$k(v) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$$

alakot ölti, amelyet szokás ***Euler-formula***ként is idézni.

6.17. állítás. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelület az eddigi feltételekkel! Tegyük föl, hogy $\underline{N}$ normálegységvektormező M-en, s jelentse S az $\underline{N}$-hez tartozó formaoperátort. Kiválasztva egy $\underline{v} \in T_pM$ érintővektort, tekintsünk olyan $c: I \to M$ M-beli görbét, amelyre $\dot{c}(0) = \underline{v}$ teljesül. Ekkor*

$$\langle\, \ddot{c}(0), \underline{N}(p) \,\rangle = \langle\, S_p(\underline{v}), \underline{v} \,\rangle.$$

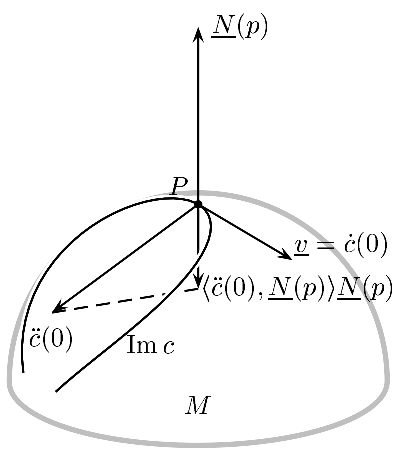
Bizonyítás. $\forall\, t \in I:\ \dot{c}(t) \in T_{c(t)}M = \mathcal{L}[\underline{N}(c(t))]^{\perp}$, tehát $\langle\, \dot{c}, \underline{N} \circ c \,\rangle = 0$. Innen

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\, \dot{c}, \underline{N} \circ c \,\rangle'(0) \overset{\text{I.5.15.}}{=} \langle\, \ddot{c}(0), \underline{N} \circ c(0) \,\rangle + \langle\, \dot{c}(0), \dot{\overline{\underline{N} \circ c}}(0) \,\rangle = \\ &\overset{5.1.(b)}{=} \langle\, \ddot{c}(0), \underline{N}(p) \,\rangle + \langle\, \underline{v}, \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N} \,\rangle = \langle\, \ddot{c}(0), \underline{N}(p) \,\rangle - \langle\, S_p(\underline{v}), \underline{v} \,\rangle, \end{aligned}$$

ami a tett észrevétel helyességét jelenti. □

6.18. megjegyzés. A $\langle\, \ddot{c}(0), \underline{N}(p) \,\rangle \underline{N}(p)$ vektor a $\ddot{c}(0)$ gyorsulásvektor $\underline{N}(p)$-re való ortogonális vetülete (I.1.7.). Az állítás szerint ez a vektor kizárólag a $\dot{c}(0) = \underline{v}$ sebességvektortól és a p-beli formaoperátortól függ. Megállapíthatjuk tehát:

> *egy $p \in M$ ponton átmenő, közös sebességvektorral rendelkező M-beli görbék p-beli gyorsulásvektorának ugyanaz az $\underline{N}(p)$-re való ortogonális vetülete.*



A gyorsulásvektornak ezt a normális menti összetevőjét mintegy a hiperfelület p-beli formája „kényszeríti rá” a p-n átmenő M-beli görbére. Standardizálva a $\underline{v}$ sebességvektort azáltal, hogy egységnyi hosszúságúnak választjuk, annak mértékéhez jutunk így, hogy „miként hajlik” a hiperfelület a $\underline{v}$ irányban – s ezt adja meg a p-beli normálgörbület-függvény $\underline{v}$-ben fölvett értéke. A p-beli főirányok speciálisan azt mutatják meg, hogy melyik irányban a legkisebb, illetve a legnagyobb mértékű a hiperfelület hajlása.

6.19. megjegyzés. Használtuk az előbbiekben az „irány” szót. Ezzel kapcsolatban megállapodunk abban, hogy *irány*on egy adott vektortér egy 1-dimenziós alterét értjük, s az altér nemzérus vektorait az irány *reprezentáns*aiként (is) említjük. A következőkben hiperfelület pontjában a pontbeli érintőtér egy egységvektorának megadásával jelölünk ki irányt.

6.20. állítás (Meusnier tétele (1776), 1. verzió).[3] *Legyen adva egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felület, eleget téve az 5.1.(a)-ban rögzített feltételeknek. Tekintsünk egy $c: I \to M$ természetes paraméterezésű, bireguláris felületi görbét! Ha $\dot{c}(0) = \underline{v}$, akkor*

$$k(\underline{v}) = \kappa(0)\cos\theta,$$

ahol $\kappa(0)$ c görbülete a 0 paraméterű pontban, θ pedig az $\underline{N}(p)$ felületi normális és az $\underline{F}(0)$ főnormális szöge.

Bizonyítás. Mivel $\underline{v}$ egységvektor, $k(\underline{v}) = \langle\, S_p(\underline{v}), \underline{v}\,\rangle \overset{6.17.}{=} \langle\, \ddot{c}(0), \underline{N}(p)\,\rangle =$
$= \langle\, \dot{\underline{T}}(0), \underline{N}(p)\,\rangle \overset{(F1)}{=} \kappa(0)\langle\, \underline{F}(0), \underline{N}(p)\,\rangle = \kappa(0)\cos\theta.$ □

6.21. definíció. *Legyen S az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület formaoperátora, s tegyük föl, hogy $c: I \to M$ természetes paraméterezésű felületi görbe. A*

$$\kappa_n: \ t \in I \mapsto \kappa_n(t) := \langle\, S(\dot{c}(t)), \dot{c}(t)\,\rangle,$$

vagyis a $\kappa_n := k \circ \dot{c}$ függvényt c ***normálgörbületfüggvény****ének nevezzük.*

6.22. következmény. *Megtartva a Meusnier-tétel előfeltételeit és jelöléseit, $\kappa_n(0) = \kappa(0)\cos\theta$.* □

6.23. megjegyzés. Adjunk meg az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület egy p pontjában egy, a $\underline{v} \in T_pM$ egységvektor által reprezentált irányt! Belátható, hogy az $\mathcal{L}(\underline{N}(p), \underline{v})$ sík és M metszete a p pont elegendően kicsiny környezetében 1-dimenziós sokaság, amelynek paraméterezésével egy felületi síkgörbéhez jutunk. Ezt a parametrizált görbét a felület p pontbeli, $\underline{v}$ irányú *normálmetszet*ének hívjuk.

6.24. állítás (Meusnier-tétele, 2. verzió). *Mindazon bireguláris felületi görbék, amelyek átmennek egy felület adott pontján, s itt közös az érintőegyenesük, azonos abszolút értékű normálgörbülettel rendelkeznek az illető pontban. Nevezetesen:*

[3] *J.B.M. Meusnier* (1754 - 1793) francia fizikus, a hadsereg tábornoka.

egy $\underline{v} \in T_pM \quad (\|\underline{v}\| = 1)$ irányhoz tartozó normálgörbület abszolút értéke megegyezik a $\underline{v}$-irányú normálmetszet p-beli görbületével.

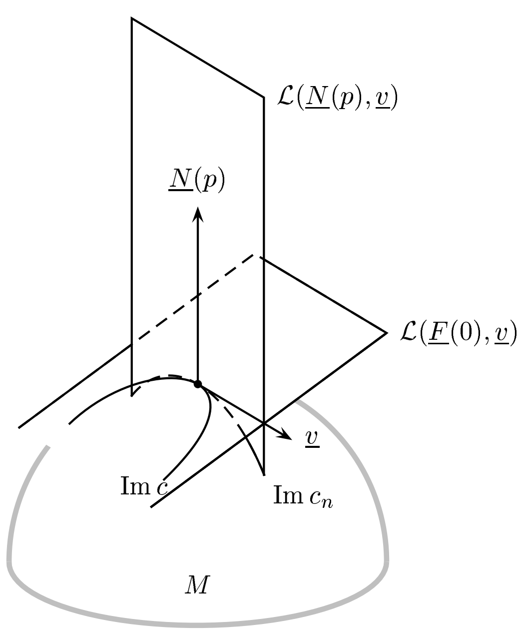
Bizonyítás. Legyen $c_n : \; I \to M$ olyan természetes paraméterezése a vizsgált normálmetszetnek, amelynél $\dot{c}_n(0) = \underline{v}$. c_n főnormálisa a 0-paraméterű pontban

$$\underline{F}(0) \overset{(\mathrm{F1})}{=} \frac{1}{\kappa(0)}\dot{\underline{T}}(0) = \frac{1}{\kappa(0)}\ddot{c}_n(0).$$

Mivel $\ddot{c}_n(0) \perp \dot{c}_n(0) = \underline{v}$, fennáll, hogy $\underline{F}(0) \perp \underline{v}$. $\operatorname{Im} c_n \subset \mathcal{L}(\underline{N}(p), \underline{v})$ folytán c_n simulósíkja (minden pontban) $\mathcal{L}(\underline{N}(p), \underline{v})$. Ugyanakkor a p-beli simulósíkot $\underline{T}(0)$ és $\underline{F}(0)$ feszíti ki; ennek alapján $\underline{F}(0) \in \mathcal{L}(\underline{N}(p), \underline{v})$ következik. Figyelembe véve, hogy $\underline{N}(p) \perp \underline{v}$, ez az $\underline{F}(0) \perp \underline{v}$ relációval együtt azt jelenti, hogy $\underline{F}(0) = \pm\underline{N}(p)$. Ilymódon

$$\begin{aligned} \kappa_n(0) &= k(\underline{v}) \overset{6.20.\text{bizonyítása}}{=} \kappa(0)\langle \, \underline{F}(0), \underline{N}(p) \, \rangle = \\ &= \kappa(0)\langle \, \pm\underline{N}(p), \underline{N}(p) \, \rangle = \pm\kappa(0), \end{aligned}$$

tehát $|\kappa_n(0)| = \kappa(0)$. □



6.25. állítás. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ (összefüggő, irányított) felület, amelynek $\underline{N}$ normálegységvektormezője. Jelentse S az $\underline{N}$-hez tartozó formaoperátort! Ha*

$c: I \to M$ természetes paraméterezésű felületi görbe, akkor c gyorsulásvektormezője fölbontható egy tangenciális és egy normális komponensre a

$$\ddot{c} = \kappa_g J(\dot{c}) + \kappa_n(\underline{N} \circ c)$$

formula szerint, ahol κ_g c geodetikus görbülete, κ_n pedig a normálgörbület-függvénye. A κ görbületfüggvény, valamint κ_g és κ_n között fennáll a

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$$

összefüggés.

Bizonyítás. 5.8. igazolása során megmutattuk, hogy $D_c\dot{c} = \ddot{c} - \langle\ \ddot{c}, \underline{N} \circ c\ \rangle \underline{N} \circ c$. Innen $\forall\ t \in I$:

$$\begin{aligned}\ddot{c}(t) &= (D_c\dot{c})(t) + \langle\ \ddot{c}(t), \underline{N}[c(t)]\ \rangle \underline{N}[c(t)] = \\ &\overset{5.8.(b),6.17.}{=} \kappa_g(t)J_{c(t)}\dot{c}(t) + \langle\ S(\dot{c}(t)), \dot{c}(t)\ \rangle \underline{N}[c(t)] = \\ &= \kappa_g(t)J_{c(t)}\dot{c}(t) + \kappa_n(t)\underline{N}[c(t)],\end{aligned}$$

amivel $\ddot{c}(t)$ kívánt fölbontását megkaptuk. Véve mindkét oldal normanégyzetét, innen a görbületek közötti összefüggéshez jutunk. □

6.26. definíció. *Tekintsünk (a szokásos feltételekkel) egy $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet, s legyen S M formaoperátora.*

(a) A

$$b: \ p \in M \mapsto b_p \in \mathcal{T}_2^0(T_pM), \\ \forall\ \underline{v}, \underline{w} \in T_pM: \ b_p(\underline{v}, \underline{w}) := \langle\ S_p(\underline{v}), \underline{w}\ \rangle$$

*leképezést a hiperfelület **2. alapformájának** mondjuk.*

*(b) (1) Egy $p \in M$ pontot **umbilikus pont**nak (**köldökpont**nak) nevezünk, ha $S_p = \lambda 1_{T_pM}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$; speciálisan az $S_p = 0$ esetben **síkpont**ról beszélünk.*

*(2) Azt mondjuk, hogy a $\underline{v}, \underline{w} \in T_pM\backslash\{0\}$ vektorok **konjugált**ak, ha $\langle\ S_p(\underline{v}), \underline{w}\ \rangle = 0$; $\underline{v} \in T_pM\backslash\{0\}$ **aszimptotikus vektor**, ha $\langle\ S_p(\underline{v}), \underline{v}\ \rangle = 0$.*

(c) Egy $c: I \to M$ görbe

***görbületi vonal**, ha valamennyi érintővektora főirányt reprezentál;*

***aszimptotavonal**, ha valamennyi érintővektora aszimptotikus vektor.*

6.27. megjegyzések.

(a) Egy $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelület g 1. illetve b 2. alapformájára a I illetve a II jelölés is használatos. További alapformák is bevezethetők a

$$\begin{aligned} III \quad &: \quad p \in M \mapsto III_p \ , \ III_p(\underline{v}, \underline{w}) := \langle\ S_p^2(\underline{v}), \underline{w}\ \rangle, \\ IV \quad &: \quad p \in M \mapsto IV_p \ , \ IV_p(\underline{v}, \underline{w}) := \langle\ S_p^3(\underline{v}), \underline{w} \rangle, \end{aligned}$$

(s így tovább) előírással. S_p önadjungáltsága folytán mindezen alapformák szimmetrikus bilineáris függvényt adnak $T_pM \times T_pM$-en ($p \in M$).

(b) Az $\mathbb{R}^n$-beli gömbfelületek pontjai umbilikus pontok (ld. 6.9.), egy hipersík minden pontja síkpont.

7. Alkalmazások $\mathbb{R}^3$-beli felületekre

7.1. megállapodás. Megtartva az 5.1.(a)-ban rögzített feltételeket, ebben a fejezetben speciálisan $\mathbb{R}^3$-beli felületekkel foglalkozunk. A vizsgált M felület egy $\underline{N} : M \to T\mathbb{R}^3$ normálegységvektor-mezőjének rögzítése után a lokális leírásra olyan $f : U \to M$ paraméterezést használunk, amelyre teljesül, hogy

$$\underline{N} \restriction f(U) = \frac{1}{\|\underline{X}_1 \times \underline{X}_2\|}\underline{X}_1 \times \underline{X}_2 \ , \ \underline{X}_i := \underline{f_i} \circ f^{-1} \quad (1 \leqq i \leqq 2).$$

Ekkor $\underline{N}$ csatolt leképezése $f(U)$ fölött

$$N \circ f^{-1} \ , \ N := \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} D_1 f \times D_2 f.$$

Mindezen megállapodásokra a továbbiakban mint az M-re vonatkozó „szokásos feltételek"-re hivatkozunk.

7.2. definíció. *Egy felületi pontot **elliptikus**nak, **hiperbolikus**nak, illetve **parabolikus**nak nevezünk aszerint, amint az illető pontban a Gauss-görbület pozitív, negatív, illetve zérus, és az utóbbi esetben nem síkpontról van szó.*

7.3. állítás. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület!*

(a) Egy $c : I \to M$ felületi görbe pontosan akkor aszimptotavonal, ha $\forall\, t \in I : \ \ddot{c}(t) \in T_{c(t)}M$.

(b) Tekintsünk egy $p \in M$ pontot!

(1) Ha $K(p) > 0$, azaz p elliptikus pont, akkor p-ben nincs aszimptotikus irány.

(2) Amennyiben $K(p) < 0$, vagyis p hiperbolikus pont, úgy a p pontban két aszimptotikus irány van, ezek szögét a főirányok felezik, mégpedig olyan θ szögben, amelyre

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{k_1(p)}{k_2(p)}$$

teljesül, ahol $k_1(p)$ és $k_2(p)$ a p-beli főgörbületek.

(3) *Tegyük fel, hogy $K(p) = 0$! Ha p síkpont, akkor minden p-beli irány aszimptotikus; amennyiben p nem síkpont – s ennélfogva parabolikus – , úgy egyetlen aszimptotikus irány van p-ben, amely egyben főirány is.*

Bizonyítás. Megadva M-en egy $\underline{N}$ normálegységvektormezőt, az $\underline{N}$-hez tartozó S formaoperátort tekintjük.

(a)
$$
\begin{aligned}
c \text{ aszimptotavonal} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall\, t \in I: \ \langle\, S(\dot{c}(t))\ ,\ \dot{c}(t)\, \rangle = 0 \\
&\overset{6.17.}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, t \in I: \ \langle\, \ddot{c}(t)\ ,\ \underline{N}[c(t)]\, \rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall\, t \in I: \ \ddot{c}(t) \in T_{c(t)}M.
\end{aligned}
$$

(b) Alkalmazzuk a 6.16-ban levezetett Euler-formulát! Eszerint ha $\underline{v} \in T_pM$ egységvektor, amelynek az 1. főiránnyal alkotott szöge θ, akkor

$$k(\underline{v}) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta.$$

(1) $K(p) = k_1(p)k_2(p) > 0$ esetén $k_1(p)$ és $k_2(p)$ egyező előjelű, s így $k(\underline{v}) = 0$ nem teljesülhet.

(2) Amennyiben $K(p) = k_1(p)k_2(p) < 0$, úgy $k_1(p)$ és $k_2(p)$ ellentétes előjelű. Az aszimptotikus irányokat meghatározó θ szögre az Euler-formula a

$$k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta = 0$$

egyenletet adja. Könnyen látható, hogy $\cos\theta = 0$ nem lehetséges, így

$$\operatorname{tg}^2\theta = -\frac{k_1(p)}{k_2(p)}$$

írható, amiből kiolvasható az állítás.

(3) Ha p *síkpont*, akkor $k_1(p) = k_2(p) = 0$, s ezért $\forall\, \underline{v} \in T_pM\backslash\{0\}: \ k(\underline{v}) = 0$, következésképpen minden $\underline{v} \in T_pM\backslash\{0\}$ vektor aszimptotikus. – Tegyük föl, hogy p *parabolikus* pont! Ekkor például $k_2(p) = 0$, $k_1(p) \neq 0$, s így $k(\underline{v}) = k_1(p)\cos^2\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \underline{v} \in T_pM \quad (\|\underline{v}\| = 1)$ főirány. □

7.4. megjegyzés. A geodetikusok, a görbületi vonalak és az aszimptotavonalak azok a nevezetes speciális felületi görbék, amelyek szerepet kaptak tárgyalásunkban. (A legnagyobb hangsúly – fontosságuknak megfelelően – a geodetikusokra esett.) Összefoglaljuk most e görbék néhány lényeges tulajdonságát.

$c: \ I \to M$	Normálgörbület	Formaoperátor	Gyorsulás
Görbületi vonal	$k \circ \dot{c} = k_1$ vagy k_2	$S(\dot{c}) \parallel \dot{c}$	
Aszimptotavonal	$k \circ \dot{c} = 0$	$S(\dot{c}) \perp \dot{c}$	$\ddot{c}(t) \in T_{c(t)}M$
Geodetikus ($\|\dot{c}\|$ konstans)			$\ddot{c}(t) \perp T_{c(t)}M$ ($t \in I$ tetszőleges)

(k_1 és k_2 tetszőleges $p \in M$ pontban az ottani főgörbületeket veszi föl; a 4. oszlopban tett észrevételek 7.3.(a)-ból , illetve az 5.8. bizonyításában levezetett $(*)$ formulából adódnak).

7.5. definíció. *Legyen S az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület formaoperátora! A felület egy p pontjához tartozó **Dupin-féle indikátrix**on a T_pM érintősík*

$$\mathcal{I}_p := \{\underline{v} \in T_pM \mid b_p(\underline{v}, \underline{v}) := \langle\ S_p(\underline{v}), \underline{v}\ \rangle = \pm 1\}$$

részhalmazát értjük[1].

7.6. állítás. *Az M felület p pontjához tartozó Dupin-féle indikátrix egyenlete a p-beli főirányok alkotta pozitív ortonormált bázisra vonatkozóan*

$$k_1(p)\xi^2 + k_2(p)\eta^2 = \pm 1 \ ,$$

ahol $k_1(p)$ és $k_2(p)$ a p-beli főgörbületek.

Bizonyítás. Legyen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ p-beli főirányok alkotta pozitív ortonormált bázisa T_pM-nek! Tetszőleges $\underline{v} \in T_pM$ érintővektor előállítható

$$\underline{v} = \rho\underline{u} \quad ; \quad \rho \in \mathbb{R} \ , \ \|\underline{u}\| = 1$$

alakban, így ha

$$\underline{v} = v^1\underline{b}_1 + v^2\underline{b}_2 \quad , \quad \underline{u} = (\cos\theta)\underline{b}_1 + (\sin\theta)\underline{b}_2 \ ,$$

akkor

$$v^1 = \rho\cos\theta \quad , \quad v^2 = \rho\sin\theta \ .$$

Ezek figyelembevételével

$$\begin{aligned}
\underline{v} \in \mathcal{I}_p :\Longleftrightarrow \pm 1 &= \langle\ S_p(\underline{v}), \underline{v}\ \rangle = \langle\ S_p(\rho\underline{u}), \rho\underline{u}\ \rangle = \\
&= \rho^2\langle\ S_p(\underline{u}), \underline{u}\ \rangle = \rho^2 k(\underline{u}) = \\
&\overset{6.16.}{=} \rho^2(k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta) = \\
&= k_1(p)(v^1)^2 + k_2(p)(v^2)^2 \ ,
\end{aligned}$$

tehát $\mathcal{I}_p$-t valóban a megadott egyenlet írja le. □

7.7. következmény. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület, eleget téve a szokásos feltételeknek. Válasszunk ki egy $p \in M$ pontot, s tekintsük a p ponthoz tartozó $\mathcal{I}_p$ Dupin-féle indikátrixot!*

*(1) p **elliptikus pont** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}_p$ **ellipszis**; ha speciálisan p umbilikus pont, de nem síkpont ($k_1(p) = k_2(p) \neq 0$), akkor az $\mathcal{I}_p$ ellipszis kör.*

[1] *C. Dupin* (1784 - 1873) francia matematikus, G. Monge egyik legkiválóbb tanítványa.

(2) *p* ***hiperbolikus pont*** $\Longleftrightarrow$ *$\mathcal{I}_p$ két, közös aszimptotaegyenesekkel rendelkező* ***hiperbola*** *uniója; az aszimptotaegyenesek irányvektorai a p-beli aszimptotikus irányokat reprezentálják.*

(3) *p* ***parabolikus pont*** $\Longleftrightarrow$ *$\mathcal{I}_p$* ***párhuzamos egyenespár****; az egyenesek közös iránya az egyetlen p-beli aszimptotikus irány.*

(4) Amennyiben p síkpont, úgy $\mathcal{I}_p = \emptyset$. □

7.8. definíció. *Azt mondjuk, hogy egy felület*

~ ***síkszerű*** *(„flat”), ha minden pontjában zérus a Gauss-görbület;*

~ ***minimálfelület****, ha minden pontjában zérus a Minkowski-görbület.*

7.9. állítás.

(a) A minimálfelületek Gauss-görbülete nempozitív függvény.

(b) Egy, a szokásos feltételeknek eleget tevő felület akkor és csak akkor minimálfelület, ha minden pontjában létezik két, egymásra merőleges aszimptotikus irány.

Bizonyítás. Tekintsük az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet!

(a) Ha M minimálfelület, akkor tetszőleges $p \in M$ pontban

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = 0\ ,\quad \text{így } k_1(p) = -k_2(p) \text{ és}$$

$$K(p) = k_1(p)k_2(p) \leqq 0.$$

(b)
$$\begin{aligned} M \text{ minimálfelület} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall\, p \in M:\ H(p) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, p \in M:\ k_1(p) = -k_2(p). \end{aligned}$$

Az utóbbi kritérium kétféleképpen teljesülhet:

(1) $k_1(p) = k_2(p) = 0$. Ekkor p síkpont, és az állítás triviális.

(2) $K(p) < 0$, azaz p hiperbolikus pont. Ebben az esetben 7.3.(b)/(2) értelmében létezik pontosan két p-beli aszimptotikus irány, amelyek szögének felére $\operatorname{tg}^2\theta = -\frac{k_1(p)}{k_2(p)} = \frac{k_2(p)}{k_2(p)} = 1$ teljesül. Így $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, a kérdéses irányok tehát valóban merőlegesek. □

7.10. definíció. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület (a szokásos feltételek mellett), legyen továbbá $f:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ (lokális) paraméterezése M-nek. Tekintsük a 2. alapforma f általi visszahúzottját, vagyis az*

$$\begin{aligned} &f^*b:\ q \in U \mapsto (f^*b)_q \in \mathcal{T}_2^0\,(T_q\mathbb{R}^2), \\ &\forall\ \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in T_q\mathbb{R}^2:\ (f^*b)(\underline{u}_1, \underline{u}_2) := b_{f(q)}(f_*(\underline{u}_1), f_*(\underline{u}_2)) \end{aligned}$$

leképezést! A

$$b_{ij}: U \to \mathbb{R}, \; q \mapsto b_{ij}(q) := (f^*b)_q(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \qquad (1 \leqq i, j \leqq 2)$$

függvényeket az f paraméterezéshez tartozó ***2. alapmennyiségek****nek nevezzük.*

7.11. megjegyzés. A 2. alapmennyiségekre Gauss a már többször is idézett munkájában (ld. pl. 3.9./(b) 4.) az

$$L := b_{11}, \; M := b_{12} = b_{21}, \; N := b_{22}$$

jelöléseket használta. Ez gyakran praktikus, M és N azonban nálunk már egyéb célokra erősen lekötött szimbólumok, úgyhogy helyettük időnként az

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

módosított Gauss-féle jelöléseket fogjuk alkalmazni.

7.12. állítás. *Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület, s ennek egy $f: U \to M$ paraméterezése a 7.1-ben rögzített feltételekkel! Az f-hez tartozó 2. alapmennyiségek a*

$$b_{ij} = -\langle D_i N, D_j f \rangle = \langle N, D_i D_j f \rangle \quad (1 \leqq i, j \leqq 2)$$

formula alapján számíthatók ki.

Bizonyítás. Legyen (e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisa! $\forall \, q \in U \,;\; i, j \in \{1, 2\}$:

$$b_{ij}(q) := b_{f(q)}(f_*(\underline{e}_i), f_*(\underline{e}_j)) \overset{6.26.}{=} \langle S_{f(q)} f_*(\underline{e}_i)), f_*(\underline{e}_j) \rangle.$$

Itt

$$\begin{aligned} S_{f(q)}(f_*(\underline{e}_i)) \quad &:= \quad -\overline{D}_{f_*(\underline{e}_i)}\underline{N} \overset{\text{II.6.2.}}{=} -\overline{D}_{(f(q), D_i f(q))}\underline{N} = \\ &\overset{1.9.(c)}{=} \quad -(f(q), (N \circ f^{-1})'(f(q))(D_i f(q))) = \\ &= \quad -(f(q), (N \circ f^{-1})'(f(q))(f'(q)(e_i))) = \\ &\overset{\text{láncszabály}}{=} \quad -(f(q), N'(q)(f^{-1} \circ f)'(q)(e_i)) = \\ &= \quad -(f(q), N'(q)(e_i)) = -(f(q), D_i N(q)) = \\ &= \quad -(D_i N(q))_{f(q)}, \end{aligned}$$

következésképpen

$$b_{ij}(q) = -\langle (D_i N(q))_{f(q)} \,,\, (D_j f(q))_{f(q)} \rangle = -\langle D_i N(q), D_j f(q) \rangle.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \langle N, D_j f \rangle \Longrightarrow 0 = D_i \langle N, D_j f \rangle = \langle D_i N, D_j f \rangle + \\ &+ \quad \langle N, D_i D_j f \rangle \Longrightarrow -\langle D_i N(q), D_j f(q) \rangle = \langle N(q), D_i D_j f(q) \rangle, \end{aligned}$$

amivel az állítás teljes egészében igazolást nyert. $\square$

7.13. lemma. *Tegyük föl, hogy V euklideszi vektortér, s legyen $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^n$ egy bázisa V-nek. Tekintsünk egy $\varphi :\ V \to V$ endomorfizmust, amelyet a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozóan az A mátrix reprezentál. Ha $B := (\langle\ \varphi(b_i), b_j\ \rangle)$, $C := (\langle\ b_i, b_j\ \rangle)$, akkor $A = {}^t(BC^{-1})$.*

Bizonyítás. Vezessük be a $(\alpha_j^i) := A$, $(\tilde{\alpha}_j^i) := {}^tA$, $(\beta_{ij}) := B$, $(\gamma_{ij}) := C$ jelöléseket! Ekkor $\tilde{\alpha}_j^i = \alpha_i^j \quad (1 \leqq i, j \leqq n)$. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\alpha_j^i)$ folytán

$$\varphi(b_i) = \alpha_i^k b_k \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

Így

$$\begin{aligned}\beta_{ik} &= \langle\ \varphi(b_i), b_k\ \rangle = \langle\ \alpha_i^j b_j, b_k\ \rangle = \alpha_i^j \gamma_{jk} = \\ &= \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j^i \gamma_{jk} = ({}^tAC)_{ik} \qquad (1 \leqq i, k \leqq n).\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $B = {}^tAC$. Itt C – lévén belső szorzat mátrixa – invertálható (v.ö. 3.2.); a C^{-1} inverz mátrixszal való szorzás, majd transzponálás után a megadott összefüggéshez jutunk. □

7.14. következmény. *Tekintsük az $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, s ennek egy $f :\ U \to M$ paraméterezését, a szokásos feltételek mellett. Legyen $q \in U$ tetszőleges, $p := f(q)$. Ha $(g_{ij}(q))$ és $(b_{ij}(q))$ az f-hez tartozó 1. illetve 2. alapmennyiségek mátrixa a q pontban, $(g^{ij}(q)) := (g_{ij}(q))^{-1}$, akkor az S_p formaoperátor mátrixa az*

$$(\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q)) = ((D_1 f(q))_p, (D_2 f(q))_p)$$

bázisra vonatkozóan

$$\begin{aligned}(g^{ij}(q))(b_{ij}(q)) &= \left[\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right](q) \\ &= \left[\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n\end{pmatrix}\right](q).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előrebocsátott lemmában tett észrevételt a T_pM érintősík $\mathcal{B} := (\underline{b}_1, \underline{b}_2) = (\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q))$ bázisára és az $S_p \in \operatorname{End} T_pM$ endomorfizmusra! Most

$$\begin{aligned}B &:= (\langle\ S_p(\underline{b}_i), \underline{b}_j\ \rangle) = (\langle\ S_p(\underline{f}_i(q)), \underline{f}_j(q)\ \rangle) = (b_{ij}(q)), \\ C &:= (\langle\ \underline{b}_i, \underline{b}_j\ \rangle) = (g_{ij}(q)),\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}A &:= M_{\mathcal{B}}(S_p) = {}^t(BC^{-1}) = {}^t((b_{ij}(q))(g^{ij}(q))) = \\ &= {}^t(g^{ij}(q))^t(b_{ij}(q)) = (g^{ij}(q))(b_{ij}(q)),\end{aligned}$$

fölhasználva az utolsó lépésben, hogy $(g^{ij}(q))$ és $(b_{ij}(q))$ egyaránt szimmetrikus mátrix. A további átalakítás az inverz mátrix kiszámítására vonatkozó jól ismert formula alkalmazásával végezhető el. □

7.15. következmény. *Megtartva 7.14. feltételeit és jelöléseit, az M felület $p = f(q)$ pontjában*

$\sim$ *a Gauss-görbület* $K(p) = \dfrac{\det(b_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))} = \dfrac{\ell n - m^2}{EG - F^2}(q)$;

$\sim$ *a Minkowski-görbület* $H(p) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(q)b_{ji}(q) = \dfrac{En - 2Fm + G\ell}{2(EG - F^2)}(q)$. $\square$

7.16. állítás. *Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^3$ felületet, s adjuk meg ennek egy $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ paraméterezését a szokásos feltételekkel! Legyen $p = f(q) \in M$ tetszőleges! – Egy*

$$\underline{v} = v^1 \underline{f}_1(q) + v^2 \underline{f}_2(q) = v^1 (D_1 f(q))_p + v^2 (D_2 f(q))_p \in T_pM$$

vektor akkor és csak akkor reprezentál főirányt, ha

$$\begin{vmatrix} (v^2)^2 & -v^1v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11}(q) & g_{12}(q) & g_{22}(q) \\ b_{11}(q) & b_{12}(q) & b_{22}(q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (v^2)^2 & -v^1v^2 & (v^1)^2 \\ E(q) & F(q) & G(q) \\ \ell(q) & m(q) & n(q) \end{vmatrix} = 0\ .$$

Bizonyítás. Mivel irányt keresünk, egy nemzérus skalárszorzó fölött szabadon rendelkezünk. Az általánosság sérelme nélkül föltehetjük ezért, hogy

$$\frac{1}{\det(g_{ij}(q))} = \frac{1}{(EG - F^2)(q)} = 1.$$

Az írásmunka egyszerűsítése végett most következő számolásainkban az 1. és 2. alapmennyiségek argumentumában q feltüntetésétől eltekintünk. A p-beli főirányok S_p sajátvektorai, így a mondottak figyelembevételével

$$\begin{aligned}
&\underline{v} = v^i \underline{f}_i(q) \text{ főirányt reprezentál} \\
&\overset{7.14.}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} G\ell - Fm & Gm - Fn \\ -F\ell + Em & -Fm + En \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} (G\ell - Fm)v^1 + (Gm - Fn)v^2 = \lambda v^1 \\ (-F\ell + Em)v^1 + (-Fm + En)v^2 = \lambda v^2. \end{array} \right. \qquad (*)
\end{aligned}$$

$v^1 = 0$ vagy $v^2 = 0$ esetén $(*)$ közvetlenül látható módon ekvivalens az igazolandó összefüggéssel. – Tegyük föl, hogy $v^1 \neq 0$ és $v^2 \neq 0$! $(*)$ első egyenletét v^2 -vel, a másodikat v^1-gyel szorozva, a baloldalak összehasonlítása és alkalmas rendezés után azt kapjuk, hogy

$$(Fn - Gm)\left(\frac{v^2}{v^1}\right)^2 + (En - G\ell)\frac{v^2}{v^1} + (Em - F\ell) = 0,$$

azaz hogy

$$\left(\frac{v^2}{v^1}\right)^2 \begin{vmatrix} F & G \\ m & n \end{vmatrix} + \frac{v^2}{v^1} \begin{vmatrix} E & G \\ \ell & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E & F \\ \ell & m \end{vmatrix} = 0,$$

ami átírható a

$$\begin{vmatrix} (\frac{v^2}{v^1})^2 & -\frac{v^2}{v^1} & 1 \\ E & F & G \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0$$

alakba. Innen $(v^1)^2$-tel való szorzás után a kívánt összefüggéshez jutunk. □

7.17. következmény. *Megtartva az eddigi feltételeket és jelöléseket, egy $c = f \circ (c^1, c^2) : \ I \to M$ felületi görbe pontosan akkor görbületi vonal, ha eleget tesz a*

$$\begin{vmatrix} [(c^2)']^2 & -2c^{1\prime}c^{2\prime} & [(c^1)']^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

differenciálegyenletnek. □

7.18. megjegyzés. Ha már rendelkezésünkre áll a p-beli formaoperátor mátrixa T_pM egy bázisára vonatkozóan, akkor a p-beli görbületi adatok (főgörbületek, főirányok, Gauss- és Minkowski-görbület) meghatározása a sajátértékek és sajátvektorok meghatározására vonatkozó, a lineáris algebrából jól ismert eljárásokkal történhet. A probléma specialitása azonban a nyert eredmények alapján lehetővé teszi a standard módszerek kétféle módosítását is.

1. eljárás.

1. lépés. A 7.16-ban levezetett

$$\begin{vmatrix} (v^2)^2 & -v^1v^2 & (v^1)^2 \\ g_{11}(q) & g_{12}(q) & g_{22}(q) \\ b_{11}(q) & b_{12}(q) & b_{22}(q) \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásával meghatározzuk a főirányok egy-egy reprezentánsát; legyenek ezek $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$.

2. lépés. A főirányok ismeretében a főgörbületeket a

$$k_i(p) = \frac{\langle\ S_p(\underline{v}_i)\ ,\ \underline{v}_i\ \rangle}{\langle\ \underline{v}_i, \underline{v}_i\ \rangle} \qquad (1 \leqq i \leqq 2)$$

formula alapján kapjuk. (Ügyeljünk arra, hogy a belső szorzatok kiszámításakor annak az $(\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q))$ bázisra vonatkozó mátrixa – azaz éppen a $(g_{ij}(q))$ mátrix – használandó!)

3. lépés. $k_1(p)$ és $k_2(p)$ birtokában a Gauss- és a Minkowski-görbület közvetlenül nyerhető: $K(p) = k_1(p)k_2(p)\ ,\ H(p) = \frac{1}{2}[k_1(p) + k_2(p)]$.

2. eljárás.

1. lépés. A p-beli Gauss- és Minkowski-görbületet számítjuk ki a 7.15-ben mondottak szerint, azaz a

$$K(p) = \frac{\det(b_{ij}(q))}{\det(g_{ij}(q))} \text{ és a } H(p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}(q)b_{ji}(q)$$

formula segítségével.

2. lépés. Meghatározzuk a főgörbületeket. Ezek most a

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$$

egyenlet gyökei, ugyanis a lineáris algebra egyik jól ismert eredménye szerint ha V n-dimenziós vektortér és $\varphi \in \operatorname{End} V$, akkor φ karakterisztikus polinomjában a főegyüttható, az $(n-1)$-edfokú tag együtthatója és a konstans tag rendre $(-1)^n$, $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}\varphi$ és $\det\varphi$.

3. lépés A $k_i(p)$ főgörbületek (S_p sajátértékei) ismeretében a főirányok (S_p sajátvektorai) a lineáris algebrából ismert módon nyerhetők az

$$\left(M(S_p) - k_i(p)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix} = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq 2)$$

homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásával[2].

7.19. példák.

(a) ***Egyenes körhenger*** (V.ö. II.5.8.(d).) $M \subset \mathbb{R}^3$, egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$ $(r \in \mathbb{R}^+)$; az

$$f :]\,0, 2\pi\,[\, \times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \ (u, v) \mapsto (r\cos u, r\sin u, v)$$

leképezés lokális paraméterezése M-nek. Legyen $q := (u, v) \in \,]\,0, 2\pi\,[\, \times\mathbb{R}$ tetszőleges, $p := f(q)$.

(1)
$$\begin{aligned} D_1f(q) &= (-r\sin u, r\cos u, 0)\ ,\ D_2f(q) = (0,0,1),\\ D_1D_1f(q) &= (-r\cos u, -r\sin u, 0)\ ,\ D_2D_1f(q) = (0,0,0),\\ D_2D_2f(q) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

(2) A q-beli 1. alapmennyiségek mátrixa és ennek inverze

$$(g_{ij}(q)) = \begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ,\ \text{ill. } (g^{ij}(q)) = \begin{pmatrix}\frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

[2] $M(S_p)$ a formaoperátor mátrixa T_pM alapulvett bázisára vonatkozóan.

(3) A normálegységvektormező által p-ben fölvett vektor

$$\begin{aligned}\underline{N}(p) &= N(q)_{f(q)} = \left(\frac{1}{\|D_1 f(q) \times D_2 f(q)\|} D_1 f(q) \times D_2 f(q)\right)_{f(q)} = \\ &= (\cos u, \sin u, 0)_p.\end{aligned}$$

(4) A q-beli 2. alapmennyiségek mátrixa

$$(b_{ij}(q)) \overset{7.12.}{=} (\langle\ D_i D_j f(q), N(q)\ \rangle) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) A p-beli formaoperátor mátrixa

$$M_{(\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q))} S_p \overset{7.14.}{=} (g^{ij}(q))(b_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így a p pontban

$\sim$ a Gauss-görbület $K(p) = \det S_p = 0$,
$\sim$ a Minkowski-görbület $H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p = -\frac{1}{2r}$.

(6) A 7.18-ban leírt 2. eljárást követve, a p-beli főgörbületek a

$$\lambda^2 + \frac{1}{r}\lambda = 0$$

egyenlet gyökei, ahonnan

$$k_1(p) = 0\ ,\ \ k_2(p) = -\frac{1}{r}.$$

(7) *Főirányok*

(i) $k_1(p) = 0.$ $$\begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v^1 = 0;$$

$$\underline{v}_1 = \underline{f}_2(q) = (0,0,1)_{f(q)}.$$

(ii) $k_2(p) = -\frac{1}{r}.$ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow v^2 = 0;$$

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{r}\underline{f}_1(q) = (-\sin u, \cos u, 0)_{f(q)}$$

Ez azt jelenti, hogy a p-beli normálgörbületfüggvény abszolút értéke minimumát a p-re illeszkedő alkotóegyenes, maximumát pedig a p-n átmenő keresztmetszetkör p-beli érintőjének irányában veszi föl. Az előbbi irányban a henger „síkszerű”, az utóbbi irányban „gömbszerű” viselkedést mutat (v.ö. 6.9.).

(b) ***Enneper-féle minimálfelület***

$$f: (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u,v) := (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2) \in \mathbb{R}^3 ;$$

$$M := \operatorname{Im} f.$$

Válasszunk egy tetszőleges $q \in \mathbb{R}^2$ pontot, s legyen $p := f(q)$.

(1) $D_1 f(q) = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$, $D_2 f(q) = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$,

$$D_1 D_1 f(q) = (-2u, 2v, 2) , \ D_2 D_1 f(q) = (2v, 2u, 0),$$
$$D_2 D_2 f(q) = (2u, -2v, -2).$$

(2) A q-beli 1. alapmennyiségek mátrixa és ennek inverze

$$(g_{ij}(q)) = (1 + u^2 + v^2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

illetve

$$(g^{ij}(q)) = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)
$$\begin{aligned} N(q) &= \frac{1}{\|D_1 f(q) \times D_2 f(q)\|} D_1 f(q) \times D_2 f(q) = \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) A q-beli 2. alapmennyiségek mátrixa $(b_{ij}(q)) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5) A p-beli formaoperátor mátrixa

$$M_{(\underline{f}_1(q), \underline{f}_2(q))} S_p = \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\sim$ $K(p) := \det S_p = \frac{-4}{(u^2+v^2+1)^4}$,

$\sim$ $H(p) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p = 0$ – így M valóban minimálfelület.

(6) *Főgörbületek.* $H(p) = 0$ folytán $k_1(p) = -k_2(p)$, így $-K(p) = [k_1(p)]^2$, következésképpen

$$k_1(p) = \frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \ , \ k_2(p) = -\frac{2}{(u^2 + v^2 + 1)^2}.$$

(7) *Főirányok.* Az

$$(M(S_p) - k_i(p)I)X = 0 \quad (1 \leqq i \leqq 2)$$

homogén lineáris egyenletrendszereket megoldva a T_pM érintősík főirányok alkotta

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{1+u^2+v^2}\underline{f}_1(q)\ ,\ \underline{v}_2 = \frac{1}{1+u^2+v^2}\underline{f}_2(q)$$

ortonormált bázisához jutunk.

(c) Tekintsük a II.5.8.(e)-ben leírt ***forgástórusz***t, s ennek

$$f:\ (u,v)\in\ ]\,0,2\pi\,[\ \times\ ]0,2\pi\,[\ \mapsto f(u,v) :=$$
$$:= ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

lokális paraméterezését! Most is alkalmazva a $q := (u,v)\ ,\ p := f(q)$ rövidítést, kapjuk:

(1)
$$\begin{aligned}
D_1 f(q) &= (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u),\\
D_2 f(q) &= (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0),\\
D_1 D_1 f(q) &= (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u),\\
D_2 D_1 f(q) &= (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0),\\
D_2 D_2 f(q) &= (-(R + r\cos u)\cos v, -(R + r\cos u)\sin v, 0).
\end{aligned}$$

(2) A q-beli 1. alapmennyiségek mátrixa és ennek inverze

$$(g_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix},$$

illetve

$$(g^{ij}(q)) = \frac{1}{r^2(R + r\cos u)^2}\begin{pmatrix} (R + r\cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

(3) $N(q) = (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$.

(4) A q-beli 2. alapmennyiségek mátrixa $(b_{ij}(q)) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$.

(5) A p-beli formaoperátor mátrixa

$$M_{(\underline{f}_1(q),\underline{f}_2(q))}S_p = \frac{1}{r(R + r\cos u)}\begin{pmatrix} R + r\cos u & 0 \\ 0 & r\cos u \end{pmatrix}.$$

∼ A p-beli *Gauss-görbület*

$$K(p) = \det S_p = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}\begin{cases} > 0 & ,\ \text{ha } u \in\,]0, \frac{\pi}{2}[\, \cup\,]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\ ; \\ = 0 & ,\ \text{ha } u = \frac{\pi}{2}, \text{ vagy } u = \frac{3\pi}{2}; \\ < 0 & ,\ \text{ha } u \in\,]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\ . \end{cases}$$

∼ A p-beli *Minkowski-görbület* $H_p = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr} S_p = \dfrac{R + 2r\cos u}{2r(R + r\cos u)}$.

(6) *Főgörbületek.* A

$$\lambda^2 - \frac{R + 2r\cos u}{r(R + r\cos u)}\lambda + \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)} = 0$$

egyenlet megoldásával

$$k_1(p) = \frac{1}{r}\ , \ k_2(p) = \frac{\cos u}{R + r\cos u}.$$

(7) *Főirányok.*

(i) A $k_1(p)$ sajátértékhez tartozó sajátegységvektor a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{R+r\cos u} - \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{r}\underline{f}_1(q).$$

(ii) A $k_2(p)$ sajátértékhez tartozó sajátegységvektor – hasonló módon –

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{R + r\cos u}\underline{f}_2(q).$$

8. A hiperfelületekre vonatkozó alapegyenletek. A theorema egregium

8.1. tétel. *Vegyük alapul az* $M \subset \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqq 2)$ *összefüggő, irányítható hiperfelületet, ellátva az indukált Riemann-struktúrával! Legyen* $\underline{N}$ *normálegységvektormező* M*-en, s tekintsük az* $\underline{N}$*-hez tartozó* S *formaoperátort. Jelentse* $\overline{D}$ *– az eddigieknek megfelelően –* $\mathbb{R}^n$ *természetes konnexióját,* D *pedig a hiperfelület Levi-Civita konnexióját!* D *görbületi tenzorát jelölje* R*! – Tetszőleges* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *vektormezők esetén érvényesek a következő összefüggések:*

I. $D_X Y = \overline{D}_X Y - \langle\ S(X), Y\ \rangle \underline{N}$ *(Gauss-formula);*

II. $R(X, Y)Z = \langle\ S(Y), Z\ \rangle S(X) - \langle\ S(X), Z\ \rangle S(Y)$
(Gauss-féle görbületi egyenlet);

III. $D_X S(Y) - D_Y S(X) - S[X, Y] = 0$ *(Codazzi-egyenlet).*

Bizonyítás.

(a) Először a Gauss-formulát vezetjük le. – A 5.2. tétel értelmében M Levi-Civita konnexióját az

$$(X, Y) \mapsto D_X Y = \overline{D}_X Y - \langle\ \overline{D}_X Y, \underline{N}\ \rangle \underline{N}$$

leképezés jelenti. Az $\langle\ Y, \underline{N}\ \rangle = 0$ összefüggésből

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad X\langle\ Y, \underline{N}\ \rangle \overset{(D5)}{=} \langle\ \overline{D}_X Y, \underline{N}\ \rangle + \langle\ Y, \overline{D}_X \underline{N}\ \rangle = \\ &\overset{6.5.,6.8.}{=} \langle\ \overline{D}_X Y, \underline{N}\ \rangle - \langle\ Y, S(X)\ \rangle; \end{aligned}$$

innen $\langle\ \overline{D}_X Y, \underline{N}\ \rangle = \langle\ S(X), Y\ \rangle$, következésképpen

$$D_X Y = \overline{D}_X Y - \langle\ S(X), Y\ \rangle \underline{N}.$$

Ezzel I. igazolást nyert.

(b) II. és III. leszármaztatása céljából abból indulunk ki, hogy $\mathbb{R}^n$ természetes konnexiójának a görbületi tenzora eltűnik (1.9.(b)), s így – speciálisan –

$$\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) :\ \overline{D}_X \overline{D}_Y Z - \overline{D}_Y \overline{D}_X Z - \overline{D}_{[X,Y]} Z = 0.$$

Az itt szereplő $\overline{D}$ szerinti kovariáns deriváltakat a Gauss-formula ismételt alkalmazásával a Levi-Civita konnexió szerinti kovariáns deriváltakkal váltjuk ki, majd az adódó kifejezést úgy alakítjuk, hogy egy tangenciális és egy normális tag összegeként álljon elő. Ezeknek a tagoknak külön-külön el kell tűnniük, így a Gauss-féle görbületi egyenlethez, valamint a Codazzi-egyenlethez jutunk. Tehát:

(i) $\overline{D}_Y Z \overset{\text{I.}}{=} D_Y Z + \langle\, S(Y), Z\,\rangle \underline{N}$, így

$$\begin{aligned}
\overline{D}_X \overline{D}_Y Z &\overset{(D2)}{=} \overline{D}_X(D_Y Z) + \overline{D}_X \langle\, S(Y), Z\,\rangle \underline{N} \overset{\text{I.},(D3)}{=} \\
&= D_X D_Y Z + \langle\, S(X), D_Y Z\,\rangle \underline{N} + (X\langle\, S(Y), Z\,\rangle)\underline{N} + \\
&+ \langle\, S(Y), Z\,\rangle \overline{D}_X \underline{N} \overset{(D5)\ ,\ \overline{D}_X\underline{N} = -S(X)}{=} \\
&= D_X D_Y Z + \langle\, S(X), D_Y Z\,\rangle \underline{N} + \langle\, D_X S(Y), Z\,\rangle \underline{N} + \\
&+ \langle\, S(Y), D_X Z\,\rangle \underline{N} - \langle\, S(Y), Z\,\rangle S(X) = \\
&= D_X D_Y Z - \langle\, S(Y), Z\,\rangle S(X) + \langle\, D_X S(Y), Z\,\rangle \underline{N} + \\
&+ (\langle\, S(X), D_Y Z\,\rangle + \langle\, S(Y), D_X Z\,\rangle)\underline{N}.
\end{aligned}$$

(ii) A nyert összefüggésből X és Y fölcserélésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\overline{D}_Y \overline{D}_X Z &= D_Y D_X Z - \langle\, S(X), Z\,\rangle S(Y) + \langle\, D_Y S(X), Z\,\rangle \underline{N} + \\
&+ (\langle\, S(Y), D_X Z\,\rangle + \langle\, S(X), D_Y Z\,\rangle)\underline{N}.
\end{aligned}$$

(iii) $\overline{D}_{[X,Y]} Z \overset{\text{I.}}{=} D_{[X,Y]} Z + \langle\, S[X,Y], Z\,\rangle \underline{N}$.

Ezek alapján a

$$\begin{aligned}
0 &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z + \langle S(X), Z\rangle S(Y) - \langle S(Y), Z\rangle S(X) + \\
&+ \langle\, D_X S(Y) - D_Y S(X) - S[X,Y], Z\,\rangle \underline{N} = \\
&= (R(X,Y)Z - \langle\, S(Y), Z\,\rangle S(X) + \langle\, S(X), Z\,\rangle S(Y)) + \\
&+ \langle\, D_X S(Y) - D_Y S(X) - S[X,Y], Z\,\rangle \underline{N}
\end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Itt a zárójelbe tett kifejezésnek – a tangenciális tagnak –, valamint a normális tagnak egyaránt el kell tűnnie. A tangenciális tag eltűnése közvetlenül a Gauss-féle görbületi egyenlethez vezet, míg a normális összetevő eltűnéséből Z tetszőlegessége folytán a Codazzi-egyenlet adódik. □

8.2. megjegyzés. A hiperfelületek elméletének alapegyenletei a II. és a III. egyenlet. Ezeket *integrabilitási feltételek*ként, mégpedig a Gauss-, illetve a Codazzi-féle integrabilitási feltételként is szokás említeni. Az „integrabilitási feltétel” elnevezés azzal kapcsolatos, hogy az előírt 1. és 2. alapmennyiségekkel rendelkező hiperfelületek létezésének problémája (v.ö. I.6.23.!) olyan parciális differenciálegyenlet-rendszerhez vezet, amelynek integrálhatósági feltétele éppen II. és III. teljesülése.

8.3. tétel (Theorema egregium).
Legyen adva az $M \subset \mathbb{R}^3$ felület a szokásos feltételekkel! Válasszunk egy $p \in M$ pontot, s legyen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ ortonormált bázisa a T_pM érintősíknak! – A felület p-beli Gauss-görbületét megadja a

$$K(p) = \langle\ R(\underline{b}_1, \underline{b}_2)\underline{b}_2, \underline{b}_1\ \rangle$$

formula, ahol R a Levi-Civita konnexió görbületi tenzora.

Bizonyítás. Jegyezzük meg először is, hogy a II.8.23-ban mondottak alapján értelmesen szólhatunk az R görbületi tenzor individuális érintővektorokon fölvett értékéről. Így, alkalmazva a Gauss-féle görbületi egyenletet,

$$\begin{aligned}
\langle\ R(\underline{b}_1, \underline{b}_2)\underline{b}_2, \underline{b}_1\ \rangle &= \langle\ \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_2\ \rangle S(\underline{b}_1) - \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_2\ \rangle S(\underline{b}_2), \underline{b}_1\ \rangle = \\
&= \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_2\ \rangle\langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_1\ \rangle - \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_2\ \rangle\langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_1\ \rangle = \\
&= \begin{vmatrix} \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_1\ \rangle & \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_1\ \rangle \\ \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_2\ \rangle & \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_2\ \rangle \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

írható. Másrészt – mivel a $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ bázis ortonormált – , a Fourier-előállítás az $S(\underline{b}_i)\quad (1 \leqq i \leqq 2)$ képvektorok

$$S(\underline{b}_1) = \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_1\ \rangle\underline{b}_1 + \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_2\ \rangle\underline{b}_2,$$

illetve

$$S(\underline{b}_2) = \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_1\ \rangle\underline{b}_1 + \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_2\ \rangle\underline{b}_2$$

kifejezéséhez vezet. Innen kiolvasható, hogy S_p mátrixa a $(\underline{b}_1, \underline{b}_2)$ bázisra vonatkozóan éppen az

$$\begin{pmatrix} \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_1\ \rangle & \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_1\ \rangle \\ \langle\ S(\underline{b}_1), \underline{b}_2\ \rangle & \langle\ S(\underline{b}_2), \underline{b}_2\ \rangle \end{pmatrix}$$

mátrix. Összevetve ezt az $\langle\ R(\underline{b}_1, \underline{b}_2)\underline{b}_2, \underline{b}_1\ \rangle$-re nyert kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\langle\ R(\underline{b}_1, \underline{b}_2)\underline{b}_2, \underline{b}_1\ \rangle = \det S_p = K(p).$$

□

8.4. megjegyzések.

(a) A „theorema egregium” latin kifejezés, azt jelenti, hogy *figyelemre méltó* vagy *kimagasló* tétel; a jelző magától a felfedezőtől, Gausstól származik. – Következő észrevételeink magyarázattal szolgálnak arra is, hogy miért emelte ki a „matematikusok fejedelme” ilyen megkülönböztető módon ezt az eredményt mély felismerésekben egyébként sem szűkölködő életművéből.

(b) (***Belső geometria.***) Tekintsünk egy $M \subset \mathbb{R}^n$ hiperfelületet a szokásos feltételekkel. M mindazon adatait, amelyek kifejezhetők az indukált Riemann-struktúra – azaz az 1. alapforma – , illetve paraméterezés rögzítése után az

1. alapmennyiségek (és azok deriváltjai) segítségével, a hiperfelület *belső geometriájához* tartozó vagy *intrinsic adatok*nak mondjuk. Ilyen adat az M-beli görbék ívhossza (3.9./(b) 3.), a k-dimenziós térfogat (3.10.) és a Levi-Civita konnexió (v.ö. 5.3.(b)). Nyilvánvalóan a belső geometriához tartozik ennélfogva minden olyan további konstrukció is, amely a Levi-Civita konnexióból származtatható – így például a görbületi tenzor. Nem tartozik a belső geometriához (egyebek mellett) a formaoperátor és a normálgörbület. Mindezek fényében válik érzékelhetővé a theorema egregiumban rejlő mélyebb mondanivaló.

8.5. következmény. *A Gauss-görbület intrinsic, tehát a belső geometriához tartozó adata a felületeknek.* □

8.6. lemma. *Tegyük föl, hogy φ sima leképezése az M összefüggő sokaságnak az $\widetilde{M}$ sokaságba. Ha $\forall\ p \in M :\ (\varphi_*)_p = 0$, akkor a φ leképezés konstans.*

Bizonyítás. Legyen $q \in \operatorname{Im}\varphi$ tetszőleges. $\{q\}$, mint az $\widetilde{M}$ Hausdorff-tér egyelemű részhalmaza, zárt halmaz. A φ leképezés – simaságából adódóan – folytonos, ezért $\{\varphi^{-1}(q)\} \subset M$ ugyancsak zárt halmaz. Ha belátjuk, hogy $\{\varphi^{-1}(q)\}$ egyben nyílt halmaz is, akkor készen vagyunk, hiszen így M összefüggősége miatt $\varphi^{-1}(q) = M$ következik, ami azt jelenti, hogy φ $\{q\}$ értékkészletű konstans leképezés. – Legyen $p \in \varphi^{-1}(q)$ tetszőleges, s válasszunk a p pont körül egy $(U, (x^1, \dots, x^m))$, a q pont körül pedig egy $(V, (y^1, \dots, y^n))$ térképet úgy, hogy $\varphi(U) \subset V$ teljesüljön. Ekkor $\forall\ a \in U\ ,\ j \in \{1, \dots, m\}$:

$$0 = (\varphi_*)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a \overset{\text{II.7.15.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(a) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(a)},$$

következésképpen U fölött

$$\frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j} = 0\ ; \qquad 1 \leqq i \leqq n\ ,\ 1 \leqq j \leqq m$$

érvényes. Ez azt jelenti, hogy az $y^i \circ \varphi \quad (1 \leqq i \leqq n)$ függvények U fölött konstans függvények. Ebből $\varphi(U) = \{q\}$ és $U \subset \{\varphi^{-1}(q)\}$ adódik, $\{\varphi^{-1}(q)\}$ tehát minden egyes p pontjának környezete, s így – II.3.3. figyelembevételével – valóban nyílt halmaz. □

8.7. következmény. *Ha M összefüggő sokaság, $f \in C^\infty(M)$ és $df = 0$, akkor f konstans függvény.*

Bizonyítás. Legyen $p \in M\ ,\ v \in T_pM$ tetszőleges.

$$(f_*)_p(v)(1_{\mathbb{R}}) \overset{\text{II.7.14.}}{:=} v(1_{\mathbb{R}} \circ f) = v(f) \overset{\text{II.7.13.}}{=} (df)_p(v) \overset{\text{feltétel}}{=} 0$$
$$\Longrightarrow \forall\ p \in M :\ (f_*)_p = 0 \overset{8.6.}{\Longrightarrow} f \text{ konstans.}$$

□

8.8. tétel. *Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő hiperfelület (eleget téve a további, szokásos feltételeknek). Ha M valamennyi pontja umbilikus pont, akkor M egy hipersíknak, vagy egy $(n-1)$-dimenziós gömbnek nyílt részhalmaza.*

Bizonyítás. Mivel M minden pontja umbilikus pont, a hiperfelület formaoperátora (a 6.26./(b)(1) definíció alapján)

$$S = f\delta \quad (f \in C^\infty(M)\ ,\ \delta \in \mathcal{T}_1^1(M) \text{ a Kronecker-delta tenzor })$$

alakú. – Válasszunk egy tetszőleges $p \in M$ pontot és $v_p \in T_pM$ érintővektort! Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$ olyan vektormező, hogy $X(p) = v_p$ (X létezését II.8.14. garantálja). Tekintsünk egy további $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, amelyre teljesül, hogy $Y(p)$ és $X(p)$ lineárisan független. A Codazzi-egyenlet szerint

$$D_X S(Y) - D_Y S(X) - S[X,Y] = 0.$$

Esetünkben $S(X) = (f\delta)(X) = f\delta(X) = fX$, s ugyanígy $S(Y) = fY$, $S[X,Y] = f[X,Y]$; következésképpen

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ D_X fY - D_Y fX - f[X,Y] \overset{(D3)}{=} f(D_X Y - D_Y X) + (Xf)Y - (Yf)X - \\ &- \ f[X,Y] \overset{(D4)}{=} f[X,Y] - f[X,Y] + (Xf)Y - (Yf)X = (Xf)Y - (Yf)X. \end{aligned}$$

Így a p pontban

$$[X_p(f)]Y_p = [Y_p(f)]X_p, \quad \text{azaz} \quad [v_p(f)]Y_p = [Y_p(f)]v_p.$$

Mivel v_p és Y_p lineárisan független, innen $v_p(f) = 0$ következik. $v_p \in T_pM$ tetszőlegessége folytán ez azt jelenti, hogy $df = 0$, így – 8.7. miatt – f konstans; mondjuk $\operatorname{Im} f = \{\lambda\} \subset \mathbb{R}$. Ekkor

$$S = \lambda\delta$$

írható.

(i) Amennyiben $\lambda = 0$, úgy

$$\forall\, \underline{v} \in T_pM :\ \overline{D}_{\underline{v}}\underline{N} = -S_p(\underline{v}) = 0 \Longrightarrow \underline{N} \textit{ konstans vektormező } \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M \ (\underline{N} \textit{ normálvektorú }) \textit{ sík nyílt részhalmaza.}$$

(ii) Foglalkozzunk a $\lambda \neq 0$ esettel! Föltehetjük ekkor, hogy $\lambda > 0$, ez ugyanis – szükség esetén $\underline{N}$-et $-\underline{N}$-nel cserélve ki – mindig elérhető. Legyen $\rho := \frac{1}{\lambda}$. Kiválasztva egy tetszőleges $p \in M$ pontot, adjunk meg egy olyan $f : U \to M$ paraméterezést p körül, ahol $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ összefüggő nyílt halmaz, $p = f(q)$. Tekintsük a

$$h := f + \rho N\ ,\ N := \frac{1}{\|D_1 f \times D_2 f\|} D_1 f \times D_2 f$$

leképezést! Ez nyilvánvalóan sima. Ha $(e_i)_{i=1}^{n-1}$ $\mathbb{R}^{n-1}$ kanonikus bázisa, akkor $\forall\ i \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$(h_*)_q(e_i)_q = (f_*)_q(e_i)_q + \rho(N_*)_q(e_i)_q = \underline{f}_i(q) + \rho(D_i N(q))_p.$$

Itt a 7.12. bizonyításában elvégzett számolás szerint

$$((D_i N)(q))_p = -S_p(\underline{f}_i(q)),$$

tehát

$$(h_*)_q(e_i)_q = \underline{f}_i(q) - \rho S_p(\underline{f}_i(q)) = \underline{f}_i(q) - \frac{1}{\lambda}\lambda \underline{f}_i(q) = 0.$$

Ebből következik, hogy $\forall\ q \in U :\ (h_*)_q = 0$; így 8.6. értelmében $h :\ U \to \mathbb{R}^n$ konstans leképezés. Megadható ezért olyan $a \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy

$$\forall\ q \in U :\ \parallel f(q) - a \parallel = \rho;$$

$\operatorname{Im} f$ tehát ρ sugarú, a középpontú gömbre illeszkedik. – Állításunk ezzel lokálisan – a kiválasztott p pont egy környezetében – igazolást nyert. A kapott lokális eredményből azonban M összefüggőségének figyelembevételével egyszerű folytonossági érveléssel következik, hogy a nyert gömb M valamennyi pontját tartalmazza. $\square$

8.9. megjegyzés. Könnyen átgondolható, hogy ha 8.8-ban M ráadásul zárt halmaz, akkor M $\mathbb{R}^n$-nek hipersíkja vagy $(n-1)$-dimenziós gömbje.

9. Konstans görbületű Riemann-sokaságok

9.1. definíció és állítás. *Legyen (M,g) pszeudo-Riemann sokaság, s jelentse R a Levi-Civita konnexió görbületi tenzorát. – Az*

$$\mathcal{R}: \ (X,Y,Z,U) \in [\mathfrak{X}(M)]^4 \mapsto \mathcal{R}(X,Y,Z,U) := g(R(X,Y)Z,U) \in C^\infty(M)$$

*leképezés negyedrendű kovariáns tenzor M-en, amelyet a sokaság **Riemann-féle görbületi tenzor**ának nevezünk. Ez rendelkezik az alábbi szimmetriatulajdonságokkal: $\forall\ X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M)$:*

(1) $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = -\mathcal{R}(Y,X,Z,U)$ *(ferdeszimmetria az 1. és 2. változóban);*

(2) $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = -\mathcal{R}(X,Y,U,Z)$ *(ferdeszimmetria a 3. és 4. változóban);*

(3) $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) + \mathcal{R}(Y,Z,X,U) + \mathcal{R}(Z,X,Y,U) = 0$ *(1. Bianchi-azonosság);*

(4) $\mathcal{R}(X,Y,Z,U) = \mathcal{R}(Z,U,X,Y)$ *(szimmetria párok szerint).*

A párok szerinti szimmetria pusztán az (1)–(3) szimmetriatulajdonságok következménye.

Bizonyítás. $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$ folytán $\mathcal{R} \in \mathcal{T}_4^0(M)$ teljesülése közvetlenül adódik az értelmezésből. Az (1) és a (3) tulajdonság ugyancsak nyilvánvaló az R tenzor megfelelő tulajdonságaiból (ld. 1.3. és 1.5.). Mivel $\mathcal{R}$ tenzor, a továbbiak igazolásánál föltehetjük, hogy az X,Y,Z,U vektormezők egy térképhez tartozó koordinátavektormezők. Ekkor minden belőlük képzett Lie-zárójel zérust ad (II.8.9.), s így a görbületi tenzort definiáló formula egyszerűsödik:

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z.$$

Megállapodunk végül abban, hogy okoskodásunk során – kényelmi okokból – g helyett a $\langle\ ,\ \rangle$ jelölést használjuk.

(2) *igazolása.* Mivel rögzített $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ mellett a

$$(Z,U) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathcal{R}(X,Y,Z,U) = \langle\ R(X,Y)Z,U\ \rangle$$

leképezés $C^\infty(M)$-bilineáris, elegendő azt ellenőriznünk, hogy $\mathcal{R}(X,Y,Z,Z)=0$. Ez azonban fennáll, ugyanis a jelzett egyszerűsítő föltevés mellett

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y,Z,Z) &= \langle\, R(X,Y)Z,Z\,\rangle = \langle\, D_XD_YZ - D_YD_XZ, Z\,\rangle = \\
&= \langle\, D_XD_YZ,Z\,\rangle - \langle\, D_YD_XZ,Z\,\rangle = \\
&\overset{(D5)}{=} X\langle\, D_YZ,Z\,\rangle - \langle\, D_YZ, D_XZ\,\rangle - \\
&- Y\langle\, D_XZ,Z\,\rangle + \langle\, D_XZ,D_YZ\,\rangle = \\
&= X\langle\, D_YZ,Z\,\rangle - Y\langle D_XZ,Z\,\rangle = \\
&\overset{(D5)}{=} \frac{1}{2}X(Y\langle\, Z,Z\,\rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle\, Z,Z\,\rangle) = \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle\, Z,Z\,\rangle = 0 \qquad \text{(hiszen } [X,Y]=0).
\end{aligned}$$

(4) *igazolása.* A (3) azonosság ismételt – mégpedig négyszeri – alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y,Z,U) &+ \mathcal{R}(Y,Z,X,U)+\mathcal{R}(Z,X,Y,U)=0,\\
\mathcal{R}(Y,Z,U,X) &+ \mathcal{R}(Z,U,Y,X)+\mathcal{R}(U,Y,Z,X)=0,\\
\mathcal{R}(Z,U,X,Y) &+ \mathcal{R}(U,X,Z,Y)+\mathcal{R}(X,Z,U,Y)=0,\\
\mathcal{R}(U,X,Y,Z) &+ \mathcal{R}(X,Y,U,Z)+\mathcal{R}(Y,U,X,Z)=0.
\end{aligned}$$

Összeadva ezeket az összefüggéseket, a 3. és 4. változóban fennálló ferdeszimmetria miatt 4×2 tag, mégpedig az első két oszlopban szereplő tagok, páronként kiejtik egymást. Így az

$$\mathcal{R}(Z,X,Y,U)+\mathcal{R}(U,Y,Z,X)+\mathcal{R}(X,Z,U,Y)+\mathcal{R}(Y,U,X,Z)=0$$

relációhoz jutunk. Itt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Z,U,Y) &\overset{(1)}{=} -\mathcal{R}(Z,X,U,Y) \overset{(2)}{=} \mathcal{R}(Z,X,Y,U),\\
\mathcal{R}(U,Y,Z,X) &\overset{(1)}{=} -\mathcal{R}(Y,U,Z,X) \overset{(2)}{=} \mathcal{R}(Y,U,X,Z),
\end{aligned}$$

tehát

$$2\mathcal{R}(Z,X,Y,U)+2\mathcal{R}(U,Y,Z,X)=0.$$

Innen (1) figyelembevételével

$$\mathcal{R}(Z,X,Y,U)=\mathcal{R}(Y,U,Z,X)$$

következik, ami azt jelenti, hogy érvényes a párok szerinti szimmetria. A levezetésből kiolvasható, hogy ez kizárólag az $\mathcal{R}$ tenzor tisztán algebrai jellegű (1)–(3) tulajdonságainak következménye. □

9.2. lemma. *Tegyük föl, hogy A egységelemes gyűrű, amelyben $6a\neq 0$, ha $a\neq 0$. Legyen E A-modulus, s tekintsünk egy olyan $B: E\times E\times E\times E\to A$ 4-lineáris függvényt, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $\forall\ X,Y,Z,U\in E$:*

(1') $B(X,Y,Z,U) = -B(Y,X,Z,U)$*;*

(2') $B(X,Y,Z,U) = -B(X,Y,U,Z)$*;*

(3') $B(X,Y,Z,U) + B(Y,Z,X,U) + B(Z,X,Y,U) = 0$*.*

Ekkor a B *leképezésre teljesül, hogy*

(4') $\forall\ X,Y,Z,U \in E:\ B(X,Y,Z,U) = B(Z,U,X,Y)$*.*

Amennyiben (1')–(3') mellett fennáll még

(5) $\forall\ X,Y \in E:\ B(X,Y,Y,X) = 0$*,*

úgy $B = 0$*.*

Bizonyítás. 9.1-re tekintettel már csak azt kell megmutatnunk, hogy (1')–(3') és (5) teljesülése esetén $B = 0$.

(a) Mivel (1')–(3') $\Longrightarrow$ (4'), megállapíthatjuk, hogy speciálisan

$$\forall\ X,Y,U \in E:\ B(X,Y,X,U) = B(X,U,X,Y).$$

Kiolvasható innen, hogy rögzített $X \in E$ mellett az

$$(Y,U) \in E \times E \mapsto B(X,Y,X,U) \in A$$

függvény szimmetrikus A-bilineáris függvény.

(b) $\forall\ X,Y \in E:\ B(X,Y,X,Y) \overset{(2')}{=} -B(X,Y,Y,X) \overset{(5)}{=} 0$. Így $\forall\ X,Y,U \in E:$

$$\begin{aligned} 0 &= B(X,Y+U,X,Y+U) = B(X,Y,X,Y+U) + B(X,U,X,Y+U) = \\ &= B(X,Y,X,Y) + B(X,Y,X,U) + B(X,U,X,Y) + B(X,U,X,U) = \\ &= B(X,Y,X,U) + B(X,U,X,Y) \overset{\text{(a)}}{=} 2B(X,Y,X,U). \end{aligned}$$

Mivel az A-ra vonatkozó föltevésünk értelmében $a \neq 0$ esetén $2a \neq 0$, innen $B(X,Y,X,U) = 0$, illetve (1') figyelembevételével

$$B(Y,X,X,U) = 0 \tag{6}$$

következik.

(c) Jegyezzük még meg, hogy (1'), illetve (2') miatt $\forall\ X,Y,U \in E:$

$$B(X,X,Y,U) = 0, \tag{7}$$

$$B(Y,U,X,X) = 0. \tag{8}$$

(6), (7) és (8) együttesen azt jelenti, hogy a B függvény *alternáló*: minden olyan elemnégyesen zérust vesz föl, amelynek két szomszédos tagja megegyezik. Ebből (a gyűrűre kirótt feltétel újbóli figyelembevételével) egyszerűen adódik, hogy B *ferdeszimmetrikus*: bármely két változó fölcserélése esetén előjelet vált.

(d) A mondottak alapján $\forall\ X, Y, Z, U \in E$:

$$0 \overset{(3')}{=} B(X,Y,Z,U) + B(Y,Z,X,U) + B(Z,X,Y,U) = \overset{\text{ferdeszimmetria}}{=} 3B(X,Y,Z,U).$$

Tekintettel arra, hogy $a \in A\backslash\{0\} \Longrightarrow 3a \neq 0$, eredményünk $B = 0$ teljesülését jelenti.

□

9.3. megjegyzések.

(a) Legyen V euklideszi vektortér, $(v_i)_{i=1}^k$ egy vektorsorozata V-nek. Emlékeztetünk rá, hogy $(v_i)_{i=1}^k$ *Gram-determinánsa*

$$G(v_1, \ldots, v_k) := \begin{vmatrix} \langle\, v_1, v_1\, \rangle & \ldots & \langle\, v_1, v_k\, \rangle \\ \langle\, v_2, v_1\, \rangle & \ldots & \langle\, v_2, v_k\, \rangle \\ \vdots & & \\ \langle\, v_k, v_1\, \rangle & \ldots & \langle\, v_k, v_k\, \rangle \end{vmatrix}.$$

Ismeretes, hogy $G(v_1, \ldots, v_k) \geqq 0$, s egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $(v_i)_{i=1}^k$ lineárisan függő. Amennyiben $k = 2$ és (v_1, v_2) lineárisan független, úgy $G(v_1, v_2)$ a v_1 és v_2 által kifeszített paralelogramma területének négyzete. Triviális számolással adódik, hogy

$\sim$ $G(v_1, v_2) = G(v_2, v_1)$,

$\sim$ $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}: \ G(\lambda v_1, v_2) = \lambda^2 G(v_1, v_2)$,

$\sim$ $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}: \ G(v_1 + \lambda v_2, v_2) = G(v_1, v_2)$.

(b) Ismételten fölhívjuk a figyelmet arra, hogy II.8.23-ban bevezettük egy tenzor pontbeli értékének fogalmát, így tetszőleges $p \in M$, $v_i \in T_pM\,(1 \leqq i \leqq 4)$ esetén értelmesen szólhatunk az $R(v_1, v_2, v_3, v_4)$ valós számról. Ezzel a lehetőséggel a következőkben sűrűn fogunk élni.

9.4. állítás és definíció. *Tegyük föl, hogy M Riemann-sokaság, amelynek Riemann-féle görbületi tenzora $\mathcal{R}$. Legyen $p \in M$ egy tetszőleges pont, s tekintsünk egy $\sigma \subset T_pM$ kétdimenziós alteret. Ha (b_1, b_2) bázisa σ-nak, akkor a*

$$K(\sigma) := \frac{\mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1)}{G(b_1, b_2)}$$

*szám független a (b_1, b_2) bázis megválasztásától, csakis a σ síktól függ. Az így kapott számot a Riemann-sokaság p-pontbeli, a σ síkhoz tartozó **metszetgörbületének** nevezzük.*

Bizonyítás. Elegendő annyit ellenőrizni, hogy $K(\sigma)$ nem változik a következő elemi bázistranszformációk végrehajtásakor:

(i) $(b_1, b_2) \to (b_2, b_1),$

(ii) $(b_1, b_2) \to (\lambda b_1, b_2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}),$

(iii) $(b_1, b_2) \to (b_1 + \lambda b_2, b_2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$

ad (*i*)
$$\mathcal{R}(b_2, b_1, b_1, b_2) \overset{(1),(2)}{=} \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1);$$
$$G(b_2, b_1) \overset{9.3./(a)}{=} G(b_1, b_2).$$

ad (*ii*)
$$\mathcal{R}(\lambda b_1, b_2, b_2, \lambda b_1) = \lambda^2 \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1);$$
$$G(\lambda b_1, b_2) \overset{9.3./(a)}{=} \lambda^2 G(b_1, b_2).$$

ad (*iii*)
$$\mathcal{R}(b_1 + \lambda b_2, b_2, b_2, b_1 + \lambda b_2) = \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1 + \lambda b_2) +$$
$$+\lambda \mathcal{R}(b_2, b_2, b_2, b_1 + \lambda b_2) \overset{(1)}{=} \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1 + \lambda b_2) =$$
$$= \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1) + \lambda \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_2) \overset{(2)}{=} \mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1);$$
$$G(b_1 + \lambda b_2, b_2) \overset{9.3./(a)}{=} G(b_1, b_2).$$
□

9.5. definíció. *Tegyük föl, hogy M legalább kétdimenziós Riemann-sokaság! Tetszőleges $p \in M$ pont esetén jelölje $\mathcal{G}_2(T_pM)$ a T_pM érintőtér összes kétdimenziós altereinek halmazát!*

(a) *Ha a*

$$\sigma \in \mathcal{G}_2(T_pM) \mapsto K(\sigma) := \text{ a } \sigma \text{ síkhoz tartozó metszetgörbület}$$

*függvény konstans, akkor azt mondjuk, hogy az M Riemann-sokaság **izotrop a** p **pontban**. Amennyiben ez a tulajdonság M minden pontjában teljesül, úgy **izotrop Riemann-sokaság**ról beszélünk.*

(b) *Tegyük föl, hogy M izotrop Riemann-sokaság! M-et **konstans görbületű**nek nevezzük, ha a*

$$K : M \to \mathbb{R}, \; p \mapsto K(p) := K(\sigma) \quad (\sigma \in \mathcal{G}_2(T_pM) \text{ tetszőleges})$$

függvény konstans.

9.6. megjegyzés. Tekintettel a Gauss-görbületnek a theorema egregiumban megadott alakjára (ld. 8.3.), világos, hogy a metszetgörbület a Gauss-görbület általánosítása. Ha speciálisan M kétdimenziós Riemann-sokaság, akkor $\forall\ p \in M$: $\mathcal{G}_2(T_pM) = T_pM$, s így M automatikusan izotrop.

9.7. állítás. *Legalább 3-dimenziós Riemann sokaság esetén a metszetgörbületek egyértelműen meghatározzák a Riemann-féle görbületi tenzort.*

Bizonyítás. Legyen M n-dimenziós Riemann-sokaság; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$. Tegyük föl, hogy az $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{T}_4^0(M)$ tenzorok egyaránt rendelkeznek az (1)–(3) szimmetriatulajdonságokkal! Ekkor (4) is teljesül $\mathcal{R}_1$-re és $\mathcal{R}_2$-re, s ha tetszőleges $p \in M$ pont és $\sigma \in \mathcal{G}_2(T_pM)$ sík esetén mind $\mathcal{R}_1$, mind pedig $\mathcal{R}_2$ ugyanazt a metszetgörbületet származtatja, akkor

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M) :\ \mathcal{R}_1(X, Y, Y, X) = \mathcal{R}_2(X, Y, Y, X).$$

Legyen $B := \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$! A mondottak szerint B eleget tesz a 9.2./(1')–(3') és (5) feltételeknek; így $B = 0$, tehát $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. Ez állításunk helyességét jelenti. □

9.8. állítás. *Egy $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ Riemann-sokaság akkor és csak akkor rendelkezik k_0 konstans görbülettel, ha a Riemann-féle görbületi tenzora eleget tesz az*

$$\mathcal{R} = k_0 \widetilde{\mathcal{R}}$$

összefüggésnek, ahol $\widetilde{\mathcal{R}}$ az

$$(X, Y, Z, U) \in [\mathfrak{X}(M)]^4 \mapsto \widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z, U) := \langle\ X, U\ \rangle\langle\ Y, Z\ \rangle - \langle\ Y, U\ \rangle\langle\ X, Z\ \rangle$$

leképezés.

Bizonyítás.

(a) Kiolvasható az értelmezésből, hogy $\widetilde{\mathcal{R}} \in \mathcal{T}_4^0(M)$. Ez a tenzor rendelkezik az (1)–(3) szimmetriatulajdonságokkal:

$\sim$ $\widetilde{\mathcal{R}}(Y, X, Z, U) := \langle\ Y, U\ \rangle\langle\ X, Z\ \rangle - \langle\ X, U\ \rangle\langle\ Y, Z\ \rangle = -\widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z, U).$

$\sim$ $\widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, U, Z) := \langle\ X, Z\ \rangle\langle\ Y, U\ \rangle - \langle\ Y, Z\ \rangle\langle\ X, U\ \rangle = -\widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z, U).$

$\sim$ $\widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z, U) + \widetilde{\mathcal{R}}(Y, Z, X, U) + \widetilde{\mathcal{R}}(Z, X, Y, U) := \langle\ X, U\ \rangle\langle\ Y, Z\ \rangle -$
$- \langle\ Y, U\ \rangle\langle\ X, Z\ \rangle + \langle\ Y, U\ \rangle\langle\ Z, X\ \rangle - \langle\ Z, U\ \rangle\langle\ Y, X\ \rangle +$
$+ \langle\ Z, U\ \rangle\langle\ X, Y\ \rangle - \langle\ X, U\ \rangle\langle\ Z, Y\ \rangle = 0.$

(b) Tegyük föl, hogy M konstans, mégpedig k_0 értékű konstans görbülettel rendelkezik! Kiválasztva egy $p \in M$ pontot, legyenek $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ olyan vektormezők, hogy $X(p)$ és $Y(p)$ lineárisan független érintővektora T_pM-nek! Ekkor

$$K(p) = \frac{\mathcal{R}(X, Y, Y, X)}{\langle\ X, X\ \rangle\langle\ Y, Y\ \rangle - \langle\ X, Y\ \rangle^2}(p) = k_0.$$

Mivel $\widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Y, X) = \langle\ X, X\ \rangle\langle\ Y, Y\ \rangle - \langle\ X, Y\ \rangle^2$, p tetszőlegességének figyelembevételével megállapíthatjuk ennek alapján, hogy

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M) :\ \mathcal{R}(X, Y, Y, X) = k_0 \widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Y, X).$$

Ebből azonban az (a)-ban mondottak és 9.2. alapján $\mathcal{R} = k_0 \widetilde{\mathcal{R}}$ következik.

(c) Megfordítva, teljesüljön, hogy $\mathcal{R} = k_0\widetilde{\mathcal{R}}$! Ekkor tetszőleges $p \in M$ pontot, T_pM lineárisan független b_1, b_2 vektorait és a $\sigma = \mathcal{L}(b_1, b_2) \in \mathcal{G}_2(T_pM)$ síkot tekintve,

$$K(\sigma) := \frac{\mathcal{R}(b_1, b_2, b_2, b_1)}{G(b_1, b_2)} = \frac{k_0\widetilde{\mathcal{R}}(b_1, b_2, b_2, b_1)}{\widetilde{\mathcal{R}}(b_1, b_2, b_2, b_1)} = k_0$$

adódik; M tehát k_0 konstans görbülettel rendelkezik. □

9.9. lemma (A 2. Bianchi-azonosság a Riemann-féle görbületi tenzorra). *Ha $\mathcal{R}$ az $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ pszeudo-Riemann sokaság Riemann-féle görbületi tenzora, akkor* $\forall\ X, Y, Z, U, W$:

$$(D_X\mathcal{R})(Y, Z, U, W) + (D_Y\mathcal{R})(Z, X, U, W) + (D_Z\mathcal{R})(X, Y, U, W) = 0.$$

Bizonyítás. Tekintettel az 1.8-ban levezetett 2. Bianchi-azonosságra, elegendő azt ellenőrizni, hogy

$$\forall\ X, Y, Z, U, W \in \mathfrak{X}(M) :\ (D_X\mathcal{R})(Y, Z, U, W) = \langle\ (D_XR)(Y, Z)U, W\ \rangle,$$

ahol R a Levi-Civita konnexió görbületi tenzora. Ez azonban az 1.6.(c) definíció alkalmazásával könnyű számolási gyakorlat:

$$\begin{aligned}
&\langle\ (D_XR)(Y, Z)U, W\ \rangle \overset{1.6.(c)}{=} \langle\ D_X(R(Y, Z)U), W\ \rangle - \langle\ R(D_XY, Z)U, W\ \rangle - \\
&- \quad \langle\ R(Y, D_XZ)U, W\ \rangle - \langle\ R(Y, Z)D_XU, W\ \rangle \overset{\text{(D5)}}{=} X\langle\ R(Y, Z)U, W\ \rangle - \\
&- \quad \langle\ R(Y, Z)U, D_XW\ \rangle - \mathcal{R}(D_XY, Z, U, W) - \mathcal{R}(Y, D_XZ, U, W) - \\
&- \quad \mathcal{R}(Y, Z, D_XU, W) = X\mathcal{R}(Y, Z, U, W) - \mathcal{R}(D_XY, Z, U, W) - \mathcal{R}(Y, D_XZ, U, W) - \\
&- \quad \mathcal{R}(Y, Z, D_XU, W) - \mathcal{R}(Y, Z, U, D_XW) =: (D_X\mathcal{R})(Y, Z, U, W).
\end{aligned}$$

□

9.10. tétel (F. Schur tétele, 1886.)[1]**.**
Minden legalább 3-dimenziós izotrop Riemann-sokaság konstans görbületű.

Bizonyítás. Legyen $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ a vizsgálat tárgyát képező, legalább 3-dimenziós, izotrop Riemann-sokaság. Mivel M minden pontban rendelkezik az izotropság tulajdonságával, létezik olyan $K \in C^\infty(M)$ függvény, hogy – a 9.8-ban alkalmazott jelölésekkel – $\mathcal{R} = K\widetilde{\mathcal{R}}$; feladatunk annak megmutatása, hogy a K függvény konstans. Mivel

$$\widetilde{\mathcal{R}}(Y, Z, U, W) := \langle\ Y, W\ \rangle\langle\ Z, U\ \rangle - \langle\ Z, W\ \rangle\langle\ Y, U\ \rangle,$$

és a $\langle\ ,\ \rangle$ metrikus tenzor párhuzamos (azaz $D\langle\ ,\ \rangle = 0$, ld. 4.5.(a)), következik, hogy $D\widetilde{R} = 0$. Ennélfogva

$$\forall\ X \in \mathfrak{X}(M) :\ D_X\mathcal{R} = (XK)\widetilde{\mathcal{R}}.$$

---

[1] *F. Schur* (1856 - 1932) német matematikus.

Részletesebben, $\forall\ Y, Z, U, W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(D_X\mathcal{R})(Y,Z,U,W) = (XK)\widetilde{\mathcal{R}}(Y,Z,U,W).$$

X, Y és Z ciklikus cseréjével két további összefüggés is fölírható:

$$(D_Y\mathcal{R})(Z,X,U,W) = (YK)\widetilde{\mathcal{R}}(Z,X,U,W),$$
$$(D_Z\mathcal{R})(X,Y,U,W) = (ZK)\widetilde{\mathcal{R}}(X,Y,U,W).$$

Adjuk össze a kapott három reláció megfelelő oldalait! A baloldalak összege 9.9. alapján zérust eredményez, így – $\widetilde{\mathcal{R}}$ definícióját kiírva – az

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(XK)(\langle\, Y,W\,\rangle\langle\, Z,U\,\rangle - \langle\, Z,W\,\rangle\langle\, Y,U\,\rangle) + \\ &+(YK)(\langle\, Z,W\,\rangle\langle\, X,U\,\rangle - \langle\, X,W\,\rangle\langle\, Z,U\,\rangle) + \\ &+(ZK)(\langle\, X,W\,\rangle\langle Y,U\,\rangle - \langle\, Y,W\,\rangle\langle X,U\,\rangle) = 0 \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Mivel $\dim M \geqq 3$, egy tetszőlegesen kiválasztott $p \in M$ pont alkalmas $\mathcal{N}$ környezete fölött X, Y és U megadható úgy, hogy

$$\forall\ q \in \mathcal{N} :\ (X(q), Y(q), U(q)) \quad T_qM \textit{ ortonormált vektorhármasa.}$$

A továbbiakban $\mathcal{N}$ fölött okoskodva, tegyük föl azt is, hogy speciálisan $Z = U$. Ekkor

$$\langle\, X,U\,\rangle = \langle\, Y,U\,\rangle = 0\ ,\ \langle\, Z,U\,\rangle = \langle\, U,U\,\rangle = 1,$$

így $(*)$ az alábbi összefüggésre redukálódik:

$$(XK)\langle\, Y,W\,\rangle - (YK)\langle\, X,W\,\rangle = 0,$$

illetve

$$\langle\, (XK)Y - (YK)X, W\,\rangle = 0.$$

Innen W tetszőlegessége folytán

$$(XK)Y - (YK)X = 0$$

következik. X és Y azonban lineárisan független, így ez a reláció csak triviális módon teljesülhet, tehát

$$XK = YK = 0.$$

A szereplő vektormezők tetszőlegessége folytán megállapíthatjuk ilymódon, hogy

$$\forall\ X \in \mathfrak{X}(\mathcal{N}) :\ XK = 0 \implies K \upharpoonright \mathcal{N} \text{ konstans.}$$

Ebből azonban a választott p pont tetszőlegessége és M összefüggősége (ld. 3.3.!) alapján az is következik, hogy K M minden pontjában ugyanazt az értéket veszi föl. Ez 9.8-ra tekintettel azt jelenti, hogy M konstans görbületű. □

9.11. példák.

(a) Az $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ euklideszi tér Levi-Civita konnexiója $\mathbb{R}^n$ 4.12-ben leírt természetes konnexiója, amelynek görbületi tenzora eltűnik (1.9.(b)). Így ekkor egyben $\mathcal{R} = 0$, s ezért $\mathbb{E}^n$ *zérus konstans görbülettel rendelkező Riemann-sokaság.*

(b) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ tér ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$) $S^{n-1}(r)$ origó középpontú, r sugarú gömbfelületét, ellátva az indukált Riemann-struktúrával. Legyen D $S^{n-1}(r)$ Levi-Civita konnexiója, R ennek a görbületi tenzora, $\mathcal{R}$ pedig a megfelelő Riemann-féle görbületi tenzor. Tekintsük a gömbfelületen az

$$\underline{N} :\ p \in S^{n-1}(r) \mapsto \underline{N}(p) := -\frac{1}{r}(p, p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

normálegységvektormezőt! A 6.9-ben látottak szerint az ehhez tartozó forma-operátor az

$$S :\ X \in \mathfrak{X}(S^{n-1}(r)) \mapsto S(X) = \frac{1}{r}X$$

leképezés. Így a Gauss-féle görbületi egyenlet (8.1./II.) alapján

$\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S^{n-1}(r))$:

$$R(X,Y)Z = \langle\ S(Y), Z\ \rangle S(X) - \langle\ S(X), Z\ \rangle S(Y) = \frac{1}{r^2}(\langle\ Y, Z\ \rangle X - \langle\ X, Z\ \rangle Y),$$

következésképpen a Riemann-féle görbületi tenzorra

$\forall\ X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(S^{n-1}(r))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X,Y,Z,U) &= \frac{1}{r^2}(\langle\ X, U\ \rangle\langle\ Y, Z\ \rangle - \langle\ Y, U\ \rangle\langle\ X, Z\ \rangle) = \\ &= \frac{1}{r^2}\widetilde{\mathcal{R}}(X,Y,Z,U), \end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{R} = \frac{1}{r^2}\widetilde{\mathcal{R}}$$

teljesül, ami 9.8. alapján azt jelenti, hogy $S^{n-1}(r)$ *az indukált Riemann-struktúrával* $\frac{1}{r^2}$ *konstans görbülettel rendelkező Riemann-sokaság.* Speciálisan: $S^{n-1} = S^{n-1}(1)$ 1 konstans görbületű Riemann-sokaság.

(c) ***A hiperbolikus sík***. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ (u^1, u^2) kanonikus koordinátarendszerét, s legyen

$$\mathbb{H}^2 := \{a \in \mathbb{R}^2 \mid u^2(a) > 0\ \}.$$

$\mathbb{H}^2$, mint az $\mathbb{R}^2$ sokaság nyílt részhalmaza, a II.4.7-ben leírtak szerint maga is kétdimenziós sokaság. Ha

$$\begin{aligned} &g :\ p \in \mathbb{H}^2 \mapsto g_p \in \mathcal{T}_2^0(T_p\mathbb{H}^2), \\ &\forall\ v_p, w_p \in T_p\mathbb{H}^2 = T_p\mathbb{R}^2 :\ g_p(v_p, w_p) := \frac{\langle\ v, w\ \rangle}{[u^2(p)]^2} \end{aligned}$$

($\langle\ ,\ \rangle$ $\mathbb{R}^2$ kanonikus belső szorzata), akkor g Riemann struktúra a $\mathbb{H}^2$ sokaságon. Az így adódó $(\mathbb{H}^2, g)$ Riemann-sokaságot *hiperbolikus sík*nak nevezzük, a g metrikus tenzort *Poincaré-metrikának* is mondjuk[2].

(1) Jelölje u^1 és u^2 $\mathbb{H}^2$-re való leszűkítését x, illetve y ! Ekkor $(\mathbb{H}^2, (x, y)) = (\mathbb{H}^2, 1_{\mathbb{H}^2})$ térképe (sőt egytagú atlasza) $\mathbb{H}^2$-nek. Az ehhez tartozó $\frac{\partial}{\partial x}$ és $\frac{\partial}{\partial y}$ koordinátavektormezők nyilvánvalóan a $C^\infty(\mathbb{H}^2)$-n ható, szokásos D_1, illetve D_2 parciális differenciálások. Geometriai interpretációban (ld. II.8.11.)

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1 \restriction \mathbb{H}^2\ ,\ \frac{\partial}{\partial y} = E_2 \restriction \mathbb{H}^2;$$

ahol (E_1, E_2) $\mathbb{R}^2$ természetes kételmezője. $E_i \restriction \mathbb{H}^2$ helyett egyszerűen E_i-t írva $(1 \leqq i \leqq 2)$, g definíciója alapján

$$g(E_i, E_j) = \frac{\langle\ E_i, E_j\ \rangle}{y^2} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij} \quad (1 \leqq i, j \leqq n),$$

így g komponensei a $(\mathbb{H}^2, (x, y))$ térképre vonatkozóan a

$$(g_{ij}) = \frac{1}{(y)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot alkotják; ennek inverze

$$(g^{ij}) = (y)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $(\mathbb{H}^2, g)$ Levi-Civita konnexiójának Christoffel-szimbólumai egyszerűen a

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(D_i g_{jl} + D_j g_{li} - D_l g_{ij}) \qquad (1 \leqq i, j, k \leqq 2)$$

formula alapján számíthatók ki (v.ö. 4.11., illetve 5.5.).

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1l}(D_1 g_{1l} + D_1 g_{l1} - D_l g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11}(D_1 g_{11} + D_1 g_{11} - D_1 g_{11}) = \\
&= \frac{1}{2}g^{11}D_1 g_{11} = \frac{1}{2}(y)^2 \cdot 0 = 0 \qquad (\text{hiszen } g^{12} = 0); \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2l}(D_1 g_{1l} + D_1 g_{l1} - D_l g_{11}) = \frac{1}{2}g^{22}(D_1 g_{12} + D_1 g_{21} - D_2 g_{11}) = \\
&= -\frac{1}{2}g^{22}D_2 g_{11} = -\frac{1}{2}(y)^2 D_2\left(\frac{1}{(y)^2}\right) = \frac{1}{y};
\end{aligned}$$

s hasonló módon

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y}\ , \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0\ , \qquad \Gamma^1_{22} = 0\ , \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}\ .$$

[2] *J.H. Poincare* (1854 - 1912) a caeni, majd a párizsi egyetem professzora – éppoly univerzális matematikai zseni, mint Gauss.

(3) Legyen R $(\mathbb{H}^2, g)$ Levi-Civita konnexiójának görbületi tenzora! R komponensfüggvényei az

$$R(E_i, E_j)E_k = R^l_{ijk}E_l \qquad (1 \leqq i, j, k \leqq 2)$$

összefüggések által meghatározott R^l_{ijk} függvények. Explicite (ld. 1.15.)

$$R^l_{ijk} = D_i\Gamma^l_{jk} - D_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^r_{jk}\Gamma^l_{ir} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{jr} \ .$$

Fölhasználva a Christoffel-szimbólumokra imént nyert eredményeket, azt kapjuk, hogy R nemzérus, független komponensfüggvényei

$$R^1_{122} = -\frac{1}{(y)^2} \ , \qquad R^2_{121} = \frac{1}{(y)^2} \ .$$

(4) A metszetgörbület-függvény

$$K = \frac{\mathcal{R}(E_1, E_2, E_2, E_1)}{g(E_1, E_1)g(E_2, E_2) - [g(E_1, E_2)]^2} \ ,$$

ahol most

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(E_1, E_2, E_2, E_1) &:= g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = g(R^1_{122}E_1 + R^2_{122}E_2, E_1) = \\ = \ & R^1_{122}g(E_1, E_1) + R^2_{122}g(E_2, E_1) = -\frac{1}{(y)^2}g(E_1, E_1) = -\frac{1}{(y)^4} \ ; \\ g(E_1, E_1)g(E_2, E_2) - [g(E_1, E_2)]^2 &= \frac{1}{(y)^4} \ , \end{aligned}$$

s így $K = -1$; tehát $(\mathbb{H}^2, g)$ -1 *konstans görbülettel rendelkező Riemann-sokaság.*

(5) Megmutatjuk, hogy az alábbi leképezések (a 3.5. szerinti értelemben) *izometriái* $(\mathbb{H}^2, g)$-nek.

(i) $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \varphi(\alpha, \beta) := (\alpha + \lambda, \beta), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \varphi(\alpha, \beta) := (\lambda\alpha, \lambda\beta), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$;

(iii) $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \varphi(\alpha, \beta) := (-\alpha, \beta)$;

(iv) $\varphi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \varphi(\alpha, \beta) := \left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$;

Legyen $p := (\alpha, \beta) \in \mathbb{H}^2$ és $\underline{v}, \underline{w} \in T_p\mathbb{H}^2$ tetszőleges, s jelentse (e_1, e_2) $\mathbb{R}^2$ kanonikus bázisát.

(i) $\varphi'(p) = 1_{\mathbb{R}^2}$, így $\varphi_*(\underline{v}) = v_{\varphi(p)}$, $\varphi_*(\underline{w}) = w_{\varphi(p)}$ és $g_{\varphi(p)}(\varphi_*(\underline{v}), \varphi_*(\underline{w})) =$
$= \dfrac{\langle v, w\rangle}{(u^2[\varphi(p)])^2} = \dfrac{\langle v, w\rangle}{[u^2(p)]^2} = g_p(\underline{v}, \underline{w})$.

(ii) Most $\varphi'(p) = \varphi$, hiszen φ lineáris. Így $g_{\varphi(p)}(\varphi_*(\underline{v}), \varphi_*(\underline{w})) =$
$= g_{\varphi(p)}(\lambda v_{\varphi(p)}, \lambda w_{\varphi(p)}) = \lambda^2 \dfrac{\langle v, w\rangle}{(u^2[\varphi(p)])^2} = \dfrac{\langle v, w\rangle}{[u^2(p)]^2} = g_p(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) $\varphi'(p)$ ebben az esetben is φ-vel egyenlő; a számolás az iméntivel analóg.

(iv) $D_1\varphi(\alpha,\beta) = \left(\dfrac{-\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}, \dfrac{-2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)$,

$D_2\varphi(\alpha,\beta) = \left(\dfrac{-2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}, \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right)$;

így

$$\begin{aligned} g_{\varphi(p)}(\varphi_*(e_1)_p, \varphi_*(e_1)_p) &= g_{\varphi(p)}((D_1\varphi(p))_{\varphi(p)}, (D_1\varphi(p))_{\varphi(p)}) = \\ &= \frac{1}{[u^2(\varphi(p))]^2}\frac{(-\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^4} = \\ &= \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^2}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^4} = \frac{1}{\beta^2} = g_p((e_1)_p,(e_1)_p) \ . \end{aligned}$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_{\varphi(p)}(\varphi_*(e_1)_p, \varphi_*(e_2)_p) &= g_p((e_1)_p,(e_2)_p) = 0 \ , \\ g_{\varphi(p)}(\varphi_*(e_2)_p, \varphi_*(e_2)_p) &= g_p((e_2)_p,(e_2)_p) \ , \end{aligned}$$

$(\varphi_*)_p$ tehát megőrzi a bázisvektorok belső szorzatát, s így lineáris izometria.

9.12. definíció. *Tegyük föl, hogy (M,g) és $(\tilde M,\tilde g)$ egyező dimenziójú Riemann-sokaság! Egy $\varphi : M \to \tilde M$ diffeomorfizmust **konform leképezés**nek nevezünk, ha létezik olyan $f \in C^\infty(M)$ pozitív függvény, hogy $\varphi^*\tilde g = fg$; speciálisan az $\tilde M = M$ esetben **konform transzformáció**ról szólunk. Két Riemann-sokaságot **konform**nak mondunk, ha létezik konform leképezés közöttük.*

9.13. megjegyzések.

(a) Részletesebben kiírva, a definícióbeli feltétel azt jelenti, hogy

$$\forall\, p \in M;\ v,w \in T_pM : \quad \tilde g_{\varphi(p)}(\varphi_*(v),\varphi_*(w)) = f(p)g_p(v,w) \ .$$

Közvetlenül adódik innen, hogy a konform leképezések szögtartók: ugyanazon pontbeli két érintővektor φ_* általi képének szöge megegyezik a vektorok szögével.

(b) Egy Riemann-sokaság összes konform transzformációi csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével, ezt a csoportot a Riemann-sokaság ***konform csoport***jának hívjuk. A konform csoportnak részcsoportja az izometriacsoport, hiszen ha a definícióban szereplő f függvény speciálisan az $\{1\}$ értékkészletű konstans függvény, akkor φ izometria.

(c) *Jelölés:* $\mathrm{Conf}(M,\tilde M)$ – az $M \to \tilde M$ konform leképezések halmaza;
$\mathrm{Conf}(M) := \mathrm{Conf}(M,M)$ – M konform csoportja.

9.14. példák. Tegyük föl az alábbiakra nézve, hogy $n \in \mathbb{N},\ n \geqq 2$.

(a) Legyen λ pozitív valós szám! Emlékeztetünk rá, hogy $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ egy φ transzformációját λ *paraméterű* ***hasonlóság***nak nevezzük, ha

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^n : \qquad d(\varphi(a), \varphi(b)) = \lambda d(a, b)\ .$$

Speciálisan a $h_\lambda :\ a \in \mathbb{R}^n \mapsto h_\lambda(a) := \lambda a$ transzformáció nyilvánvalóan hasonlóság, ezt (origó centrumú) ***középpontos hasonlóság***nak vagy ***dilatáció***nak hívjuk. Amennyiben φ tetszőleges, λ paraméterű hasonlóság, úgy $h_{1/\lambda} \circ \varphi$ közvetlenül ellenőrizhető módon izometria. Ebből adódóan minden hasonlóság előállítható egy izometria és egy középpontos hasonlóság kompozíciójaként. Ugyancsak világos, hogy $\mathbb{E}^n$ összes hasonlóságai csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathbb{E}^n$ hasonlóság-csoportjának nevezzük, s rá a $\mathrm{Sim}(\mathbb{E}^n)$ jelölést használjuk. Fennáll mármost, hogy

$$\mathrm{Sim}(\mathbb{E}^n) \subset \mathrm{Conf}(\mathbb{E}^n)\ .$$

Valóban, legyen $\varphi = h_\lambda \circ F \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E}^n)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+,\ F$ izometria). Ekkor $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi'(a) = h'_\lambda(F(a)) \circ F'(a) \overset{\text{I.4.3., 3.9.}}{=} h_\lambda \circ \psi\ ,$$

ahol $\psi \in O(\mathbb{R}^n)$ F lineáris része. Így $\forall\ \underline{v}, \underline{w} \in T_p\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_*(\underline{v}), \varphi_*(\underline{w}) \rangle &= \langle (h_\lambda \circ \psi(v))_{\varphi(p)}, (h_\lambda \circ \psi(w))_{\varphi(p)} \rangle = \\ &= \langle h_\lambda \circ \psi(v), h_\lambda \circ \psi(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle = \lambda^2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle\ , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy φ konform transzformáció.

(b) ***Inverzió.*** Legyen $\varrho \in \mathbb{R}^+$ és $a \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges! Az

$$i_{a,\varrho} :\ \mathbb{R}^n \backslash \{a\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{a\}, \qquad p \mapsto i_{a,\varrho}(p) := a + \frac{\varrho}{\|p-a\|^2}(p-a)$$

leképezést *a pólusú, ϱ hatványú* ***inverzió***nak nevezzük. Az a középpontú, $\sqrt{\varrho}$ sugarú $S^{n-1}(a, \sqrt{\varrho}) \subset \mathbb{R}^n$ gömb pontonként fix alakzata $i_{a,\varrho}$-nak; azt is mondjuk, hogy $i_{a,\varrho}$ az illető gömbre vonatkozó inverzió. – Megmutatjuk, hogy

$$i_{a,\varrho} \in \mathrm{Conf}(\mathbb{E}^n \backslash \{a\})\ .$$

Mivel a transzlációk és a középpontos hasonlóságok konform transzformációk (ld. (a)), állításunkat elegendő az S^{n-1} -re vonatkozó $i_{0,1} =: i$ inverzióra igazolni. Bevezetve a $k :\ \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto k(t) := t^{-1}$ és a

$$\|\ \|^2 :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p \mapsto \|p\|^2 = \langle p, p \rangle$$

függvényt,

$$i = (k \circ \|\ \|^2) 1_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}}$$

írható. I.4.14. alkalmazásával $\forall\ p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned} i'(p) &= k(\|p\|^2)1'_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}(p) + 1_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}(p) \circ (\operatorname{grad}(k \circ \|\ \|^2))(p) = \\ &= \frac{1}{\|p\|^2}1_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} + p \circ (\operatorname{grad}(k \circ \|\ \|^2))(p)\ , \end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban $p \circ (\dots)$ diadikus szorzatot (ld. I.4.13.) jelent. Mivel

$$(k \circ \|\ \|^2)'(p) = k'(\|p\|^2)(\|\ \|^2)'(p) \overset{\text{I.4.6.}}{=} -\frac{2}{\|p\|^4}\langle p, \cdot \rangle\ ,$$

kapjuk, hogy $\operatorname{grad}(k \circ \|p\|^2)(p) = -\dfrac{2}{\|p\|^4}p$, és így

$$i'(p) = \frac{1}{\|p\|^2}\left(1_{\mathbb{R}^n\backslash\{0\}} - \frac{2}{\|p\|^2}p \circ p\right)\ .$$

Tehát $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$:

$$i'(p)(v) = \frac{1}{\|p\|^2}\left(v - 2\frac{\langle p, v\rangle}{\langle p, p\rangle}p\right)\ .$$

Itt a

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto v - 2\frac{\langle p, v\rangle}{\langle p, p\rangle}p$$

leképezés a p normálvektorú, $(n-1)$-dimenziós altérre való tükrözés, tehát izometria. $i'(p)$ ennélfogva az $\frac{1}{\|p\|^2}$ paraméterű középpontos hasonlóság és egy izometria kompozíciója, tehát hasonlóság. Az (a)-ban mondottak figyelembevételével ebből közvetlenül adódik, hogy $i \in \operatorname{Conf}(\mathbb{E}^n \backslash \{0\})$.
Az $n = 2$ esetben i az

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \mapsto \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$

formulával írható le, amely $\mathbb{R}^2$ és a $\mathbb{C}$ komplex számtest természetes azonosítása után a

$$z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mapsto i(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\overline{z}}z = \frac{1}{\|z\|^2}z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

alakot ölti. Vegyük még észre, hogy $i(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, s hogy $i \restriction \mathbb{H}^2$ éppen a $(\mathbb{H}^2, g)$ Riemann-sokaságnak a 9.11.(c) példa 5./(iv) pontjában megadott izometriája. Rövidesen rá fogunk mutatni, hogy ez nem a véletlen műve.

(c) $\mathbb{E}^n$ konform transzformációinak teljes leírását nyújtja a következő mély eredmény.

> ***Liouville tétele.*** *Ha* $n = 2$, *akkor* $\operatorname{Conf}(\mathbb{E}^2) = \operatorname{Sim}(\mathbb{E}^2)$. *Amennyiben* $n \geqq 3$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *összefüggő nyílt halmaz, és* $\varphi \in \operatorname{Conf}(U, \varphi(U))$, *akkor* φ $\mathbb{R}^n$*-en adott inverziók* U*-ra való leszűkítésének kompozíciója.*

Fölhívjuk a figyelmet az $n = 2$ és az $n \geqq 3$ eset közötti alapvető különbségre, valamint a „lokális” eset (az U nyílt halmaz valódi részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek) és a „globális” eset ($U = \mathbb{R}^n$) közötti radikális eltérésre!

(d) $(\mathbb{H}^2, g)$ ***konform csoportja.*** Alkalmazni fogjuk $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{C}$-vel való természetes azonosítását; ekkor $\mathbb{H}^2$ a pozitív imaginárius résszel rendelkező komplex számok halmaza. Emlékeztetünk rá, hogy ha $U \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, s egy $\varphi : U \to \mathbb{C}$ leképezésnek U minden pontjában létezik komplex értelemben a deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy φ ***holomorf*** leképezése U-nak $\mathbb{C}$-be. Amennyiben $U \subset \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz, $\varphi : U \to U$ homeomorfizmus és inverzével együtt holomorf, úgy φ-t U egy ***automorfizmus***ának nevezzük. Világos, hogy U összes automorfizmusai csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathrm{Aut}(U)$-val jelöljük.

(1) Ismeretes (ld. pl. H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963., p. 182), hogy

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) \iff \begin{cases} \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \quad \text{és} \\ \forall\, z \in \mathbb{H}^2 : \ \varphi(z) = \dfrac{az + b}{cz + d} \ . \end{cases}$$

(2) Jelölje $\mathrm{Is}(\mathbb{H}^2)$ $(\mathbb{H}^2, g)$ izometriacsoportját! A

$$\theta : \ z \in \mathbb{H}^2 \mapsto \theta(z) := -\overline{z}$$

leképezés automorfizmusa $\mathbb{H}^2$-nek, $\theta^2 = 1_{\mathbb{H}^2}$; sőt $\theta \in \mathrm{Is}(\mathbb{H}^2)$, hiszen közvetlenül látható, hogy θ éppen a 9.11.(c) példa 5./(iii) pontjában szereplő leképezés.

(3) Megmutatható, hogy az $\mathrm{Is}(\mathbb{H}^2)$ és az $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$ csoport között érvényes a következő kapcsolat:

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2)$ 2 *indexű normális részcsoportja az* $\mathrm{Is}(\mathbb{H}^2)$ *csoportnak, nevezetesen:*

$$\mathrm{Is}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) + \theta\,\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) \ .$$

Ilymódon

$$\varphi \in \mathrm{Is}(\mathbb{H}^2) \iff \forall\, z \in \mathbb{H}^2 : \ \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{vagy} \quad \varphi(z) = \frac{-a\overline{z} - b}{c\overline{z} + d}$$

$$(a, b, c, d \in \mathbb{R}; \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1) \ .$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető továbbá, hogy $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{Conf}(\mathbb{H}^2)$, következésképpen

$$\boxed{\mathrm{Conf}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{Is}(\mathbb{H}^2)} \ .$$

Ennek az alapvető kapcsolatnak nevezetes elemi geometriai vonatkozásai vannak. Jól ismert, hogy a Bolyai-Lobacsevszkij-féle párhuzamossági axióma egyik ekvivalense éppen a következő állítás: *ha két háromszög szögei páronként kongruensek, akkor a két háromszög megfelelő oldalai is kongruensek.*

(e) Összefoglalva bizonyos most és korábban (ld. pl. I.3.10.) tett megállapításainkat, a három klasszikus kétdimenziós geometria különböző nézőpontú megközelítéseit illetően a következő áttekintés adódik:

Riemann-sokaság	*Görbület*	*Csoportelmélet (izometriacsoport)*	*Elemi geometria*
$\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$	$K = 0$	euklideszi mozgások	euklideszi síkgeometria
$(S^2, \langle , \rangle)$	$K = 1$	$O(\mathbb{R}^3)$ leszűkítve S^2-re	gömbi geometria, vagy elliptikus geometria a projektív síkon
$(\mathbb{H}^2, g)$	$K = -1$	$\mathrm{Conf}(\mathbb{H}^2)$	hiperbolikus síkgeometria

A Riemann-geometria nézőpontjából az egyenesek szerepét a geodetikusok játsszák. $\mathbb{E}^2$ geodetikusai a „szokásos”, konstans pályasebességű parametrizált egyenesek, S^2 geodetikusai pedig, mint láttuk, a konstans pályasebességű, parametrizált főkörök. Hogy teljessé váljon a kép, meghatározzuk végül $(\mathbb{H}^2, g)$ geodetikusait.

9.15. tétel. *Tegyük föl, hogy U összefüggő nyílt halmaza – s ennélfogva nyílt részsokasága – $\mathbb{R}^2$-nek. Legyen g Riemann-struktúra U-n, s tekintsük az (U, g) Riemann-sokaság egy $\varphi : U \to U$ izometriáját! Amennyiben φ fixpontjainak $\Phi = \{p \in U \mid \varphi(p) = p\}$ halmaza egydimenziós, összefüggő részsokasága $\mathbb{R}^2$-nek, úgy Φ az (U, g) Riemann-sokaság egy geodetikusának képe.*

Bizonyítás.

(a) Megmutatható (a precíz kivitelezés azonban hosszadalmas), hogy a Φ egydimenziós, összefüggő részsokaságnak létezik globális paraméterezése, így $c : I \to \Phi$ egységpályasebességű ($g(\dot{c}, \dot{c}) = 1$) globális paraméterezése is. Ha belátjuk, hogy c geodetikus, akkor készen vagyunk.

(b) Nyilvánvalóan elegendő azt igazolni, hogy tetszőleges $t_0 \in I$ esetén c-nek egy t_0 körüli intervallumra való leszűkítése geodetikus. – Válasszunk tehát egy $t_0 \in I$ pontot; legyen $\underline{v} := \dot{c} \in T_{c(t_0)}\Phi$. Mivel a geodetikusokat lokálisan egy közönséges, másodrendű differenciálegyenletrendszer írja le (2.6.), a megfelelő egzisztencia-unicitás tétel (v.ö. I.6.23. bizonyítása, I. tétel) alapján következik, hogy (U, g)-nek létezik egy és csak egy maximális, $\underline{v}$ kezdősebességű $c_v : I_v \to U$ geodetikusa. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Im} c_v \subset \Phi$. Jegyezzük meg ebből a célból először is, hogy $\varphi \circ c_v$ szintén geodetikus, hiszen φ izometria (a részletek átgondolását az Olvasóra bízzuk). Mivel $\varphi \upharpoonright \Phi = 1_\Phi$,

$$\forall\, p \in \Phi : \ (\varphi_*)_p \upharpoonright T_p\Phi = 1_{T_p\Phi},$$

így

$$\dot{\overline{\varphi \circ c_v}}(0) = (\varphi_*)_{c_v(0)}(\dot{c}(0)) = \varphi_*(\underline{v}) = \underline{v}\ ,$$

tehát $\varphi \circ c_v$ ugyancsak $\underline{v}$ kezdősebességű geodetikus. Ebből a geodetikusok unicitása miatt $\varphi \circ c_v = c_v$ következik, ami azt jelenti, hogy $\operatorname{Im} c_v \subset \Phi$.

(c) Legyen $I_0 := \{t \in I \mid t - t_0 \in I_v\}$. Ekkor I_0 szintén intervallum; belátjuk, hogy $c \upharpoonright I_0$ geodetikus. – Mivel c és c_v egyaránt természetes paraméterezésű, $\dot{c}(t_0) = \dot{c}_v(0)$, c és c_v ugyanannak a $T \in \mathfrak{X}(\Phi)$ egységvektormezőnek az integrálgörbéi, azaz I_0 fölött

$$\dot{c} = T \circ c \quad \text{és} \quad \dot{c}_v = T \circ c_v$$

egyaránt teljesül. Ebből azonban az integrálgörbék unicitása miatt (ld. az idézett I. tételt) az következik, hogy $\forall\ t \in I_0 :\ c(t) = c_v(t - t_0)$; $c \upharpoonright I_0$ tehát valóban geodetikus. – Tekintettel a $t_0 \in I$ pont tetszőlegességére, ezzel igazoltuk, hogy c geodetikus. □

9.16. következmény. *A $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus sík összes geodetikusai az alkalmasan átparaméterezett „függőleges” – azaz $e_2 = (0, 1)$ irányvektorú – félegyenesek és azok a félkörök, melyeknek középpontja az „x-tengelyre” $(:= \mathcal{L}((1, 0)))$ illeszkedik (szintén úgy paraméterezve, hogy a pályasebesség konstans legyen).*

Bizonyítás. $(\mathbb{H}^2, g)$-nek a 9.11.(c) példa 5. pontjában leírt izometriáit alkalmazzuk, ezeket most $\varphi_1 - \varphi_4$-gyel jelöljük.

(1) Tekintsük a $\Phi := \{t(0, 1) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ függőleges félegyenest! Φ pontonként fix alakzata a

$$\varphi_3 :\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{H}^2 \mapsto (-\alpha, \beta)$$

izometriának, így a tétel értelmében Φ konstans pályasebességű paraméterezései geodetikusok.

(2) Legyen $\Psi := \{(p^1, p^2) \in \mathbb{H}^2 \mid (p^1)^2 + (p^2)^2 = 1\}$! Ψ-t pontonként fixen hagyja a

$$\varphi_4 :\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{H}^2 \mapsto \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

izometria (az $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ körre vonatkozó inverzió $\mathbb{H}^2$-re való leszűkítése), így Ψ alkalmas paraméterezése szintén geodetikust ad.

(3) Mivel bármely $\mathbb{H}^2$-beli függőleges félegyenes Ψ képeként nyerhető egy

$$\varphi_1 : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{H}^2 \mapsto (\alpha + \lambda, \beta) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

alakú izometriánál, e félegyenesek mindegyike geodetikust jelent alkalmas paraméterezés után.

(4) $\mathbb{H}^2$ tetszőleges, origó középpontú félköre Ψ-ből kapható

$$\varphi_2 : \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{H}^2 \mapsto (\lambda\alpha, \lambda\beta) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$$

típusú izometria képeként, míg a további, x-tengelyre illeszkedő középponttal rendelkező félkörök ezekből φ_1-típusú izometria alkalmazásával adódnak. Megállapíthatjuk tehát, hogy a szóbanforgó félkörök bármelyike – konstans pályasebességű paraméterezés után – geodetikusa $(\mathbb{H}^2, g)$-nek.

(5) Tekintsünk egy teszőleges $p \in \mathbb{H}^2$ pontot és $\underline{v} \in T_p\mathbb{H}^2 \backslash \{0\}$ érintővektort! Közvetlenül látható, hogy létezik egy és csak egy olyan maximális geodetikus az említett két típus valamelyikéből, amelynek kezdősebessége $\underline{v}$. Ez azt jelenti, hogy az eddig vizsgáltak kimerítik $(\mathbb{H}^2, g)$ összes geodetikusait. $\square$

9.17. megjegyzés. $(\mathbb{H}^2, g)$ geodetikusainak meghatározására természetesen kevésbé konceptuális eljárás is rendelkezésünkre áll. – Tekintsünk egy $c = (c^1, c^2) : I \to \mathbb{H}^2$ konstans pályasebességű parametrizált görbét! c sebességvektormezője

$$\dot{c} = c^{1\prime} \left(\frac{\partial}{\partial x} \circ c \right) + c^{2\prime} \left(\frac{\partial}{\partial y} \circ c \right) \ .$$

2.6. értelmében c pontosan akkor geodetikus, ha

$$\begin{cases} c^{1\prime\prime} + c^{i\prime} c^{j\prime} (\Gamma^1_{ij} \circ (c^1, c^2)) = 0 \ , \\ c^{2\prime\prime} + c^{i\prime} c^{j\prime} (\Gamma^2_{ij} \circ (c^1, c^2)) = 0 \ . \end{cases}$$

A 9.11.(c) példában a Christoffel-szimbólumokat már kiszámoltuk. Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

c geodetikus $\Longleftrightarrow$ (c^1, c^2) eleget tesz az

$$\begin{cases} x'' - \dfrac{2x'y'}{y} = 0 \\ y'' + \dfrac{(x')^2 - (y')^2}{y} = 0 \end{cases}$$

közönséges, másodrendű differenciálegyenletrendszernek.

Ennek megoldása nem nehéz, de bizonyos technikai problémákat fölvet. Most vázolunk egy olyan – szélesebb körben is alkalmazható! – eljárást, amely a kérdést egy sokkal könnyebben kezelhető elsőrendű differenciálegyenlet vizsgálatára vezeti vissza.

9.18. lemma (Megmaradási egyenlet). *Megtartva 9.11.(c) jelöléseit és megállapodásait, tegyük föl, hogy $c = (c^1, c^2): I \to \mathbb{H}^2$ geodetikusa $(\mathbb{H}^2, g)$-nek. Ekkor a*

$$g(\dot{c}, E_1 \circ c): I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g_{c(t)}(\dot{c}(t), E_1[c(t)])$$

függvény konstans.

Bizonyítás. $(\mathrm{D_c}4)$ alkalmazásával

$$[g(\dot{c}, E_1 \circ c)]' = g(D_c\dot{c}, E_1 \circ c) + g(\dot{c}, D_c(E_1 \circ c)) = g(\dot{c}, D_c(E_1 \circ c))$$

(hiszen $D_c\dot{c} = 0$, lévén szó geodetikusról). Itt – fölhasználva 9.11.(c) eredményeit is –

$$\begin{aligned} D_c(E_1 \circ c) &\overset{(\mathrm{D_c}3)}{=} (D_{c^{1\prime}E_1 + c^{2\prime}E_2} E_1) \circ c = (c^{1\prime} D_{E_1} E_1 + c^{2\prime} D_{E_2} E_1) \circ c = \\ &= [c^{1\prime}(\Gamma^1_{11} E_1 + \Gamma^2_{11} E_2) + c^{2\prime}(\Gamma^1_{21} E_1 + \Gamma^2_{21} E_2)] \circ c = \\ &= [\frac{1}{y}(c^{1\prime} E_2 - c^{2\prime} E_1] \circ c, \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} g(\dot{c}, D_c(E_1 \circ c)) &= [g(c^{1\prime}E_1 + c^{2\prime}E_2, \frac{1}{y}(c^{1\prime}E_2 - c^{2\prime}E_1))] \circ c = \\ &= (c^{1\prime}c^{2\prime}\frac{1}{(y)^3} - c^{1\prime}c^{2\prime}\frac{1}{(y)^3}) \circ c = 0, \end{aligned}$$

amivel igazoltuk a tett észrevételt. □

9.19. alkalmazás. Világos, hogy a levezetett megmaradási egyenlet megoldáshalmaza tartalmazza $(\mathbb{H}^2, g)$ összes geodetikusait, úgyhogy a geodetikusok felkutatásánál szorítkozhatunk az általa származtatott – immár elsőrendű – differenciálegyenlet vizsgálatára. Mivel (a 9.18-beli feltételek megtartása mellett)

$$g(\dot{c}, E_1 \circ c) = [g(c^{1\prime}E_1 + c^{2\prime}E_2, E_1)] \circ c = (c^{1\prime}\frac{1}{(y)^2}) \circ c,$$

a megmaradási egyenlet az

$$x'\frac{1}{(y)^2} = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R} \text{ konstans}) \tag{1}$$

differenciálegyenlethez vezet.

- ∼ Ha $\lambda = 0$, akkor megoldásokként a függőleges ($e_2 = (0, 1)$ irányvektorú) félegyenesek adódnak.
- ∼ Tegyük föl, hogy $\lambda \neq 0$! Ekkor a keresett $c = (c^1, c^2)$ megoldásgörbére teljesül, hogy $c^{1\prime}$ seholsem tűnik el. c-nek egységpályasebességűnek kell lennie; a $g(\dot{c}, \dot{c}) = 1$ előírás a
$$\frac{(c^{1\prime})^2 + (c^{2\prime})^2}{(c^2)^2} = 1;$$

összefüggéshez vezet. (1) miatt $c^{1\prime} = \lambda(c^2)^2$, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{(\lambda)^2(c^2)^4 + (c^{2\prime})^2}{(c^2)^2} = 1;$$

innen

$$\begin{aligned}(c^{2\prime})^2 &= (c^2)^2(1-(\lambda)^2(c^2)^2),\\ c^{2\prime} &= c^2\sqrt{1-(\lambda)^2(c^2)^2}.\end{aligned}$$

Fölhasználva, hogy $c^{1\prime} = \lambda(c^2)^2$ seholsem zérus, hányadosképzés a

$$\frac{c^{2\prime}}{c^{1\prime}} = \frac{\sqrt{1-(\lambda)^2(c^2)^2}}{\lambda c^2}$$

relációhoz vezet. Bevezetve az $r = \frac{1}{\lambda}$ jelölést, ez a

$$\frac{c^{2\prime}}{c^{1\prime}} = \frac{\sqrt{r^2-(c^2)^2}}{c^2} \tag{2}$$

formát ölti. Ha mármost a megmaradási egyenlet „nem függőleges" megoldásait a

$$t \mapsto (t, g(t)) \qquad (g \in C^\infty(\mathbb{R}))$$

alakú parametrizált görbék körében keressük, akkor (2) értelmében ezek éppen a

$$\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}} = \frac{1}{y'} \tag{3}$$

szeparábilis differenciálegyenlet megoldásgörbéi. (Itt és a továbbiakban a fölső index hatványkitevő!) A hagyományos, formális eljárással (3)-ból

$$\int \frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}} = \int dx - x_0 \ ;$$

integrálva

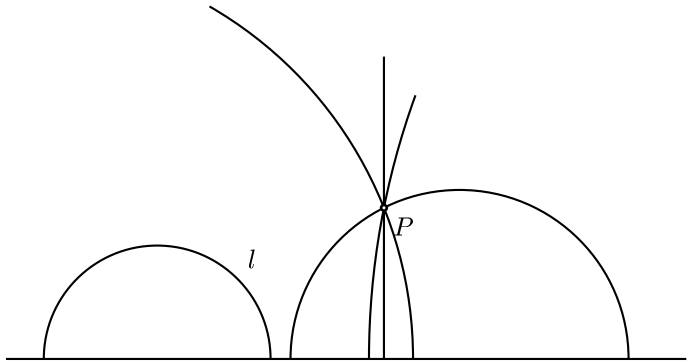
$$-\sqrt{r^2-y^2} = x - x_0.$$

Innen

$$(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$$

– megkaptuk tehát $(\mathbb{H}^2, g)$ további geodetikusait.

9.20. megjegyzés. Miután rendelkezésünkre állnak $(\mathbb{H}^2, g)$ „egyenesei", közvetlenül kapjuk azt a nevezetes konkluziót, amit a 9.14.(d) példában még csak közvetve vonhattunk le: a $(\mathbb{H}^2, g)$ hiperbolikus síkon a Bolyai-Lobacsevszkij-féle párhuzamossági axióma érvényes. Azaz: *megadva egy $p \in \mathbb{H}^2$ pontot s egy erre nem illeszkedő l „egyenest", legalább két – s ennélfogva végtelen sok – olyan „egyenes" létezik, amely illeszkedik a p pontra és párhuzamos l-lel.*


l
P

Appendix: Egységbontás és egzisztencia-tételek

A1. definíció.

(a) *Egy topologikus tér egy nyílt lefedését **lokálisan véges**nek mondjuk, ha a tér minden pontjának van olyan környezete, amelyet a lefedésnek csak véges sok tagja metsz.*

(b) *Egy topologikus tér egy $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ lefedésének **finomításá**n olyan $(V_\beta)_{\beta \in B}$ lefedést értünk, amelyre teljesül: $\forall\ \beta \in B :\ \exists\ \alpha \in A : V_\beta \subset U_\alpha$.*

(c) *Egy topologikus teret **parakompakt**nak mondunk, ha Hausdorff-tér, és minden nyílt lefedésének van lokálisan véges finomítása.*

A2. állítás. *Minden megszámlálható bázisú, lokálisan kompakt topologikus tér parakompakt, sőt rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden nyílt lefedésének van olyan lokálisan véges finomítása, amelyet relatíve kompakt – azaz kompakt lezárttal rendelkező – nyílt halmazok alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen S a feltételeknek eleget tevő topologikus tér!

(a) Megmutatjuk, hogy létezik S nyílt halmazainak olyan $(G_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ sorozata, amelyre teljesülnek a következők: $\forall\ i \in \mathbb{N}^+$:

$$\overline{G}_i \text{ kompakt,} \tag{1}$$

$$\overline{G}_i \subset G_{i+1}, \tag{2}$$

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} G_i. \tag{3}$$

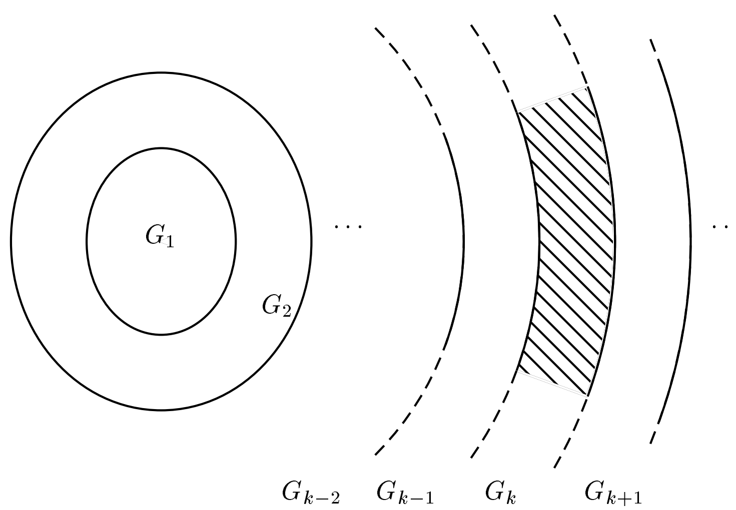
Induljunk ki ebből a célból S topológiájának egy $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ megszámlálható bázisából! S lokális kompaktsága miatt föltehető, hogy itt az U_i nyílt halmazok mindegyike relatíve kompakt. A kívánt $(G_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ halmazsorozatot induktíve definiáljuk:

$$\begin{aligned} G_1 &:= U_1, \\ G_2 &:= U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{i_1}; \\ &\vdots \\ G_{k+1} &:= U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{i_k}, \end{aligned}$$

ahol $i_0 := 1$, i_k pedig az a legkisebb pozitív egész, amelyre

$$i_{k-1} < i_k \quad \text{és} \quad \overline{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{i_k} U_i$$

teljesül. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy az így megkonstruált halmazsorozat valóban eleget tesz az (1)–(3) kívánalmaknak.



(b) Tekintsük ezek után az S topologikus tér egy tetszőleges $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedését! Mivel a $\overline{G}_k$ halmazok mindegyike kompakt, a

$\overline{G}_2$ halmaz $(U_\alpha \cap G_3)_{\alpha\in A}$ lefedésének;

általánosan, $3 \le k \in \mathbb{N}$ esetén a

$\overline{G}_k \setminus G_{k-1}$ halmaz $(U_\alpha \cap (G_{k+1} \setminus \overline{G}_{k-2}))_{\alpha\in A}$ lefedésének

létezik véges részlefedése. E részlefedések tagjai együttesen lokálisan véges nyílt lefedését alkotják S-nek. S így nyert lefedése nyilvánvalóan lokálisan véges finomítása az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedésnek, sőt a tagjai relatíve kompakt nyílt halmazok. $\square$

A3. lemma. *Legyen K kompakt halmaza az M sokaságnak, U pedig K-t tartalmazó nyílt halmaza M-nek. – Létezik olyan $f \in C^\infty(M)$ függvény, amelyre teljesülnek a következők:*

(1) $\forall\, q \in M: \; 0 \le f(q) \le 1$;

(2) $f(q) > 0$, *ha* $q \in K$;

(3) $f(q) = 0$, *ha* $q \in M \setminus U$.

Bizonyítás. K minden egyes p pontjához létezik $f_p \in C^\infty(M)$ függvény és V_p környezete p-nek úgy, hogy $\overline{V}_p \subset U$, és f_p eleget tesz a II.7.1./(2),(3) feltételeknek. Mivel K kompakt, kiválasztható véges sok $p_1, \dots, p_k \in K$ pont olymódon, hogy

$$K \subset V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_k}.$$

Ha mármost

$$f := \frac{1}{k}\left(f_{p_1} + \dots + f_{p_k}\right),$$

akkor f nyilvánvalóan megfelel a kívánalmaknak. □

A4. állítás. *Egy M sokaság minden $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedéséhez megadható olyan $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedése M-nek, hogy $\forall\, \alpha \in A: \; \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.*

Bizonyítás. M lokális kompaktságára (II.4.2.(b)) tekintettel minden $p \in M$ pontnak kijelölhető olyan V_p környezete, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

(1) V_p koordinátakörnyezet;

(2) $\overline{V}_p$ kompakt;

(3) $\exists\, \alpha \in A: \; \overline{V}_p \subset U_\alpha$.

Mivel az A2. állításból következően (speciálisan) minden sokaság parakompakt, M $(V_p)_{p\in M}$ nyílt lefedésének létezik $(V_i')_{i\in I}$ lokálisan véges finomítása. Tetszőleges $\alpha \in A$ esetén legyen

$$I_\alpha := \left\{ i \in I \mid \overline{V_i'} \subset U_\alpha \right\}; \qquad V_\alpha := \bigcup_{i\in I_\alpha} V_i'.$$

Ekkor $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ szintén nyílt lefedése M-nek. Ha sikerül belátnunk, hogy

$$(*) \qquad \overline{V}_\alpha = \bigcup_{i\in I_\alpha} \overline{V}_i,$$

akkor $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ $(\alpha \in A)$ következik (hiszen a $\overline{V}_\alpha$ előállításában szereplő $\overline{V}_i$ halmazok mindegyike benne van U_α-ban), ami azt jelenti, hogy $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ a kívánt tulajdonságú lefedés.

(i) A lezárt-képzés definíciója (ld. II.3.4.(b)) alapján közvetlenül adódik, hogy egyrészt

$$\bigcup_{i\in I_\alpha} \overline{V_i'} \subset \overline{\bigcup_{i\in I_\alpha} V_i'} =: \overline{V}_\alpha.$$

(ii) A fordított irányú tartalmazás igazolása végett válasszuk egy tetszőleges $q \in \overline{V}_\alpha$ pontot! Mivel $(V_i')_{i\in I}$ lokálisan véges lefedése M-nek, q-nak van olyan W környezete, hogy azon $i \in I_\alpha$ indexek száma, melyekre $W \cap V_i' \neq \emptyset$, véges. Legyenek $i_1, \ldots, i_k \in I_\alpha$ azok az indexek, amelyekkel

$$W \cap V_{i_j}' \neq \emptyset \qquad (1 \leq j \leq k)$$

teljesül! Nyilvánvalóan elegendő azt belátnunk, hogy

$$q \in \bigcup_{j=1}^{k} \overline{V_{i_j}'}.$$

Indirekt módon okoskodva, tegyük föl, hogy

$$q \notin \bigcup_{j=1}^{k} \overline{V_{i_j}'}\ !$$

Ekkor létezik q-nak olyan W' környezete, hogy

$$W' \subset W \quad \text{és} \quad W' \cap \bigcup_{j=1}^{k} \overline{V_{i_j}'} = \emptyset.$$

Ha $i \in I_\alpha \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, akkor $W \cap V_i' = \emptyset$, s ennélfogva $W' \cap V_i' = \emptyset$ is fennáll. Így azonban

$$\forall\ i \in I_\alpha : \quad W' \cap V_i' = \emptyset,$$

amiből $W' \cap V_\alpha = \emptyset$ következik. Ez ellentmond annak, hogy $q \in \overline{V}_\alpha$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy $q \in \bigcup_{j=1}^{k} \overline{V}_{i_j}'$ valóban fennáll, amivel $(*)$, s egyben az állítás is igazolást nyert. $\square$

A5. definíció.

(a) *Jelöljön S tetszőleges topologikus teret! Egy $f : S \to \mathbb{R}$ függvény **tartó**ján a*

$$\mathit{supp}\, f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = \overline{\{p \in S \mid f(p) \neq 0\}}$$

halmazt értjük.

(b) *Tekintsünk egy M sokaságot, s legyen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokálisan véges nyílt lefedése M-nek. – Azt mondjuk, hogy az $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ függvénycsalád az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedésnek alárendelt **egységbontás** M-en, ha eleget tesz a következő feltételeknek:*

(Pu1) $\forall \alpha \in A, \quad p \in M : 0 \leq f_\alpha(p) \leq 1;$

(Pu2) $\forall \alpha \in A : \mathit{supp}\, f_\alpha \subset U_\alpha;$

(Pu3) $\forall p \in M : \displaystyle\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1.$

A6. megjegyzés. A ($\mathrm{P{\scriptsize U}3}$)-beli összegnek van értelme, mivel az adott lefedés lokális végessége miatt a p pontot tartalmazó U_α környezetek száma véges, s így (PU2) figyelembevételével következik, hogy véges sok $\alpha \in A$ index kivételével $f_\alpha(p) = 0$.

A7. tétel. (Az egységbontás tétele.) *Egy sokaság minden, relatíve kompakt nyílt halmazok által alkotott lokálisan véges lefedéséhez létezik az illető lefedésnek alárendelt egységbontás.*

Bizonyítás. Tekintsük az M sokaságot, s tegyük föl, hogy $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan lokálisan véges nyílt lefedése M-nek, ahol $\forall \alpha \in A : \overline{U}_\alpha$ kompakt halmaz. (Ilyen lefedés egzisztenciáját A2. biztosítja.) A4. alapján létezik M-nek olyan $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(W_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedése, hogy

$$\forall\, \alpha \in A : \quad \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha, \quad \overline{V_\alpha} \subset W_\alpha.$$

A3-ra való hivatkozással minden $\alpha \in A$ indexhez megadható olyan $h_\alpha \in C^\infty(M)$ függvény, hogy
(1) $\quad \forall\, q \in M : \ h_\alpha(q) \in [0, 1]$;
(2) $\quad h_\alpha(q) > 0$, ha $q \in \overline{V}_\alpha$;
(3) $\quad h_\alpha(q) = 0$, ha $q \in M \setminus W_\alpha$.
(Indoklásként elég annyit megjegyezni, hogy $\forall\, \alpha \in A : \overline{V}_\alpha$ kompakt halmaz, mert zárt részhalmaza az $\overline{U}_\alpha$ kompakt halmaznak, s így A3. feltételei teljesülnek.)
Ekkor $\operatorname{supp} h_\alpha \subset \overline{W}_\alpha$, s ennélfogva

$$\forall\, \alpha \in A : \quad \operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha. \tag{4}$$

Mivel az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ nyílt lefedés lokálisan véges, minden $p \in M$ pontnak van olyan U környezete, amelynek csupán a lefedés véges sok tagjával nem üres a metszete. Egy ilyen U környezeten (4) miatt a h_α függvények véges sok kivétellel eltűnnek, ezért a

$$h : \ M \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto h(p) := \sum_{\alpha\in A} h_\alpha(p)$$

függvény jól definiált, sima függvény M-en. (1) és (2) figyelembevételével következik, hogy

$$\forall\, p \in M : \quad h(p) > 0.$$

Ha mármost

$$\forall\, \alpha \in A : \quad f_\alpha := \frac{h_\alpha}{h},$$

akkor az $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ függvénycsalád közvetlenül ellenőrizhető módon az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lefedésnek alárendelt egységbontás. □

A8. tétel. *Minden sokaságon létezik lineáris konnexió.*

Bizonyítás. Legyen adva az M n-dimenziós sokaság!

(a) Jegyezzük meg először is, hogy ha $(U, (x^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, akkor az U nyílt részsokaságon létezik lineáris konnexió. – Valóban, tekintsük a

$$\begin{aligned} D_U \quad : \quad & \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \mapsto \mathfrak{X}(U), \\ & (X, Y) \mapsto D_X Y := X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{ha } Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

leképezést! Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ekkor D_U eleget tesz a (D1)–(D3) axiómáknak.

(b) Rátérve a globális eset tárgyalására, induljunk ki M-nek egy olyan $(V_i)_{i\in I}$ nyílt lefedéséből, amelyet relatíve kompakt koordinátakörnyezetek alkotnak. A2-re való hivatkozással tekintsük e lefedés egy $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokálisan véges finomítását! Ekkor $\forall\, \alpha \in A :\ U_\alpha$ koordinátakörnyezet és $\overline{U}_\alpha$ kompakt, s így A7. értelmében létezik az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lefedésnek alárendelt $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ egységbontás. Másrészt az (a)-ban mondottak szerint

$$\forall\, \alpha \in A : \exists\, D_\alpha : \mathfrak{X}(U_\alpha) \times \mathfrak{X}(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(U_\alpha) \ \textit{lineáris konnexió.}$$

Értelmezzük ezek segítségével a

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \qquad (X, Y) \mapsto D_X Y$$

leképezést a

$$D_X Y := \sum_{\alpha\in A} f_\alpha (D_\alpha)_{X_\alpha} Y_\alpha, \qquad X_\alpha := X \restriction U_\alpha,\ Y_\alpha := Y \restriction U_\alpha$$

előírással! Megmutatjuk, hogy így lineáris konnexiót adtunk meg az M sokaságon.

(1) Tetszőleges $\alpha \in A$ esetén $f_\alpha (D_\alpha)_{X_\alpha} Y_\alpha$ vektormező U_α-n, s ez $U_\alpha \setminus \operatorname{supp} f_\alpha$ fölött a zérusvektormezővel esik egybe. Az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lefedés lokális végessége folytán a sokaság minden pontjának van olyan környezete, amelyet a lefedésnek csak véges sok tagja metsz nemüres halmazban, így a $\sum\limits_{\alpha\in A} f_\alpha (D_\alpha)_{X_\alpha} Y_\alpha$ összegként bevezetett $D_X Y$ valóban jól definiált vektormező.

(2) *Az $(X, Y) \mapsto D_X Y$ leképezés lineáris konnexió.*
Csupán a (D3) feltétel teljesülését ellenőrizzük; (D1) és (D2) igazolása még egyszerűbb. – Legyen $h \in C^\infty(M)$ tetszőleges, s a rövidség kedvéért a $h \restriction U_\alpha$ leszűkítésekre is tartsuk meg a h jelölést. $\forall\, p \in M$:

$$\begin{aligned}
(D_X hY)(p) &= \left(\sum_{\alpha\in A} f_\alpha (D_\alpha)_{X_\alpha} hY_\alpha\right)(p) \overset{\text{(a),(D3)}}{=} \\
&= \left[\sum_{\alpha\in A} f_\alpha \big[(X_\alpha h)Y_\alpha + h(D_\alpha)_{X_\alpha} Y_\alpha\big]\right](p) = \\
&= \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p)(Xh)(p)Y(p) + h(p)\left(\sum_{\alpha\in A} f_\alpha (D_\alpha)_{X_\alpha} Y_\alpha\right)(p) = \\
&= \big[(Xh)Y\big](p)\sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p) + h(p)(D_X Y)(p) \overset{\text{(PU3)}}{=} \\
&= \big[(Xh)Y + hD_X Y\big](p);
\end{aligned}$$

ez p tetszőlegessége folytán azt jelenti, hogy fennáll a kívánt

$$D_X hY = (Xh)Y + hD_X Y$$

összefüggés. □

A9. tétel. *Minden sokaságon létezik Riemann-struktúra.*

Bizonyítás. A8. igazolásának gondolatmenetét követjük. – Tekintsük az M sokaságot! Válasszuk ki M-nek egy olyan $(V_i)_{i\in I}$ nyílt lefedését, amelynek tagjai relatíve kompakt koordinátakörnyezetek, s legyen $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ lokálisan véges finomítása $(V_i)_{i\in I}$-nek. Most is megállapítjuk, hogy $\forall\ \alpha \in A:\ U_\alpha$ koordinátakörnyezet és $\overline{U}_\alpha$ kompakt. A7. alapján létezik $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$-nak alárendelt $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ egységbontás.

(a) Mivel az U_α halmazok koordinátakörnyezetek, ezek mindegyikén létezik g^α Riemann-struktúra.– Valóban, tetszőlegesen rögzített α mellett legyen $(x^i)_{i=1}^n$ lokális koordinátarendszer U_α-n! Ha

$$\forall\ p \in U_\alpha;\quad v = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\quad w = w^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p:\quad g_p^\alpha(v,w) := \sum_{i=1}^n v^i w^i,$$

akkor g^α nyilvánvalóan Riemann-struktúra U_α-n.

(b) Legyen ezek után

$$\forall\ p \in M;\ v,w \in T_pM:\quad g_p(v,w) := \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p) g_p^\alpha(v,w).$$

Itt a jobboldali összeg véges, hiszen $f_\alpha(p) \neq 0$ csak véges sok α index esetén áll fenn. Ugyancsak világos, hogy g_p belső szorzat a T_pM érintőtéren, tehát már csak annak ellenőrzése van hátra, hogy a $g : p \in M \mapsto g_p \in \mathcal{T}_2^\circ(T_pM)$ leképezés alkalmas simasági feltételnek tesz eleget; nevezetesen:

$$\forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M):\quad g(X,Y):\quad p \in M \mapsto [g(X,Y)](p) := g_p(X_p,Y_p) \in \mathbb{R}$$

sima függvény. A kérdés lokális. Tekintsünk ezért egy tetszőleges $p \in M$ pontot, s adjunk meg olyan $\big(U, (x^i)_{i=1}^n\big)$ térképet p körül, amelyre $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ csak véges $\alpha \in A$-ra teljesül. Nyilvánvalóan elegendő a

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right); \qquad 1 \leq i,\ j \leq n$$

függvények simaságát ellenőriznünk. Mivel $\forall\ a \in U$:

$$\begin{aligned} g_{ij}(a) &= g_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a\right) := \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(a) g_a^\alpha\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_a\right) \\ &= \left(\sum_{\alpha \in A} f_\alpha g_{ij}^\alpha\right)(a), \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$g_{ij} = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha g_{ij}^\alpha; \qquad 1 \leq i,\ j \leq n.$$

Itt a jobboldali összeg sima függvényekből képzett véges összeg (hiszen $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$), tehát a g_{ij} függvények mindegyike sima. □

A.10 megjegyzés. Érvelésünk nem alkalmas indefinit pszeudo-Riemann struktúra konstruálására. (A $g \in \mathcal{T}_2^\circ(M)$ pszeudo-Riemann struktúrát akkor mondjuk indefinitnek, ha tetszőleges $p \in M$ esetén a g_p szimmetrikus bilineáris forma se nem pozitív, se nem negatív definit.) Ténylegesen az a helyzet, hogy például az S^2 gömbön egyáltalán nem létezik indefinit pszeudo-Riemann struktúra. Pontosabb eredmény ezzel kapcsolatban az, hogy *a tórusz és az ún. Klein-palack az egyedüli olyan kétdimenziós kompakt sokaságok, amelyeken létezik indefinit pszeudo-Riemann-struktúra.* (Ld. N. Steenrod: *The topology of fiber bundles,* Princeton University Press, 1951.; 207. oldal.)

Irodalomjegyzék

Halmazelmélet és topológia

1. M. Eisenberg: *Axiomatic Theory of Sets and Classes*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.
2. M. Eisenberg: *Topology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.
3. W. W. Fairchild – C. Ionescu Tulcea: *Sets*, Saunders, Philadelphia, 1970.
4. W. W. Fairchild – C. Ionescu Tulcea: *Topology,* Saunders, Philadelphia, 1971.

Analízis

5. T. M. Apostol: *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1957.
6. A. Avez: *Differential Calculus*, Wiley (Interscience), Chichester - New York, 1986.
7. J. R. Munkress: *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley, Redwood City, California, 1991.
8. M. Spivak: *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.

Elemi differenciálgeometria

9. M. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
10. D. Laugwitz: *Differential and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1965.
11. B. O'Neill: *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.
12. J. A. Thorpe: *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York - Berlin, 1979.

Sokaságok és Riemann-geometria

13. W. M. Boothby: *An Introduction to Differentable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

14. M. do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.

15. B. O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

16. M. Spivak: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vols. I–V (2nd edition), Publish or Perish, Houston, Texas, 1979.

Speciális tárgyú, haladottabb munkák

17. A. L. Besse: *Manifolds all of whose geodesics are closed* (Ergebnisse der Mathematik, 93), Springer-Verlag, Berlin, 1978.

18. A. L. Besse: *Einstein Manifolds* (Ergebnisse der Mathematik, 3. Folge, Bd 10), Springer-Verlag, Berlin, 1987.

19. S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.

20. J. Wolf: *Spaces of Constant Curvature* (5th edition), Publish or Perish, Wilmington, Del., 1984.

Matematikatörténet

21. J. Dieudonné: *Geschichte der Mathematik 1700 - 1900*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1985.

Szimbólumok jegyzéke

(A *Halmazelméleti alapok* című fejezetben bevezetett, általános jellegű jelöléseket nem soroljuk föl.)

Név- és tárgymutató