Hiperbolikus geometria feladatsor

Nagy Ábris

2010. január 22.

1. Feladat. *Legyen S egy halmaz és $\rho \subset S \times S$ egy reflexív reláció S-en, amelyre teljesül, hogy*

$$a\rho b \wedge a\rho c \Longrightarrow b\rho c \qquad \forall\, a, b, c \in S \tag{1}$$

Igazoljuk, hogy ρ ekvivalenciareláció.

Megoldás: Elegendő megmutatni, hogy ρ szimmetrikus és tranzitív. Először megmutatjuk, hogy ρ szimmetrikus. Legyen $a\rho b$. Itt a reflexivitást felhasználva (1) alapján $a\rho b \wedge a\rho a \Longrightarrow b\rho a$. Így tehát $a\rho b \Longrightarrow b\rho a$.

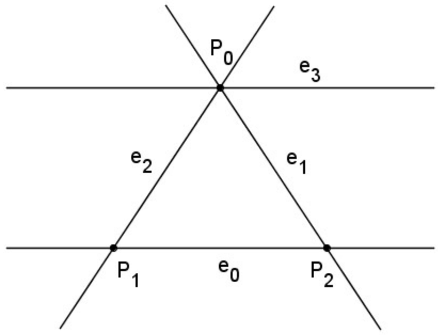
Ezután megmutatjuk, hogy ρ tranzitív. Legyen $a\rho b$ és $b\rho c$. Ekkor ρ szimmetriáját és (1)-et felhasználva $a\rho b \wedge b\rho c \Longrightarrow b\rho a \wedge b\rho c \Longrightarrow a\rho c$, azaz ρ tranzitív. ∎

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy affin síkban minden ponton legalább három egyenes megy át. Mutassuk meg ennek felhasználásával, hogy egy affin sík minden egyenesére illeszkedik legalább két pont.*

Megoldás: Legyen $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ egy tetszőleges affin sík. Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{A}$ minden pontjára legalább három egyenes illeszkedik.

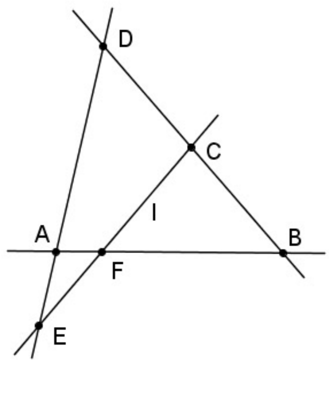
Legyen $P_0 \in \mathcal{P}$ egy tetszőleges pont. Ekkor $(A3)$ miatt $\exists\, P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ pontok úgy, hogy P_0, P_1, P_2 nem kollineárisak. Legyenek e_0 a P_1 és P_2, e_1 a P_0 és P_2, valamint e_2 a P_0 és P_1 pontokra illeszkedő egyértlemű egyenesek (ezek $(A1)$ miatt léteznek). Itt e_0, e_1, e_2 különböző egyenesek, hiszen P_0, P_1, P_2 nem kollineárisak, továbbá $P_0 \notin e_0$. Így $(A2)$ alapján $\exists\, e_3 \in \mathcal{L}$, amelyre $P_0 \in e_3$ és $e_0 \| e_3$. Ekkor e_3 különbözik e_1-től és e_2-től, hiszen e_3-nak nincs közös pontja e_0-lal, míg a másik két egyenesnek van közös pontja. Tehát e_1, e_2, e_3 P_0-ra illeszkedő különböző egyenesek. Mivel P_0 tetszőleges volt, így azt kaptuk, hogy $\mathbb{A}$ bármely pontjára legalább három egyenes illeszkedik.

Ezután $e_0 \in \mathcal{L}$ legyen tetszőleges egyenes. Ekkor $(A3)$ miatt $\exists\, P_0 \in \mathcal{P}$ pont, amelyre $P_0 \notin e_0$. Így $(A2)$ alapján egyértelműen $\exists\, e_3 \in \mathcal{L}$, amelyre $P_0 \in e_3$ és $e_0 \| e_3$. Az előzőek alapján azonban P_0-ra legalább három (különböző) egyenes illeszkedik, ezért $\exists\, e_1, e_2 \in \mathcal{L}$, hogy $P_0 \in e_1 \cap e_2$. Mivel az $(A2)$-ben szereplő párhuzamos egyenes egyértelmű, így e_1 és e_2 nem párhuzamosak e_0-lal, azaz $\exists\, P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, amelyekre $P_1 \in e_0 \cap e_2$ és $P_2 \in e_0 \cap e_1$. Itt P_1 és P_2 különbözők, különben e_1 és e_2 $(A1)$ miatt egybesenének. ∎



3. Feladat. *Igazoljuk, hogy rendezett illeszkedési síkban bármely két pont között van pont.*

Megoldás: Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ tetszőleges rendezett illeszkedési struktúra, és $A, B \in \mathcal{P}$ tetszőleges (különböző) pontok. Ekkor $(I3)$ szerint $\exists\, C \in \mathcal{P}$ pont, amelyre A, B, C nem kollineárisak, továbbá $(R3)$ szerint $\exists\, D \in \mathcal{P}$ úgy, hogy $B - C - D$ teljesül. Ezután $(R3)$ ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $\exists\, E \in \mathcal{P}$, amelyre $D - A - E$ áll fenn. Legyen $l \in \mathcal{L}$ az E és C pontokra illeszkedő egyenes. Ekkor természetesen az l egyenesnek van olyan pontja, amely B és D között van. Így $ABD\triangle$-re és l-re alakalmazva $(R4)$-et $\exists\, F \in \mathcal{P}$, amelyre vagy $A - F - D$, vagy $A - F - B$. Tegyük fel, hogy $A - F - D$ teljesül. Ekkor $F \neq E$ $(R2)$ miatt. Így azonban azt kapjuk, hogy A, C, D kollineárisak, ami maga után vonja, hogy A, B, C kollineárisak, de ez ellentmond a korábbi feltevésünknek. Tehát csak az az eset lehetséges, hogy $A - F - B$, ami A és B tetszőleges volta miatt azt jelenti, hogy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ bármely két pontja között van egy harmadik. ■



4. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha rendezett illeszkedési síkban egy egyenes egy háromszög egyik oldalát belső pontban, egy másik oldalát pedig külső pont-*

ban metszi, akkor metszi a háromszög harmadik oldalát is, mégpedig belső pontban.

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ rendezett illeszkedési sík, amelyben adott az $ABC\triangle$ háromszög. Legyen továbbá $e \in \mathcal{L}$, amelyre $e \cap \overleftrightarrow{AB} = D$ és $e \cap \overleftrightarrow{BC} = E$ úgy, hogy $A - B - D$ és $B - E - C$ teljesül. Mivel e a háromszög $\overline{BC}$ oldalát belső pontban metszi és nem illeszkedik egyetlen csúcsára sem (különben A, B, C kollineáris lenne), így alkalmazható a Pash-axióma, azaz e metszi a háromszög egy másik oldalát is belső pontban. Ez az oldal azonban nem lehet $\overline{AB}$, mert akkor $\overleftrightarrow{AB} = e$ teljesülne. Tehát e (belső pontban) metszi $\overline{AC}$-t.

Ennek a felhasználásával az előző állítás bizonyítása a következőképpen történhet: Legyenek $A, B \in \mathcal{P}$ tetszőleges pontok. Ekkor $\exists C \in \mathcal{P}$, hogy A, B, C nem kollineárisak. Legyenek $D, E \in \mathcal{P}$ olyan pontok, hogy $B - C - D$ és $A - D - E$ teljesüljön. Ekkor az $ABD\triangle$ háromszögre és az $\overleftrightarrow{EC}$ egyenesre alkalmazva az előzőeket kapjuk az állítást. ■

5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha A, B, C egy rendezett illeszkedési sík (különböző) kollineáris pontjai, akkor az $A - B - C$, $B - C - A$, $C - A - B$ relációk közül legalább az egyik teljesül.*

Megoldás: ■

6. Feladat. *Hilbert-síkot alapul véve igazoljuk a következőket:*

1. *Létezik Lambert- és Saccheri-négyszög.*
2. *A Saccheri-négyszögek felső alapszögei egybevágók, a középvonaluk pedig merőleges mindkét alapra.*
3. *Ha egy $ABCD\square$ négyszögben az $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszög, akkor*

$$C\sphericalangle > D\sphericalangle \iff \overline{AD} > \overline{BC}$$

4. *Ha egy hegyes $ABC\measuredangle$ $\overrightarrow{BC}$ szárára illeszkedő P és P' pontokra $B - P - P'$ teljesül, továbbá Q illetve Q' a P-ből illetve P'-ből $\overrightarrow{BA}$-ra bocsátott merőleges talppontja, akkor $\overline{PQ} < \overline{P'Q'}$*

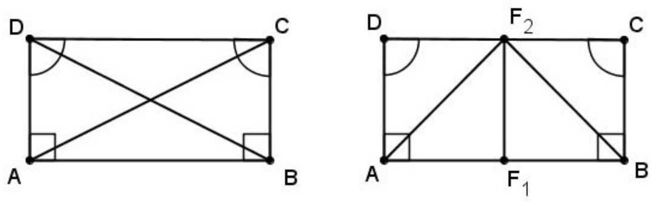
Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík.

1. Először a Lambert-négyszög létezését bizonyítjuk. Ehhez legyenek A, B,$C \in \mathcal{P}$ nem kollineáris pontok, amelyekre $ABC\sphericalangle$ derékszög. Ilyen pontok léteznek, hiszen korábban láttuk, hogy létezik derékszög. Legyen továbbá $D \in \mathcal{P}$ olyan pont, amelyre $A - D - C$ teljesül. Állítsunk merőlegest D-ből $\overleftrightarrow{BA}$-ra és $\overleftrightarrow{BC}$-re és jelölje ezen merőlegesek talppontjait A' és C'. Ekkor $A'BDC'\square$ Lambert-négyszög, ugyanis $A'\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ és $C'\sphericalangle$ derékszögek, továbbá $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ és $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \emptyset$ az oldalegyensek párhuzamossága miatt.

Most megmutatjuk a Saccheri-négyszög létezését. Legyenek $A, B \in \mathcal{P}$ tetszőleges pontok. Állítsunk merőlegeseket A-ban és B-ben $\overleftrightarrow{AB}$-re, és jelölje ezeket rendre e és f. Legyen $C \in f$ tetszőleges. Ekkor a szakaszfelmérés axiómája szerint $!\exists\, D \in e$, amelyre $\overline{AD} = \overline{BC}$, valamint C és D az $\overleftrightarrow{AB}$ uyganazon oladalán vannak. Ekkor $ABCD\square$ Saccheri-négyszög, uyganis $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszögek, $\overline{AD} = \overline{BC}$, továbbá $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ és $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \emptyset$. Utóbbi az oldalegyenesek párhuzamossága miatt, előbbi pedig azért, mert C és D az $\overleftrightarrow{AB}$ uyganazon oladalán vannak.

2. Legyen $ABCD\square$ Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszög, valamint $\overline{AD} = \overline{BC}$. Ekkor tekintve az $ABD\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögeket $\overline{DA} = \overline{BC}$, $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ és $\overline{AB} = \overline{AB}$ miatt $ABD\triangle \cong ABC\triangle$, tehát $\overline{AC} = \overline{BD}$. Most az $ACD\triangle$ és $BCD\triangle$ háromszögekre $\overline{DA} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{DB}$ és $\overline{CD} = \overline{CD}$, így $ACD\triangle \cong BCD\triangle$, ezért $CDA\sphericalangle = BCD\sphericalangle$. Ezzel megkaptuk, hogy a felső alapszögek egybevágók.

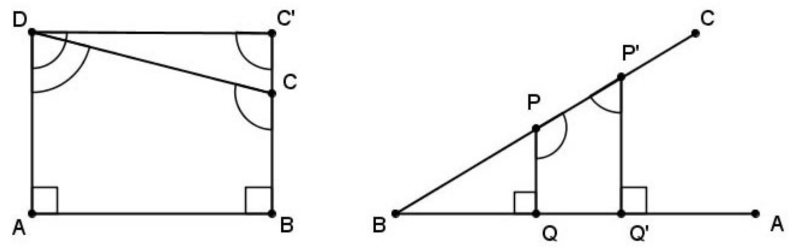
Ezután legyen F_1 az $\overline{AB}$, F_2 a $\overline{CD}$ szakasz felezőpontja. Itt $AF_2D\triangle \cong BCF_2\triangle$ ugyanis $\overline{F_2D} = \overline{CF_2}$, $F_2DA\sphericalangle = BCF_2\sphericalangle$ és $\overline{AD} = \overline{BC}$, ezért $\overline{AF_2} = \overline{BF_2}$. Így azonban $AF_1F_2\triangle \cong F_1BF_2\triangle$, hiszen $\overline{AF_1} = \overline{F_1B}$, $\overline{AF_2} = \overline{BF_2}$ és $\overline{F_1F_2} = \overline{F_1F_2}$ teljesül, amiből $AF_1F_2\sphericalangle = F_2F_1B\sphericalangle$ következik. Mivel ez utóbbiak mellékszögek, így azt kapjuk, hogy mindkettő derékszög. Az $F_1F_2D\sphericalangle$ és $CF_2F_1\sphericalangle$ szögek egyenlőségét hasonlóan kapjuk, az $AF_1D\triangle \cong BCF_1\triangle$ és $F_1F_2D\triangle \cong F_1CF_2\triangle$ egybevágóságokból, így ezek is derékszögek.



3. $(\Leftarrow)$ Legyen $ABCD\square$ négyszög, amelyre $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszög, valamint $\overline{AD} > \overline{BC}$. Ekkor $\exists\, C' \in \overrightarrow{BC}$, hogy $\overline{AD} = \overline{BC'}$. Itt $B - C - C'$ és így $ADC\sphericalangle < ADC'\sphericalangle$, hiszen $\overline{DC}$ az $ADC'\sphericalangle$ belsejében van. Azonban $ABDC'\square$ Saccheri-négyszög, ezért $ADC'\sphericalangle = BC'D\sphericalangle$, továbbá $BCD\sphericalangle$ a $CC'D\triangle$ C csúcsánál lévő külsőszöge, így a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $CC'D\sphericalangle < BCD\sphericalangle$. Összesen tehát azt kaptuk, hogy $ADC\sphericalangle < ADC'\sphericalangle = BC'D\sphericalangle = CC'D\sphericalangle < BCD\sphericalangle$, így $ADC\sphericalangle < BCD\sphericalangle$.

$(\Rightarrow)$ A megfordításhoz legyen $ABCD\square$ négyszög, amelyre $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszög, valamint $BCD\sphericalangle > ADC\sphericalangle$. Ekkor ha $\overline{AD} = \overline{BC}$ teljesülne, akkor $ABCD\square$ Saccheri-négyszög lenne, amiből a korábbiak alapján $BCD\sphericalangle = ADC\sphericalangle$ következne, így ez nem lehet. Ha $\overline{AD} < \overline{BC}$ állna fenn, akkor pedig az állítás előző irányának alkalmazásával $BCD\sphericalangle < ADC\sphericalangle$ adódna, ami szintén nem lehetséges. Így csak $\overline{AD} > \overline{BC}$ teljesülhet.

4. Legyen $ABC\sphericalangle$ hegyesszög és legyenek $P, P', Q, Q' \in \mathcal{P}$ pontok az állí-



tás feltételeinek megfelelően. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $B - Q' - A$ és $B - P' - C$ teljesül. Tekintve a $BQ'P'\triangle$ háromszöget a külsőszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy $BP'Q'\sphericalangle < AQ'P'\sphericalangle$. Másrészt a $BQP\triangle$ háromszöget tekintve szintén a külsőszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy $PQB\sphericalangle < QPC\sphericalangle$. Csakhogy $AQ'P'\sphericalangle$ és $PQB\sphericalangle$ a feltétel szerint mindeketten derékszögek, így a két egyenlőtlenség alapján $BP'Q'\sphericalangle < QPC\sphericalangle$. Alkalmazva az előző állítást $QQ'P'P\square$-re adódik, hogy $\overline{PQ} < \overline{P'Q'}$. ■

7. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy Hilbert-síkban a következő állítások ekvivalensek:*

1. *(EP)*
2. *Ha egy egyenes metszi két párhuzamos egyenes egyikét, akkor metszi a másikat is.*
3. *A párhuzamosság tranzitív reláció az egyenesek halmazában.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík.

($1 \Rightarrow 2$) Legyenek $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ párhuzamos egyenesek, továbbá $e_3 \in \mathcal{L}$ olyan egyenes, amelyre $e_3 \cap e_1 = P$. Ekkor (EP) miatt e_1 az egyetlen olyan egyenes, amelyre $P \in e_1$ és $e_1 \| e_2$, ezért e_3 nem lehet párhuzamos e_2-vel, azaz $e_2 \cap e_3 \neq \emptyset$

($2 \Rightarrow 3$) Legyenek $e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{L}$ olyan egyenesek, amelyekre $e_1 \| e_2$ és $e_2 \| e_3$. Ekkor ha e_1 és e_3 metszők lennének, akkor $e_2 \| e_3$ maitt az előző pont alapján e_1 és e_2 is metszők lennének, ami $e_1 \| e_2$ miatt nem lehetséges. Így $e_1 \| e_3$.

($3 \Rightarrow 1$) Legyen $e_1 \in \mathcal{L}$ egy tetszőleges egyenes és $P \in \mathcal{P}$ egy rá nem illeszkedő pont. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, e_2, e_3 \in \mathcal{L}$, amelyekre $e_1 \| e_2$, $e_1 \| e_3$ és $P \in e_2 \cap e_3$. Ekkor mivel a párhozamosság az egyenesek halmazán szimmetrikus, valamint a feltétel szerint tranzitív reláció, így $e_1 \| e_2 \wedge e_1 \| e_3 \Longrightarrow e_2 \| e_3$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $P \in e_2 \cap e_3$. ■

8. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy Hilbert-síkban teljesül az euklideszi párhuzamossági axióma, akkor a sík szemieuklideszi (azaz minden Lambert- és Saccheri-négyszög téglalap).*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík, amelyben teljesül (EP). Megmutatjuk, hogy ha egy egyenes merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, akkor merőleges a másikra is. Legyenek $e_1, e_2 \in \mathcal{L}$ párhuzamos egyenesek és $e_3 \in \mathcal{L}$ olyan egyenes, amely merőleges e_1-re. Ekkor a korábbiak alapján tudjuk, hogy e_2 és e_3 metszők, így legyen $P = e_2 \cap e_3$. Állítsunk merőlegest P-ben e_3-ra és jelöljük ezt e_4-gyel. Ekkor $e_1 \| e_4$, különben ellentmondásra jutnánk a külsőszög-egyenlőtlenséggel. Azonban (EP) is teljesül, így $e_4 = e_2$.

Most legyen $ABCD\square$ Lambert-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ és $D\sphericalangle$ derékszögek. Itt $\overleftrightarrow{AD}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ párhuzamosak, hiszen mindkettő merőleges $\overleftrightarrow{AB}$-re. Továbbá $\overleftrightarrow{DC}$ merőleges $\overleftrightarrow{AD}$-re, így az előzőek alapján $\overleftrightarrow{DC}$ merőleges $\overleftrightarrow{BC}$-re is, azaz $C\sphericalangle$ derékszög. Tehát $ABCD\square$ minden szöge derékszög (és szemközti oldalai párhuzamosak), ezért téglalap.

Ezután legyen $ABCD\square$ Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszögek, valamint $\overline{AD} = \overline{BC}$. Állítsunk merőlegest D-ben $\overleftrightarrow{AD}$-re és jelölje C' ezen merőleges és $\overleftrightarrow{BC}$ metszéspontját. Az imént látottak alapján $BC'D\sphericalangle$ derékszög. Tegyük fel, hogy $D\sphericalangle$ kisebb, mint derékszög. Ekkor $B - C - C'$ teljesül, továbbá a $CC'D\triangle$ háromszöget tekintve a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $C\sphericalangle > BC'D\sphericalangle$ áll fenn, ahol ez utóbbi szög derékszög. Ez azonban ellentmond annak a korábi eredményünknek, hogy a Saccheri-négyszögek felső alapszögei egybevágók. Hasonlóan ellentmondásra jutunk azzal a feltevéssel, hogy $D\sphericalangle$ nagyobb, mint derékszög. Így csak az az eset lehetséges, ha $D\sphericalangle$ derékszög, de ekkor $ABCD\square$ téglalap. ∎

9. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor minden pontra legalább két olyan egyenes illeszkedik, amely párhuzamos egy, a pontra nem illeszkedő adott egyenessel.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík. A 6. feladat első része szerint $\mathcal{S}$-ben létezik Saccheri-négyszög, továbbá az előző feladat értelmében ha $\mathcal{S}$-ben teljesül az euklideszi práhuzamossági axióma, akkor $\mathcal{S}$-ben minden Saccheri-négyszög téglalap. Így adódik, hogy ha $\mathcal{S}$-ben teljesül az euklideszi práhuzamossági axióma, akkor létezik $\mathcal{S}$-ben téglalap. Vegyük észre, hogy ez épp az állítás kontraponáltja. ∎

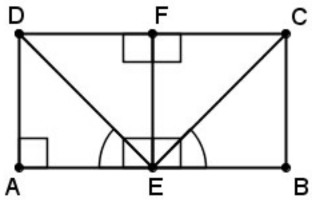
1. Lemma. *Hilbert-síkban a következő állítások érvényesek:*

1. *Legyen $ABCD\square$ Lambert-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$, $C\sphericalangle$ derékszögek. Ha A-t és D-t tükrözzük $\overleftrightarrow{CD}$-re, akkor $AA'D'D\square$ Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$ és $A'\sphericalangle$ derékszögek, valamint $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$. (Itt A' és D' az A ill. D pontok tükörképei).*

2. *Legyen $ABCD\square$ Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ derékszögek és $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Ha E az $\overline{AB}$ és F a $\overline{CD}$ felezőpontja, akkor $AEFD\square$ és $EBCF\square$ Lambert-négyszögek, amelyekre $A\sphericalangle$, $E\sphericalangle$, $F\sphericalangle$, illetve $E\sphericalangle$, $B\sphericalangle$, $F\sphericalangle$ derékszögek.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík.

1. Legyen $AEFD\square$ Lambert-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $E\sphericalangle$, $F\sphericalangle$ derékszögek. Ekkor a szakaszfelmérés axiómája szerint egyértlemű́en léteznek olyan $B \in \overleftrightarrow{AE}$ és $C \in \overleftrightarrow{DF}$ pontok, amelyekre $A - E - B$ és $D - F - C$, valamint $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ és $\overline{DF} \cong \overline{FC}$ teljesül. Itt látható, hogy B az A, C pedig a D pont $\overleftrightarrow{EF}$-re vonatkozó tükörképe. Ekkor $EFD\triangle \cong EFC\triangle$ (SAS) alapján, ezért $\overline{DE} \cong \overline{CE}$ és $DEF\sphericalangle \cong CEF\sphericalangle$. Mivel $AEF\sphericalangle \cong BEF\sphericalangle$ is teljesül, így a szögösszeadás tétele miatt $AED\sphericalangle \cong BEC\sphericalangle$. Ebből pedig $AED\triangle \cong BEC\triangle$ következik szintén (SAS) alapján, hiszen $\overline{DE} \cong \overline{CE}$, $AED\sphericalangle \cong BEC\sphericalangle$ és $\overline{AE} \cong \overline{EB}$. Ezért $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ és $DAE\sphericalangle \cong EBC\sphericalangle$, ahol mindekettő derékszög. Így $ABCD\square$ Saccheri-négyszög.



2. Legyen $ABCD\square$ Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ derékszögek és $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, továbbá legyen E az $\overline{AB}$ és F a $\overline{CD}$ felezőpontja. Ekkor $(T21)$ szerint $\overleftrightarrow{EF}$ merőleges $\overleftrightarrow{AB}$-re és $\overleftrightarrow{CD}$-re egyaránt. Így valóban $AEFD\square$ és $EBCF\square$ Lambert-négyszögek, amelyekre $A\sphericalangle$, $E\sphericalangle$, $F\sphericalangle$, illetve $E\sphericalangle$, $B\sphericalangle$, $F\sphericalangle$ derékszögek. ∎

1. Definíció. *Egy $ABCD\square$ Lambert-négyszög esetén az $ABCD\square$-ből az 1. lemmában leírt konstrukcióval kapott Saccheri-négyszöget, az $ABCD\square$-ből kettőzéssel kapott Saccheri-négyszögnek nevezzük.*

Továbbá egy $ABCD\square$ Saccheri-négyszög esetén az $ABCD\square$-ből az 1. lemmában leírt konstrukcióval kapott Lambert-négyszöget, az $ABCD\square$-ből felezéssel kapott Lambert-négyszögnek nevezzük.

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy Hilbert-síkban a következő állítások érvényesek:*

1. *Ha van olyan Lambert-négyszög, amelynek negyedik szöge hegyesszög (ill. derékszög vagy tompaszög), akkor a sík minden Lambert-négyszöge ilyen tulajdonságú, teljesül továbbá, hogy a Saccheri-négyszögek felső alapszögeinek típusa megegyezik a Lambert-négyszögek begyedik szögének típusával.*

2. *Ha egy Hilbert-síkban létezik téglalap, akkor a sík szemieuklideszi. A téglalapok szemközti oldalai egybevágók.*

3. *Ha egy Hilbert-sík eleget tesz a hegyesszög- (ill. a tompaszög-) hipotézisnek, akkor a Lambert-négyszögeknek a hegyesszöghöz (ill. a tompaszöghöz) tartozó oldalai nagyobbak (ill. kisebbek), mint a velük szemközti oldalak.*

4. *Ha egy Hilbert-sík eleget tesz a hegyesszög- (tompaszög-) hipotézisnek, akkor a Saccheri-négyszögek felső alapja nagyobb (ill. kisebb), mint a felső alap.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ tetszőleges Hilbert-sík.

1. Legyen $AEFD\square$ Lambert-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $E\sphericalangle$, $F\sphericalangle$ derékszögek és $D\sphericalangle$ hegyesszög (ill. derékszög vagy tompaszög). Legyen $ABCD\square$ az $AEFD\square$-ből kettőzéssel kapott Saccheri-négyszög. Ekkor $ABCD\square$ olyan Saccheri-négyszög, amelynek felső alapszögei hegyesszögek (ill. derékszögek vagy tompaszögek), így az uniformitás tétele alapján a sík minden Saccheri-négyszöge rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Most legyen $A'E'F'D'\square$ tetszőleges Lambert-négyszög, amelyre $A'\sphericalangle$, $E'\sphericalangle$ és $F'\sphericalangle$ derékszögek. Ekkor az $A'E'F'D'\square$-ből kettőzéssel kapott Saccheri-négyszög felső alapszögei hegyesszögek (ill. derékszögek vagy tompaszögek), ezért $A'E'F'D'\square$-ben is $D'\sphericalangle$ hegyeszög. A kettőzés konstrukciójából pedig látható, hogy a Saccheri-négyszögek felső alapszögeinek típusa megegyezik a lambert-négyszögek negyedik szögének típusával.

2. Legyen $ABCD\square$ tégalap. Ez egy olyan Lambert-négyszög, amelynek negyedik szöge derékszög. Az előző állítás szerint ekkor a sík minden Lambert-négyszögének negyedik szöge derékszög, vagyis a sík minden Lambert-négyszöge téglalap. Másfelől az $ABCD\square$-ből kettőzéssel kapott Saccheri-négyszög felső alapszögei derékszögek, és így az uniformitás tétel miatt a sík minden Saccheri-négyszögének felső alapszögei derékszögek, azaz a sík minden Saccheri-négyszöge is téglalap. Tehát ha létezik téglalap, akkor a sík szemieuklideszi.

Másrészt ha $ABCD\square$ tégalap, akkor $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$ derékszögek, valamint $D\sphericalangle \cong C\sphericalangle$. Így $(T22)$ alapján $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Hasonlóan adódik $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ is.

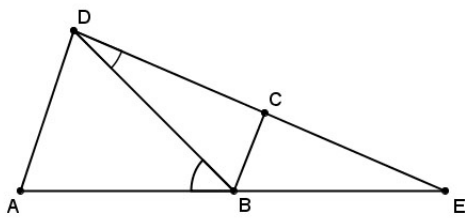
3. Az állítás közvetlenül adódik $(T22)$-ből.

4. Legyen $ABCD\square$ tetszőleges Saccheri-négyszög, amelyre $A\sphericalangle$, $B\sphericalangle$ derékszögek és $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Ekkor a hegyeszög- (vagy tompaszög-) hipotézis miatt a felezéssel kapott $AEFD\square$ és $EBCF\square$ Lambert-négyszögek negyedik szögei hegyesszögek (vagy tompaszögek), így az előző állítás szerint $\overline{AE} < \overline{FD}$ (vagy $\overline{AE} > \overline{FD}$) és $\overline{EB} < \overline{CF}$ (vagy $\overline{EB} > \overline{CF}$). A szakaszösszadás tétele miatt ez azt jelenti, hogy $\overline{AB} < \overline{CD}$ (vagy $\overline{AB} > \overline{CD}$). ■

11. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy Hilbert-sík eleget tesz Arisztotelész axiómájának, akkor a sík vagy szemieuklideszi vagy pedig a hegyesszög-hipotézis teljesül benne.*

12. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy Hilbert-síkban egy $ABCD\square$-re $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ és $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ teljesül, akkor $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$ és $\overleftrightarrow{AD} \| \overleftrightarrow{BC}$.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $ABCD\square$ egy négyszög, amelyre $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ és $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ teljesül. Ekkor $ABD\triangle \cong BCD\triangle$, hiszen a megfelelő oldalaik egybevágók, így $ABD\sphericalangle \cong CDB\sphericalangle$ és $BDA\sphericalangle \cong DBC\sphericalangle$. Elsőként megmutatjuk, hogy $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek az E pontban metszik egymást. Továbbá tegyük még fel először azt is, hogy $A - B - E$ áll fenn. Ekkor $ABD\sphericalangle$ külső szöge $BED\triangle$-nek, ezért $ABD\sphericalangle > CDB\sphericalangle$, ami lehetetlen, hiszen ezek a szögek egybevágók. Most tegyük fel, hogy $E - A - B$ áll fenn. Ekkor $CDB\sphericalangle$ külső szöge $EBD\triangle$-nek, ezért $CDB\sphericalangle > ABD\sphericalangle$, ami szintén lehetetlen. Végül $E \notin \overline{AB}$, különben $ABCD\square$ nem lenne négyszög. Hasonlóan látható be, hogy $\overleftrightarrow{AD} \| \overleftrightarrow{BC}$ is teljesül (itt $BDA\sphericalangle \cong DBC\sphericalangle$-t kell felhasználni). ■



2. Lemma. *Hilbert-síkban ha egy háromszög egyik szöge derékszög, akkor a másik két szöge kisebb, mint derékszög, továbbá a derészöggel szemközti oldal nagyobb, mint a háromszög másik két oldala.*

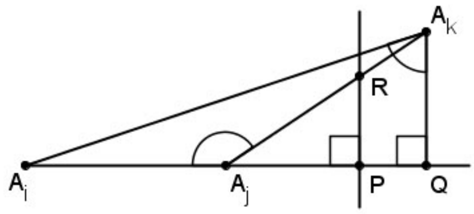
Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $ABC\triangle$ tetszőleges háromszög, amelyre $C\sphericalangle$ derékszög. Ekkor $C\sphericalangle$ mellékszöge is derékszög, ami egyben külső szöge $ABC\triangle$-nek, így ez nagyobb, mint bármely nem mellette fekvő belső szög. Így tehát $C\sphericalangle$ valóban nagyobb, mint $A\sphericalangle$ és $B\sphericalangle$. Ebből pedig rögtön következik, hogy $\overline{AB}$ nagyobb, mint $\overline{BC}$ és $\overline{AC}$, hiszen bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van. ■

13. Feladat. *Legyen adva egy Hilbert-síkban egy legalább kételemű $\{A_1, \cdots, A_n\}$ véges ponthalmaz. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan egyenes, amelynek egyik oldalán van a ponthalmaz összes pontja.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $\{A_1, \cdots, A_n\}$ egy legalább kételemű véges ponthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\overline{AB}$ szakasz kisebb vagy egyenlő, mint a $\overline{CD}$ szakasz, ha vagy $\overline{AB} < \overline{CD}$ teljesül, vagy a két szakasz egybevágó. Ezt $\overline{AB} \leq \overline{CD}$ módon jelöljük. Megmutatjuk, hogy $\leq$ rendezés a szakaszok halmazán.

Természetesen $\overline{AB} \leq \overline{AB}$ minden $\overline{AB}$ szakaszra teljesül. Továbbá ha $\overline{AB} \leq \overline{CD}$ és $\overline{CD} \leq \overline{AB}$ egyszerre áll fenn, akkor $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ teljesül, ugyanis a szakaszok halmazán a $<$ reláció tranzitív, így ha nem lennének egybevágók, akkor $\overline{AB} < \overline{AB}$ adódna, ami a szakaszfelmérés axiómája miatt lehetetlen. Mivel a szakaszok halmazán $\cong$ és $<$ is tranzitív relációk, így $\leq$ is tranzitív. Végül megmutatjuk, hogy bármely két szakasz öszehasonlítható a $\leq$ relációval. Ehhez legyenek $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ tetszőleges szakaszok. Ekkor a szakaszfelmérés axiómája szerint $!\exists E \in \overrightarrow{CD}$, hogy $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Ezután a félegyenes definíciója alapján könnyen látható, hogy vagy $C - E - D$, vagy $C - D - E$, vagy $D = E$ áll fenn. Így vagy $\overline{AB} \leq \overline{CD}$ vagy $\overline{CD} \leq \overline{AB}$ teljesül. Az eddigiek alapján látható, hogy $\leq$ valóban rendezés a szakaszok halmazán.

Most legyenek A_i és A_j a ponthalmaz olyan pontjai, amelyekre $\overline{A_sA_t} \leq \overline{A_iA_j}$ bármely $s, t \in \{1, \cdots, n\}$ esetén. Ilyen pontok léteznek, mert az kiinduló ponthalmaz véges. Legyen $P \in \overleftrightarrow{A_iA_j}$ olyan pont, amelyre $A_i - A_j - P$. Állítsunk merőlegest P-ben $\overleftrightarrow{A_iA_j}$-re és legyen ez az egyenes e. Megmutatjuk, hogy ekkor a ponthalmaz minden pontja az e egyenes A_i-t tartalmazó oldalán van. Indirekt módon tegyük fel, hogy az A_k pont az e egyenes A_i-t nem tartalmazó oldalán, vagy az e egyenesen van. Először tegyük még fel azt is, hogy $A_k \notin \overleftrightarrow{A_iA_j}$. Állítsunk merőlegest A_k-ból $\overleftrightarrow{A_iA_j}$-re és jelölje a kapott talppontot Q. Ekkor $e \| \overleftrightarrow{A_kQ}$, így ha $A_k \notin e$, akkor A_k és Q az e azonos oldalán vannak, ezért vagy $P = Q$ vagy $A_j - P - Q$ teljesül. Következésképp $A_i - A_j - Q$ is fennáll, amiből arra következtethetünk, hogy $A_iA_kA_j\sphericalangle < A_iA_kQ\sphericalangle$. Másrészt az $A_iQA_k\triangle$ háromszögben $Q\sphericalangle$ derékszög, így a 2. lemma értelmében $A_iA_kQ\sphericalangle$ kisebb, mint derékszög, ezért $A_iA_kA_j\sphericalangle$ is kisebb, mint derékszög. Jelölje R $\overline{A_jA_k}$ és e metszéspontját. Ilyen létezik, hiszen $A_i \in e$ esetén $R = A_i$, egyébként pedig A_j és A_i az e különböző oldalán helyezkednek el. Az $A_jPR\triangle$ háromszögben $P\sphericalangle$ derékszög, továbbá $A_iA_jA_k\sphericalangle$ az A_j csúcsnál lévő külső szög, így $A_iA_jA_k\sphericalangle$ nagyobb, mint derékszög. Így tehát azt kaptuk, hogy az $A_iA_jA_k\triangle$ háromszögben $A_j\sphericalangle > A_k\sphericalangle$, így a szemközti oldalakra $\overline{A_iA_k} > \overline{A_iA_j}$, ami ellentmond az A_i,A_j pontok megválasztásának.

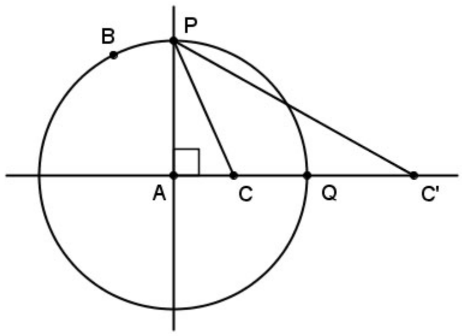


Most vizsgáljuk még meg azt az esetet, amikor $A_k \in \overleftrightarrow{A_iA_j}$. Ekkor $A_k = P$ vagy $A_j - P - A_k$teljesül, amiből $A_i - A_j - A_k$ következik, így a szakaszok közti $<$ reálció definíciója alapján $\overline{A_iA_k} > \overline{A_iA_j}$, ami ismét ellentmond az A_i,A_j pontok megválasztásának. ■

14. Feladat. *Igaz-e minden Hilbert-síkban a háromszög-egyenlőtlenség következő megfordítása: Ha $\overline{AB}$,$\overline{CD}$,$\overline{EF}$ olyan szakaszok, melyek közül bármely kettő összege nagyobb, mint a harmadik, akkor van olyan háromszög, amelynek oldalai az adott szakaszokkal egybevágók.*

15. Feladat. *Igazoljuk, hogy Hilbert-síkban minden körnek egy középpontja van.*

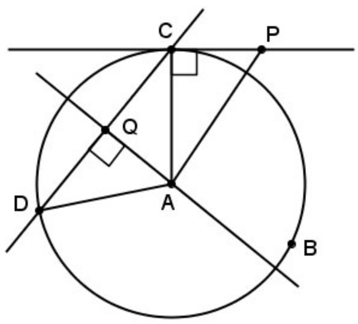
Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és $A, B, C \in \mathcal{P}$ tetszőleges (különböző) pontok. Jelölje $K(A, \overline{AB})$ az A középpontú $\overline{AB}$ sugarú kört. Megmutatjuk, hogy $C \neq A$ nem lehet középpontja $K(A, \overline{AB})$-nek. Ehhez tekintsük az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenest és állítsunk erre merőlegest A-ban, amelyet e-vel jelölünk. Legyen $\overrightarrow{e}$ az e egynes egyik tetszőleges félegyenese. A szakaszfelmérés axiómája szerint egyértelműen léteznek $P \in \overrightarrow{e}$ és $Q \in \overrightarrow{AC}$, hogy $\overline{AP} \cong \overline{AB}$ és $\overline{AQ} \cong \overline{AB}$ teljesül. Ekkor definíció szerint $P, Q \in K(A, \overline{AB})$. Tegyük fel először, hogy $A - C - Q$ áll fenn. Ekkor természetesen $\overline{CQ} < \overline{AQ}$ és így $\overline{CQ} < \overline{AB}$. Másrészt $ACP\triangle$-ben $A\sphericalangle$ derékszög, ezért a 2. lemma szerint $\overline{AP} < \overline{CP}$ és így $\overline{AB} < \overline{CP}$. Tehát azt kaptuk, hogy $\overline{CQ} < \overline{CP}$, ezért a $K(A, \overline{AB})$ kör P és Q pontjai nem lehetnek rajta egyszerre egyetlen C középpontú körön sem. Most tegyük fel, hogy $A - Q - C$ áll fenn. Ekkor $\overline{CQ} < \overline{AC}$. Másrészt $ACP\triangle$-ben $A\sphericalangle$ derékszög, ezért a 2. lemma szerint $\overline{AC} < \overline{CP}$. Így $\overline{CQ} < \overline{CP}$ adódik, tehát a $K(A, \overline{AB})$ kör P és Q pontjai ismét nem lehetnek rajta egyszerre egyetlen C középpontú körön sem. ■



16. Feladat. *Igazoljuk, hogy Hilbert-síkban egy kör minden pontján áthalad egy és csak egy érintő (a körrel további közös ponttal nem rendelkező egyenes). Mit mondhatunk az adott külső ponton átmenő érintőkről?*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és $A, B \in \mathcal{P}$ tetszőleges (különböző) pontok. Továbbá legyen $C \in K(A, \overline{AB})$ szintén tetszőleges. Állítsunk merőlegest C-ben $\overleftrightarrow{AC}$-re és jelöljük ezt e-vel. Először megmutatjuk, hogy e érintője $K(A, \overline{AB})$-nak, azaz e-nek és $K(A, \overline{AB})$-nak C-n kívül nincs más közös pontja. Ehhez legyen $P \in e$ tetszőleges ($P \neq C$) pont. Ekkor az $APC\triangle$ háromszögben $C\sphericalangle$ derékszög, így a 2. lemma értelmében $\overline{AC} < \overline{AP}$, ezért $\overline{AB} < \overline{AP}$. Tehát $P \notin K(A, \overline{AB})$.

Most megmutatjuk, hogy bármely e-től különböző C-re illeszkedő egyenes legalább két pontban metszi $K(A, \overline{AB})$-t. Ehhez legyen $f \in \mathcal{L}$ tetszőleges e-től különböző C-re illeszkedő egyenes. Állítsunk merőlegest A-ból f-re, és jelöljük a kapott talppontot Q-val ($Q = A$ is lehetséges). Mivel e és f különbözők, így $Q \neq C$. A szakaszfelmérés axiómája szerint egyértelműen létezik olyan $D \in \mathcal{P}$ pont a $\overleftrightarrow{QC}$ egyenes C-t nem tartalmazó félegyensén, hogy $\overline{CQ} \cong \overline{QD}$. Ekkor $ACQ\triangle \cong AQD\triangle$ (SAS) alapján, ezért $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ és így $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Tehát D rajta van f-en és $K(A, \overline{AB})$-n, valamint $C \neq D$.
■

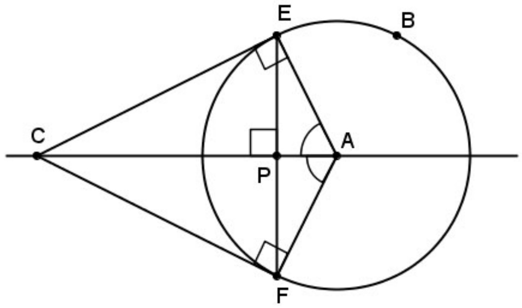


Az adott külső ponton átmenő érintőkről az alábbi állítások adnak leírást.

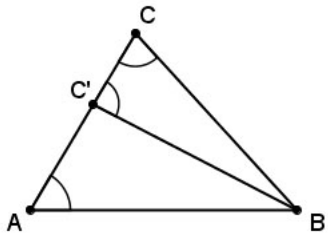
1. Állítás. *Hilbert-síkban bármely kör és külső pont esetén ha létezik a külső pontra illezskedő érintő, akkor létezik mégegy ilyen érintő és a külső pont, valamint az érintési pontok által meghatározott szakszok egybevágók.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és $A, B, C \in \mathcal{P}$ olyan pontok, amelyekre C külső pontja $K(A, \overline{AB})$-nak és létezik $K(A, \overline{AB})$-nak C-re illeszkedő érintője. Legyen az érintési pont E. Ekkor az előző állítás szerint $AEC\sphericalangle$ derékszög. Állítsunk merőlegest E-ből $\overleftrightarrow{AC}$-re és jelölje a kapott talppontot P. A szakaszfelmérés axiómája szerint $!\exists\, F \in \overrightarrow{EP}$, amelyre $\overline{PF} \cong \overline{EP}$. Ekkor $AEP\triangle \cong AFP\triangle$ (SAS) alapján, így $\overline{AF} \cong \overline{AE}$ és $FAP\sphericalangle \cong PAE\sphericalangle$. Tehát $F \in K(A, \overline{AB})$, másrészt $AEC\triangle \cong AFC\triangle$ szintén (SAS) alapján, hiszen $\overline{AF} \cong \overline{AE}$, $FAP\sphericalangle \cong PAE\sphericalangle$ és $\overline{AC} \cong \overline{AC}$. Ezért $AFC\sphericalangle$ szintén derékszög, és így az előző állítás szerint $\overleftrightarrow{CF}$ érintő. Továbbá $AEC\triangle \cong AFC\triangle$ miatt még $\overline{CF} \cong \overline{CE}$ is teljesül. ■

3. Lemma (A háromszögek egybevágóságának SsA alapesete). *Hilbert-síkban ha az $ABC\triangle$ és $DEF\triangle$ háromszögekben $\overline{AB} < \overline{BC}$, továbbá $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ és $A\sphericalangle \cong D\sphericalangle$, akkor $ABC\triangle \cong DEF\triangle$.*



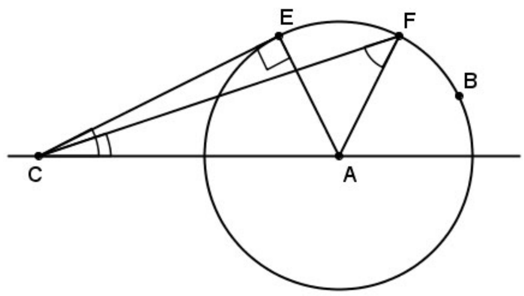
Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $ABC\triangle$ és $DEF\triangle$ a feltételeknek leget tevő háromszögek. (SAS) miatt elegendő bizonyítani, hogy $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\overline{AC} \ncong \overline{DF}$. Legyen pl. $\overline{AC} > \overline{DF}$. Ekkor egyértelműen létezik $C' \in \overrightarrow{AC}$, hogy $\overline{AC'} \cong \overline{DF}$, továbbá a $<$ reláció definíciója alapján $A - C' - C$ teljesül. Itt $ABC'\triangle \cong DEF\triangle$ és így $\overline{BC'} \cong \overline{EF} \cong \overline{BC}$, azaz $BCC'\triangle$ egyenlőszárú. Következésképp $BCA\sphericalangle \cong CC'B\sphericalangle$. Másrészt az $ABC'\triangle$ háromszögnek $CC'B\sphericalangle$ külső szöge, így a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $CAB\sphericalangle < CC'B\sphericalangle$. Továbbá mivel $\overline{AB} < \overline{BC}$, így $BCA\sphericalangle < CAB\sphericalangle$, és ebből $CC'B\sphericalangle < CAB\sphericalangle$ adódik, ami lehetetlen, hiszen ezek a szögek egybevágók. Hasonlóan ellentmondásra jutunk, ha az $\overline{AC} < \overline{DF}$ feltételezéssel élünk (ekkor $A - C - C'$ áll fenn és $ABC'\triangle$-re kell alkalmazni a külsőszögegyenlőtlenséget). ■



2. Állítás. *Hilbert-síkban bármely kör és külső pont esetén a külső pontot a kör középpontjával összekötő egynes által meghatározott bármely félsíkban legfeljebb egy olyan pontja van a körnek, amelyre illeszkedő érintőn rajta van a külső pont.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és $A, B, C \in \mathcal{P}$ olyan pontok, amelyekre C külső pontja $K(A, \overline{AB})$-nak. Ekkor ha nem létezik C-re illeszkedő érintő, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen az érintési pont E. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists\, F \neq C$ pont az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes által meghatározott E-t tartalmazó félsíkban, amelyre $F \in K(A, \overline{AB})$ és az F-beli érintő illeszkedik C-re. Ekkor $AEC\sphericalangle$ és $AFC\sphericalangle$ mindketten derékszögek, így

$AEC\sphericalangle \cong AFC\sphericalangle$, továbbá az $AEC\triangle$ és $AFC\triangle$ háromszögekben az $\overline{AC}$ oldal nagyobb, mint bármely másik oldal. Ezért $AEC\triangle \cong AFC\triangle$ (SsA) alapján, hiszen $\overline{CA} \cong \overline{CA}$, $\overline{AE} \cong \overline{AF}$ és $AEC\sphericalangle \cong AFC\sphericalangle$. Így $ECA\sphericalangle \cong FCA\sphericalangle$, ami a szögfelmérés axiómája szerint azt jelenti, hogy A, E, F kollineárisak, azaz $F \in \overleftrightarrow{CE}$. De $\overleftrightarrow{CE}$ érintő, így csak egyetlen pontban metszi $K(A, \overline{AB})$-t, azaz $F = E$. Ez ellentmondás, hiszen feltettük, hogy $F \neq C$. ∎



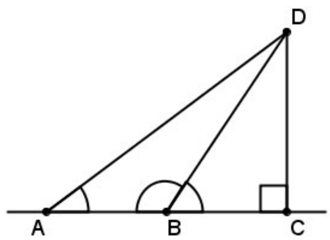
1. Következmény. *Hilbert-síkban bármely kör és külső pont esetén ha létezik a külső pontra illeszkedő érintő, akkor létezik még pontosan egy ilyen érintő és a külső pont, valamint az érintési pontok által meghatározott szakszok egybevágók.*

17. Feladat. *Legynek A, B, C egy Hilbert-sík kollienáris pontjai az $A-B-C$ elrendezéssel, és legyen $D \notin \overleftrightarrow{AB}$ olyan pont, amelyre $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ teljesül. Igazoljuk, hogy $\overline{AD} > \overline{BD} > \overline{CD}$.*

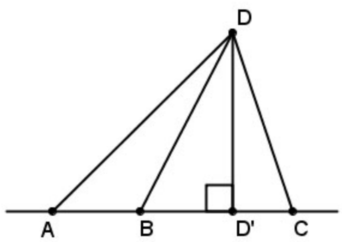
Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne A, B, C, D a feltételeknek megfelelő pontok. Ekkor $BCD\triangle$-ben $C\sphericalangle$ derékszög, ezért ennek mellékszöge is derékszög. Mivel $C\sphericalangle$ mellékszöge olyan külső szög, amely nem mellékszöge $B\sphericalangle$-nek, így a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $B\sphericalangle < C\sphericalangle$. Azonban $(T17)$ szerint bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben, nagyobb oldal van, ezért $\overline{CD} < \overline{BD}$. Az $ACD\triangle$-ben is $ACD\sphericalangle$ derékszög, ezért hasonlóan, mint előbb $DAC\sphericalangle < ACD\sphericalangle$. Másrészt $ABD\sphericalangle$ külső szöge $BCD\triangle$-nek, így a külsőszög-egyenlőtlenség alapján $ABD\sphericalangle > ACD\sphericalangle$. Tehát $DAB\sphericalangle < ABD\sphericalangle$, azaz $ABD\triangle$-ben $A\sphericalangle < B\sphericalangle$, így ismét $(T17)$ szerint $\overline{BD} < \overline{AD}$. Ezzel megkaptuk a kívánt állítást. ∎

18. Feladat. *Legyen adva egy Hilbert-síkban a $DAC\triangle$. Igazoljuk, hogy ha B egy A és C közötti pont, akkor $\overline{DB} < \overline{DA}$ vagy $\overline{DB} < \overline{DC}$ teljesül.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $DAC\triangle$, valamint legyen $B \in \overleftrightarrow{AC}$ olyan pont, amelyre $A - B - C$ áll fenn. Jelölje a D pont merőleges vetületét $\overleftrightarrow{AC}$-re D'. Ekkor ha $A - B - D'$ teljesül, akkor az előző



állítás szerint $\overline{DB} < \overline{DA}$. Ha pedig $\neg A - B - D'$, akkor a rendezés tulajdonságai alapján $D' - B - C$ vagy $D' = B$ teljesül, és így szintén az előző állítás szerint $\overline{DB} < \overline{DC}$. ■

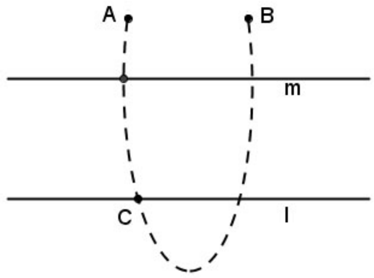


19. Feladat. *Legyenek l és m egy Hilbert-sík különböző, párhuzamos egyenesei valamint az A és B olyan pontok amelyek m l-et nem tartalmazó oldalán vannak. Igazoljuk, hogy A és B az l ugyanazon oldalán vannak.*

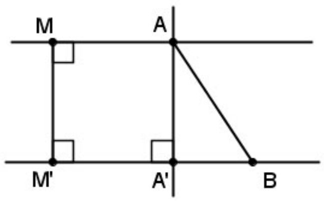
Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és $l, m \in \mathcal{L}$, valamint $A, B \in \mathcal{P}$ a feltételeknek megfelelően. Ekkor nyílvánvalóan $A \notin l$ és $B \notin l$. Indirekt módon tegyük fel, hogy A és B nincsenek az l ugyanazon oldalán. Ez $A \notin l$ és $B \notin l$ miatt azt jelenti, hogy A és B az l különböző oldalán vannak, azaz $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$. Legyen $C \in \overline{AB} \cap l$, ahol $A - C - B$ áll fenn. Mivel A és l az m különböző oldalán vannak, így $\overline{AC} \cap m \neq \emptyset$, de ekkor $\overline{AB} \cap m \neq \emptyset$ is teljesül, azaz A és B sz m különböző oldalán vannak, ami ellentmond a kiinduló feltételünknek. ■

20. Feladat. *Legyenek l és l' egy hiperbolikus sík széttartóan párhuzamos egyenesei, és tekintsük azt az $(M, M') \in l \times l'$ pontpárt, amelyre $\overleftrightarrow{MM'}$ közös merőlegese l-ek és l'-nek. Igazoljuk, hogy $\overline{MM'}$ kisebb minden tőle különböző l-beli pontot l'-beli ponttal összekötő szakasznál.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ hiperbolikus sík és $l, l' \in \mathcal{L}$ széttartóan párhuzamos egynesek, amelyeknek $\overleftrightarrow{MM'}$ közös merőlegese, ahol $M \in l$ és $M' \in l'$. Legynek továbbá $A \in l$ és $B \in l'$ tetszőleges pontok, amelyekre



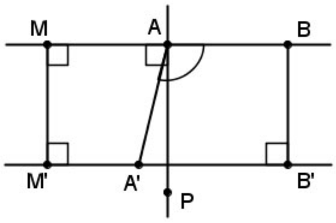
$A = M$ és $B = M'$ nem áll fenn egyszerre. Állítsunk merőlegest A-ból l'-re és jelöljük a kapott talppontot A'-vel. Ha $A' \neq B$, akkor $AA'B\triangle$-ben $A'\sphericalangle$ derékszög, így $\overline{AA'} < \overline{AB}$. Ha $A' = B$, akkor pedig $\overline{AA'} \cong \overline{AB}$. Ezután amennyiben $A \neq M$, úgy $A' \neq M'$ a merőleges egyenes egyértelműsége miatt, így $MM'A'A\square$ Lambert-négyszög, amelynek negyedik szöge $A\sphericalangle$. A hegyeszög hipotézis teljesülése miatt $A\sphericalangle$ hegyeszög, és ennél fogva kisebb, mint derékszög, azaz $A\sphericalangle < M\sphericalangle$ teljesül. Ekkor $(T22)$-t alkalmazva $MM'A'A\square$-re $\overline{MM'} < \overline{AA'}$ adódik. Ez $\overline{AA'} \leq \overline{AB}$ miatt $\overline{MM'} < \overline{AB}$ teljesülését eredményezi. Most tegyük fel, hogy $A = M$. Ekkor $A' = M'$ is teljesül a merőleges egyenes egyértelműsége miatt, ezért $B \neq A'$, különben $A = M$ és $B = M'$ egyszerre teljesülne. Így a korábban látottak alapján $\overline{MM'} = \overline{AA'} < \overline{AB}$. ■



21. Feladat. *Megtartva az előző állítás jelöléseit, legyenek A, $B \in l$ olyan pontok, amelyekre $M - A - B$ teljesül és jelölje l'-re merőleges vetületüket A', ill. B'. Igazoljuk, hogy $\overline{AA'} < \overline{BB'}$*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ hiperbolikus sík és benne $l, l' \in \mathcal{L}$ valamint $M, A, B \in l$ és $M', A', B' \in l'$ a feltételeknek megfelelően. Ekkor $MM'A'A\square$ és $MM'B'B\square$ mindketten Lambert-négyszögek, amelyek negyedik szögei $MAA'\sphericalangle$ illetve $MBB'\sphericalangle$. A hegyeszöghipotézis teljesülése miatt $MAA'\sphericalangle$ és $MBB'\sphericalangle$ hegyesszögek. Most állítsunk merőlegest A-ban l-re és legyen P ezen merőleges olyan pontja, amely az l egyenes A'-t tartalmazó oldalán van. Ekkor A' az $MAP\sphericalangle$ szögtartomány belsejében van, hiszen $MAA'\sphericalangle$ hegyeszög, azaz kisebb, mint derékszög. De ekkor $BAP\sphericalangle < BAA'\sphericalangle$ is teljesül, azaz $BAA'\sphericalangle$ tompaszög. Az $AA'B'B\square$ négyszöget tekintve $AA'B'\sphericalangle$

és $A'B'B\sphericalangle$ deréskzsögek, míg $BAA'\sphericalangle$ tompaszög és $B'BA\sphericalangle$ hegyesszög. Így ($T22$) alapján $\overline{AA'} < \overline{BB'}$ teljesül. ■

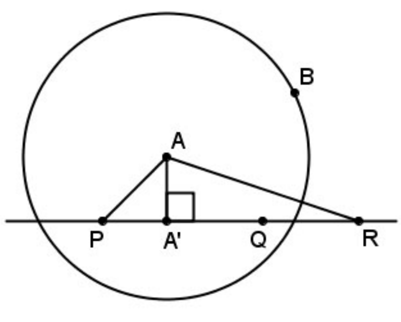


22. Feladat. *Legyen l egy egyenese, $P \notin l$ egy pontja egy hiperbolikus síknak. Mutassuk meg, hogy ha $\overrightarrow{PY}$ az egyik P-ből induló, l-lel határpárhuzamos félegyenes és egy X pontra $P - X - Y$ teljesül, akkor $\overrightarrow{XY}$ X-ből induló, l-lel határpárhuzamos félegyenes.*

23. Feladat. *Mutassuk, meg, hogy a szakasz-kör és az egyenes-kör folytonossági elvek ekvivalensek.*

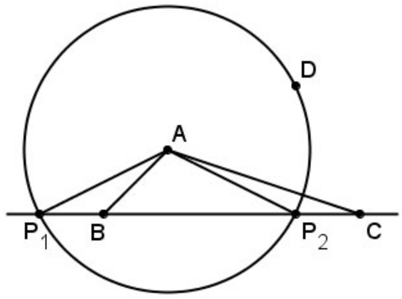
Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík rögzített.

1. Tegyük fel, hogy a szakasz-kör folytonossági elv érvényes $\mathcal{S}$-ben. Legyen $K(A, \overline{AB})$ kör és l egyenes, amelyre $P \in l$ belső pontja $K(A, \overline{AB})$-nak. Állítsunk merőlegest A-ból l-re és jelöljük a kapott talppontot A'-vel. Ha $A = A'$, azaz $A \in l$, akkor természetesen $\overline{AA'} \leq \overline{AP}$, ha $A \notin l$, akkor pedig a 17. feladat szerint teljesül ugyanez. Így A' is belső pontja $K(A, \overline{AB})$-nak. A szakaszfelmérés axiómája szerint $\exists Q \in l$, hogy $\overline{A'Q} \cong \overline{AB}$, továbbá ($R3$) miatt $\exists R \in l$, hogy $A' - Q - R$ teljesül. Ha $A \neq A'$, akkor $AA'R\triangle$-ben $A'\sphericalangle$ derékszög, így $\overline{A'R} < \overline{AR}$, ha pedig $A = A'$, akkor $\overline{A'R} \cong \overline{AR}$. Tehát $\overline{A'R} \leq \overline{AR}$. Másrészt $\overline{A'Q} < \overline{A'R}$, így $\overline{AR} > \overline{A'Q} \cong \overline{AB}$, azaz R külső pontja $K(A, \overline{AB})$-nak. Alkalmazva a szakasz-kör folytonossági elvet $\overline{A'R}$-re és $K(A, \overline{AB})$-ra kapjuk, hogy $\overline{A'R}$, és így l is metszi $K(A, \overline{AB})$-t.



2. Tegyük fel, hogy az egyenes-kör folytonossági elv érvényes. Legyen $K(A, \overline{AD})$ kör és $\overline{BC}$ olyan szakasz, amelyre B belső, C pedig külső pontja

$K(A,\overline{AD})$-nak. Alkalmazva az egyenes-kör folytonossági elvet $\overleftrightarrow{BC}$-re $\exists\, P_1 \in \overleftrightarrow{BC} \cap K(A,\overline{AD})$. Természetesen $P_1 \neq B$ és $P_1 \neq C$, hiszen B és C nincsenek rajta $K(A,\overline{AD})$-n. Tegyük fel először, hogy $A \notin \overleftrightarrow{BC}$. Mivel $\overline{AP_1} < \overline{AC}$, így nem állhat fenn $B - C - P_1$, különben $ABP_1\triangle$-re és C-re alkalmazva a 18. feladatot ellentmondásra jutnánk. Ha $B - P_1 - C$ áll fenn, akkor az állítást beláttuk. Ha pedig $P_1 - B - C$ teljesül, akkor használjuk fel, hogy a 24. feladat szerint $\exists\, P_2 \in \overleftrightarrow{BC} \cap K(A,\overline{AD})$, amelyre $P_1 \neq P_2$. Hasonlóan, mint előbb $P_2 \neq B$ és $P_2 \neq C$, továbbá nem áll fenn $B - C - P_2$. Ekkor azonban mivel $\overline{AB} < \overline{AP}$, így $P_2 - B - C$ sem állhat fenn, különben $ABP_1\triangle$-re és P_2-re vagy $ABP_2\triangle$-re és P_1-re alkalmazva a 18. feladatot ellentmondásra jutnánk. Így $B - P_2 - C$ teljesül, azazbeláttuk az állítást.



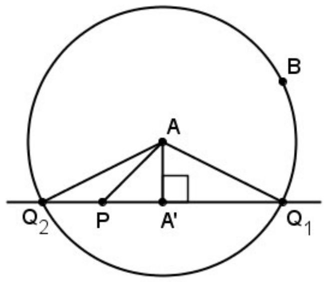
Most tegyük fel, hogy $A \in \overleftrightarrow{BC}$. Mivel $\overline{AB} < \overline{AC}$, így $B - C - A$ nem állhat fenn, ami $\overline{AP_1} < \overline{AC}$ és $A \neq C$ miatt azt jelenti, hogy $B - C - P_1$ sem állhat fenn. Ha $B - P_1 - C$ áll fenn, akkor az állítást beláttuk. Ha pedig $P_1 - B - C$ teljesül, akkor használjuk fel, hogy a 24. feladat szerint $\exists\, P_2 \in \overleftrightarrow{BC} \cap K(A,\overline{AD})$, amelyre $P_1 \neq P_2$. Hasonlóan, mint előbb $P_2 \neq B$ és $P_2 \neq C$, továbbá nem áll fenn $B - C - P_2$. Ekkor azonban a szakaszfelmérés egyértelműsége miatt P_1 az egyetlen olyan pont $\overleftrightarrow{BC}$-n, amelyre $\overline{AP_1} \cong \overline{AD}$ és $P_1 - A - C$ áll fenn. Továbbá $P_2 - B - C$ esetén $\overline{AB} < \overline{AP_2}$ és $A \neq B$ miatt csak $P_2 - A - B$ vagy $P_2 - B - A$ állhat fenn. Ez azt jelenti, hogy $P_2 - A - C$ teljesül, hiszen korábban már megállapítottuk, hogy $\neg B - C - A$. Így tehát $P_1 = P_2$ teljesül, ami ellentmondás, ezért $P_2 - B - C$ nem állhat fenn. Tehát csak $B - P_2 - C$ lehetséges, amivel beláttuk az állítást. ∎

24. Feladat. *Igazoljuk, hogy az egyenes-kör és a kör-kör folytonossági elvek teljesülése esetén a metszéspontok száma kettő.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík rögzített.

1. Legyen $\mathcal{S}$-ben $K(A,\overline{AB})$ kör és l egyenes, amelyre $P \in l$ belső pontja $K(A,\overline{AB})$-nak. Ekkor az egynes-kör folytonossági elv teljesülése miatt $\exists\, Q_1 \in l \cap K(A,\overline{AB})$. Állítsunk merőlegest A-ból l-re és jelöljük a kapott talppontot A'-vel ($A = A'$ is lehetséges). A szakaszfelmérés axiómája szerint $\exists\, Q_2 \in l$ pont, amelyre $Q_1 - A' - Q_2$ és $\overline{A'Q_1} \cong \overline{A'Q_2}$. Ha $A = A'$, akkor

azonnal kapjuk, hogy $Q_2 \in K(A, \overline{AB})$. Ha $A \neq A'$, akkor $\overline{A'Q_1} \cong \overline{A'Q_2}$, $AA'Q_1\sphericalangle \cong AA'Q_2\sphericalangle$ és $\overline{AA'} \cong \overline{AA'}$ miatt $AA'Q_1\triangle \cong AA'Q_2\triangle$ (SAS) alapján, így $\overline{AQ_1} \cong \overline{AQ_2}$, azaz $Q_2 \in K(A, \overline{AB})$. Tehát l legalább két pontban metszi $K(A, \overline{AB})$-t. Tegyük fel, hogy még egy Q_3 pontban is metszi. Ekkor Q_1, Q_2, Q_3 (különböző) kollineáris pontok, így $Q_1-Q_2-Q_3$, $Q_2-Q_1-Q_3$ és $Q_2-Q_3-Q_1$ közül valamelyik fenn áll. Tegyük fel például, hogy $Q_1-Q_2-Q_3$ teljesül. Ekkor ha $A \in l$, akkor a szakasz összeadás tétele, ha $A \notin l$, akkor pedig a 18. feladat alapján az $\overline{AQ_1}$, $\overline{AQ_2}$ és $\overline{AQ_3}$ szakaszok nem lehetnek mind egybevágók, azaz Q_1, Q_2, Q_3 nem lehetnek mind rajta $K(A, \overline{AB})$-n. Hasonlóan ellentmondásra jutunk, ha $Q_2 - Q_1 - Q_3$ vagy $Q_2 - Q_3 - Q_1$ teljesül.

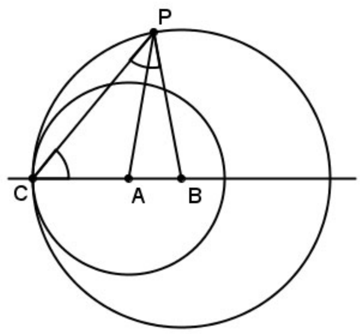


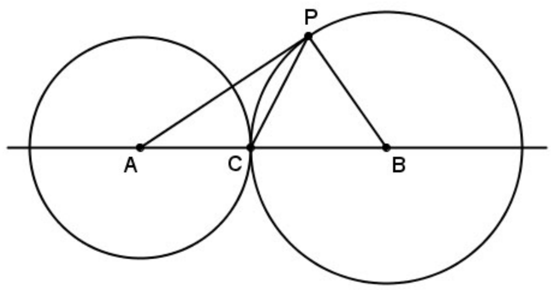
2. Legyenek $\mathcal{S}$-ben $K(A, \overline{AD})$ és $K(B, \overline{BE})$ körök, amelyekre $K(B, \overline{BE})$-nak van két olyan pontja, amelyek egyike belső pontja, másika külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Ekkor a kör-kör folytonossági elv teljesülése miatt $\exists C \in K(A, \overline{AD}) \cap K(B, \overline{BE})$. Megmutatjuk, hogy $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Természetesen $C \neq A$ és $C \neq B$.

Először tegyük fel, hogy $C - A - B$ teljesül. Ekkor tetszőleges $P \in K(B, \overline{BE})$, $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ pontra $\overline{BP} \cong \overline{BC}$, és így $PCB\sphericalangle \cong BPC\sphericalangle$. Másrészt $APC\sphericalangle < BPC\sphericalangle$, ezért a $PAC\triangle$ háromszöget tekintve $\overline{AC} < \overline{AP}$, tehát P külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Ha $P \in K(B, \overline{BE}) \cap \overleftrightarrow{AB}$ és $P \neq C$, akkor a szakszfelmérés egyértelműsége miatt $P \notin \overrightarrow{BC}$, azaz $C - B - P$ teljesül. Ekkor $A - B - P$ is teljesül, így $\overline{AP} \cong \overline{AB} + \overline{BP} \cong \overline{AB} + \overline{BC} > \overline{BC} > \overline{AC}$. Tehát $K(B, \overline{BE})$ minden C-n kívül pontja külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak, ami ellentmondás, mivel C nem belső pontja.

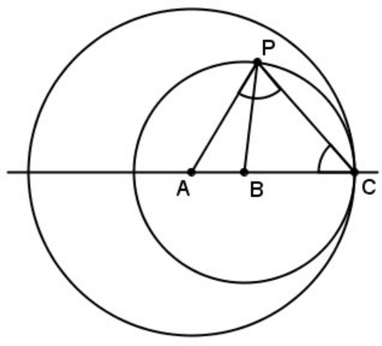
Most tegyük fel, hogy $A-C-B$ teljesül. Ekkor tetszőleges $P \in K(B, \overline{BE})$, $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ esetén alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget $ABP\triangle$-re $\overline{AC} + \overline{CB} \cong \overline{AB} < \overline{AP} + \overline{BP}$. Ez $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ miatt azt jelenti, hogy $\overline{AC} < \overline{AP}$, azaz P külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Ha $P \in K(B, \overline{BE}) \cap \overleftrightarrow{AB}$ és $P \neq C$, akkor a szakszfelmérés egyértelműsége miatt $P \notin \overrightarrow{BC}$, azaz $C - B - P$ teljesül. Ekkor $A - C - P$ is teljesül, így $\overline{AC} < \overline{AP}$. Tehát $K(B, \overline{BE})$ minden C-n kívül pontja külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak, ami ellentmondás, mivel C nem belső pontja.

Végül tegyük fel, hogy $A-B-C$ teljesül. Ekkor tetszőleges $P \in K(B, \overline{BE})$,



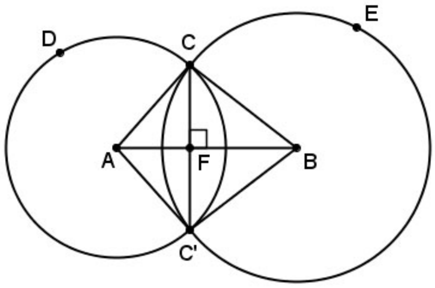


$P \notin \overleftrightarrow{AB}$ pontra $\overline{BP} \cong \overline{BC}$, és így $PCB\sphericalangle \cong BPC\sphericalangle$. Másrészt $BPC\sphericalangle < APC\sphericalangle$, ezért a $PAC\triangle$ háromszöget tekintve $\overline{AP} < \overline{AC}$, tehát P belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Ha $P \in K(B, \overline{BE}) \cap \overleftrightarrow{AB}$ és $P \neq C$, akkor a szakszfelmérés egyértelműsége miatt $P \notin \overrightarrow{BC}$, azaz $C - B - P$ teljesül. Ekkor ha $A - P - B$ vagy $A = P$ is teljesül, akkor $\overline{AP} < \overline{AC}$. Ha pedig $P - A - B$ áll fenn, akkor $\overline{AC} \cong \overline{AB} + \overline{BC} \cong \overline{AB} + \overline{BP} > \overline{BP} > \overline{AP}$. Tehát $K(B, \overline{BE})$ minden C-n kívül pontja belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak, ami ellentmondás, mivel C nem külső pontja.



Tehát megkaptuk, hogy $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Állítsunk merőlegest C-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re és jelöljük a kapott talppontot F-fel. A szakaszfelmérés axiómája szerint $\exists\, C' \in$

$\overleftrightarrow{CF}$, hogy $\overline{CF} \cong \overline{C'F}$ és $C - F - C'$ teljesül. Ha $C' \neq A$ és $C' \neq B$, akkor $FAC\triangle \cong FAC'\triangle$ és $FBC\triangle \cong FBC'\triangle$ (SAS) alapján, így $\overline{CA} \cong \overline{C'A}$ és $\overline{CB} \cong \overline{C'B}$. Ha $C' = A$ vagy $C' = B$ akkor pedig ezek egyike azonnal teljesül. Tehát $C' \in K(A, \overline{AD}) \cap K(B, \overline{BE})$ és $C \neq C'$.

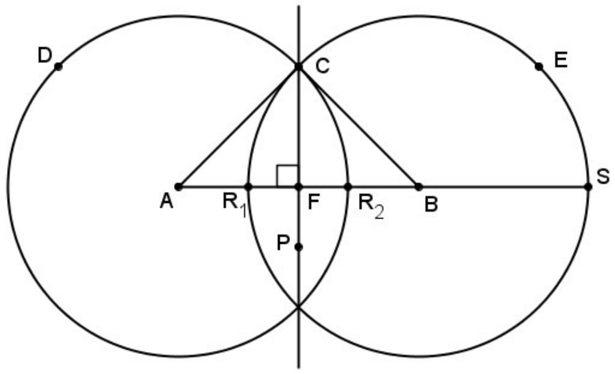


Tegyük most fel, hogy van még egy az ediektől különböző C'' metszéspont. Megmutatjuk, hogy A rajta van $\overline{CC'}$ felező merőlegesén. Ehhez állítsunk merőlegest A-ból $\overleftrightarrow{CC'}$-re és jelöljük a kapott talppontot A'-vel. Mivel $C, C' \in K(A, \overline{AD})$, így $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$. Ha $A \in \overleftrightarrow{CC'}$, akkor rögtön adódik, hogy $A' = A$ felezőpontja $\overline{CC'}$-nek, egyébként pedig $CA'A\triangle \cong C'A'A\triangle$ SAS alapján és ezért teljesül $\overline{A'C} \cong \overline{A'C'}$. Hasonlóan adódik, hogy A rajta van a $\overline{C'C''}$ felezőmerőlegesén is és hogy B is rajta van mind $\overline{CC'}$ mind $\overline{C'C''}$ felezőmerőlegesén. Azonban C, C', C'' páronként különbözők, így $A' \neq A''$, ahol A'' a $\overline{C'C''}$ szakasz felezőpontja. Tehát $\overline{CC'}$ és $\overline{C'C''}$ felezőmerőlegesei nem esnek egybe, de metszik egymást, azaz a metszéspontjuk egyértelmű, ezért $A = B$. Ekkor azonban $K(A, \overline{AD})$ és $K(B, \overline{BE})$, mint ponthalmazok megegyeznek, ami ellentmond a kezdeti feltételeknek. Tehát a két körnek legfeljebb két metszéspontja lehet. ■

25. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha teljesül a kör-kör folytonossági elv, akkor teljesül az egyenes-kör folytonossági elv is.*

Megoldás: Legyen $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-sík és benne $K(A, \overline{AD})$ kör és l egyenes, amelyre $P \in l$ belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Ha $A \in l$, akkor a szakaszfelmérés axiómája szerint $\exists Q \in l$, hogy $\overline{AD} \cong \overline{AQ}$, így $Q \in l \cap K(A, \overline{AD})$, amivel megkaptuk az állítást. Tegyük fel most, hogy $A \notin l$ és állítsunk merőlegest A-ból l-re, majd jelöljük a kapott talppontot F-fel. Ekkor F belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak, hiszen a 17. feladat alapján $\overline{AF} \leq \overline{AP}$ és P belső pont. Legyen B olyan pont, amelyre $A - F - B$ és $\overline{AF} \cong \overline{FB}$ teljesül (ilyen a szakaszfelmérés axiómája szerint egyértelműen létezik).

Tekintsük a $K(B, \overline{BE})$ kört, ahol $\overline{BE} \cong \overline{AD}$. Ekkor $APF\triangle \cong BFP\triangle$, így $\overline{BP} \cong \overline{AP}$, és ezért P belső pontja $K(B, \overline{BE})$-nak is, ami maga után vonja, hogy F belső pont. A szakaszfelmérés axiómája szerint $\exists R_1 \in \overrightarrow{BA}$, hogy $\overline{BR_1} \cong \overline{BE}$ és $\exists R_2 \in \overrightarrow{AB}$, hogy $\overline{AR_2} \cong \overline{AD}$. Ekkor $F - R_1 - B$ és



$F = R_1$ nem állhat fenn, mert F belső pontja $K(B, \overline{BE})$-nak. Ha $A - R_1 - F$ vagy $A = R_1$ teljesül, akkor R_1 definíció szerint belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak, ha pedig $R_1 - A - F$ teljesül, akkor $\overline{AR_1} < \overline{BR_1}$ és ez $\overline{BR_1} \cong \overline{BE} \cong \overline{AD}$ miatt azt jelenti, hogy R_1 ismét belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Tehát R_1 mindenképp belső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. Hasonlóképpen R_2 belső pontja $K(B, \overline{BE})$-nak. Másfelől $\exists\, S$ az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes A-t nem tartalmazó B kezdőpontú félegyenesén, hogy $\overline{BS} \cong \overline{BE}$. Ekkor $A - R_2 - B$ vagy $R_2 = B$ esetén $A - R_2 - S$ is fennáll, így $\overline{AR_2} > \overline{AS}$. Ha pedig $A - B - R_2$ teljesül, akkor abból, hogy R_2 belső pontja $K(B, \overline{BE})$-nak adódik, hogy $\overline{BR_2} < \overline{BS}$, és ezért $B - R_2 - S$ áll fenn. Ekkor $A - R_2 - S$ is fennáll, így $\overline{AR_2} > \overline{AS}$, tehát S külső pontja $K(A, \overline{AD})$-nak. A kör-kör folytonossági elv alapján $\exists\, C \in K(A, \overline{AD}) \cap K(B, \overline{BE})$. Állítsunk merőlegest C-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re és jelöljük a kapott talppontot C'-vel. Ekkor $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, $AC'C\sphericalangle \cong BC'C\sphericalangle$ és $\overline{C'C} \cong \overline{C'C}$, így $AC'C\triangle \cong BC'C\triangle$ (SsA) alapján. Tehát $\overline{AC'} \cong \overline{C'B}$, ami a szakszfelmérés egyértelmésűge alapján azt jelenti, hogy $C' = F$ és így $C \in l$ a merőleges egyenes egyértelműsége miatt. Azaz $l \cap K(A, \overline{AD}) \neq \emptyset$ ∎

4. Lemma. *Legyen $A \in M_n(\mathbb{R})$ és legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ az A sajátértékei $n_1, \ldots, n_m$ multiplicitásokkal. Ekkor léteznek olyan $H_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ $(1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n_i - 1)$ mátrixok, hogy bármely olyan*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara nagyobb, mint A spektrálsugara teljesül, hogy

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_i - 1} f^{(j)}(\lambda_i) H_{ij}$$

26. Feladat. *1. Mutassuk meg, hogy $GL_n(\mathbb{K})$ nyílt részhalmaza $M_n(\mathbb{K})$-nak.*

2. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *esetén*

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

3. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *esetén a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \textit{sor abszolút konvergens,}$$

továbbá

$$\left\| e^A \right\| \leq e^{\|A\|}$$

4. *Mutassuk meg, hogy ha* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *és* $AB = BA$*, akkor*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

5. *Igazoljuk, hogy tetszőleges* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *esetén* $\exp(A) \in GL_n((\mathbb{K})$ *és* $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$

6. *Mutassuk meg, hogy ha* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *és* $B \in GL_n(\mathbb{K})$*, akkor*

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1} \exp(A) B$$

7. *Ellenőrizzük, hogy ha* $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$*, akkor*

$$\exp(A) = \exp(\alpha) \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

8. *Mivel egynelő* $\exp(A)$*, ha* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *diagonális mátrix* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *átlós elemekkel? Mit mondhatunk abban az esetben, amikor A diagonalizálható?*

9. *Számítsuk ki az* $\exp(tA)$ *mátrixot, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és $t \in \mathbb{R}$ *tetszőleges.*

10. *Igazoljuk, hogy az* $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ *leképezés differenciálható a 0-ban, és számítsuk ki a 0-beli deriváltját!*

11. *Igazoljuk, hogy a*

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{K}), \quad t \longmapsto \gamma(t) = \exp(tA)$$

leképezés tetszőlegesen sokszor differenciálható csoport-homomorfizmus!

Megoldás: 1. Elegendő megmutatni, hogy $GL_n(\mathbb{K})^c$ zárt részhalmaza $M_n(\mathbb{K})$-nak. Ehhez legyen $\{A_k\}$ egy $GL_n(\mathbb{K})^c$-beli konvergens sorozat, amelyre

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A$$

Mivel egy mátrix determinánsának (definíció szerinti) kiszámításához a mátrix bizonyos elemeiből képzett szorzatok véges összegét kell vennünk, így a határérték-vétel felcserélhető a determináns „művelettel”. Tehát

$$\det(A) = \det(\lim_{k\to\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \det(A_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

azaz $A \in GL_n(\mathbb{K})^c$. Ez pedig azt jelenti, hogy $GL_n(\mathbb{K})^c$ zárt részhalmaz.

2. Legyenek $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ tetszőlegesek. Ekkor bármely olyan ${}^t v \in \mathbb{K}^n$ esetén, amelyre $\left\|{}^t v\right\| \leq 1$

$$\|(AB)v\| = \|A(Bv)\| \leq \|A\| \, \|Bv\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|v\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Ezért

$$\|AB\| = \sup\left\{\|(AB)v\| \, \middle| \, \left\|{}^t v\right\| \leq 1, \, {}^t v \in \mathbb{K}^n\right\} \leq \|A\| \, \|B\|$$

3. Legyen $A \in M_n(\mathbb{K})$ tetszőleges. Először megmutatjuk az abszolút konvergenciát. Az előző állítás alapján teljes idukcióval könnyen látható, hogy $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Másrészt tudjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ hatványsor konvergenciasugara $+\infty$, azaz a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ sor minden $z \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens. Így speciálisan a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ sor is konvergens. Ebből pedig a majoráns kritérium alkalmazásával kapjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\|A^k\right\|$ konvergens, azaz $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ abszolút konvergens.

Most megmutatjuk az állítás második részének teljesülését. Ehhez vegyük észre, hogy $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ és a norma tulajdonságainak felhasználásával minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \left\|\frac{1}{k!} A^k\right\| = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

Így

$$\left\|e^A\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = e^{\|A\|}$$

4. Legyenek $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ olyanok, hogy $AB = BA$ teljesül. Ekkor alkalmazhatjuk a binomiális tételt $(A+B)^k$ kiszámítására. Így

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j}$$

Mertens tétele szerint ha két sor abszolút konvergens, akkor a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens és a Cauchy-szorzat összege az összegek szorzata. Ezért

$$\exp(A+B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}B^j=\exp(A)\exp(B)$$

5. Legyen $A\in M_n(\mathbb{K})$ tetszőleges, ekkor az előző állítást felhasználva:

$$\exp(A)\exp(-A)=\exp(A-A)=\exp(0)=E_{n\times n}$$

6. Legyenek $A\in M_n(\mathbb{K})$ és $B\in GL_n(\mathbb{K})$ tetszőlegesek. Könnyen látható, hogy $\left(B^{-1}AB\right)^k=B^{-1}A^kB$, így minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(B^{-1}AB\right)^k=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}B^{-1}A^kB=B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}A^k\right)B$$

Tehát

$$\exp(B^{-1}AB)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(B^{-1}AB\right)^k=B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)B=B^{-1}\exp(A)B$$

7. Könnyű látni, hogy ha $\beta=0$, akkor az állítás teljesül. Egyébként az

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékei $\lambda_1=\alpha-i\beta$ és $\lambda_2=\alpha+i\beta$, amelyek $\beta\neq 0$ miatt különbözők. Az 4. Lemma miatt

$$\exists\, H_1,H_2:\quad f(A)=f(\alpha-i\beta)H_1+f(\alpha+i\beta)H_2$$

bármely olyan

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara nagyobb, mint A spektrálsugara.

Legyen először $f(z)=z-(\alpha-i\beta)$, így $f(A)=A-(\alpha-i\beta)E_{2\times 2}$. Ekkor f konvergenciasugara $+\infty$, ezért

$$A-(\alpha-i\beta)E_{2\times 2}=f((\alpha-i\beta))H_1+f((\alpha+i\beta))H_2=0\cdot H_1+i2\beta\cdot H_2$$

Tehát

$$H_2=\frac{1}{i2\beta}\left(A-(\alpha-i\beta)E_{2\times 2}\right)=\frac{1}{i2\beta}\left(\begin{pmatrix}\alpha-(\alpha-i\beta) & -\beta\\ \beta & \alpha-(\alpha-i\beta)\end{pmatrix}\right)=$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Most legyen $f(z) = z - (\alpha + i\beta)$, így $f(A) = A - (\alpha + i\beta)E_{2\times 2}$. Ekkor f konvergenciasugara $+\infty$, ezért

$$A - (\alpha + i\beta)E_{2\times 2} = f((\alpha - i\beta))H_1 + f((\alpha + i\beta))H_2 = (i2\beta) \cdot H_1 + 0 \cdot H_2$$

Tehát

$$H_2 = \frac{1}{i2\beta}((\alpha + i\beta)E_{2\times 2} - A) = \frac{1}{i2\beta}\left(\begin{pmatrix} (\alpha - i\beta) - \alpha & \beta \\ -\beta & (\alpha - i\beta) - \alpha \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Végül legyen $f(z) = \exp(z)$. Ekkor f konvergenciasugara ismét $+\infty$, ezért

$$\exp(A) = \exp(\alpha - i\beta)H_1 + \exp(\alpha + i\beta)H_2 = \frac{\exp(\alpha)}{2i}(\exp(-i\beta)H_1 + \exp(i\beta)H_2) =$$

$$= \frac{\exp(\alpha)}{2i}\begin{pmatrix} i(\exp(i\beta) + \exp(-i\beta)) & -\exp(i\beta) + \exp(-i\beta) \\ \exp(i\beta) - \exp(-i\beta) & i(\exp(i\beta) + \exp(-i\beta)) \end{pmatrix}$$

Ez az

$$\frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} = \cos t \qquad \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \sin t$$

összefüggések alapján azt jelenti, hogy

$$\exp(A) = \exp(\alpha)\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

8. Legyen $A \in M_n(\mathbb{K})$ tetszőleges diagonális mátrix $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ átlós elemekkel. Ekkor A^k is diagonális $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ átlós elemekkel, ezért minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k$ diagonális mátrix $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\lambda_i^k$ átlós elemekkel $(i = 1 \ldots n)$. Tehát $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$ diagonális $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_i^k = \exp(\lambda_i)$ átlós elemekkel $(i = 1 \ldots n)$.

Ha $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalizálható, akkor $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$, hogy $D = P^{-1}AP$ diagonális, amelynek főátlójában A sajátértékei állnak. A 6. szerint $\exp A = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1}$. Tehát ha B jelöli azt a diagonális mátrixot, amelynek főátlójában A sajátértékeinak exponensei állnak és P jelöli az A megfelelő sajátvektorai, mint oszlopvektorok által alkotott mátrixot, akkor

$$\exp(A) = PBP^{-1}$$

9. Könnyű látni, hogy ha $t = 0$, akkor a 2x2-es egységmátrixot kapjuk eredményül. Egyébként az

$$A = \begin{pmatrix} 5t & 4t \\ t & 2t \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékei $\lambda_1 = t$ és $\lambda_2 = 6t$, amelyek $t \neq 0$ miatt különbözők. Az 4. Lemma miatt

$$\exists\, H_1, H_2 : \quad f(A) = f(t)H_1 + f(6t)H_2$$

bármely olyan

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara nagyobb, mint A spektrálsugara.

Legyen először $f(z) = z - t$, így $f(A) = A - tE_{2\times 2}$. Ekkor f konvergenciasugara $+\infty$, ezért

$$A - tE_{2\times 2} = f(t)H_1 + f(6t)H_2 = 0 \cdot H_1 + 5t \cdot H_2$$

Tehát

$$H_2 = \frac{1}{5t}\left(A - tE_{2\times 2}\right) = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Most legyen $f(z) = z - 6t$, így $f(A) = A - 6tE_{2\times 2}$. Ekkor f konvergenciasugara $+\infty$, ezért

$$A - 6tE_{2\times 2} = f(t)H_1 + f(6t)H_2 = (-5t) \cdot H_1 + 0 \cdot H_2$$

Tehát

$$H_2 = \frac{1}{5t}\left(6tE_{2\times 2} - A\right) = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Végül legyen $f(z) = \exp(z)$. Ekkor f konvergenciasugara ismét $+\infty$, ezért

$$\exp(A) = \exp(t)H_1 + \exp(6t)H_2 = \frac{1}{5}\left(\exp(t)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \exp(6t)\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\exp(t)\begin{pmatrix} 1 + 4\exp(5t) & -4 + 4\exp(5t) \\ -1 + \exp(5t) & 4 + \exp(5t) \end{pmatrix}$$

■

27. Feladat. *Részletezzük a 3.5 Állítás bizonyításában az* $|F_1(i)| = |i| \implies F_1(i) \in \{i, -i\}$ *lépést.*

28. Feladat. *Legyen* $a \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ *és* $\rho_a(z) = az$ *origó körüli* $\arg(a)$ *szögű forgás. Igazoljuk, hogy ekkor* ρ_a *egyetlen fixpontja* $0 \in \mathbb{C}$*, továbbá az origó körüli forgások* $Rot_0(\mathbb{C})$ *halmaza kommutatív csoport a kompozíció műveletére nézve.*

Megoldás: A fixpontok eleget tesznek a $\rho_a(z) = z$, azaz az $az = z$ egyenletnek, amiből $z(a-1) = 0$ adódik. Mivel $a \neq 1$, így az egyenletek egyedül $z = 0$ tesz eleget.

Most legyenek $a, b \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ és $\rho_a(z) = az$ illetve $\rho_b(z) = bz$ origó körüli $\arg(a)$ illetve $\arg(b)$ szögű forgások. Ekkor $(\rho_b \circ \rho_a)(z) = b(az) = (ba)z$. Mivel két egységhosszú komplex szám szorzata szintén egységhosszú, így $ba \in \mathbb{T}$. Ha $ba = 1$, akkor $\rho_b \circ \rho_a$ identikus leképezés, amelyet forgásnak tekintünk, egyébként pedig valódi origó körüli $\arg(ba)$ szögű forgás. Tehát két origó körüli forgás kompozíciója ismét origó körüli forgás.

Az origó forgások halmazán a kompozíció művelete asszociatív és kommutatív, hiszen a komplex számok szorzása asszociatív és kommutatív. Az identikus leképezést origó körüli forgásnak tekintjük, amely természetesen egységelemként viselkedik a kompozícióra nézve. Továbbá minden origó körüli forgásnak van inverze a kompozíció műveletére nézve, hiszen minden egységhosszú komlpex számnak van inverze, amely szintén egységhosszú. Tehát az origó körüli forgások $Rot_0(\mathbb{C})$ halmaza kommutatív csoport a kompozíció műveletére nézve. ∎

29. Feladat. *Vezessük le a* $\sigma_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sigma_a(z) = a\bar{z}$, $a = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ *tengelyes tükrözés geometriai tulajdonságait (ld. a 3.9 utáni megjegyzést).*

Megoldás: 1. Legyen $z \notin l_0$ tetszőleges pont, amelyre $\arg(z) = \alpha$. Ekkor $\sigma_a(z) - z$ nyílván irányvektora $\overleftrightarrow{z\sigma_a(z)}$-nek, továbbá

$$\sigma_a(z) - z = a\bar{z} - z = |z| \left(\cos(\theta - \alpha) + i\sin(\theta - \alpha) - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right) =$$

$$= |z| \left(-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta - 2\alpha}{2} + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta - 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\,|z| \sin\frac{\theta - 2\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= 2\,|z| \sin\frac{\theta - 2\alpha}{2}\left(\cos\frac{\theta + \pi}{2} + i\sin\frac{\theta + \pi}{2}\right)$$

ahol $z \notin l_0$ miatt $\sin\frac{\theta - 2\alpha}{2} \neq 0$. Így látható, hogy $\arg(\sigma_a(z) - z) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$, míg a 3.9 Lemma szerint l_0 irányvektorának argumentuma $\frac{\theta}{2}$. Tehát l_0 irányvektora és $\sigma_a(z) - z$ merőlegesek.

2. A $\overline{z\sigma_a(z)}$ szakasz felezőpontja $z + \frac{\sigma_a(z) - z}{2} = \frac{\sigma_a(z) + z}{2}$. Az előző számoláshoz hasonlóan

$$\frac{\sigma_a(z) + z}{2} = |z| \cos\frac{\theta - 2\alpha}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

vagyis $\arg\left(\frac{\sigma_a(z)+z}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$. Másrészt a 3.9 Lemma alapján $l_0 = span_{\mathbb{R}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)$, így $\frac{\sigma_a(z)+z}{2} \in l_0$.

3. Legyen $l \subset \mathbb{C}$ egy tetszőleges l_0-tól különböző egyenes. Ekkor az 1. pont szerint bármely $z \in l \backslash l_0$ esetén $\overleftrightarrow{z\sigma_a(z)}$ merőleges l_0-ra, így ha l merőleges l_0-ra, akkor a merőleges egyértelműsége miatt $l = \overleftrightarrow{z\sigma_a(z)}$. Ekkor $\sigma_a(z) \in l$ és így l invariáns σ_a-ra nézve. Másrészt ha l nem merőleges l_0-ra, akkor $\sigma_a(z) \notin l$ és ezért l nem invariáns σ_a-ra nézve. ∎

30. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}$ minden nemidentikus transzlációja és forgása előáll két tengelyes tükrözés kompozíciójaként. Az első esetben a tengelyek párhuzamosak, a másodikban nem.*

Megoldás: Legyen $b \in \mathbb{C}$ tetszőleges és $f : z \longmapsto z + b$ a b eltolásvektorú transzláció. Továbbá legyen $\beta = \arg(b)$, $\alpha = \pi + 2\beta$ és $a = e^{i\alpha}$. Ezután tekintsük az $f_1 : z \longmapsto a\bar{z}$ és $f_2 : z \longmapsto a\bar{z} + b$ izometriákat. Ezek kompozíciójára:

$$(f_2 \circ f_1)(z) = f_2(a\bar{z}) = a\overline{a\bar{z}} + b = a\bar{a}z + b$$

Mivel $a \in \mathbb{T}$, ezért $a\bar{a} = 1$, így

$$(f_2 \circ f_1)(z) = z + b \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

azaz $f_2 \circ f_1 = f$. Megmutatjuk, hogy f_1 és f_2 tengelyes tükrözések. Ez f_1 esetén már a definíció alapján könnyen látható, míg f_2 esetén meg kell vizsgálni az $a\bar{b} + b$ kifejezést. Itt

$$a\bar{b} + b = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\,|b|\,(\cos\beta - i\sin\beta) + |b|\,(\cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= |b|\,(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta) + \cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= 2\,|b|\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-2\beta}{2}\right)$$

Mivel $\frac{\alpha-2\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, ezért $a\bar{b} + b = 0$, tehát f_2 is tengelyes tükrözés. ∎

31. Feladat. *Legyen $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \subset \mathbb{C}$. Határozzuk meg az*

$$f_1 : z \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} + a \in \mathbb{C}$$

és az

$$f_2 : z \in \mathbb{C} \longmapsto -z + ia \in \mathbb{C}$$

izometriák típusát és az invariáns, ill. pontonként fix invariáns egyeneseit.

Megoldás: Megmutatjuk, hogy

1. az $f_1 : z \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} + a \in \mathbb{C}$ izometria csúsztatva tükrözés, amelynek egyetlen invariáns egyenese a valós tengely és nincs fixpontja.

2. az $f_2 : z \in \mathbb{C} \longmapsto -z + ia \in \mathbb{C}$ izometria $i\frac{a}{2}$ középpontú π szögű forgás, amelynek invariáns egyenesei az $i\frac{a}{2}$-re illeszkedő egyenesek és nincs pontonként fix invariáns egyenese.

A 3.10 Lemma szerint f_1-nek pontosan akkor van fixpontja, ha $\bar{a} + a = 0$. Mivel $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ezért $\bar{a}+a = 2a \neq 0$. Tehát f_1-nek nincs fixpontja és ekkor csúsztatva tükrözésnek nevezzük. Megmutatjuk, hogy f_1-nek a valós tengely az egyetlen invariáns egyenese. Ehhez legyen $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges. Ekkor $f_1(z) = \bar{z} + a = z + a \in \mathbb{R}$, tehát a valós tengely valóban invariáns. Ezután legyen $z = c + id \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $z = c + id$, $f_1(z) = a + c - id$ és $f_1(f_1(z)) = 2a + c + id$ nincsenek egy egyenesen, hiszen a $\overleftrightarrow{z, f_1(f_1(z))}$-re illeszkedő komplex számok képzetes része $d \neq 0$, míg $Im(f_1(z)) = -d$. Éppenezért $z = c+id$ nem illeszkedhet egyetlen invariáns egynesre sem. Tehát f_1 invariáns egyeneseinek nem lehetnek a valós tengelyen kívüli pontjai, azaz a valós tengely az egyetlen invariáns egyenes. Továbbá mivel f_1-nek nincs fixpontja, ezért nincs pontonként fix invariáns egyenese sem.

A 3.8 Lemma szerint f_2 izometria $w = i\frac{a}{2}$ körüli $arg(-1) = \pi$ szögű forgás, amelynek egyetlen fixpontja w. Mivel w az egyetlen fixpont, így f_2-nek nincs pontonként fix invariáns egyenese. Először megmutatjuk, hogy a w-re illeszkedő egyenesek invariánsak f_2-re nézve. Ehhez legyen e egy w-re illeszkedő, a valós tengelyt metsző tetszőleges egyenes. Legyen a valós tengellyel vett metszéspont $b \in \mathbb{R}$. Ekkor e tetszőleges pontja előáll $tw+(1-t)b$ alakban valamely $t \in \mathbb{R}$-re. Ennek f_2 általi képe:

$$f_2(ti\frac{a}{2} + (1-t)b) = -ti\frac{a}{2} + (t-1)b + ia = (t-1)b + i\frac{a}{2}(2-t)$$

Itt $t - 1 = s$ helyettesítéssel

$$f_2(tw + (1-t)b) = sb + (1-s)w$$

adódik, azaz $f_2(tw + (1-t)b)$ is illeszkedik e-re. Tehát e valóban invariáns. Most legyen e a w-re illeszkedő, a valós tengellyel párhuzamos egyenes. Ekkor e tetszőleges pontja $b + w$ alakú valamely $b \in \mathbb{R}$-re. Ennek f_2 általi képe:

$$f_2(b+w) = f_2(b+i\frac{a}{2}) = -b - i\frac{a}{2} + ia = -b + i\frac{a}{2} = -b + w$$

ahol $-b \in \mathbb{R}$, azaz $f_2(b+w)$ is illeszkedik e-re. Tehát e ismét invariáns.

Ezután megmutatjuk, hogy egy w-re nem illeszkedő egyenes nem lehet invariáns. Ehhez tekintsünk egy a képzetes tengelyen lévő $ib \neq w$ tetszőleges pontot ($b \in \mathbb{R}$). Ekkor $f_2(ib) = i(a-b)$, amely különbözik ib-től és illeszkedik a képzetes tengelyre. Tehát az ib-re illeszkedő egyetlen invariáns egyenes csak a képzetes tengely lehet, amely azonban w-re is illeszkedik. Most legyen e egy olyan egyenes, amely nem metszi a képzetes tengelyt. Ekkor e párhuzamos a képzetes tengellyel és metszi a valós tengelyt egy $b \in \mathbb{R}$ pontban. Erre $f_2(b) = -b + ia \notin e$, azaz e nem invariáns. ∎

32. Feladat. *Adjuk meg* $z \in \mathbb{C} \longmapsto az + b \in \mathbb{C}$*, vagy* $z \in \mathbb{C} \longmapsto a\bar{z} + b \in \mathbb{C}$ *alakban azt a transzformációt, amely tükrözés* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $x_1 = x_2$ *egyenletű egyenesére, illetve amely az előbbi tükrözés és az* $1 + i$ *eltolásvektorú transzláció kompozíciója.*

Megoldás: Legyen $a = e^{i\frac{\pi}{2}}$ és $b = 1 + i$. Ekkor az $f_1 : z \in \mathbb{C} \longmapsto a\bar{z} \in \mathbb{C}$ izomteria tükrözés $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $x_1 = x_2$ egyneletű egyenesére. Továbbá $f_2 : z \in \mathbb{C} \longmapsto a\bar{z} + b \in \mathbb{C}$ izometria f_1 és az $1 + i$ eltolásvektorú transzláció kompozíciója.

A 3.9 Lemma szerint az f_1 tengelyes tükrözés tengelye

$$l_0 = span_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right) = \left\{ \tau e^{\frac{i\pi}{4}} \in \mathbb{C} | \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

Vegyük észre, hogy $e^{\frac{i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Ezért

$$span_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right) = span_{\mathbb{R}} (1 + i) = \{x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} | x_1 = x_2\}$$

azaz a tükrözés tengelye valóban $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $x_1 = x_2$ egyneletű egyenese.

Másrészt $b = 1 + i \in l_0$ teljesül, ezért $f_1(b) = b$, azaz $a\bar{b} = b$. Tehát $a\bar{b} + b = b + b = 2b \neq 0$, hiszen $b \neq 0$, így a 3.11 Lemma szerint f_2 csúsztatva tükrözés, amely előáll $f_2 = \tau_d \circ \tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}}$ alakban, ahol $d = \frac{a\bar{b}+b}{2} = b$. Mivel $b \in l_0$, ezért $\frac{b}{2} \in l_0$ és $-\frac{b}{2} \in l_0$, azaz $\frac{b}{2} \in l_0$ és $-\frac{b}{2} \in l_0$ párhuzamosak a σ_a tükrözés tengelyével, így $\tau_{\frac{b}{2}}$ és $\tau_{-\frac{b}{2}}$ felcserélhetők σ_a-val a kompozíció műveletére nézve. Tehát $d = b$ felhasználásával $f_2 = \tau_b \circ \tau_{\frac{b}{2}} \circ \tau_{-\frac{b}{2}} \circ \sigma_a = \tau_b \circ \sigma_a$, azaz f_2 valóban előáll az $i + 1$ eltolásvektorú transzláció és a $\sigma_a = f_1$ tükrözés kompozíciójaként. ∎

33. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *csúsztatva tükrözés, akkor egyetlen olyan* $l \subset \mathbb{C}$ *egyenes van, amelyre* $f(l) = l$ *teljesül. Igazoljuk, hogy bármely* $z \in \mathbb{C}$ *esetén* $\frac{1}{2}(z + f(z)) \in l$*.*

Megoldás: Ha $f : z \to a\bar{z} + b$ csúsztatva tükrözés, azaz $a\bar{b} + b \neq 0$, akkor a 3.11 Lemma szerint

$$f = \tau_d \circ \tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}}, \quad d = \frac{a\bar{b} + b}{2}$$

ahol $\theta = \arg(a)$. Legyen $l := \frac{b}{2} + span_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{i\theta}{2}} \right)$. Ekkor a 3.9 Lemma felhasználásával bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}} \left(\frac{b}{2} + \lambda e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = \tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \left(\lambda e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = \tau_{\frac{b}{2}} \left(\lambda e^{\frac{i\theta}{2}} \right) = \frac{b}{2} + \lambda e^{\frac{i\theta}{2}}$$

azaz l invariáns a $\tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}}$ izometriára nézve. Mivel ismét a 3.11 Lemma szerint d irányvekrora l-nek, így l invariáns f-re nézve is.

Legyen l_2 egy l-től különböző egynes és $z \in l_2 \setminus l$. Ekkor a $\tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}}$ tengelyes tükrözést tekintve látható, hogy $\overleftrightarrow{z\tau_{\frac{b}{2}} \circ \sigma_a \circ \tau_{-\frac{b}{2}}(z)}$ merőleges l-re. Ugyanakkor mivel d irányvektora l-nek, így $\overleftrightarrow{z\tau_d(z)}$ párhuzamos l-lel. Tehát $z \notin l$ és $d \neq 0$ miatt $\overleftrightarrow{zf(z)}$ nem merőleges l-re és nem párhuzamos vele. Így l és $\overleftrightarrow{zf(z)}$ metszik egymást egy w pontban. Ekkor $f(w) = w + d \in l$. Másrészt ha l_2 invariáns, akkor $f(z) \in l_2$, ezért $\overleftrightarrow{zf(z)} = l_2$, így $w \in l_2$ és $f(w) \in l_2$. Ez azonban azt jelentené, hogy l és l_2 egybeesnek, amit korábban kizártunk. Tehát l_2 nem lehet invariáns.

Végül legyen $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges és $w = \frac{1}{2}(z + f(z))$. Ha $z \in l$, akkor l invarianciája miatt $w = \frac{1}{2}(z + f(z)) = \frac{1}{2}(z + z) = z$, így $w \in l$. Most tegyük fel, hogy $z \notin l$. Ekkor

$$w = \frac{1}{2}(z + f(z)) = \frac{1}{2}(z + a\bar{z} + b) = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}(z + a\bar{z})$$

Másrészt az $f_2 : z \longmapsto a\bar{z}$ tengelyes tükrözést tekintve a 29. feladat alapján látható, hogy

$$\frac{1}{2}(z + a\bar{z}) \in span_{\mathbb{R}}(e^{\frac{i\theta}{2}})$$

Tehát

$$w \in \frac{b}{2} + span_{\mathbb{R}}(e^{\frac{i\theta}{2}}) = l$$

■

34. Feladat. *Mutassuk meg, hogy azok a* $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ *alakú Möbius-transzformációk, ahol* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$*, részcsoportját alkotják* $\text{Möb}^+\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$*-nek.*

35. Feladat. *Legyen* $f \in \text{Möb}^+\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ *mátrixa* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$*. Igazoljuk, hogy ekkor*

$$\left(f^2 = 1_{\overline{\mathbb{C}}} \text{ és } f \neq 1_{\overline{\mathbb{C}}}\right) \iff a + d = 0$$

36. Feladat. *Legyen* $f(z) = \frac{2z+1}{3z+4}$*. Állítsuk elő* f*-et transzlációk, forgatva nyújtás és (komplex) inverzió kompozíciójaként. Ekkor*

$$f = \tau_{\frac{2}{3}} \circ \rho_{-\frac{5}{9}} \circ \mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{4}{3}}$$

37. Feladat. *Határozzuk meg azokat a Möbius-traszformációkat, amelyek a megadott ponthármasokon az adott módon hatnak:*

1. $(1, i, -1) \longmapsto (i, -1, 1)$
2. $(i, -1, 1) \longmapsto (-1, -i, 1)$
3. $(-1, -i, 1) \longmapsto (-1, 0, 1)$
4. $(-1, 0, 1) \longmapsto (-1, i, 1)$

5. $(1,-1,i) \longmapsto (1,i,-1)$

6. $(0,1,\infty) \longmapsto (1,\infty,0)$

7. $(0,1,\infty) \longmapsto (1,-1,i)$

8. $(0,1,\infty) \longmapsto (-1,0,1)$

9. $(0,1,2) \longmapsto (1,0,\infty)$

10. $(i,-1,1) \longmapsto (1,0,\infty)$

38. Feladat (38. feladat). *Határozzuk meg az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kör képét az*

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

képlettel adott Möbius-transzformációnál.

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$l = \{z \in \mathbb{C} \,|-iz + i\bar{z} = 0\}$$

Mivel f Möbius-transzformáció, így a 4.2 Állítás szerint $f = \tau_{\frac{a}{c}} \circ \rho_k \circ \mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}$, ahol $\frac{a}{c} = 1$, $k = -2i$, $\mathfrak{J}$ a komplex inverzió és $\frac{d}{c} = i$. Ekkor $z \in \tau_{\frac{d}{c}}(l) \iff \tau_{-\frac{d}{c}}(z) \in l$ és így

$$-i(z-i) + i(\bar{z}-i) = 0 \iff -i(z-i) + i(\overline{z-i}) - 2 = 0$$

alaján

$$\tau_{\frac{d}{c}}(l) = \{z \in \mathbb{C} \,|-i(z-i) + i(\bar{z}-i) - 2 = 0\}$$

Ezután

$$-i\frac{1}{z} + i\frac{1}{\bar{z}} - 2 = 0 \iff -2z\bar{z} - i\bar{z} + iz = 0$$

miatt

$$\mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}(l) = \{z \in \mathbb{C} \,|-2z\bar{z} - i\bar{z} + iz = 0\}$$

Továbbá

$$-2\frac{z}{-2i}\frac{\bar{z}}{2i} - i\frac{\bar{z}}{2i} + i\frac{z}{-2i} = 0 \iff z\bar{z} + \bar{z} + z = 0$$

miatt

$$\rho_k \circ \mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}(l) = \{z \in \mathbb{C} \,|z\bar{z} + \bar{z} + z = 0\}$$

Végül

$$(z-1)(\bar{z}-1) + \bar{z} - 1 + z - 1 = 0 \iff z\bar{z} = 1$$

szerint

$$f(l) = \{z \in \mathbb{C} \,|z\bar{z} = 1\}$$

azaz $f(l)$ valóban az egységkör. ■

39. Feladat. *Mi lesz a képe az előbbi transzformációknál a következő ponthalmazoknak?*

1. $\left\{it \in \mathbb{C} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}_+^* \right\}$
2. *az 1 középpontú, 1 sugarú kör*
3. $\{i + t \in \mathbb{C} \,|t \in \mathbb{R}\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} \,|re(z) = 1,\, im(z) \geq 0\}$

40. Feladat. *Konciklikusak-e a* $-2i, 2+3i, 1-i, 4 \in \mathbb{C}$ *pontok?*

Megoldás: A 4.8 Állítás szerint a $-2i, 2+3i, 1-i, 4 \in \mathbb{C}$ pontok pontosan akkor konciklikusak, ha $\nu\left(-2i, 2+3i, 1-i, 4\right)$ valós szám. Jelen esetben

$$\nu\left(-2i, 2+3i, 1-i, 4\right) = \frac{-2i-1+i}{-2i-4}\frac{2+3i-4}{2+3i-1+i} = \frac{-5+i}{-4+18i}$$

Tegyük fel, hogy $\frac{-5+i}{-4+18i}$ valós szám, azaz

$$\frac{-5+i}{-4+18i} = \frac{-5-i}{-4-18i}$$

amiből

$$(-5+i)(4+18i) = (5+i)(-4+18i)$$
$$-86i = 86i \dagger$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a $-2i, 2+3i, 1-i, 4$ pontok nem konciklikusak. ■

41. Feladat. *Határozzuk meg azokat a* z *komplex számokat, amelykre a* $2+3i, -2i, 1-i, z \in \mathbb{C}$ *pontok konciklikusak.*

Megoldás: A 4.8 Állítás szerint a $2+3i, -2i, 1-i, z \in \mathbb{C}$ pontok pontosan akkor konciklikusak, ha $\nu\left(2+3i, -2i, 1-i, z\right)$ valós szám. Jelen esetben

$$\nu\left(2+3i, -2i, 1-i, z\right) = \frac{2+3i-1+i}{2+3i-z} \cdot \frac{-2i-z}{-2i-1+i} =$$

$$= \frac{1+4i}{2+3i-z} \cdot \frac{2+3i-z-(2-5i)}{-1-i} = -\frac{1+4i}{1+i} + \frac{1+4i}{2+3i-z} \cdot \frac{2-5i}{1+i} = c$$

valamely $c \in \mathbb{R}$-re. Ekkor

$$\frac{1+4i}{2+3i-z} = \left(c + \frac{1+4i}{1+i}\right)\frac{1+i}{2-5i}$$

$$\frac{1+4i}{2+3i-z} = \frac{c+1+i(c+4)}{2-5i}$$

$$\frac{2+3i-z}{1+4i} = \frac{2-5i}{c+1+i(c+4)}$$

$$2+3i-z = \frac{22+3i}{c+1+i(c+4)}$$

$$z = \frac{(2+3i)\,(c+1+i(c+4)) - 22 - 3i}{c+1+i(c+4)}$$

$$z = \frac{-c-32+i(5c+8)}{c+1+i(c+4)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Tehát pontosan a fenti alakú $z \in \mathbb{C}$ számok esetén lesznek a $2+3i, -2i, 1-i, z \in \mathbb{C}$ pontok konciklikusak. ∎

42. Feladat. *Legyen* $f(z) = \frac{z-i}{iz-1}$, $z \in \mathbb{C}$. *iagzoljuk, hogy ekkor* f *a* $H = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ *felső félsíkot a nyílt egységkörrlapra képezi le.*

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z-\bar{z}}{i} > 0 \right\}$$

Mivel f Möbius-transzformáció, így a 4.2 Állítás szerint $f = \tau_{\frac{a}{c}} \circ \rho_k \circ \mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}$, ahol $\frac{a}{c} = \frac{1}{i}$, $k = -2$, $\mathfrak{J}$ a komplex inverzió és $\frac{d}{c} = -\frac{1}{i}$. Ekkor $z \in \tau_{\frac{d}{c}}(H) \iff \tau_{-\frac{d}{c}}(z) \in H$ és így

$$\frac{1}{i}\left(z + \frac{1}{i} - \left(\bar{z} - \frac{1}{i}\right)\right) > 0 \iff \frac{z-\bar{z}}{i} > 2$$

alaján

$$\tau_{\frac{d}{c}}(H) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z-\bar{z}}{i} > 2 \right\}$$

Ezután

$$\frac{1}{i}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right) > 2 \iff -2z\bar{z} + \frac{\bar{z}-z}{i} > 0$$

miatt

$$\mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}(H) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -2z\bar{z} + \frac{\bar{z}-z}{i} > 0 \right\}$$

Továbbá

$$-2\frac{z}{2}\frac{\bar{z}}{2} + \frac{\frac{\bar{z}}{-2} - \frac{z}{-2}}{i} > 0 \iff -z\bar{z} + \frac{z-\bar{z}}{i} > 0$$

miatt

$$\rho_k \circ \mathfrak{J} \circ \tau_{\frac{d}{c}}(H) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -z\bar{z} + \frac{z-\bar{z}}{i} > 0 \right\}$$

Végül

$$-\left(z-\frac{1}{i}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{i}\right)+\frac{1}{i}\left(z-\frac{1}{i}-\left(\bar{z}+\frac{1}{i}\right)\right)>0 \iff -z\bar{z}+1>0$$

szerint

$$f(H)=\{z\in\mathbb{C}\,|z\bar{z}<1\}$$

azaz $f(H)$ valóban a nyílt egységkörlap. ∎

43. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $\alpha,\beta\in S_n$ diszjunkt permutációk, akkor $\alpha\beta=\beta\alpha$.*

Megoldás: Legynek $\alpha,\beta\in S_n$ diszjunkt permutációk, továbbá legyen $k\in\{1,2,\dots,n\}$ tetszőleges. Ekkor $\alpha(k)=k$ és $\beta(k)=k$ közül legalább az egyik teljesül. Tegyük fel például, hogy $\alpha(k)=k$. Ha $\beta(k)=k$ is fenn áll, akkor $\alpha(\beta(k))=\alpha(k)=k=\beta(k)=\beta(\alpha(k))$, azaz $\alpha\circ\beta(k)=\beta\circ\alpha(k)$. Ha $\beta(k)\neq k$, akkor $\beta(\beta(k))\neq\beta(k)$, különben $\beta(k)=k$ teljesülne (hiszen β bijekció). Mivel α,β diszjunktak ez azt jelenti, hogy $\alpha(\beta(k))=\beta(k)$. Másrészt $\alpha(k)=k$ miatt $\beta(\alpha(k))=\beta(k)$ is fenn áll. Tehát $\alpha\circ\beta(k)=\beta\circ\alpha(k)$. Mivel k tetszőleges, így a két eset együtt azt jelenti, hogy $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$. ∎

44. Feladat. *Ellenőrizzük, hogy ha z_1,z_2,z_3,z_4 a $\overline{\mathbb{C}}$ különböző pontjai, akkor*

$$\nu(z_1,z_2,z_3,z_4)\notin\{0,1,\infty\}$$

Megoldás: Legyenek z_1,z_2,z_3,z_4 a $\overline{\mathbb{C}}$ különböző pontjai. Tegyük fel először, hogy $\infty\notin\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$. Ekkor

$$\nu(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$$

Idirket módon tegyük fel, hogy

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}=0$$

Ekkor

$$(z_1-z_3)(z_2-z_4)=0$$

$$z_1=z_3 \quad \text{vagy} \quad z_2=z_4\ \dagger$$

Idirket módon tegyük fel, hogy

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}=1$$

Ekkor

$$(z_1-z_3)(z_2-z_4)=(z_1-z_4)(z_2-z_3)$$

$$z_1z_2 - z_2z_3 - z_1z_4 + z_3z_4 = z_1z_2 - z_2z_4 - z_1z_3 + z_3z_4$$
$$(z_1 - z_2)\, z_3 = (z_1 - z_2)\, z_4$$
$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = 0$$
$$z_1 = z_2 \quad \text{vagy} \quad z_3 = z_4 \dagger$$

Végül vegyük észre, hogy $z_1 \neq z_4$ és $z_1 \neq z_4$ miatt $(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) \neq 0$ és korlátos, másrészt $(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)$ is korlátos, így a hányadosuk $\nu\,(z_1, z_2, z_3, z_4)$ szintén korlátos.

Most tegyük fel, hogy $z_1 = \infty$. Ekkor

$$\nu\,(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

Így $z_2 \neq z_4$ és $z_3 \neq z_4$ miatt ez nem lehet sem 0 sem 1. Továbbá $z_2 \neq z_3$ miatt $z_2 - z_3 \neq 0$ és korlátos, másrészt $z_2 - z_4$ is korlátos, így a hányadosuk $\nu\,(z_1, z_2, z_3, z_4)$ szintén korlátos.

A második esethez hasonlóan igazolható, hogy $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$ vagy $z_4 = \infty$ esetén is teljesül az állítás. ∎

45. Feladat. *Igazoljuk, hogy pontosan hat olyan Möbius-transzformáció van, amely a* $\{0, 1, \infty\}$ *halmazt önmagára képezi le, mégpedig az*

$$f_1 = 1_{\mathbb{C}},\ f_2 = \mathfrak{J},\ f_3 = z \longmapsto 1 - z,\ f_4 = z \longmapsto \frac{1}{1-z},\ f_5 = z \longmapsto \frac{z-1}{z},$$
$$f_6 = z \longmapsto \frac{z}{z-1}$$

Möbius-transzformációk. Ezek a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, amely izomorf az S_3 *szimmetrikus csoporttal.*

Megoldás: A 4.4 Tétel szerint bármely Möbius-transzformációt meghatároz három különböző pont és azok képe, így a $\{0, 1, \infty\}$ halmazt önmagára képező Möbius-transzformációk száma legfeljebb 6. Másrészt az $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \in \mathcal{M}_0$ Möbius-transzformációk ilyenek, így nincs más Möbius-transzformáció ezzel a tulajdonsággal. A 4.1 Lemma szerint két Möbius-transzformáció kompozíciója is Möbius-transzformáció, továbbá az is világos, hogy két a $\{0, 1, \infty\}$ halmazt önmagára képező leképezés kompozíciója is a $\{0, 1, \infty\}$ halmazt önmagára képezi. Tehát $\mathcal{M}_0$ zárt a kompozíció műveletére. Továbbá szintén a 4.1 Lemma alapján tudjuk, hogy a kompozíció művelete asszociatív a Möbius-transzformációk halmazán, így $\mathcal{M}_0$-on is. Másrészt $1_{\mathbb{C}} = f_1 \in \mathcal{M}_0$ és $f_1 \circ f_1 = f_2 \circ f_2 = f_3 \circ f_3 = f_6 \circ f_6 = f_4 \circ f_5 = f_5 \circ f_4 = 1_{\mathbb{C}}$ alapján $\mathcal{M}_0$ csoport a kompozíció műveletére nézve. Végül tekintsük a $\varphi : \mathcal{M}_0 \longmapsto S_3$ leképezést, ahol $\varphi(f_1) = I$, $\varphi(f_2) = (13)$, $\varphi(f_3) = (12)$, $\varphi(f_4) = (123)$, $\varphi(f_5) = (132)$, $\varphi(f_6) = (23)$. Ekkor azonnal látható, hogy φ bijekció, másrészt könnyen igazolható, hogy φ homomorfizmus. Például: $f_4 = f_2 \circ f_3$ és $\varphi(f_4) = (123) = (13)(12) = \varphi(f_2)\varphi(f_3)$. Tehát $\mathcal{M}_0$ és S_3 izomorfak φ izomorfizmussal. ∎

46. Feladat. *Ellenőrizzük, hogy ha* $(13),(24),(14),(23) \in S_4$, *akkor*

$$f_{(13)} = f_{(24)} = f_6 \in \mathcal{M}_0 \quad \textit{és} \quad f_{(14)} = f_{(23)} = f_3 \in \mathcal{M}_0$$

Megoldás: Legyen $\lambda = \nu(z_1, z_2, z_3, z_4)$ tetszőleges és g jelölje azt a Möbius-transzformációt, amelyre $g(z_1) = 1$, $g(z_3) = \infty$ és $g(z_4) = 0$. Ekkor

$$g(z_2) = \nu(1, g(z_2), \infty, 0) = \nu(g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)) = \nu(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$$

Így

$$f_{(13)}(\lambda) = \nu(z_3, z_2, z_1, z_4) = \nu(g(z_3), g(z_2), g(z_1), g(z_4)) = \nu(\infty, \lambda, 1, 0)$$

azaz

$$f_{(13)}(\lambda) = \nu(\infty, \lambda, 1, 0) = \frac{\lambda - 0}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

Tehát $f_{(13)} = f_6 \in \mathcal{M}_0$. Másrészt

$$f_{(24)}(\lambda) = \nu(z_1, z_4, z_3, z_2) = \nu(1, 0, \infty, \lambda) = \frac{0 - \lambda}{1 - \lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

azaz $f_{(24)} = f_6 \in \mathcal{M}_0$. Továbbá

$$f_{(14)}(\lambda) = \nu(z_4, z_2, z_3, z_1) = \nu(0, \lambda, \infty, 1) = \frac{\lambda - 1}{0 - 1} = 1 - \lambda$$

és

$$f_{(23)}(\lambda) = \nu(z_1, z_3, z_2, z_4) = \nu(1, \infty, \lambda, 0) = \frac{1 - \lambda}{1 - 0} = 1 - \lambda$$

ezért $f_{(14)} = f_{(23)} = f_3 \in \mathcal{M}_0$. ■

47. Feladat. *Határozzuk meg az* f_σ *függvényt, ha* $\sigma = (123) \in S_4$. *akkor* $f_\sigma = f_4 \in \mathcal{M}_0$

Megoldás: Vegyük észre, hogy $(123) = (13)(12)$, így a 4.10 Tétel szerint $f_{(123)} = f_{(12)} \circ f_{(13)}$. A 4.10 Tétel bizonyításából az is kiderül, hogy $f_{(12)} = f_2 \in \mathcal{M}_0$, másrészt a 46. feladat alapján tudjuk, hogy $f_{(13)} = f_6 \in \mathcal{M}_0$. Így bármely $z \in \overline{\mathbb{C}}$ esetén $f_{(123)}(z) = f_2 \circ f_6(z) = \frac{z-1}{z}$, azaz $f_{(123)} = f_5 \in \mathcal{M}_0$. ■

48. Feladat. *Ellenőrizzük, hogy minden olyan* $\sigma \in S_4$ *permutáció esetén, amelyre* $\sigma(4) = 4$, $f_\sigma \in \mathcal{M}_0$

Megoldás: Az $I, (12), (13), (23), (123), (132) \in S_4$ permutációk megfelelnek az állítás feltételének. Másrészt $\{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(4) = 4\} \cong S_3$, és így

$$\#\{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(4) = 4\} = |S_3| = 6$$

Tehát a felsoroltakon kívül nincs más a feltételnek eleget tevő permutáció. A 46. és 47. feladat alapján tudjuk, hogy $f_{(12)}, f_{(23)}, f_{(13)}, f_{(123)} \in \mathcal{M}_0$. Továbbá mivel $(132) = (12)(13)$, így a 4.10 Tétel szerint $f_{(132)} = f_{(12)} \circ f_{(13)}$, azaz $f_{(132)} = f_2 \circ f_6 = f_5 \in \mathcal{M}_0$. Végül a 46. feladat bizonyításához hasonlóan látható, hogy $f_I(\lambda) = \nu(1, \lambda, \infty, 0) = \lambda$, ezért $f_I = 1_{\mathbb{C}} \in \mathcal{M}_0$. ■

49. Feladat. *Tekintsük a*

$$\varphi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2, \quad z \longmapsto \varphi(z) = \left(\frac{2re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2im(z)}{1+|z|^2} \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right)$$

$$\varphi(\infty) := (0,0,1)$$

sztereografikus leképezést. Igazoljuk, hogy tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén

$$\|\varphi(z) - \varphi(w)\| = \frac{2\,|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \leq 2$$

továbbá

$$\|\varphi(z) - \varphi(\infty)\| = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

ahol $\|.\|$ az $\mathbb{R}^3$-beli norma.

50. Feladat.

1. *Mutassuk meg, hogy ha $f \in Aut(\mathbb{H}^2)$ vagy $f \in Aut(\mathbb{D})$, és f-enk van két fixpontja, akkor f az identikus transzformáció.*
2. *Tekintsük az $f_A \in$Möb$^+(\mathbb{H}^2)$, $A \in SL_2(\mathbb{R})$ az identikus leképezéstől különböző Möbius-transzformációt. Igazoljuk, hogy ha f_A nem valós számmal való eltolás, akkor f_A-nak*
   - *(a) egyetlen fixpontja van $\overline{\mathbb{R}}$-ban $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 = 4$*
   - *(b) két fixpontja van $\overline{\mathbb{R}}$-ban $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 > 4$*
   - *(c) két fixpontja van $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$-ben $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 < 4$*

Megoldás: 1. Legyen először $f \in Aut(\mathbb{H}^2)$ és legyenek $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ különböző fixpontjai f-nek. Mivel $Aut(\mathbb{H}^2)$ =Möb$^+(\mathbb{H}^2)$, így $\exists\, A \in SL_2(\mathbb{R})$, hogy $f = f_A$. Legyen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $ad - bc = 1$. Ekkor a z_1 és z_2 gyökei a

$$cz^2 + (d-a)z - b \tag{2}$$

legfelejebb másodfokú valós együtthatós polinomnak. Ismert tény, hogy ha egy komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor annak konjugáltja is gyöke. Mivel $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$, ezért z_1 és z_2 nem konjugáljai sem egymásnak, sem önmaguknak. Tehát a (2) polinomnak van legalább négy különböző gyöke. Mivel (2) legfeljebb másodfokú ez csak úgy lehetséges, ha (2) az azonosan nulla polinom. Ekkor azonban $c = 0, a = d = 1, b = 0$ adódik, azaz f az identikus transzformáció.

Legyen most $f \in Aut(\mathbb{D})$ és legyenek $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ különböző fixpontjai f-nek. Tekintsük az $f_0 : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$, $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ izomorfizmust. Ekkor $\exists\, w_1, w_2 \in$

$\mathbb{H}^2$, hogy $z_1 = f_0(w_1)$ és $z_1 = f_0(w_2)$. Felhsználva, hogy $f(z_1) = z_1$ és $f(z_2) = z_2$

$$f_0^{-1} \circ f \circ f_0(w_1) = f_0^{-1} \circ f(z_1) = f_0^{-1}(z_1) = w_1$$

és

$$f_0^{-1} \circ f \circ f_0(w_2) = f_0^{-1} \circ f(z_2) = f_0^{-1}(z_2) = w_2$$

adódik. Tehát az $f_0^{-1} \circ f \circ f_0 \in Aut(\mathbb{H}^2)$ leképezésnek van két fixpontja. Ekkor a második rész felhasználásával

$$f_0^{-1} \circ f \circ f_0 = id$$

amiből $f = id$ adódik.

2. Legyen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $ad-bc = 1$. Ekkor f_A fixpontjai eleget tesznek az

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \tag{3}$$

egyenletnek. Ha $c = 0$, akkor $ad - bc = 1$ miatt $d = \frac{1}{a}$, továbbá $d = a$ nem állhat fenn, különben f_A $b = 0$ esetén az identikus transzformáció, míg $b \neq 0$ esetén valós számmal való eltolás lenne. Így (3) alapján f_A-nak pontosan két fixpontja van $\overline{\mathbb{R}}$-ban, nevezetesen $z = \frac{b}{d-a}$ és $z = \infty$. Másrészt

$$tr(A)^2 = (a+d)^2 = (a+\frac{1}{a})^2 = (a-\frac{1}{a})^2 + 4$$

ezért $tr(A)^2 \geq 4$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = d$. Mivel f_A az identikus leképezéstől különböző Möbius-transzformáció, így $tr(A)^2 > 4$ teljesül.

Ha $c \neq 0$, akkor (3) (valódi) másdofokú egyenlet, amelynek diszkriminánsa

$$D = (a-d)^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4(ad-1) = (a+d)^2 - 4 = tr(A)^2 - 4$$

Így (3)-nek

1. egyetlen megoldása van $\overline{\mathbb{R}}$-ban $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 = 4$
2. két megoldása van $\overline{\mathbb{R}}$-ban $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 > 4$
3. két megoldása van $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$-ben $\Longleftrightarrow$ $(trA)^2 < 4$

Mivel (3)-nek minden megoldása fixpontja f_A-nak és f_A minden fixpontja meoldása (3)-nek, ezért fent épp az állítást kaptuk. ■

1. Megjegyzés. *Ha* $f_A \in$*Möb*$^+(\mathbb{H}^2)$, $A \in SL_2(\mathbb{R})$ *valós számmal való eltolás, akkor* $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *ahol* $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. *Ekkor* $tr(A)^2 = (1+1)^2 = 4$ *és* f_A*-nak nincs fixpontja.*

Ha f_A *az identikus transzformáció, akkor* $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *és így* $tr(A)^2 = (1+1)^2 = 4$ *és* $\mathbb{H}^2$ *minden pontja fixpontja* f_A*-nak.*

51. Feladat. *Legyen* $G \subset \mathbb{C}$ *egy tartomány, és tegyük fel, hogy* f *holomorf izomorfizmusa a* $\mathbb{D}$ *nyílt egységkörlapnak* G*-re. Tetszőleges* $r \in \,]0,1[$ *esetén legyen* $G_r := f(B_r(0))$. *Bizonyítsuk be, hogy ha* G *konvex halmaz, akkor* G_r *is konvex minden* $r \in \,]0,1[$ *esetén.*

52. Feladat. *Vezessünk be alkalmas geometriai rendezést és szakasz-, ill. szög-egybevágóságot a* $(\mathbb{H}^2, \mathcal{L}_H)$ *illeszkedési struktúrában és vizsgáljuk meg az* $(R1 - R4)$ *és* $(C1 - C6)$ *axiómák teljesülését.*

5. Lemma. *Legyenek* $a, b \in \mathbb{C}$ *olyan pontok, amelyekre* $|a| = |b| = r$ *és* $arg(a) = \alpha$, $arg(b) = \beta$. *Ekkor*

$$a - b = 2r \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

Megoldás: Legyenek $a, b \in \mathbb{C}$ a fenti alakúak. Ekkor

$$a - b = r\left(\cos\alpha - \cos\beta + i\left(\sin\alpha - \sin\beta\right)\right) =$$

$$= r\left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + i2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= 2r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{-\alpha-\beta}{2} + i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{-\alpha-\beta-\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right) =$$

$$= 2r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

■

6. Lemma. *Legyenek* $a, b \in \mathbb{H}^2$ *olyan pontok, amelyekre illeszkedő egyenes a* $k = \frac{u+v}{2} \in \mathbb{R}$ *középpontú,* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ *sugarú euklideszi kör. Ha* $\alpha = arg(a-k)$ *és* $\beta = arg(b-k)$, *akkor*

$$cr(a,b,u,v) = \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Megoldás: Legyenek $a, b \in \mathbb{H}^2$ és $k, r \in \mathbb{R}$, $(r > 0)$ úgy, mint az állításban. Ekkor az előző lemma alapján

$$a - u = a - k - (u - k) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) - r(\cos\pi + i\sin\pi) =$$

$$= 2r\sin\frac{\alpha-\pi}{2}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+2\pi}{2}\right)$$

valamint

$$a - v = a - k - (v - k) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) - r(\cos 0 + i\sin 0) =$$

$$= 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\pi}{2}\right)$$

Hasonlóan

$$b - u = 2r\sin\frac{\beta-\pi}{2}\left(\cos\frac{\beta+2\pi}{2} + i\sin\frac{\beta+2\pi}{2}\right)$$

és

$$b - v = 2r\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta+\pi}{2} + i\sin\frac{\beta+\pi}{2}\right)$$

Ekkor

$$cr(a, b, u, v) = \frac{a-u}{a-v} : \frac{b-u}{b-v} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha-\pi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi 2\right) : \left(\frac{\sin\frac{\beta-\pi}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi 2\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha-\pi}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\pi}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

■

7. Lemma. *Legyenek $a, b \in \mathbb{H}^2$ olyan pontok, amelyekre $|a| = |b| = r$ és $arg(a) = \alpha$, $arg(b) = \beta$. Ekkor*

$$re(a) < re(b) \iff \beta < \alpha$$

Megoldás: Legyenek $a, b \in \mathbb{H}^2$ a fenti tulajdonságúak. Ekkor $re(a) = r\cos\alpha$ és $re(b) = r\cos\beta$, valamint $\alpha, \beta \in \,]0, \pi[$. Mivel $r > 0$ és a cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $]0, \pi[$ intervallumon, így

$$re(a) < re(b) \iff \cos\alpha < \cos\beta \iff \beta < \alpha$$

■

53. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a d_H függvény additív a hiperbolikus egyenesek mentén, azaz ha az $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ pontok esetén $a * b * c$ teljesül, akkor*

$$d_H(a, c) = d_H(a, b) + d_H(b, c)$$

Megoldás: Legyenek $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ olyan pontok, amelyekre $a * b * c$ teljesül. Tegyük fel először, hogy az $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ pontokra illeszkedő egyenes a $k = \frac{u+v}{2} \in \mathbb{R}$ középpontú, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sugarú euklideszi kör. Ekkor $a * b * c$ miatt $re(c) < re(b) < re(a)$ vagy $re(a) < re(b) < re(c)$ valamelyike teljesül. Feltehető, hogy pl. $re(c) < re(b) < re(a)$ áll fenn. Legyen $\alpha = arg(a - k)$, $\beta = arg(b - k)$ és $\gamma = arg(c - k)$. Ekkor $re(c - k) < re(b - k) < re(a - k)$ és a 7. Lemma alapján $\alpha < \beta < \gamma$ teljesül, így a 6. Lemma felhasználásával

$$cr(a, b, u, v) = \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} > 1 \quad cr(b, c, u, v) = \frac{\tan \frac{\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta}{2}} > 1$$

$$cr(a, c, u, v) = \frac{\tan \frac{\gamma}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} > 1$$

Ennél fogva

$$d_H(a, b) + d_H(b, c) = |\ln cr(a, b, u, v)| + |\ln cr(b, c, u, v)| =$$

$$= \ln cr(a, b, u, v) + \ln cr(b, c, u, v) = \ln \left(cr(a, b, u, v)cr(b, c, u, v)\right) =$$

$$= \ln \left(\frac{a-u}{a-v} \cdot \frac{b-v}{b-u} \cdot \frac{b-u}{b-v} \cdot \frac{c-v}{c-u} \right) = \ln \left(\frac{a-u}{a-v} \cdot \frac{c-v}{c-u} \right) =$$

$$= \ln cr(a, c, u, v) = |\ln cr(a, c, u, v)| = d_H(a, c)$$

Ezután tegyük fel, hogy $a, b, c \in \mathbb{H}^2$ olyan pontok, amelyekre illeszkedő egyenes a valós tengelyt az $u \in \mathbb{R}$ pontban metsző függőleges euklideszi egynes. Ekkor $a * b * c$ miatt $im(c) < im(b) < im(a)$ vagy $im(a) < im(b) < im(c)$ valamelyike teljesül. Feltehető, hogy pl. $im(c) < im(b) < im(a)$ áll fenn, így

$$cr(a, b, u, \infty) = \frac{a-u}{b-u} > 1 \quad cr(b, c, u, \infty) = \frac{b-u}{c-u} > 1$$

$$cr(a, c, u, \infty) = \frac{a-u}{c-u} > 1$$

Ezt felhasználva az előző esetbeli számolás ugyanúgy elvégezhető. ■

54. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha $d_H(a, b) = d_H(a', b')$ ($a \neq b$, $a' \neq b'$), akkor van olyan $f \in$Möb$(\mathbb{H}^2)$, hogy $f(a) = a'$ és $f(b) = b'$.*

55. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{H}^2$ esetén*

$$sh^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \frac{|a-b|^2}{4im(a)im(b)}$$

és

$$ch^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \frac{\left|a-\bar{b}\right|^2}{4im(a)im(b)}$$

Megoldás: Legyenek $a, b \in \mathbb{H}^2$ tetszőlegesek. Ha $a = b$, akkor az állítás első része triviálisan teljesül, míg a második része $ch(0) = 1$ és $im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$ miatt nyer igazolást. Ha $a \neq b$, akkor legyen $c = \frac{\left|a-\bar{b}\right|+|a-b|}{\left|a-\bar{b}\right|-|a-b|}$. Ekkor az 56. feladadt eredményét felhasználva

$$sh^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}d_H(a,b)\right)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{c^{\frac{1}{2}} - c^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 = \frac{c-2+c^{-1}}{4} = \frac{\frac{\left|a-\bar{b}\right|+|a-b|}{\left|a-\bar{b}\right|-|a-b|} + \frac{\left|a-\bar{b}\right|-|a-b|}{\left|a-\bar{b}\right|+|a-b|} - 2}{4} =$$

$$= \frac{\left(\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|\right)^2 + \left(\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|\right)^2 - 2\left(\left|a-\bar{b}\right|^2 - |a-b|^2\right)}{4\left(\left|a-\bar{b}\right|^2 - |a-b|^2\right)} =$$

$$= \frac{\left(\left|a-\bar{b}\right| + |a-b| - \left|a-\bar{b}\right| + |a-b|\right)^2}{4\left(\left|a-\bar{b}\right|^2 - |a-b|^2\right)} = \frac{|a-b|^2}{\left|a-\bar{b}\right|^2 - |a-b|^2}$$

Itt

$$\left|a-\bar{b}\right|^2 - |a-b|^2 = (re(a) - re(b))^2 + (im(a) + im(b))^2 -$$

$$-(re(a) - re(b))^2 - (im(a) - im(b))^2 = (im(a) + im(b))^2 - (im(a) - im(b))^2 =$$

$$= (im(a) + im(b) - im(a) + im(b))\,(im(a) + im(b) + im(a) - im(b)) =$$

$$= 4im(a)im(b)$$

Tehát

$$sh^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \frac{|a-b|^2}{4im(a)im(b)}$$

Az állítás második része hasonlóan igazolható, figyelembe véve, hogy

$$ch^2\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) = \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{2}d_H(a,b)\right) + \exp\left(-\frac{1}{2}d_H(a,b)\right)}{2}\right)^2$$

és

$$\left(\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|\right) + \left(\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|\right) = 2\left|a-\bar{b}\right|$$

■

56. Feladat. *Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a \neq b \in \mathbb{H}^2$ esetén*

$$d_H(a,b) = \ln \frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|}$$

Megoldás: Először tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{H}^2$ olyan pontok, amelyekre illeszkedő egyenes a $k = \frac{u+v}{2} \in \mathbb{R}$ középpontú, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sugarú euklideszi kör, és legyen $\alpha = arg(a-k)$ és $\beta = arg(b-k)$. Ekkor a 6. Lemma szerint

$$cr(a,b,u,v) = \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

Másrészt az 5. Lemma felhasználásával

$$a - b = a - k - (b-k) = 2r\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

és

$$a - \bar{b} = a - k - (\bar{b}-k) = 2r\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta+\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha-\beta+\pi}{2}\right)$$

Így

$$\frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|} = \frac{2r\left(\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|\right)}{2r\left(\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right| - \left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|\right)} = \frac{\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right| - \left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|}$$

1. Ha $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geq 0$ és $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 0$, vagy $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \leq 0$ és $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$, akkor

$$\frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Így

$$\frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|} = cr(a,b,u,v)$$

2. Ha $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geq 0$ és $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$, vagy $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \leq 0$ és $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \leq 0$, akkor

$$\frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}}$$

Ekkor felhsználva, hogy d_H szimmetrikus, azaz $cr(a,b,u,v) = cr(b,a,u,v)$, majd a 2. Lemmát alkalmazva $b, a \in \mathbb{H}^2$-ra

$$\frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|} = cr(b,a,u,v) = cr(a,b,u,v)$$

Tehát a fenti két eset mindegyikében

$$d_H(a,b) = |\ln cr(a,b,u,v)| = \left|\ln \frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|}\right| = \ln \frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|}$$

Most tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{H}^2$ olyan pontok, amelyekre illeszkedő egyenes a valós tengelyt az $u \in \mathbb{R}$ metsző függőleges euklideszi egynes. Feltehető továbbá, hogy b az a és u között van (az euklideszi értelemben), ellenkező esetben ugyanis a és b szerepének megcserélésével, sem $d_H(a,b)$, sem az $\ln \frac{\left|a-\bar{b}\right|+|a-b|}{\left|a-\bar{b}\right|-|a-b|}$ kifejezés értéke nem változik, így tekinthetjük ezt az esetet. Ekkor felhasználva, hogy $u = \frac{b+\bar{b}}{2}$

$$d_H(a,b) = |\ln cr(a,b,u,\infty)| = \left|\ln \frac{a-u}{b-u}\right| = \left|\ln \frac{|a-u|}{|b-u|}\right|$$

$$= \left|\ln \frac{\left|2a-(b+\bar{b})\right|}{\left|2b-(b+\bar{b})\right|}\right| = \left|\ln \frac{\left|a-b+a-\bar{b}\right|}{\left|b-\bar{b}\right|}\right|$$

Mivel b az a és u között van, ezért b az a és $\bar{b}$ között van (euklideszi értlemben), így egyrészt

$$|a-b| + \left|b-\bar{b}\right| = \left|a-\bar{b}\right|$$

amiből

$$\left|b-\bar{b}\right| = \left|a-\bar{b}\right| - |a-b|$$

másrészt $a-\bar{b}$ és $a-b$ egymás pozitív sklaárszorosai, ezért

$$\left|a-\bar{b}+a-b\right| = \left|a-\bar{b}\right| + |a-b|$$

Tehát

$$d_H(a,b) = \left|\ln \frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|}\right| = \ln \frac{\left|a-\bar{b}\right| + |a-b|}{\left|a-\bar{b}\right| - |a-b|}$$

hiszen $\left|a-\bar{b}\right| + |a-b| \geq \left|a-\bar{b}\right| - |a-b|$ mindig teljesül. ∎

57. Feladat. *Igazoljuk, hogy a hiperbolkius távolságfüggvény eleget tesz a háromszög-egyenlőtlenségnek!*

58. Feladat. *Határozzuk meg az* $l_2 = \left\{z \in \mathbb{H}^2 \,|\, re(z) = 2\right\}$ *függőleges egyenes i-hez legközelebbi pontját!*

59. Feladat. *Legyen* $a \in \mathbb{H}^2$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ *és* $\mathcal{K} = \left\{z \in \mathbb{H}^2 \,|\, d_H(z,a) = r\right\}$. *Igazoljuk, hogy* $\mathcal{K}$ *euklideszi kör! Mi lesz ennek az euklideszi körnek a középpontja?*

60. Feladat. *Vezessünk be távolságfüggvényt a* $\mathbb{D}$ *egységkörlapon úgy, hogy a Cayley-leképezés váljon távolságtartóvá* $(\mathbb{H}^2, d_H)$ *és* $\mathbb{D}$ *között.*

Megoldás: Legyen $f : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$, $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ a Cayley-leképezés és d_H a távolságfüggvény $\mathbb{H}^2$-n. Ekkor a

$$d_D : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a,b) \longmapsto d_D(a,b) = d_H\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right)$$

leképezés olyan távolságfüggvény $\mathbb{D}$-n, amelyre nézve a Cayley leképezés távolságtartó. Ekkor ugyanis

1. d_D nemnegatív, hiszen d_H nemnegatív
2. $d_D(a,b) = 0 \Longleftrightarrow d_H\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right) = 0 \Longleftrightarrow f^{-1}(a) = f^{-1}(b) \Longleftrightarrow a = b$
3. $d_D(a,b) = d_H\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right) = d_H\left(f^{-1}(b), f^{-1}(a)\right) = d_D(b,a)$
4. $d_D(a,b) + d_D(b,c) = d_H\left(f^{-1}(a), f^{-1}(b)\right) + d_H\left(f^{-1}(b), f^{-1}(c)\right) \geq$
   $\geq d_H\left(f^{-1}(a), f^{-1}(c)\right) = d_D(a,c)$

Tehát d_D vlóban távolságfüggvény. Másrészt $d_D\left(f(a), f(b)\right) = d_H(a,b)$ bármely $a, b \in \mathbb{H}^2$ esetén, azaz f távolságtartó leképezés d_H-ra és d_D-re nézve. ■