I. AFFIN GEOMETRIA

Megállapodás A következőkben - ha közelebbit nem mondunk - egy olyan K test alapulvételével dolgozunk, amelyben $1 + 1 \neq 0$ (azaz amely nem 2 karakterisztikájú).

1. Affin terek és affin alterek

1.1. Definíció. Legyen $\mathbb{A}$ egy *pont*oknak nevezett elemek alkotta nemüres halmaz, V pedig a K test fölötti vektortér. Az $\mathbb{A}$ halmazon adott, a K test fölötti **affin struktúrá**n olyan $\Phi\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(A1) Tetszőlegesen rögzített $A \in \mathbb{A}$ pont esetén a

$$\Phi_A\colon \mathbb{A} \to V, \quad B \longmapsto \Phi_A(B) := \Phi(A, B)$$

leképezés bijektív.

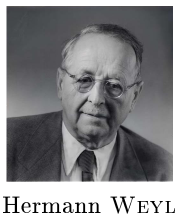
(A2) Bármely A, B, C pont esetén

$$\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C).$$

Ekkor az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ hármast (a K test fölötti) **affin tér**nek mondjuk, de gyakran csak az affin struktúrával ellátott $\mathbb{A}$ halmazra használjuk az affin tér elnevezést. A V vektorteret az affin tér *iránytere*ként említjük. Egy affin tér *dimenzió*ján az irányterének dimenzióját értjük. Az egydimenziós affin tereket *affin egyenes*eknek, a kétdimenziósokat *affin sík*oknak hívjuk.

1.2. Megjegyzések.

(1) Az affin tér most bevezetett fogalma Hermann Weyl (1885-1955) német matematikustól származik, aki D. Hilbert és H. Poincaré mellett a XX. századi matematika egyik meghatározó egyénisége. Az (A2)-ben szereplő relációt szokás *Chasles-reláció*ként említeni.



Hermann Weyl

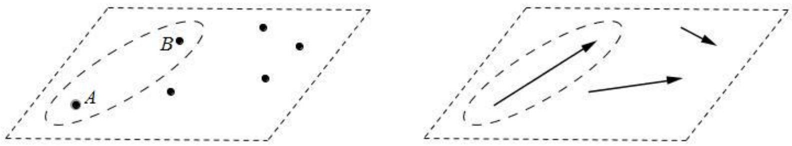
(2) Leggyakrabban az $\mathbb{R}$ valós számtest, illetve a $\mathbb{C}$ komplex számtest fölötti affin teret fogjuk tekinteni, s ilyenkor *valós*, illetve *komplex affin tér*ről beszélünk. A véges testek fölötti affin terek érdekes kombinatorikai struktúrákhoz vezetnek.

(3) Tetszőleges $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér esetén a $\Phi(A, B) \in V$ vektorra rendszerint a kényelmesebb (és „kifejezőbb”) $\overrightarrow{AB}$ jelölést fogjuk használni, s azt is mondjuk, hogy az $\overrightarrow{AB} \in V$ vektor az (A, B) pontpár által meghatározott *szabadvektor*. Ezzel az írásmóddal az affin tér definíciója a következő alakot ölti:

Az $\mathbb{A}$ (nemüres) halmaz a K test fölötti V vektortérrel mint iránytérrel rendelkező **affin tér**, ha adva van egy *affin struktúrá*nak nevezett

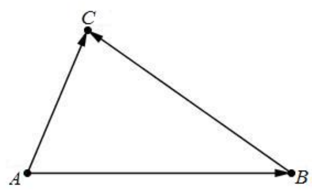
$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V, \quad (A, B) \longmapsto \overrightarrow{AB} \qquad \text{leképezés}$$

eleget téve a következő axiómáknak:



(A1) Tetszőlegesen rögzítve egy $A \in \mathbb{A}$ pontot, minden $v \in V$ vektorhoz létezik egy és csak egy olyan B pont, hogy $\overrightarrow{AB} = v$.

(A2) Bármely $A, B, C \in \mathbb{A}$ esetén $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(Chasles-reláció)*.



A Chasles-reláció

1.3. Lemma és definíció. Legyen V a K test fölötti vektortér. A

$$\Phi \colon V \times V \to V, \quad (u, v) \longmapsto \Phi(u, v) = \overrightarrow{uv} := v - u$$

leképezés affin struktúra V-n, s így a (V, V, Φ) hármas affin tér. A Φ affin struktúrát a V vektortér *természetes affin struktúrájá*nak nevezzük. Tehát: *minden vektortér affin tér önmagával mint iránytérrel és a természetes affin struktúrával.*

Bizonyítás.

(A1) Rögzítve egy $a \in V$ „pontot”, tetszőlegesen adott $v \in V$ vektor esetén a $b := a + v$ „pontra”, és csakis erre, teljesül a kívánt

$$\overrightarrow{ab} := b - a = (a + v) - a = v$$

összefüggés.

(A2) Bármely $a, b, c \in V$ pont esetén

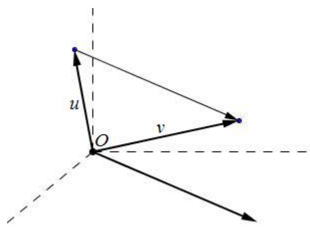
$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overrightarrow{ac}\ .$$

□

Megjegyzés. A következőkben egy V vektortér természetes affin struktúrájára a $-$ jelölést is fogjuk használni. Ekkor:

$$-: V \times V \to V, \qquad (u, v) \longmapsto \overrightarrow{uv} := v - u,$$

és a lemma értelmében $(V, V, -)$ affin tér.

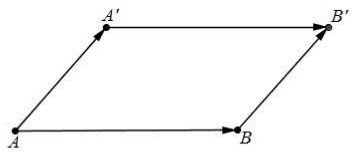


1.4. Lemma. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér.

(1) Tetszőleges $A \in \mathbb{A}$ pont esetén az $\overrightarrow{AA}$ vektor a V vektortér zérusvektora.

(2) $\forall (A, B) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

(3) Érvényes az ún. *paralelogramma-szabály*: az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ és az $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ egyenlőség ekvivalens.



A paralelogramma-szabály

Bizonyítás.

(1) A Chasles-reláció alapján tetszőleges $B \in \mathbb{A}$-ra

$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.$$

(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \overset{(A2)}{=} \overrightarrow{AA} \overset{(1)}{=} \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}\ .$

(3) Ismét a Chasles-relációból indulva ki,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B}, \qquad \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}\ .$$

Ebből a két relációból $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$ következik, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'B} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'},$$

s innen közvetlenül adódik az állítás.

□

1.5. Definíció és lemma. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér, s rögzítsünk egy $O \in \mathbb{A}$ pontot. Az

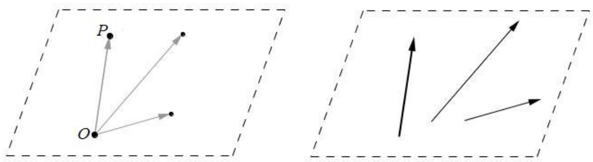
$$\mathbb{A} \to V, \qquad P \longmapsto \Phi_O(P) := \overrightarrow{OP}$$

leképezés ((A1) értelmében) bijekciója $\mathbb{A}$-nak V-re, ezt az O-ra vonatkozó *helyzetvektor-megfeleltetés*nek is hívjuk, s ekkor az $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont (O-ra vonatkozó) *helyzetvektor*ának mondjuk. A helyzetvektor-megfeleltetés segítségével az $\mathbb{A}$ halmaz vektortér-struktúrával ruházható fel az

$$A + B := C \quad \overset{def.}{\Leftrightarrow} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\lambda A := A' \quad \overset{def.}{\Leftrightarrow} \quad \overrightarrow{OA'} = \lambda\, \overrightarrow{OA} \quad (\lambda \in K)$$

előírással értelmezett összeadással, illetve skalárral való szorzással.



Ekvivalens módon:

$$A + B := \Phi_O^{-1}\left(\Phi_O(A) + \Phi_O(B)\right),$$

$$\lambda A := \Phi_O^{-1}\left(\lambda \Phi_O(A)\right)$$

$(A, B \in \mathbb{A}, \lambda \in K)$. Ha $\mathbb{A}$-t ellátjuk ezzel a vektortér-struktúrával, akkor rá az $\mathbb{A}_O$ jelölést (is) használjuk, s azt mondjuk, hogy $\mathbb{A}_O$ az $\mathbb{A}$ affin tér O *pontbeli vektorizált*ja.

Bizonyítás. Valamennyi megállapítás közvetlenül adódik a megfelelő definíciókból. □

Megjegyzések.

(1) Az $\mathbb{A}_O$ vektorizált vektortér-struktúrája úgy lett bevezetve, hogy a $\Phi_O\colon\ \mathbb{A}_O \to V$ bijekció váljon izomorfizmussá $\mathbb{A}_O$ és V között.

(2) Az *1.2.*-ban mondottak szerint minden vektortér rendelkezik egy természetes affin struktúrával. Megfordítva, az imént látottak alapján egy pont rögzítése után minden affin tér tekinthető vektortérnek. Az így adódó vektortér-struktúra azonban „nem természetes": függ a rögzített pont kijelölésétől.
Ha affin térben egy fogalmat a tér egy vektorizáltja segítségével vezetünk be, akkor mindig ellenőrizni kell, hogy a fogalom független a vektorizálás módjától.

1.6. Definíció. Tegyük fel, hogy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ véges dimenziós affin tér. Ha O egy pontja $\mathbb{A}$-nak, $\mathscr{B} = (b_i)_{i=1}^n$ pedig egy bázisa V-nek, akkor az $(O, \mathscr{B})$ párt az affin tér egy **affin koordinátarendszer**ének nevezzük. Egy $P \in \mathbb{A}$ pont *$(O, \mathscr{B})$-re vonatkozó koordinátái*n a pont $\overrightarrow{OP}$ helyzetvektorának a $\mathscr{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáit értjük. Ha tehát $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n \xi_i b_i$, akkor P $(O, \mathscr{B})$-re vonatkozó koordinátái a ${}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oszlopvektor tagjai.

1.7. Állítás. Tegyük föl, hogy $(O, \mathscr{B})$ és $(O', \mathscr{B}')$ egyaránt affin koordinátarendszere az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek. Ha egy P pont $(O, \mathscr{B})$-re vonatkozó koordinátái az $X = {}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(O', \mathscr{B}')$-re vonatkozó koordinátái az $Y = {}^t(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ oszlopmátrixot alkotják, akkor érvényes az

$$Y = A^{-1}(X - b)$$

transzformációs formula, ahol A a $\mathscr{B}$ bázisról a $\mathscr{B}'$ bázisra való átmenet mátrixa ($A := P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$), $b = {}^t(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ az O' pont (az „új origó") $(O, \mathscr{B})$-re vonatkozó koordinátáinak oszlopvektora.

Bizonyítás. Az $(O, \mathscr{B})$-re, illetve $(O', \mathscr{B}')$-re vonatkozó koordináták definíciója szerint

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n \xi_i b_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i, \qquad \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^n \eta_i b_i'.$$

Ha $A = (\alpha_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$, akkor

$$b_i' = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} b_j \qquad\qquad (1 \leq i \leq n),$$

s így

$$\overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} b_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \alpha_{ji} \right) b_j.$$

A Chasles-reláció alapján

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \alpha_{ji} \right) b_j = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^n (\xi_j - \beta_j) b_j,$$

amiből

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \eta_i = \xi_j - \beta_j, \qquad\qquad (1 \leq j \leq n)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy $AY = X - b$; innen, megszorozva mindkét oldalt A^{-1}-gyel a kívánt $Y = A^{-1}(X - b)$ reláció adódik.

□

1.8. Definíció. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér. $\mathbb{A}$-nak egy nemüres $\mathbb{B}$ részhalmazát **affin altér**nek nevezzük, ha van olyan A pontja a $\mathbb{B}$-nek, hogy az

$$\left\{ \overrightarrow{AP} \in V \mid P \in \mathbb{B} \right\} = \Phi_A(\mathbb{B})$$

vektorhalmaz altere a V iránytérnek. Megállapodunk abban, hogy az üres halmaz szintén affin altere $\mathbb{A}$-nak.

1.9. Lemma. Ha $\mathbb{B}$ nemüres affin altere az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek, akkor egy és csak egy olyan $\mathcal{U}$ altere létezik V-nek, hogy

$$\forall B \in \mathbb{B}: \qquad \left\{\overrightarrow{BP} \in V \mid P \in \mathbb{B}\right\} = \Phi_B(\mathbb{B}) = \mathcal{U}$$

illetve, ekvivalens módon, hogy $\mathbb{B} = \Phi_B^{-1}(\mathcal{U})$. A $\mathbb{B}$ affin altér maga is affin tér, amelynek iránytere $\mathcal{U}$, affin struktúrája $\Phi \restriction \mathbb{B} \times \mathbb{B}$.

Bizonyítás. Ha $\mathbb{B} \neq \emptyset$ affin altér, akkor a definíció értelmében van olyan $A \in \mathbb{B}$ pont, hogy

$$\mathcal{U} := \Phi_A(\mathbb{B}) = \left\{\overrightarrow{AP} \in V \mid P \in \mathbb{B}\right\}$$

altere V-nek. Azt kell csupán ellenőriznünk, hogy tetszőleges $B \in \mathbb{B}$ pont esetén $\Phi_B(\mathbb{B}) = \mathcal{U}$. Ez igen egyszerű:

$$\begin{aligned}\Phi_B(\mathbb{B}) := \left\{\overrightarrow{BP} \in V \mid P \in \mathbb{B}\right\} &\overset{(A2)}{=} \left\{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \in V \mid P \in \mathbb{B}\right\} = \\ =\overrightarrow{BA} + \left\{\overrightarrow{AP} \in V \mid P \in \mathbb{B}\right\} &= \overrightarrow{BA} + \mathcal{U} = \mathcal{U},\end{aligned}$$

mert $\mathcal{U} = \Phi_A(\mathbb{B})$ és $B \in \mathbb{B}$ miatt $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \in \mathcal{U}$.

□

1.10. Állítás. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér. Megadva egy $\mathcal{U} \subset V$ alteret és egy $A \in \mathbb{A}$ pontot, létezik egy és csak egy olyan affin altere $\mathbb{A}$-nak, amely tartalmazza az A pontot, s amelynek iránytere az $\mathcal{U}$ altér.

Bizonyítás. Ha $\mathbb{B}$ $\mathcal{U}$ irányterű affin altér és $A \in \mathbb{B}$, akkor *1.9.* figyelembevételével

$$\mathbb{B} = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) = \{P \in \mathbb{A} \mid \Phi_A(P) \in \mathcal{U}\} = \left\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} \in \mathcal{U}\right\},$$

$\mathbb{B}$ tehát egyértelműen meghatározott.
Megfordítva, ha $\mathcal{U}$ és A megadása után $\mathbb{B}$-t az iménti formulával definiáljuk, akkor a kívánt affin alteret kapjuk.

□

1.11. Definíció. Egy affin altér *dimenzió*ján az irányterének dimenzióját értjük. A $0-$, $1-$, illetve $2-$dimenziós affin altereket *pont*oknak, *egyenes*eknek, illetve *sík*oknak hívjuk. $n(\geq 1)$-dimenziós affin tér $(n-1)$-dimenziós affin altereit *hipersík*okként is említjük. Az üres affin altér (-1)-dimenziós.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy $\mathbb{B}$ 0-dimenziós affin altere $(\mathbb{A}, V, \Phi)$-nek. Ekkor $\mathbb{B}$ iránytere a $\{\mathbf{0}\} \subset V$ altér, s ha $A \in \mathbb{B}$, akkor az előbb látottak szerint

$$\mathbb{B} = \Phi_A^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \left\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} \in \{\mathbf{0}\}\right\} = \{A\}$$

(hiszen adott A pont esetén (A1) és 1.4.(1) alapján A az egyetlen olyan pont, amelyre $\overrightarrow{AA}= \mathbf{0}$). Ily módon a 0-dimenziós affin alterek $\mathbb{A}$ egyelemű részhalmazai, amelyek azonosíthatók $\mathbb{A}$ elemeivel. Jogosan használtuk tehát a 0-dimenziós affin alterekre a „pont” elnevezést.

1.12. Lemma és definíció. Legyen $\mathbb{B}$ $k(\geq 1)$-dimenziós affin altere az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek. Rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, s megadva $\mathbb{B}$-nek egy $\left(A, (v_i)_{i=1}^k\right)$ affin koordinátarendszerét, $\mathbb{B}$ pontjainak (és csakis ezeknek) az O-ra vonatkozó helyzetvektorai egyértelműen előállíthatók

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i \qquad (\lambda_1,\dots,\lambda_k\in K) \tag{1}$$

alakban. Ha speciálisan az affin altér az A pontot tartalmazó egyenes, illetve sík, akkor pontjainak helyzetvektoraira az

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda v, \quad \lambda\in K; \tag{2}$$

illetve

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 \tag{3}$$

kifejezést kapjuk. Azt mondjuk, hogy (1), (2), illetve (3) a tekintett affin altér, egyenes, illetve sík egy *paraméteres előállítása*. Egyenes esetén a $v \neq \mathbf{0}$ vektort (és $\mathscr{L}(v)$ minden nemzérus vektorát) *irányvektor*ként említjük.

Bizonyítás. $P\in\mathbb{B} \overset{1.9.}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AP}\in\mathcal{U} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\in\mathcal{U}=:\mathbb{B}$ iránytere

$$\Leftrightarrow\quad \exists\lambda_1,\dots\lambda_k\in K:\ \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i \quad\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i;\qquad \lambda_1,\dots,\lambda_k\in K.$$

□

1.13. Megjegyzés. Megtartva a lemma jelöléseit, tegyük fel, hogy az $\mathbb{A}$ affin tér n-dimenziós, s legyen $\mathscr{B}=(b_i)_{i=1}^n$ egy bázisa V-nek. Ekkor

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i b_i,\qquad \overrightarrow{OA}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i,\qquad v_j=\sum_{i=1}^{n}\nu_{ji}b_i \qquad (1\leq j\leq k)$$

írható, és az (1) reláció azt adja, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i b_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_{ji}b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\nu_{ji}\right)b_i,$$

ahonnan

$$\begin{cases} \xi_1=\alpha_1+\lambda_1\nu_{11}+\cdots+\lambda_k\nu_{k1}\\ \vdots\\ \xi_n=\alpha_n+\lambda_1\nu_{1n}+\cdots+\lambda_k\nu_{kn}\end{cases} \tag{4}$$

Megállapíthatjuk, hogy egy P pont, amelynek az $(O, \mathscr{B})$ affin koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái a ${}^t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oszlopmátrixot alkotják, akkor és csak akkor illeszkedik a $\mathbb{B}$ affin altérre, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárok, hogy (4) teljesül. Erre tekintettel azt mondhatjuk, hogy az

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \lambda_1\nu_{11} + \cdots + \lambda_k\nu_{k1} \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n + \lambda_1\nu_{1n} + \cdots + \lambda_k\nu_{kn} \end{cases}$$

relációk (ahol $x_1, \ldots, x_n$ már puszta szimbólumok) a $\mathbb{B}$ affin altér *paraméteres előállítás*ának *koordinátakifejezései* az $(O, \mathscr{B})$ affin koordinátarendszerre vonatkozóan. Speciálisan az A ponton átmenő, $v = \sum_{i=1}^n \nu_i b_i$ irányvektorú egyenes esetén az

$$x_1 = \alpha_1 + \lambda\nu_1, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n + \lambda\nu_n \qquad (\lambda \in K)$$

koordinátakifejezéshez jutunk. Ha $\dim \mathbb{A} := \dim V = 3$ és a

$$v = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3, \qquad\qquad w = w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3$$

vektorok lineárisan függetlenek, akkor az A pontra illeszkedő, $\mathscr{L}(v, w)$ irányterű sík paraméteres előállításának koordinátakifejezése

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \lambda\nu_1 + \mu w_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \lambda\nu_2 + \mu w_2 \\ x_3 = \alpha_3 + \lambda\nu_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad\qquad (\lambda, \mu \in K)$$

alakú.

1.14. Példák.

(1) *Egy vektortér természetes affin struktúrájára nézve az affin alterek a lineáris sokaságok és csakis ezek.*
Valóban, tekintsünk egy, a K test fölötti V vektorteret, ellátva a

$$\Phi \colon V \times V \to V, \quad (u, v) \longmapsto \Phi(u, v) = \overrightarrow{uv} := v - u$$

természetes affin struktúrával. Az üres halmaz definíció szerint affin altér és lineáris sokaság is. Ha $\mathbb{B}$ nemüres affin altere V-nek, amelynek egy pontja a és az iránytere $\mathcal{U}$, akkor

$$\mathbb{B} = \Phi_a^{-1}(\mathcal{U}) = \{v \in V \mid \Phi_a(v) \in \mathcal{U}\} = \{v \in V \mid v - a \in \mathcal{U}\} = a + \mathcal{U}$$

(ismert ugyanis a lineáris algebrából, hogy $v - a \in \mathcal{U} \Leftrightarrow v \in a + \mathcal{U}$).
Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{B}$ lineáris sokasága V-nek, mégpedig irányterének egy tetszőleges $\mathbb{B}$-beli vektorral képzett eltoltja - s a megfordítás is világos.

(2) Affin térben egy ponthalmazt *kollineáris*nak mondunk, ha elemei egy egyenesre illeszkednek; *komplanáris*nak nevezünk, ha elemeit egy (kétdimenziós) sík tartalmazza. Bármely két pont kollineáris, mégpedig *bármely két pontra egyetlenegy egyenes illeszkedik.* Tekintsük ugyanis az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térben az $A \neq B$ pontokat. Ekkor $v := \overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$, így $\mathcal{U} := \mathscr{L}(v)$ 1-dimenziós altere V-nek.

$$l := \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) = \{P \in \mathbb{A} \mid \Phi_A(P) \in \mathcal{U}\} = \left\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} \in \mathcal{U}\right\} =$$
$$= \left\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \quad (\lambda \in K)\right\}$$

egyenes, amely mind az A pontot ($\lambda := 0$ választással), mind a B pontot ($\lambda := 1$ választással) tartalmazza. Ha m további, A-ra és B-re illeszkedő egyenes, akkor $\overrightarrow{AB}$ benne van m irányterében, amely ily módon csakis az $\mathcal{U}$ altér lehet, s így *1.10.* alapján következik, hogy $m = l$.
Az $A \neq B$ pontokra illeszkedő egyetlen egyenest a továbbiakban többnyire $\overleftrightarrow{AB}$-vel jelöljük.

1.15. Lemma. Affin alterek tetszőleges családjának a metszete is affin altér.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{A}_i)_{i\in I}$ az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér affin altereinek egy családja. Ha $\bigcap_{i\in I} \mathbb{A}_i = \emptyset$, akkor a metszet definíció szerint affin altér.
Tegyük fel, hogy $A \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{A}_i$. Ekkor (*1.9.* értelmében)

$$\forall i \in I: \qquad \mathcal{U}_i := \Phi_A(\mathbb{A}_i) = \left\{\overrightarrow{AP} \in V \mid P \in \mathbb{A}_i\right\}$$

altere V-nek. A lineáris algebrából jól ismert módon $\mathcal{U} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$ szintén altér,

$$\mathbb{B} := \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) = \left\{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{AP} \in \mathcal{U}\right\}$$

pedig affin altere $\mathbb{A}$-nak. Állítjuk, hogy $\mathbb{B} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{A}_i$.
Valóban, ha $P \in \mathbb{B}$, akkor $\overrightarrow{AP} \in \mathcal{U} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$, s így

$$\forall i \in I: \ \overrightarrow{AP} = \Phi_A(P) \in \mathcal{U}_i \quad \Rightarrow \quad \forall i \in I: \quad P \in \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}_i) = \mathbb{A}_i.$$

Megfordítva, $P \in \bigcap_{i\in I} \mathbb{A}_i$ esetén

$$\begin{aligned} \forall i \in I: \quad P \in \mathbb{A}_i = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}_i) \quad &\Rightarrow \quad \forall i \in I: \ \overrightarrow{AP} = \Phi_A(P) \in \mathcal{U}_i \\ \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathcal{U} \quad &\Rightarrow \quad P \in \mathbb{B}. \end{aligned}$$

□

1.16. Következmény és definíció. Egy affin tér bármely S részhalmazához létezik (egyetlenegy) legszűkebb, S-et tartalmazó affin altér, mégpedig az S-et tartalmazó összes affin altér metszete. Ezt az affin alteret S *affin burká*nak nevezzük, s rá az $\langle S\rangle$ jelölést használjuk. Azt is mondjuk, hogy az $\langle S\rangle$ affin alteret az S halmaz *generál*ja.

Példa. Ha A és B egy affin altér különböző pontjai, akkor $\langle\{A, B\}\rangle = \overleftrightarrow{AB}$.

1.17. Definíció.

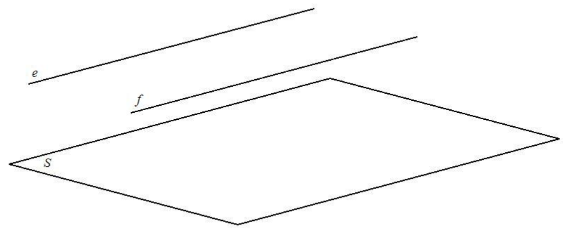
(1) Egy affin tér két affin alterét *párhuzamos*nak nevezzük, ha megegyezik az irányterük. Minden affin alteret párhuzamosnak mondunk önmagával.

(2) Egy affin tér egy L affin altere *gyengén párhuzamos* egy M affin altérrel, ha L iránytere altere M irányterének.

Megjegyzések.

(1) Ha az L affin altér párhuzamos az M affin altérrel, akkor a szokásos $L \| M$ jelölést használjuk; ha L gyengén párhuzamos M-mel, akkor azt írjuk, hogy $L \langle| M$.

(2) A párhuzamosság ekvivalenciareláció az affin alterek halmazán. Véges dimenziós affin altereket tekintve, $L \| M$ esetén $\dim L = \dim M$, ha pedig $L \langle| M$, akkor $\dim L \leq \dim M$.



$e \| f$, $e \langle| S$, $f \langle| S$

1.18. Állítás. Legyen L és M affin altere az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek.

(1) Ha $L \| M$, akkor $L = M$ vagy $L \cap M = \emptyset$.

(2) Ha $L \langle| M$, akkor $L \subset M$ vagy $L \cap M = \emptyset$.

(3) $L \langle| M$ akkor és csak akkor teljesül, ha M tartalmaz L-lel párhuzamos affin alteret.

(4) Megadva az affin tér egy P pontját, létezik egy és csak egy P-re illeszkedő, L-lel párhuzamos affin altér.

(5) Ha $L \| M$ és $\dim L = \dim M = k$, akkor létezik olyan legfeljebb $(k+1)$-dimenziós affin altér, amely mind L-et, mind M-et tartalmazza.

(6) Ha $\mathbb{A}$ véges dimenziós, L és M hipersíkja $\mathbb{A}$-nak és $L \cap M = \emptyset$, akkor $L \| M$.

Bizonyítás.

(1) Legyen L és M közös iránytere $\mathcal{U}$. Ha $L \cap M \neq \emptyset$, akkor kiválasztva egy $A \in L \cap M$ pontot, *1.9.* alapján $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ és $M = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ írható, tehát $L = M$.

(2) Megtartva az (1) pont jelöléseit, ha $L \cap M \neq \emptyset$ és $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, akkor $\Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) \subset \Phi_A^{-1}(\mathcal{V})$. Ebből pedig $L \subset M$ következik.

(3) Legyen L iránytere $\mathcal{U}$, M iránytere $\mathcal{V}$. Ekkor

$$L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) \quad (A \in L), \qquad\qquad M = \Phi_B^{-1}(\mathcal{V}) \quad (B \in M)$$

írható. Ha $L \langle| M$, akkor $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, és az $L' = \Phi_B^{-1}(\mathcal{U})$ affin altér párhuzamos L-lel, s benne van M-ben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $L' \subset M$ és $L' \| L$. Ekkor L'-nek is $\mathcal{U}$ az iránytere, s egy $B \in L' \subset M$ pont segítségével $L' = \Phi_B^{-1}(\mathcal{U})$ írható. Így az $L' \subset M$ reláció azt adja, hogy $\Phi_B^{-1}(\mathcal{U}) \subset \Phi_B^{-1}(\mathcal{V})$, amiből $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ következik; tehát $L \langle\| M$.

(4) Ha $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ és $L' = \Phi_P^{-1}(\mathcal{U})$, akkor L' P-re illeszkedő affin altér, és $L' \| L$. Mivel a keresett affin altér iránytere csakis az $\mathcal{U}$ altér lehet, s tartalmaznia kell a P pontot, az egyértelműség is világos.

(5) Legyen ismét $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$, $M = \Phi_B^{-1}(\mathcal{U})$. Ha $\mathcal{V}$ az $\overrightarrow{AB}$ vektor és az $\mathcal{U}$ altér által generált altér, akkor

$$\mathcal{V} = \mathscr{L}\left(\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \cup \mathcal{U}\right) = \mathscr{L}\left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right) \cup \mathcal{U}\right) = \mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right) + \mathcal{U}$$

(hiszen két altér összege éppen az uniójuk által generált altér). Így az alterek összegére vonatkozó Grassmann-féle dimenzió-tétel alapján

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} &= \dim \left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right) + \mathcal{U}\right) = \\ &= \dim \left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) + \dim \mathcal{U} - \dim \left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right) \cap \mathcal{U}\right) \leq \\ &\leq \dim \left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) + \dim \mathcal{U} \leq k+1. \end{aligned}$$

Ha $S := \Phi_A^{-1}(\mathcal{V})$, akkor ily módon S $(k+1)$-dimenziós affin altér. Ez tartalmazza $L \cup M$-et, ugyanis

$$\begin{aligned} L \cup M \subset S \quad &\Leftrightarrow \quad \Phi_A^{-1}(\mathcal{U}) \cup \Phi_B^{-1}(\mathcal{U}) \subset \Phi_A^{-1}(\mathcal{V}) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{U} \cup \left(\Phi_A \circ \Phi_B^{-1}(\mathcal{U})\right) \subset \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{U} \cup \left(\overrightarrow{AB} + \mathcal{U}\right) \subset \mathcal{V}, \end{aligned}$$

s ez utóbbi tartalmazás $\mathcal{V}$ jelentésére tekintettel nyilvánvalóan igaz. Felhasználtuk, hogy

$$\Phi_A \circ \Phi_B^{-1}(\mathcal{U}) = \overrightarrow{AB} + \mathcal{U}.$$

Ez a következőképpen adódik: ha $u \in \mathcal{U}$ és $\Phi_B^{-1}(u) = P$, akkor $u = \overrightarrow{BP}$, s így $\Phi_A \circ \Phi_B^{-1}(u) = \Phi_A(P) = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + u$.

(6) Az egyszerűség kedvéért föltehetjük, hogy $\mathbb{A}$ a természetes affin struktúrával ellátott V véges dimenziós vektortér. Ekkor L $a+\mathcal{U}$, M pedig $b+\mathcal{V}$ alakú lineáris sokasága V-nek (*1.14.*(1)), ahol $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = \dim V - 1$. Okoskodjunk most indirekt módon! Ha $L \not\parallel M$, akkor $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, és így $\mathcal{U} + \mathcal{V} = V$ következik (hiszen például $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ esetén $\mathcal{U}$ tetszőleges bázisa alkalmas $\mathcal{V}$-beli vektorral V bázisává egészíthető ki). Így van olyan $u \in \mathcal{U}$ és $v \in \mathcal{V}$ vektor, hogy $u - v = b - a$. Ekkor $a + u = b + v \in L \cap M$, ami ellentmondás.

□

1.19. Következmény. Megadva egy nem egypontú affin térben egy pontot és egy egyenest, létezik egy és csak egy olyan egyenes, amely illeszkedik a pontra és párhuzamos az adott egyenessel.

Megjegyzés. A most megfogalmazott tulajdonságot az affin geometria szintetikus felépítése esetén axiómaként írjuk elő, ez az ún. *affin párhuzamossági* *axióma.* Láthatjuk, hogy az affin tér - sőt valójában a vektortér - definíciójába az affin párhuzamossági axióma „bele van kódolva”.

1.20. Lemma. Legyen $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ és $M = \Phi_B^{-1}(\mathcal{V})$ affin altere az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek. L-nek és M-nek akkor és csak akkor van közös pontja, ha $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $L \cap M \neq \emptyset$, s legyen P közös pontja L-nek és M-nek. Ekkor

$$P \in L \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} =: u \in \mathcal{U}, \qquad P \in M \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BP} =: v \in \mathcal{V},$$

így

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP} = u - v \in \mathcal{U} + \mathcal{V}.$$

Megfordítva, tegyük föl, hogy $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$. Ekkor

$$\overrightarrow{AB} = u - v; \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}$$

írható. (A1) értelmében létezik egyetlenegy olyan $P \in \mathbb{A}$ pont, hogy $\overrightarrow{AP} = u$. Ekkor $P \in L$. Mivel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} - v$, s ennélfogva

$$v = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BP},$$

következik, hogy $P \in M$ is fennáll; tehát $L \cap M \neq \emptyset$.

$\square$

2. Affin kombinációk, affin függetlenség, affin bázis

Megjegyzés. Egy vektortérbeli lineáris kombinációt *affin*nak nevezzük, ha együtthatóinak összege 1.

2.1. Lemma és definíció. Legyenek $A_1, \ldots, A_k$ egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér pontjai. Ha egy $P \in \mathbb{A}$ ponthoz van olyan $O \in \mathbb{A}$ pont, hogy a P pont O-ra vonatkozó helyzetvektora előállítható az $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_k}$ vektorok affin kombinációjaként, akkor ez a tulajdonság bármely $O \in \mathbb{A}$ pontra fennáll. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a P pont *affin kombináció*ja az $A_1, \ldots, A_k$ pontoknak.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}; \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

Legyen O' tetszőleges további pontja $\mathbb{A}$-nak. Ekkor

$$\overrightarrow{O'P} \overset{(A2)}{=} \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{O'A_i},$$

tehát a P pont O'-re vonatkozó helyzetvektora előáll az $\overrightarrow{O'A_1}, \ldots, \overrightarrow{O'A_k}$ vektorok affin kombinációjaként.

□

2.2. Állítás. Egy affin tér egy nemüres részhalmaza akkor és csak akkor affin altér, ha tetszőleges véges pontsorozatával együtt annak minden affin kombinációját is tartalmazza.

Bizonyítás. Az affin kombináció fogalma vektorizálás segítségével lett bevezetve, de az előrebocsátott lemma értelmében független a vektorizálás módjától. Így az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy a vizsgált affin tér egy V vektortér, ellátva a természetes affin struktúrával. Ekkor - mint tudjuk (*1.14.*(1)) - az affin alterek éppen V lineáris sokaságai.

(1) Tekintsük először V-nek egy $L = a + \mathcal{U}$ lineáris sokaságát. Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ L tetszőleges pontjai, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ pedig 1 összegű skalárok. Ekkor $a_i = a + u_i, \quad u_i \in \mathcal{U} \quad (1 \le i \le k)$ írható, és

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a + u_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in a + \mathcal{U},$$

tehát L tartalmazza bármely véges pontsorozatának affin kombinációit.

(2) Megfordítva, tegyük föl, hogy egy nemüres $L \subset V$ ponthalmaz rendelkezik az állításbeli tulajdonsággal, azaz „zárt az affin kombinációk képzésére". Kiválasztva egy tetszőleges $a \in L$ pontot, megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{U} := L - a = \{v - a \in V \mid v \in L\} \quad \text{altere } V\text{-nek.}$$

Ehhez elegendő azt ellenőrizni, hogy $\mathcal{U}$ zárt a lineáris kombinációk képzésére. Legyenek $u_1 = v_1 - a, \ldots, u_k = v_k - a$ $\mathcal{U}$ tetszőleges elemei, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ pedig tetszőleges skalárok; legyen továbbá $\lambda_{k+1} := 1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Ekkor

$$a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 1a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i - a) =$$

$$= \lambda_{k+1} a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \lambda_{k+1} a \quad \in L,$$

hiszen a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \lambda_{k+1} a$ pont a $v_1, \ldots, v_k, a$ L-beli pontok affin kombinációja, s így a feltétel értelmében L-be tartozik. Az $a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in L$

reláció ekvivalens azzal, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in L - a$ – s ezt kívántuk belátni. Ily módon $\mathcal{U} = L - a$ valóban altér, következésképpen $L = a + U$ lineáris sokaság.

□

2.3. Állítás. Egy affin térbeli nemüres halmaz affin burka megegyezik a halmaz pontjaiból képezhető összes affin kombinációk halmazával.

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér egy $S \neq \emptyset$ részhalmazát. $C(S)$-sel jelölve az S pontjaiból képezhető összes affin kombinációk halmazát, azt kell megmutatnunk, hogy $C(S) = \langle S \rangle$.
Az előző állításból azonnal adódik, hogy $C(S) \subset \langle S \rangle$, hiszen $\langle S \rangle$ affin altér, s így zárt az affin kombinációk képzésére. A fordított irányú tartalmazás igazolásánál föltehetjük, hogy $\mathbb{A} = V$, ellátva a természetes affin struktúrával. Jegyezzük meg, hogy affin kombinációk affin kombinációja az eredeti pontoknak is affin kombinációja. Valóban, tekintsünk V-ben egy

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

affin kombinációt, s tegyük föl, hogy $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \quad v_i = \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} w_{ij}, \qquad \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = 1$. Ekkor

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} w_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i \mu_{ij} w_{ij},$$

s ez a kombináció affin, hiszen

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Észrevételünkből következik, hogy $C(S)$ zárt az affin kombinációk képzésére, így - ismét az előző állítás értelmében - $C(S)$ is affin altér. $S \subset C(S)$ (hiszen minden $s \in S$ tekinthető egy $1 \cdot s$ alakú affin kombinációnak), következésképpen $\langle S \rangle \subset C(S)$ (mivel egy halmaz affin burka benne van a halmazt tartalmazó minden affin altérben). Ezzel a bizonyítás teljes.

□

2.4. Állítás. Egy affin tér egy részhalmaza akkor és csak akkor affin altér, ha bármely két pontjával együtt azok affin burkát, vagyis a pontokra illeszkedő egyenest is tartalmazza.

Bizonyítás. Az affin alterek a *2.2.* és a *2.3.* állítás alapján rendelkeznek a mondott tulajdonsággal. A megfordítás igazolásánál most is tekinthetünk egy V vektorteret, amely el van látva a természetes affin struktúrával.
Legyen L olyan részhalmaza V-nek, amely tartalmazza bármely két pontjának minden affin kombinációját. Föltehetjük, hogy L legalább kételemű, ellenkező esetben ugyanis nincs mit bizonyítani. Kiválasztva egy tetszőleges $a \in L$ pontot,

miként *2.2.* igazolásakor, most is azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{U} := L - a$ altere V-nek.
Legyen $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ tetszőleges.
(1) u_1 és u_2 felírható

$$u_1 = v_1 - a, \quad \text{illetve} \quad u_2 = v_2 - a; \qquad v_1, v_2 \in L$$

alakban. Tetszőleges $\lambda \in K$ skalár esetén

$$(*) \quad (1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 = (1-\lambda)(v_1 - a) + \lambda(v_2 - a) = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 - a \quad \in \mathcal{U}$$

hiszen a feltétel miatt $(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in L$. Speciálisan $u_1 := \mathbf{0}$ választással az következik, hogy

$$\forall \lambda \in K, \forall u_2 \in \mathcal{U} : \quad \lambda u_2 \in \mathcal{U};$$

$\mathcal{U}$ tehát *zárt a skalárral való szorzásra nézve.*
(2) Mivel K-ban $1+1 \neq 0$, van olyan $\alpha \in K$, hogy $\alpha \notin \{0,1\}$. Ha $a_1 := \frac{1}{1-\alpha}u_1$, $a_2 := \frac{1}{\alpha}u_2$, akkor előző megállapításunk szerint $a_1, a_2 \in \mathcal{U}$, s így $(*)$ alapján

$$u_1 + u_2 = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2 \quad \in \mathcal{U}$$

is teljesül, azaz $\mathcal{U}$ *az összeadásra nézve is zárt.*
$\mathcal{U}$ nyilvánvalóan nem üres ($\mathbf{0} = a - a \in \mathcal{U}$), így az (1)-ben és (2)-ben mondottakra tekintettel altér, s ennélfogva $L = a + \mathcal{U}$ lineáris sokaság, vagyis affin altér.

□

Megjegyzés. Ha megengednénk, hogy K-ban $1+1=0$, s ezért a test kételemű, akkor az állítás érvényét veszítené. Kételemű test fölötti affin térben ugyanis minden egyenes kételemű, s ezért az állításbeli feltétel semmit nem követelne a vizsgált részhalmazról.

2.5. Állítás és definíció. Legyenek $A_0, A_1, \ldots, A_k$ egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér pontjai. A következő feltételek ekvivalensek:

(1) A pontok egyike sem állítható elő a többi affin kombinációjaként.

(2) Ha valamely $O \in \mathbb{A}$ pontra és $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ skalárokra $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ és $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$, akkor $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

(3) $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ lineárisan független vektorok V-ben.

(4) $\dim \langle \{A_0, A_1, \ldots, A_k\} \rangle = k$.

Az $A_0, A_1, \ldots, A_k$ pontokat *affin értelemben* **függetlenek**nek, röviden *függetlenek*nek nevezzük, ha eleget tesznek az (1)-(4) feltételek valamelyikének (s ezért bármelyikének). Egy affin tér egy véges pontsorozatát (affin értelemben) **függő**nek mondjuk, ha nem független.

Bizonyítás.
(1) $\Rightarrow$ (2) Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy a skalárok valamelyike

nem zérus, mondjuk $\lambda_0 \neq 0$. Ekkor létezik az $\frac{1}{\lambda_0}$ reciprok, és a $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$ relációból azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OA_0} = \sum_{i=1}^{k} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right) \overrightarrow{OA_i}\ .$$

Fölhasználva, hogy $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$, a jobb oldalon fellépő együtthatók összegére azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} -\frac{\lambda_i}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{k} (-\lambda_i) = \frac{1}{\lambda_0} \lambda_0 = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy A_0 affin kombinációja a többi pontnak, ellentétben feltevésünkkel.

(2) $\Rightarrow$ (3) Tegyük föl, hogy $\lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{A_0A_k} = \mathbf{0}$, s legyen $\lambda_0 := -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. O pont gyanánt az A_0 pontot választva, $\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{A_0A_0} = 0$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_0 \overrightarrow{OA_0} + \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{A_0A_k} = \mathbf{0},$$

amiből $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ miatt a feltétel alapján $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ következik, ami az $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right)$ vektorrendszer lineáris függetlenségét jelenti.

(3) $\Rightarrow$ (4) Ha $\mathcal{U} := \mathscr{L}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right)$, akkor $\langle\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\rangle = \Phi_{A_0}^{-1}(\mathcal{U})$, s így $\dim \langle\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\rangle = \dim \mathcal{U} = k$, hiszen $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right)$ lineárisan független generátorrendszere, tehát bázisa $\mathcal{U}$-nak.

(4) $\Rightarrow$ (1) Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben a pontok valamelyike, mondjuk A_1, affin kombinációja a többinek. Ekkor, az $O := A_0$ origóválasztással élve az $\overrightarrow{OA_1}$ vektor lineárisan kombinálható az $\overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_k}$ vektorokból. Így az $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_k}$ vektorrendszer lineárisan függő, s ezért

$$\begin{aligned}\dim \langle\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\rangle &= \dim \mathscr{L}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right) = \\ &= \dim \mathscr{L}\left(\overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_k}\right) \leq k - 1\end{aligned}$$

ami ellentmondás.

□

2.6. Definíció. n-dimenziós affin tér *affin bázis*án $(n+1)$-tagú, affin értelemben független pontsorozatot értünk.

2.7. Következmény. Ha $(A_i)_{i=0}^{n}$ affin bázisa az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek, akkor

(1) $\left(A_0, \left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$ affin koordinátarendszere $(\mathbb{A}, V, \Phi)$-nek;

(2) a tér minden pontja egyértelműen előállítható az $A_0, A_1, \ldots, A_n$ pontok affin kombinációjaként.

Bizonyítás.
(1) Az affin függetlenség miatt *2.5.* értelmében az $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^{n}$ vektorsorozat lineárisan független vektorrendszere, s így - lévén n-tagú - bázisa az iránytérnek.
(2) Tekintsünk egy tetszőleges $P \in \mathbb{A}$ pontot. Az (1)-ben mondottak szerint az $\overrightarrow{A_0P}$ vektor egyértelműen előállítható

$$\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \qquad\qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K)$$

alakban. Legyen $\lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Ekkor

$$\overrightarrow{A_0P} = \lambda_0 \overrightarrow{A_0A_0} + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

írható, s itt $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, P tehát megkapható a tekintett pontsorozat affin kombinációjaként.
Az egyértelműség igazolása céljából rögzítsünk tetszőlegesen egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, s tegyük fel, hogy a P pont O-ra vonatkozó helyzetvektorára

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

és

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \overrightarrow{OA_i}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$$

egyaránt fennáll. Ekkor

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \mu_i) = 0,$$

amiből az affin függetlenség *2.5.*(2) tulajdonsága alapján $\lambda_i = \mu_i, \quad 0 \leq i \leq n$ következik.

□

2.8. Lemma és definíció. Legyen l egyenese az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek, s tegyük fel, hogy A és B l különböző pontjai. Tetszőleges $P \in l \setminus B$ ponthoz létezik egy és csak egy olyan $\lambda \in K$ skalár, hogy

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}.$$

Ezt a λ skalárt (ABP)-vel is jelöljük, s azt mondjuk, hogy (ABP) a P pont A-ra és B-re vonatkozó ***osztóviszony***a. A $\lambda = (ABP)$ osztóviszony segítségével a P pont tetszőleges O pontra vonatkozó helyzetvektora az

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$$

alakban állítható elő. Ha a P pont A-ból és B-ből való affin kombinálásakor fellépő együtthatók α és β, akkor

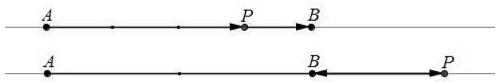
$$(ABP) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Bizonyítás. $l = \langle\{A, B\}\rangle$ 1-dimenziós affin tér, amelynek iránytere $\mathcal{U} = \mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. $P \neq B$ esetén $\mathbf{0} \neq \overrightarrow{PB} \in \mathcal{U}$, így $\mathcal{U} = \mathscr{L}\left(\overrightarrow{PB}\right)$ írható, következésképpen az $\overrightarrow{AP} \in \mathcal{U}$ vektor egyértelműen előállítható $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{PB}$ $\quad(\lambda \in K)$ alakban. Választva egy $O \in \mathbb{A}$ origót, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$ írható, így $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$, ahonnan

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

Ez azt is jelenti, hogy a P pont A-ból és B-ből való affin kombinálásakor fellépő együtthatók $\alpha = \frac{1}{1+\lambda}$ és $\beta = \frac{\lambda}{1+\lambda}$; ezek hányadosa $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda = (ABP)$.

□



$(ABP) = 3$, illetve $(ABP) = -3$

2.9. Állítás *(az osztóviszony elemi tulajdonságai).* Legyen adva az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér egy $l = \langle\{A, B\}\rangle$ egyenese. Ekkor:

(1) $\forall P \in l: \qquad (ABP) \neq -1.$

(2) $\forall \lambda \in K \setminus \{-1\}: \quad \exists P \in l: \qquad (ABP) = \lambda.$

(3) $(ABP) = (ABQ) \qquad \Rightarrow \qquad P = Q.$

(4) $\forall P \in l \setminus \{B\}: \quad (ABP)(BAP) = 1.$

(5) Ha $C \in l \setminus \{A, B\}$, akkor $(ABC)(BCA)(CAB) = 1$.

(6) Ha P, Q, R, S l különböző pontjai, akkor $(PQS)(QRS)(RPS) = -1$.

Bizonyítás.

(1) Ha $(ABP) = -1$ teljesülne valamely $P \in l \setminus (B)$-re, akkor a *2.8.* definíció értelmében

$$\overrightarrow{AP} = -\,\overrightarrow{PB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

következne, ami lehetetlen, hiszen $A \neq B$.

(2) Legyen $\lambda \in K \setminus \{-1\}$. Rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ origót az

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$

képlet egyetlen $P \in l \setminus \{B\}$ pontot határoz meg, így a (2) tulajdonság is igaz.
(3) Ha $(ABP) = (ABQ) := \lambda$, akkor

$$\overrightarrow{OP}= \frac{\overrightarrow{OA} +\lambda \overrightarrow{OB}}{1+\lambda} =\overrightarrow{OQ},$$

így (2) miatt $P = Q$.
(4) $(ABP)(BAP) = 1$ igazolásához elég belátni, hogy ha $(ABP) = \lambda$, akkor $(BAP) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\overrightarrow{OP}= \frac{\overrightarrow{OA} +\lambda \overrightarrow{OB}}{1+\lambda} = \frac{\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OA} +\frac{1}{\lambda}\lambda \overrightarrow{OB}}{\frac{1}{\lambda}(1+\lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{\frac{1}{\lambda}+1},$$

amelyből $(BAP) = \frac{1}{\lambda}$ adódik.
(5) Legyen $(ABC) = \lambda$, azaz $\overrightarrow{OC}= \frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ (rögzített O origó mellett). Kiszámítjuk a (BCA) és (CAB) osztóviszonyokat λ felhasználásával:

$$\overrightarrow{OA}= (1+\lambda) \overrightarrow{OC} -\lambda \overrightarrow{OB}= \frac{-\frac{1+\lambda}{\lambda} \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\overrightarrow{OB}= \frac{(1+\lambda) \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{\lambda} = \frac{\overrightarrow{OC} -\frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{OA}}{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$$

Így $(BCA) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $(CAB) = -\frac{1}{1+\lambda}$ és

$$(ABC)(BCA)(CAB) = \lambda \cdot \left(-\frac{1+\lambda}{\lambda}\right) \cdot \left(-\frac{1}{1+\lambda}\right) = 1$$

(6) Legyen $(PQS) = \lambda$ és $(RPS) = \mu$, $O \in \mathbb{A}$ pedig egy rögzített origó. $\overrightarrow{OS}= \frac{\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}}{1+\lambda}$ -ből $\overrightarrow{OQ}$ kifejezhető. $\overrightarrow{OQ}$-t a második osztóviszonyba helyettesítve

$$\overrightarrow{OS}= \frac{\overrightarrow{OQ} +\mu \overrightarrow{OR}}{1+\mu} = \frac{\frac{1+\lambda}{\lambda} \overrightarrow{OS} -\frac{1}{\lambda} \overrightarrow{OP} +\mu \overrightarrow{OR}}{1+\mu}$$

adódik. Ezt rendezve az alábbit kapjuk:

$$\overrightarrow{OS}= \frac{\lambda\mu \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}}{\lambda\mu - 1} = \frac{\overrightarrow{OR} -\frac{1}{\lambda\mu} \overrightarrow{OP}}{\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu}}.$$

Tehát

$$(PQS)(QRS)(RPS) = \lambda \cdot \mu \cdot \left(-\frac{1}{\lambda\mu}\right) = -1.$$

□

2.10. Definíció. Legyen adva az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér pontjainak egy $(A_i)_{i=0}^k$, a K rendezett test elemeinek pedig egy $(\mu_i)_{i=0}^k$ sorozata. Az (A_i, μ_i) rendezett párokból képzett $(A_i, \mu_i)_{i=0}^k$ sorozatot *súlyozott pontrendszer*nek nevezzük, ha

$\sum_{i=0}^{k} \mu_i \neq 0$, s ilyenkor a μ_i skalárokat *súly*okként említjük. Egy S pontot a *súlyozott pontrendszer súlypontjá*nak mondunk, ha $\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{SA_i} = \mathbf{0}$. Amennyiben - speciálisan - a súlyok mindegyike 1, úgy a $\sum_{i=0}^{k} \overrightarrow{SA_i} = \mathbf{0}$ feltételnek eleget tevő S pontot az $(A_i)_{i=0}^{k}$ *pontrendszer súlypontjá*nak nevezzük.

2.11. Állítás. Minden súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja. Az $(A_i, \mu_i)_{i=0}^{k}$ $\left(\sum_{i=0}^{k} \mu_i \neq 0\right)$ súlyozott pontrendszer S súlypontjának tetszőleges O pontra vonatkozó helyzetvektorát az

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{k} \mu_i}$$

formula adja.

Bizonyítás. Alapulvéve egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin teret, tekintsük az $(A_i, \mu_i)_{i=0}^{k}$ súlyozott pontrendszert. Kijelölve egy $O \in \mathbb{A}$ origót, definiáljunk ((A1) alkalmazásával) egy S pontot az

$$\overrightarrow{OS} := \frac{\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{k} \mu_i}$$

előírással. Ekkor az S pont az $A_0, \ldots, A_k$ pontok affin kombinációjaként kerül előállításra, tehát *2.1.* értelmében jól definiált: független az origó megválasztásától. Ez az S pont eleget tesz a súlyponttal szemben támasztott kívánalomnak:

$$\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{SA_i} = \sum_{i=0}^{k} \mu_i \left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OS}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=0}^{k} \mu_i\right) \frac{\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{k} \mu_i} = \mathbf{0}.$$

Tegyük föl, hogy egy további S_1 pont is rendelkezik a $\sum_{i=0}^{k} \mu_i \overrightarrow{S_1 A_i} = \mathbf{0}$ tulajdonsággal! Ekkor

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^{k} \mu_i \left(\overrightarrow{SA_i} - \overrightarrow{S_1 A_i}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu_i \left(\overrightarrow{SA_i} + \overrightarrow{A_i S_1}\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} \mu_i\right) \overrightarrow{SS_1}$$

amiből $\sum_{i=0}^{k} \mu_i \neq 0$ feltétel miatt $\overrightarrow{SS_1} = \mathbf{0}$, innen pedig (A1) és *1.4.*(1) alapján $S = S_1$ következik. Ezzel a súlypont egyértelműségét is igazoltuk.

$\square$

Megjegyzés. Közvetlenül látható, hogy ha λ nemzérus skalár, akkor az $((A_0, \lambda\mu_0), (A_1, \lambda\mu_1), \ldots, (A_k, \lambda\mu_k))$ súlyozott pontrendszer súlypontja megegyezik az $((A_0, \mu_0), (A_1, \mu_1), \ldots, (A_k, \mu_k))$ rendszer súlypontjával. Speciálisan $(A_i)_{i=0}^{k}$ súlypontja megegyezik minden olyan $(A_i, \lambda)_{i=0}^{k}$ súlyozott pontrendszer súlypontjával, ahol $\lambda \neq 0$.

2.12. Állítás *(a súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága).* Ha egy súlyozott pontrendszer tagjait diszjunkt csoportokba osztjuk úgy, hogy az egyes csoportokban a súlyok összege nem nulla, majd mindegyik csoport súlypontját ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal, akkor a súlypontokból nyert súlyozott pontrendszer súlypontja azonos az eredeti rendszer súlypontjával.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$(A_{ij}, \mu_{ij}); \qquad 1 \leq i \leq l; \quad 1 \leq j \leq k_i$$

súlyozott pontrendszert, s osszuk ezt az

$$((A_{i1}, \mu_{i1}), (A_{i2}, \mu_{i2}), \ldots, (A_{ik_i}, \mu_{ik_i})) ; \qquad 1 \leq i \leq l$$

csoportokba úgy, hogy

$$\mu_i := \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \neq 0 \quad ; \qquad 1 \leq i \leq l$$

teljesüljön. Ha S_i az i-edik csoport súlypontja, akkor

$$\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \overrightarrow{S_i A_{ij}} = \mathbf{0} \quad ; \qquad 1 \leq i \leq l.$$

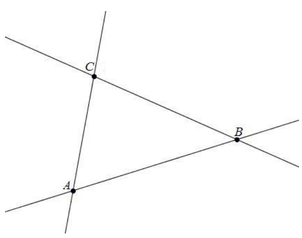
Legyen S az $(S_i, \mu_i)_{i=1}^{l}$ súlyozott pontrendszer súlypontja! (Mivel $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \neq 0$, S-ről értelmesen szólhatunk.) S és S_i definíciója alapján

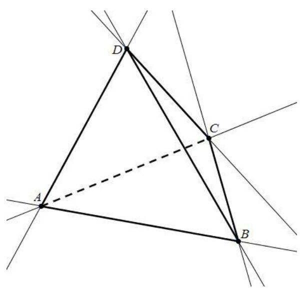
$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \overrightarrow{SS_i} = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \frac{\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \overrightarrow{SA_{ij}}}{\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij}} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \overrightarrow{SA_{ij}}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy S az eredeti rendszernek is súlypontja.

□

2.13. Definíció. n-dimenziós affin térben $n + 1$ számú, affin értelemben független pont alkotta ponthalmazt *n-dimenziós szimplex*nek, röviden *n-szimplex*nek nevezünk, s a pontokat ilyenkor a szimplex *csúcsai*nak hívjuk. Speciálisan a kétdimenziós szimplexeket *háromszög*eknek, a háromdimenziós szimplexeket *tetraéder*eknek mondjuk.





Három független pont alkotta ponthalmazra tetszőleges affin térben is használjuk a háromszög elnevezést. Egy $\{A, B, C\}$ háromszög *oldalegyenes*ei az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ egyenesek; egy $\{A, B, C, D\}$ tetraéder *élegyenes*ei, illetve *lapsík*jai az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek, illetve az $\langle\{A,B,C\}\rangle$, $\langle\{B,C,D\}\rangle$, $\langle\{C,D,A\}\rangle$, $\langle\{D,A,B\}\rangle$ síkok.

2.14. Definíció. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ **valós** affin tér; $A, B \in \mathbb{A}$. A, B végpontú – vagy az A, B *pontokat összekötő* – **szakasz**on az

$$\overline{AB} := \Phi_A^{-1}\left\{t\cdot \overrightarrow{AB} \in V \mid 0 \leq t \leq 1\right\}$$

ponthalmazt értjük.

Megjegyzések.
(1) Ha $A = B$, akkor $\overline{AB} = \{A\}$; ezt a pontttá zsugorodó szakaszt *elfajuló szakasz*ként is említjük.
(2) Kijelölve egy O origót,

$$\overline{AB} = \left\{P \in \mathbb{A} \,|\overrightarrow{OP} = t\cdot \overrightarrow{OA} + (1-t)\cdot \overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq t \leq 1\right\}$$

írható. $\mathbb{A}$-t azonosítva $\mathbb{A}_O$ vektorizáltjával, a rövidebb

$$\overline{AB} = \{tA + (1-t)B \in \mathbb{A} \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

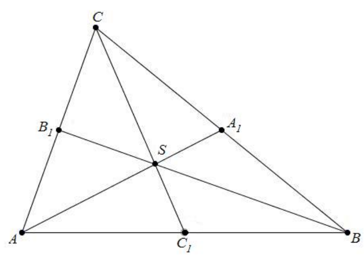
írásmóddal is élhetünk.

2.15. Példák. Vegyünk alapul egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ *háromdimenziós valós* affin teret.
(1) Tekintsünk $\mathbb{A}$-ban egy $\{A, B, C\}$ **háromszög**et! Az előbb mondottak szerint képezhetjük az $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ szakaszokat; ezeket a háromszög *oldalai*nak hívjuk. *2.11.* értelmében az (A, B) pontpár súlypontja az a C_1 pont, amelynek egy tetszőleges O pontra vonatkozó helyzetvektora

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

Világos, hogy ekkor $C_1 \in \overline{AB}$. Mivel C_1-nek az A-ból és B-ből való affin kombinálásakor az $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ együtthatók lépnek föl, *2.8.* alapján

$$(ABC_1) = 1.$$



Ezt a C_1 pontot az (A, B) pontpár *középpont*jának, vagy az $\overline{AB}$ szakasz *felezőpont*jának hívjuk, a $\overline{CC_1}$ szakaszt pedig a háromszög egyik *súlyvonal*ának nevezzük. A $\overline{BB_1}$ és az $\overline{AA_1}$ súlyvonal értelmezése analóg. Ismét *2.11.*-re hivatkozva az (A, B, C) ponthármas S súlypontjának az O-ra vonatkozó helyzetvektora

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

Az S pont nyilvánvalóan független a pontok sorrendjétől, így nevezhetjük az $\{A, B, C\}$ *háromszög súlypont*jának. A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága alapján S megegyezik a $(C_1, 2), (C, 1)$ súlyozott pontrendszer súlypontjával. Mivel ez utóbbi helyzetvektora

$$\frac{2 \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC}}{3},$$

következik, hogy

$$\overrightarrow{OS} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

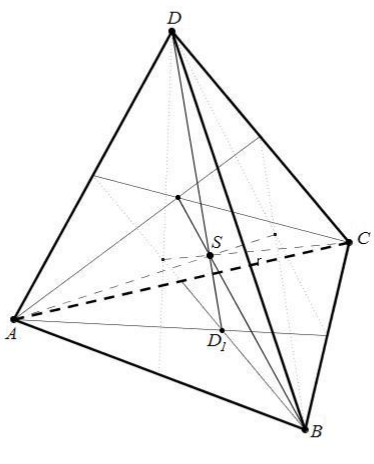
Innen kiolvasható, hogy $S \in \overline{C_1C}$, s mivel S-nek a C_1-ből és C-ből való affin kombinálásakor a $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ együtthatók lépnek fel,

$$(C_1CS) = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Észrevételünk valamennyi súlyvonalra igaz, következik tehát, hogy *bármely háromszög súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra és 1:2 arányban osztja azokat.*

(2) Legyen $\{A, B, C, D\}$ **tetraéder** $\mathbb{A}$-ban! Ennek súlypontján az (A, B, C, D) pontnégyes S súlypontját értjük. S-nek egy O pontra vonatkozó helyzetvektora *2.11.* értelmében

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$



Ha D_1 az $\{A, B, C\}$ háromszög súlypontja, akkor a $\overline{DD_1}$ szakaszt a tetraéder egyik *súlyvonal*ának nevezzük; a $\overline{CC_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{AA_1}$ súlyvonalak értelmezése analóg. Ismét a súlyok csoportíthatósági tulajdonsága alapján következik, hogy S azonos a $(D_1, 3), (D, 1)$ súlyozott pontrendszer súlypontjával, s így

$$\overrightarrow{OS} = \frac{3 \cdot \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD}}{4}.$$

Innen kiolvasható, hogy

$$S \in \overline{D_1 D} \qquad \text{és} \quad (D_1 D S) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$

Ugyanezekre az észrevételekre jutunk minden további súlyvonal esetén is, megállapíthatjuk tehát, hogy *bármely tetraéder súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra, s azokat 1:3 arányban osztja.*

2.16. Definíció. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ n-dimenziós affin tér, $(A_i)_{i=0}^n$ egy affin bázisa $\mathbb{A}$-nak, s tekintsünk egy $P \in \mathbb{A}$ pontot. Ha $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ olyan K-beli elemsorozat, hogy az $(A_i, \xi_i)_{i=0}^n$ súlyozott pontrendszernek P a súlypontja, azaz

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sum_{i=0}^n \xi_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^n \xi_i}; \quad O \in \mathbb{A} \text{ tetszőlegesen rögzített,}$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ skalárok (ebben a sorrendben) a P pont **baricentrikus koordinátá**it alkotják az $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázisra vonatkozóan.

2.17. Megjegyzések.

(1) *2.7.*(2) és *2.11.* biztosítja, hogy egy n-dimenziós affin tér minden pontjának vannak baricentrikus koordinátái, s azok arányosság erejéig egyértelműek: $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in K^{n+1}$ *akkor és csak akkor baricentrikus koordinátavektora P-nek, ha minden nemzérus λ skalár esetén $(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n)$ baricentrikus koordinátavektora P-nek.* Erre tekintettel azt a tényt, hogy a sorrendben megadott $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ skalárok egy P pont baricentrikus koordinátáit alkotják egy rögzített affin bázisra vonatkozóan, gyakran a

$$P = [\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n]$$

jelöléssel juttatjuk kifejezésre.

(2) Vezessük be a $\left\{ v = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in K^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n \xi_i \neq 0 \right\}$ halmazban a

$$v \sim w \quad :\Leftrightarrow \quad w = \lambda v, \qquad \lambda \in K$$

ekvivalenciarelációt. Ha affin bázis rögzítése után az $\mathbb{A}$ n-dimenziós affin tér pontjaihoz hozzárendeljük az illető bázisra vonatkozó baricentrikus koordinátáik sorozatait, akkor *bijekció*t adtunk meg $\mathbb{A}$ és a $\sim$ reláció ekvivalenciaosztályainak halmaza között.

3. Affin leképezések

3.1. Definíció. Legyenek $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin terek (melyeknek irányterei ugyanazon K test fölötti vektorterek). Egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezést *affin leképezés*nek nevezünk, ha van olyan $\varphi\colon V \to V'$ lineáris leképezés, hogy

$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \qquad \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)}\,.$$

Ekkor φ-t az *f-hez tartozó* vagy általa *indukált* lineáris leképezésként említjük, de azt is mondjuk, hogy φ f *linearizált*ja vagy *derivált*ja. A bijektív affin leképezéseket *affin izomorfizmus*oknak nevezzük, s két affin teret *izomorf*nak mondunk, ha létezik közöttük affin izomorfizmus. Egy affin tér önmagára való affin izomorfizmusait *affin automorfizmus*oknak, röviden **affinitás**oknak hívjuk.

3.2. Lemma. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin tér. Egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezés akkor és csak akkor affin leképezés, ha *van olyan* O pont és $\varphi\colon V \to V'$ lineáris leképezés, hogy

$$\forall P \in \mathbb{A}: \qquad \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)}\,.$$

Bizonyítás. Az affin leképezések nyilvánvalóan rendelkeznek a mondott tulajdonsággal.
Megfordítva, tegyük fel, hogy egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezés eleget tesz a lemmabeli követelménynek. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathbb{A}$ pontok esetén

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} \overset{(A2)}{=} \overrightarrow{f(A)f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(B)} \overset{1.4.}{=} -\overrightarrow{f(O)f(A)} + \overrightarrow{f(O)f(B)} \overset{\text{felt.}}{=}$$
$$\overset{\text{felt.}}{=} -\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{OB}\right) \overset{\varphi\text{ lin.}}{=} \varphi\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \overset{(A2)}{=} \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right),$$

ami azt jelenti, hogy f affin leképezés.

$\square$

3.3. Megjegyzések.
(1) Ha $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, akkor a linearizáltja egyértelműen meghatározott. Erre az $\overrightarrow{f}$ jelölést is használjuk; ezzel az írásmóddal a definiáló reláció az $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ $A, B \in \mathbb{A}$ alakot ölti.

(2) Legyen $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, $\varphi\colon V \to V'$ linearizálttal. Rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, s tekintve az $\mathbb{A}$ affin tér O-beli $\mathbb{A}_O$, az $\mathbb{A}'$ affin tér $f(O)$-beli $\mathbb{A}'_{f(O)}$ vektorizáltját, az

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}_O & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{A}'_{f(O)} \\
{\scriptstyle \Phi_O}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi'_{f(O)}} \\
V & \xrightarrow{\ \varphi\ } & V'
\end{array}$$

diagram *kommutatív* abban az értelemben, hogy

$$(*) \qquad \Phi'_{f(O)} \circ f = \varphi \circ \Phi_O$$

(hiszen ez a reláció azt fejezi ki, hogy $\overrightarrow{f(O)f(P)} = \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right)$, minden $P \in \mathbb{A}$ esetén). $(*)$-ból f-re az

$$f = \left(\Phi'_{f(O)}\right)^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_O$$

előállítás adódik, ahol a jobb oldalon (az *1.5.*-beli konstrukciónak megfelelően) lineáris leképezések kompozíciója szerepel. Kissé durván fogalmazva megállapíthatjuk tehát, hogy egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezés pontosan akkor affin, ha valamely (s ezért bármely) $O \in \mathbb{A}$ esetén ***egy*** $f\colon \mathbb{A}_O \to \mathbb{A}'_{f(O)}$ ***leképezés lineáris.***

3.4. Állítás.

(1) Egy affin térnek egy affin térbe való bármely konstans leképezése affin leképezés, amelynek linearizáltja az irányterek közötti zérus leképezés.

(2) Affin tér identikus transzformációja affin leképezés, amelynek linearizáltja az iránytér identikus transzformációja.

(3) Affin leképezések kompozíciója affin leképezés; a kompozíció linearizáltja a linearizáltak kompozíciójával egyenlő.

(4) Egy affin leképezés akkor és csak akkor bijektív, ha a linearizáltja bijektív. Ebben az esetben a leképezés inverze is affin leképezés, és az inverz linearizáltja megegyezik a leképezés linearizáltjának inverzével.

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és az$(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin teret.
(1) Tegyük föl, hogy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ konstans leképezés, mégpedig

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad f(P) = Q \in \mathbb{A}'.$$

o-val jelölve a $V \to W, \quad v \longmapsto o(v) := \mathbf{0}$ zérusleképezést,

$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{QQ} = \mathbf{0} = o\left(\overrightarrow{AB}\right),$$

tehát f valóban affin leképezés, és $\overrightarrow{f} = o$.
(2) Jelölje (a szokásos módon) $\mathbb{A}$, illetve V identikus transzformációját $1_{\mathbb{A}}$, illetve 1_V. Ekkor

$$\forall A, B \in \mathbb{A}: 1_V\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{1_{\mathbb{A}}(A)1_{\mathbb{A}}(B)},$$

$1_{\mathbb{A}}$ tehát affin transzformáció és $\overrightarrow{1_{\mathbb{A}}} = 1_V$.
(3) Legyen $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ és $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés.

$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{g \circ f(A) g \circ f(B)} = \overrightarrow{g(f(A))g(f(B))} = \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}\right) =$$
$$= \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right);$$

ez azt jelenti, hogy $g \circ f$ affin leképezés és $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

(4) Tekintsük az $f \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezést és ennek $\overrightarrow{f} \colon V \to V'$ linearizáltját.
(a) Tegyük föl először, hogy $\overrightarrow{f}$ *bijektív.* Ha valamely $A, B \in \mathbb{A}$ pontokra $f(A) = f(B)$, akkor

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(A)f(A)} = \mathbf{0},$$

amiből (speciálisan) $\overrightarrow{f}$ injektívsége miatt $\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$, ebből pedig (A1) alapján $A = B$ következik. Ezzel igazoltuk, hogy f *injektív.* A szürjektívség igazolásához jelöljünk ki tetszőlegesen egy $P' \in \mathbb{A}'$ pontot. Olyan pontot keresünk $\mathbb{A}$-ban, amelyet az f leképezés P'-be visz át.
Rögzítsünk $\mathbb{A}$-ban egy O origót, s legyen $O' := f(O)$. Tekintsük a $v' := \overrightarrow{O'P'} \in V'$ vektort. Mivel $\overrightarrow{f}$ egyben szürjektív is, van olyan $v \in V$ vektor, hogy $\overrightarrow{f}(v) = v'$. (A1) alapján létezik egyetlenegy olyan $P \in \mathbb{A}$ pont, hogy $\overrightarrow{OP} = v$. Ekkor egyrészt

$$\overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(P)},$$

másrészt

$$\overrightarrow{f}(v) = v' = \overrightarrow{O'P'},$$

így $\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{O'P'}$, ebből pedig (A1) miatt $P' = f(P)$ következik, amivel beláttuk f szürjektívségét.
(b) Megfordítva, tegyük föl, hogy az f affin leképezés bijektív. Jelöljünk ki ismét egy $O \in \mathbb{A}$ origót, s legyen $O' := f(O)$. Ha valamely $v = \overrightarrow{OP}$ vektorra $\overrightarrow{f}(v) = \mathbf{0}$ teljesül, akkor

$$\overrightarrow{O'O'} = \mathbf{0} = \overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'f(P)}$$

miatt (A1) alapján $f(P) = O' = f(O)$ következik, ebből pedig f injektívsége folytán $P = O$ adódik. Így $v = \overrightarrow{OO} = \mathbf{0}$, tehát $\operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f}\right) = \{\mathbf{0}\}$, ami ekvivalens $\overrightarrow{f}$ injektívségével.
(c) Tegyük föl, hogy f bijektív. Ekkor a mondottak szerint $\overrightarrow{f}$ is bijektív (és megfordítva), s léteznek az $f^{-1} \colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$; illetve $\left(\overrightarrow{f}\right)^{-1} \colon V' \to V$ inverz leképezések. Az utóbbiról a lineáris algebrából tudjuk, hogy szintén lineáris. Legyen $A', B' \in \mathbb{A}'$; $A := f^{-1}(A'), B := f^{-1}(B')$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{A'B'}\right) &= \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}\right) = \\ = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) &= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f^{-1}(A')f^{-1}(B')},\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy f^{-1} affin leképezés és $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$.

□

Megjegyzés. Egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér összes affinitásának halmazára az $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ jelölést használjuk. A V vektortér összes lineáris automorfizmusainak halmazát a szokásos módon $\mathrm{GL}(V)$-vel jelöljük. Ismert a korábbi tanulmányokból, hogy $\mathrm{GL}(V)$ *csoport* a leképezések kompozíciójára nézve; ez a V vektortér *általános lineáris csoport*ja. (Innen a jelölés: G - general, L - linear.)

3.5. Lemma. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin tér a K test fölött. Megadva egy $\varphi\colon V \to V'$ lineáris leképezést, s tetszőlegesen kijelölve egy $O \in \mathbb{A}$, illetve $O' \in \mathbb{A}'$ pontot, létezik egy és csak egy olyan $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, hogy $f(O) = O'$, $\overrightarrow{f} = \varphi$.

Bizonyítás. Tetszőleges $P \in \mathbb{A}$ esetén jelentse $f(P)$ azt az (A1) alapján egyértelműen létező pontot, amelyre

$$\overrightarrow{O'f(P)} = \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right).$$

Ekkor $\overrightarrow{O'f(O)} = \varphi\left(\overrightarrow{OO}\right) = \varphi(\mathbf{0}) = \overrightarrow{O'O'}$, amiből ismét (A1) miatt $f(O) = O'$ adódik. f tehát jól definiált leképezés $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{A}'$-be, amelyre teljesül, hogy

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)}.$$

Ebből *3.2.* alapján következik, hogy f affin leképezés. Ezzel a kívánt affin leképezés létezését igazoltuk.
Az egyértelműség is egyszerűen látható: ha egy $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezésre is teljesül, hogy $g(O) = O'$ és $\overrightarrow{g} = \varphi$, akkor

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{O'g(P)} = \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{O'f(P)},$$

s így bármely $P \in \mathbb{A}$ esetén $g(P) = f(P)$, ami g és f egyenlőségét jelenti.

□

3.6. Következmény. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér, $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$. Tetszőlegesen kiválasztva egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, létezik egy és csak egy olyan $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affintiás, amelynek φ a linearizáltja és az O pont fixpontja: $\overrightarrow{f} = \varphi$, $f(O) = O$.

3.7. Következmény. Egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér affinitásainak $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ halmaza csoport a leképezések kompozíciójára nézve. Az

$$L\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \to \mathrm{GL}(V), \quad f \longmapsto L(f) := \overrightarrow{f}$$

leképezés szürjektív csoporthomomorfizmus.

Bizonyítás. Az, hogy $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ csoport és hogy az L leképezés homomorfizmus $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ és $\mathrm{GL}(V)$ között, adódik *3.4*/(2)-(4) -ből; az L leképezés szürjektívsége pedig következik *3.6.*-ból.

□

3.8. Állítás. Minden $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér affin értelemben izomorf a természetes affin struktúrával ellátott $(V, V, -)$ affin térrel: egy $O \in \mathbb{A}$ pont rögzítése után izomorfizmust ad meg közöttük a

$$\Phi_O\colon \mathbb{A} \to V, \quad P \longmapsto \Phi_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

bijekció. A Φ_O affin izomorfizmus linearizáltja az 1_V identikus transzformáció.

Bizonyítás. Tetszőleges $A, B \in \mathbb{A}$ pontok esetén

$$1_V\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$
$$= \Phi_O(B) - \Phi_O(A) = \overrightarrow{\Phi_O(A)\Phi_O(B)},$$

a Φ_O bijekció tehát affin leképezés, s így izomorfizmus, és $\overrightarrow{\Phi_O} = 1_V$.

□

3.9. Állítás. Legyenek V és W a természetes affin struktúrával ellátott K test fölötti vektorterek. Egy $f\colon V \to W$ leképezés akkor és csak akkor affin, ha van olyan $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés és $b \in W$ vektor, hogy

$$\forall v \in V: \quad f(v) = \varphi(v) + b;$$

ekkor $\overrightarrow{f} = \varphi$.

Bizonyítás. Ha $f\colon V \to W$ affin leképezés és $\varphi := \overrightarrow{f}$, akkor

$$\forall u, v \in V: \quad \varphi\left(\overrightarrow{uv}\right) = \overrightarrow{f(u)f(v)},$$

azaz $\varphi(v-u) = f(v) - f(u)$. $u := \mathbf{0}$ és $b := f(\mathbf{0})$ választással következik, hogy

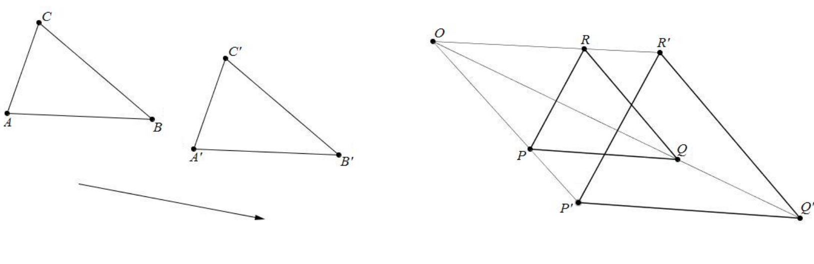
$$\forall v \in V: \quad f(v) = \varphi(v) + b.$$

Megfordítva, ha f most a leírt módon hat, akkor tetszőleges $u, v \in V$ vektorok esetén

$$\overrightarrow{f(u)f(v)} = f(v) - f(u) = \varphi(v) + b - (\varphi(u) + b) = \varphi(v-u) = \varphi\left(\overrightarrow{uv}\right),$$

f tehát affin leképezés, és $\overrightarrow{f} = \varphi$. □

3.10. Definíció. Egy affinitást **eltolás**nak (**transzláció**nak) nevezünk, ha a linearizáltja az iránytér identikus transzformációja; **dilatáció**nak mondunk, ha a linearizáltja nemzérus skalárral való szorzásként hat az iránytéren.



Rögzítve az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér egy O pontját és egy $\lambda \in K^* := K \setminus \{0\}$ skalárt, O középpontú, λ arányú **homotéciá**nak vagy **centrális dilatáció**nak nevezzük azt a

$$H_{O,\lambda}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}, \quad P \longmapsto P'$$

transzformációt, amelynél

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{OP'} = \lambda\, \overrightarrow{OP}\,.$$

Ekvivalens módon: $H_{O,\lambda} = \Phi_O^{-1} \circ \lambda 1_V \circ \Phi_O$.

3.11. Megjegyzések. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér.

(1) Ha f transzlációja $\mathbb{A}$-nak, akkor

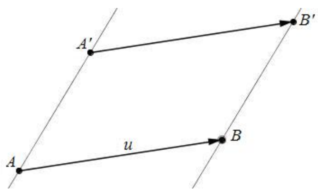
$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A)f(B)}\,.$$

Ebből a paralelogramma-szabály alapján következik, hogy

$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)},$$

illetve, másként fogalmazva,

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{Pf(P)} =: u \in V \quad \textit{konstans vektor.}$$



Ezt a vektort a transzláció *eltolási vektor*ának hívjuk, s az u eltolási vektorral rendelkező transzlációra a T_u jelölést is használjuk.

(2) *3.9.*-ből következik, hogy a természetes affin struktúrával ellátott V vektortér transzlációi a $v \in V \longmapsto v + b \in V$ alakú leképezések (ahol $b \in V$ rögzített vektor), és csakis ezek.

(3) A definíció értelmében egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ transzformáció pontosan akkor transzláció, ha $L(f) = \overrightarrow{f} = 1_V$, azaz ha $f \in \mathrm{Ker}(L)$, ahol - a *3.7.*-ben leírt $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \to \mathrm{GL}(V)$ homomorfizmus. Mivel egy homomorfizmus magja ismert módon részcsoport, következik, hogy *egy affin tér összes transzlációi csoportot alkotnak a kompozíció műveletével*, s ez a csoport éppen $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ $\mathrm{Ker}(L)$ részcsoportja. A (2)-ben mondottak figyelembevételével az is azonnal adódik, hogy *egy affin tér transzlációinak csoportja izomorf az affin tér irányterének additív csoportjával.*

(4) Ugyancsak a definíció alapján, egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ transzformáció dilatáció, ha $L(f) = \overrightarrow{f} = \lambda 1_V$, $\lambda \in K^*(:= K \setminus \{0\})$. Ekvivalens módon: f pontosan akkor dilatáció, ha

$$f \in L^{-1}(K^* 1_V) \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{A}),$$
$$K^* 1_V := \{\lambda 1_V \in \mathrm{GL}(V) \mid \lambda \in K^*\}\,.$$

Mivel $K^* 1_V$ részcsoport $\mathrm{GL}(V)$-ben, és részcsoport ősképe homomorfizmusnál részcsoport, következik, hogy *az $\mathbb{A}$ affin tér dilatációi részcsoportot alkotnak*

Aff($\mathbb{A}$)*-ban* - s így a dilatációk halmaza is csoport a kompozíciók műveletével.

(5) Világos, hogy mind az eltolások, mint a homotéciák dilatációk is egyben. A $H_{O,\lambda}$ dilatációnak az O középpont fixpontja, hiszen

$$H_{O,\lambda}(O) = \Phi_O^{-1} \circ \lambda 1_V \circ \Phi_O(O) = \Phi_O^{-1} \circ \lambda 1_V(\mathbf{0}) = \Phi_O^{-1}(\mathbf{0}) = O;$$

ez indokolja $H_{O,\lambda}$-ra a centrális dilatáció elnevezést.

(6) Az identikus transzformáció egyszerre eltolás és homotécia (utóbbi tetszőleges középponttal), s azonnal látható, hogy csak az identikus transzformáció ilyen.

3.12. Állítás. Ha egy dilatáció különbözik az identikus transzformációtól, akkor eltolás vagy homotécia (de nem mindkettő).

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$, $\overrightarrow{f} = \lambda 1_V, \lambda \notin \{0, 1\}$. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan P pont, amelyre $f = H_{P,\lambda}$. Föltehetjük, hogy $(\mathbb{A}, V, \Phi) = (V, V, -)$, ekkor *3.9.* figyelembevételével

$$\forall v \in V: \quad f(v) = \lambda v + b.$$

f-nek létezik egyetlenegy fixpontja, ugyanis az

$$x = \lambda x + b \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \lambda)x = b$$

egyenlet egyértelműen megoldható; egyetlen megoldása $p = \frac{1}{1-\lambda} b$. Ennek segítségével

$$f(v) = \lambda v + b = \lambda v + (1 - \lambda)p = p + \lambda(v - p)$$

írható, s így

$$f(v) - p = \lambda(v - p) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{pf(v)} = \lambda \, \overrightarrow{pv},$$

ami azt mutatja, hogy $f = H_{p,\lambda}$.

□

3.13. Állítás. Kijelölve egy affin tér egy pontját, minden affin transzformáció egyértelműen előállítható egy, a pontot fixen hagyó affin transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként.

Bizonyítás. Legyen O egy pontja, $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ pedig egy affin transzformációja az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek. Tegyük fel, hogy $f(O) = O'$. *3.5.*-re tekintettel létezik egy és csak egy olyan $T\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ transzláció, illetve $h\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affin transzformáció, hogy

$$T(O) = O'; \quad \text{illetve} \quad h(O) = O \quad \text{és} \quad \overrightarrow{h} = \overrightarrow{f}\ .$$

Tekintsük a $T \circ h$ kompozíciót! Erre teljesül, hogy

$$T \circ h(O) = T(O) = O' = f(O) \quad \text{és}$$
$$\overrightarrow{T \circ h} \overset{3.4.(3)}{=} \overrightarrow{T} \circ \overrightarrow{h} = \overrightarrow{h} := \overrightarrow{f},$$

következésképpen - a *3.5.*-beli unicitás-állítás miatt - $T \circ h = f$. f tehát felbontható a kívánt módon, s gondolatmenetünkből az is világos, hogy ez a felbontás egyértelmű.

$\square$

Megjegyzés. Legyen G egy (multiplikatív) csoport. Emlékeztetünk rá, hogy G-nek egy a és egy b elemét *konjugáltak*nak mondjuk, ha van olyan $g \in G$, hogy $b = gag^{-1}$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a konjugáltság ekvivalencia-reláció G-ben.

3.14. Állítás. Egy transzláció affinitiással képzett konjugáltjai transzlációk. Nevezetesen: ha az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin térnek $T_u (u \in V)$ transzlációja, akkor

$$\forall f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A}): \quad f \circ T_u \circ f^{-1} = T_{\overrightarrow{f}(u)}.$$

Bizonyítás. Kiválasztva egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, legyen $O' := T_u(O)$. Ekkor tetszőleges $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinitás esetén

$$\overrightarrow{f(O)f(O')} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OO'}\right) = \overrightarrow{f}(u),$$

ami azt jelenti, hogy

$$f(O') = T_{\overrightarrow{f}(u)}(f(O)).$$

Így tetszőleges $O \in \mathbb{A}$ esetén

$$f \circ T_u(O) = T_{\overrightarrow{f}(u)} \circ f(O),$$

következésképpen

$$f \circ T_u = T_{\overrightarrow{f}(u)} \circ f, \quad f \circ T_u \circ f^{-1} = T_{\overrightarrow{f}(u)}.$$

$\square$

3.15. Állítás. Egy véges dimenziós affin tér egy affin transzformációjának akkor és csak akkor van egyetlen fixpontja, ha a linearizáltjának a zérusvektor az egyetlen fixvektora (azaz ha az 1 nem sajátértéke a linearizáltnak).

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ véges dimenziós affin tér, s tekintsünk egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affin transzformációt.
(1) Ha O és P különböző fixpontjai f-nek (azaz $f(O) = O$, $f(P) = P$) akkor $\mathbf{0} \neq \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right)$, tehát a linearizáltnak van nemzérus fixvektora. Tegyük föl ezután, hogy O fixpontja f-nek, v pedig nemzérus fixvektora az $\overrightarrow{f}$ linearizáltnak. Ekkor egyértelműen létezik olyan $P \neq O$ pont, hogy $\overrightarrow{OP} = v$, s így

$$\overrightarrow{OP} = v = \overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{Of(P)},$$

következésképpen $f(P) = P$, P tehát további fixpontja f-nek. Beláttuk ily módon, hogy amennyiben f-nek van fixpontja, úgy további fixpont akkor és csak akkor létezik, ha a linearizáltjának van nemzérus fixvektora. Ez ekvivalens azzal, hogy *fixpont létezése esetén a fixpont akkor és csak akkor egyértelmű, ha a linearizáltjának a zérusvektora az egyedüli fixvektora.*

(2) Tegyük fel ezután, hogy *az* $\overrightarrow{f}$ *linearizáltnak nincs* $\mathbf{0}$*-tól különböző fixvektora.* Megmutatjuk: ebben az esetben f-nek létezik egyetlenegy fixpontja.
Válasszunk egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, s legyen $O' = f(O)$. Amennyiben P fixpontja f-nek,

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

miatt az

$$\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{O'O}$$

relációnak kell teljesülnie. A fixpontok meghatározásához kézenfekvő ezért az

$$\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)(x) = \overrightarrow{O'O}$$

egyenlet vizsgálata. Feltevésünk értelmében $\operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) = \{\mathbf{0}\}$, így $\overrightarrow{f} - 1_V$ injektív, s mivel V véges dimenziós, egyben bijektív is. Egyenletünk ezért egyértelműen megoldható: létezik egy és csak egy olyan P pont, hogy $\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{O'O}$. Ekkor

$$\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{f(O)P},$$

következésképpen $f(P) = P$, P tehát *fixpont*.
Tegyük fel végül, hogy Q is fixpont. Ekkor

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{f(O)f(Q)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OQ}\right),$$

$\overrightarrow{OQ}$ tehát fixvektora $\overrightarrow{f}$-nek. Ebből feltételünk szerint $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{0}$ következik, amiből $O = Q$ adódik. Beláttuk ily módon, hogy f fixpontja egyértelmű.

□

3.16. Állítás. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér, f pedig affinitása $\mathbb{A}$-nak. Tegyük fel, hogy az iránytér előállítható

$$V = \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$$

direkt összegként. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $v \in V$ vektor és $h\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ affinitás, hogy teljesülnek a következők:

(1) $\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)(v) = v$, azaz v fixvektora f linearizáltjának;

(2) h-nak van fixpontja;

(3) $f = T_v \circ h = h \circ T_v$.

f-nek akkor és csak akkor van fixpontja, ha $v = \mathbf{0}$; ebben az esetben f fixpontjai affin alteret alkotnak, amelynek iránytere a linearizált fixvektorai által alkotott sajátaltér.

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ pontot, az $\overrightarrow{Of(O)}$ vektor a feltétel értelmében előállítható

$$\overrightarrow{Of(O)} = v + \overrightarrow{f}(w) - w$$

alakban, ahol $v \in \operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$, s így $\overrightarrow{f}(v) = v$; $\overrightarrow{f}(w) - w = \left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)(w) \in \operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$.

Tekintsük ezután azt az A pontot, amelyre $\overrightarrow{AO} = w$ teljesül. Ekkor

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} =$$
$$= w + v + \overrightarrow{f}(w) - w + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) = v + \overrightarrow{f}(w) - \overrightarrow{f}(w) = v,$$

következésképpen $T_v(A) = f(A)$. Ha mármost

$$h := T_{-v} \circ f,$$

akkor $h(A) = T_{-v}(f(A)) = T_{-v} \circ T_v(A) = T_{\mathbf{0}}(A) = A$, A tehát fixpontja h-nak. *3.14.* figyelembevételével

$$h \circ T_v \circ h^{-1} = T_{\overrightarrow{h}(v)} = T_{\overrightarrow{f}(v)} = T_v;$$

innen $h \circ T_v = T_v \circ h$. Ezzel beláttuk az (1)-(3) feltételeknek eleget tevő $v \in V$ vektor és $h \in \operatorname{Aff}(\mathbb{A})$ affinitás *létezés*ét.

Az *unicitás* igazolása céljából tegyük fel, hogy egy v, h és egy $\widetilde{v}, \widetilde{h}$ pár egyaránt megfelel a kívánalmaknak:

$$f = T_v \circ h = T_{\widetilde{v}} \circ \widetilde{h}; \quad v \text{ és } \widetilde{v} \text{ fixvektora } \overrightarrow{f}\text{-nak;}$$
$$h\text{-nak és } \widetilde{h}\text{-nak van } A, \text{ illetve } \widetilde{A} \text{ fixpontja.}$$

Ekkor

$$\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AT_v(h(A))} = \overrightarrow{AT_v(A)} = v,$$

hasonlóképpen $\overrightarrow{\widetilde{A}f\left(\widetilde{A}\right)} = \widetilde{v}$, így

$$\overrightarrow{A\widetilde{A}} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)\widetilde{A}} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f\left(\widetilde{A}\right)} + \overrightarrow{f\left(\widetilde{A}\right)\widetilde{A}} =$$
$$= v + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A\widetilde{A}}\right) - \widetilde{v},$$

ahonnan

$$\overrightarrow{A\widetilde{A}} - \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A\widetilde{A}}\right) = v - \widetilde{v}.$$

Itt a bal oldali vektor az $\operatorname{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$, a jobb oldali a $\operatorname{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$ altérbe tartozik, így mindkettő benne van ezek metszetében, ami a feltétel szerint a zérus-altér. Ebből $v = \widetilde{v}$ és $h = \widetilde{h}$ következik, amivel az egyértelműséget igazoltuk.

Megvizsgáljuk végül a $v = \mathbf{0}$ esetet. Ekkor $f = h$, s így h-nak van fixpontja. Megfordítva, tegyük föl, hogy f-nek van fixpontja. Ezt választva az O origónak, a bizonyítás induló lépése alapján $v = \mathbf{0}$ következik. Ha Q tetszőleges további fixpont, akkor

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OQ}\right) = \overrightarrow{f(O)f(Q)} = \overrightarrow{OQ},$$

$\overrightarrow{OQ}$ tehát fixvektora az $\overrightarrow{f}$ linearizáltnak, s az összes fixpontok a

$$\Phi_O^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{OQ}\in V \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OQ}\right)=\overrightarrow{OQ}\right\}\right)$$

affin alteret alkotják, amelynek iránytere valóban az $\overrightarrow{f}$ linearizált 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorai - azaz a fixvektorai - által alkotott sajátaltér.

□

3. 17. Állítás. Affin leképezésnél affin altér képe és őském egyaránt affin altér.

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin teret, s legyen $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés.

(1) Tegyük fel, hogy L affin altere $\mathbb{A}$-nak. Ha $L = \emptyset$, akkor $f(L) = \emptyset$ szintén affin altér. Az $L \neq \emptyset$ esetben $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ írható, ahol $\mathcal{U}$ altere V-nek. *3.3*(2) alapján f előállítható az $f = \left(\Phi_{f(A)}\right)^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \Phi_A$ alakban, s így

$$f(L) = \left(\Phi_{f(A)}\right)^{-1}\left(\overrightarrow{f}\,(\mathcal{U})\right),$$

ami azt jelenti, hogy $f(L)$ az $f(A)$ ponton átmenő, $\overrightarrow{f}\,(\mathcal{U})$ irányterű affin altér V'-ben.

(2) Üres affin altér őskép is üres affin altér; legyen $L' = \left({\Phi'}_{A'}\right)^{-1}(\mathcal{U}')$ nemüres affin altere $\mathbb{A}'$-nek. Válasszunk olyan $A \in \mathbb{A}$ pontot, amelyre $f(A) = A'$ teljesül. (Ha ilyen pont nem létezik, akkor $f^{-1}(L') = \emptyset$ és az állítás igaz.) f-et most is az $f = \left(\Phi_{f(A)}\right)^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \Phi_A$ alakban állítva elő, kapjuk, hogy

$$f^{-1}(L') = \left(\Phi_{A'}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \Phi_A\right)^{-1}(L') =$$

$$= \left(\overrightarrow{f} \circ \Phi_A\right)^{-1}\left(\Phi_{A'}\left(\Phi_{A'(\mathcal{U}')}^{-1}\right)\right) = \Phi_A^{-1}\left(\overrightarrow{f}^{-1}(\mathcal{U}')\right);$$

$f^{-1}(L')$ tehát az A ponton átmenő, $\overrightarrow{f}^{-1}(\mathcal{U}')$ irányterű affin altere $\mathbb{A}$-nak.

□

3.18. Következmény. Affin leképezésnél bármely három kollineáris pont képe kollineáris.

3.19. Állítás. Dilatáció bármely affin alteret vele párhuzamos affin altérbe visz át.

Bizonyítás. Legyen $L = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ affin altere $(\mathbb{A}, V, \Phi)$-nek. (Föltettük, hogy $L \neq \emptyset$.) Ha $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ dilatáció, melynek linearizáltja $\overrightarrow{f} = \lambda 1_V$ $(\lambda \in K^*)$, akkor a 3.17. bizonyításában látottak szerint $f(L) = \left(\Phi_{f(A)}\right)^{-1}(\lambda 1_V(\mathcal{U})) = \left(\Phi_{f(A)}\right)^{-1}(\mathcal{U})$; $f(L)$ tehát szintén $\mathcal{U}$ irányterű affin altér.

□

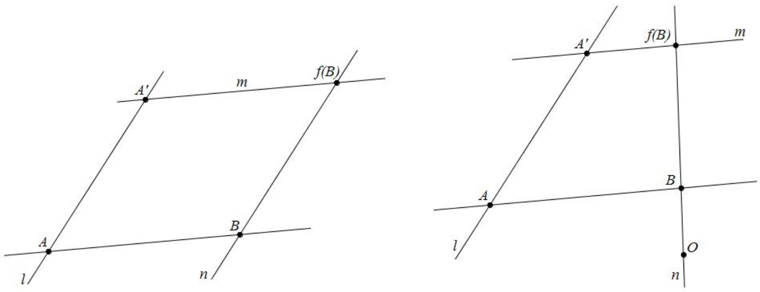
3.20. Következmény *(képpont „szerkesztése” dilatációnál)***.** Tegyük föl, hogy $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ dilatáció, s legyen $A \in \mathbb{A}$ olyan pont, hogy $A' := f(A) \neq A$. Jelölje l az $\overleftrightarrow{AA'}$ egyenest, s tekintsünk egy l-re nem illeszkedő B pontot. Legyen

m – az A'-re illeszkedő, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos egyenes;

$$\mathrm{n} \begin{cases} \text{– a } B\text{-re illeszkedő; } l\text{-lel párhuzamos egyenes, ha } f \text{ transzláció;} \\ \text{– az } \overleftrightarrow{OB} \text{ egyenes, ha } f\ O \text{ középpontú homotécia.} \end{cases}$$

Ekkor az $f(B)$ pont az m és az n egyenes metszéspontja.

Megjegyzés. Hallgatólagosan föltettük, hogy $O \neq B$. $O = B$ esetén azonban $f(B) = B$ és nincs teendő.



3.21. Lemma. Az affin leképezések felcserélhetők az affin kombinációk képzésével: ha $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés és a P pont affin kombinációja az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pontoknak, akkor az $f(P)$ pont ugyanilyen együtthatós affin kombinációja az $f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_k)$ pontoknak.

Bizonyítás. Tetszőlegesen rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ origót, a P pont helyzetvektora

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}; \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

alakban állítható elő. Ekkor

$$\overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \overrightarrow{f(O)f(A_i)},$$

ami igazolja a tett észrevételt.

□

3.22. Következmény. Legyen S az $\mathbb{A}$ affin tér $(A_i, \mu_i)_{i=0}^{k}$ súlyozott pontrendszerének a súlypontja. Ha $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, akkor az $(f(A_i), \mu_i)_{i=0}^{k}$ súlyozott pontrendszer súlypontja az $f(S)$ pont.

Bizonyítás. Ez közvetlenül adódik a lemmából, mivel egy súlyozott pontrendszer súlypontja a pontok affin kombinációja.

$\square$

3.23. Következmény. *Az affin leképezések osztóviszonytartók* abban az értelemben, hogy ha $A \neq B \neq P$ kollineáris pontjai az $\mathbb{A}$ affin térnek és $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, amelynél $f(A) \neq f(B) \neq f(P)$, akkor $(f(A)f(B)f(P)) = (ABP)$.

Bizonyítás. Ha $(ABP) = \frac{\beta}{\alpha}$, akkor P-nek az A-ból és B-ből való affin kombinálásakor fellépő együtthatók α és β; így a Lemma értelmében az $f(P)$ pont $f(A)$-ból és $f(B)$-ből való kombinálásakor is az α és β együtthatók lépnek fel, tehát $(f(A)f(B)f(P)) = \frac{\beta}{\alpha}$.

$\square$

3.24. Tétel. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin tér. Ha egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezésre teljesül, hogy bármely $((A,\lambda),(B,1-\lambda))$ súlyozott pontrendszer súlypontját az $((f(A),\lambda),(f(B),1-\lambda))$ súlyozott pontrendszer súlypontjába viszi át, akkor f affin leképezés.

Bizonyítás. Jelölje az f leképezésnél tetszőleges $P \in \mathbb{A}$ pont képpontját P'. Ha egy $((A,\lambda),(B,1-\lambda))$ súlyozott pontpár súlypontja S, akkor az $((A',\lambda),(B',1-\lambda))$ rendszer súlypontja a feltétel értelmében S'. Tetszőlegesen rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ origót, ezek helyzetvektora

$$\overrightarrow{OS}= \lambda\,\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{OB}, \qquad \text{illetve} \qquad \overrightarrow{O'S'}= \lambda\,\overrightarrow{O'A'} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{O'B'}$$

adódik. Értelmezzünk egy $\varphi\colon V \to V'$ leképezést a

$$\varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) :=\overrightarrow{O'P'}$$

előírással. Ha sikerül belátnunk, hogy a φ leképezés lineáris, akkor készen vagyunk, hiszen ebben az esetben

$$\forall P \in \mathbb{A}: \quad \overrightarrow{f(O)f(P)}= \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right), \qquad \varphi \in \mathscr{L}(V,V'),$$

ami *3.2.* alapján azt jelenti, hogy f affin leképezés.

(1) $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi\left(\overrightarrow{OO}\right) = \mathbf{0}$, φ tehát a zérusvektort a zérusvektorba viszi át.

(2) $\varphi\left(\lambda\,\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{OB}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{OS}\right) :=\overrightarrow{O'S'}=$
$= \lambda\,\overrightarrow{O'A'} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{O'B'} =: \lambda\varphi\left(\overrightarrow{OA}\right) + (1-\lambda)\varphi\left(\overrightarrow{OB}\right)$;
innen $B := O$ választással és az $u :=\overrightarrow{OA}$ jelölés bevezetésével azt kapjuk, hogy
$$\forall\lambda \in K, \forall u \in V: \quad \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u).$$
Ezzel igazoltuk φ homogenitását.

(3) Az additivitás bizonyítása céljából tekintsünk tetszőleges $u =\overrightarrow{OP}$, $v =\overrightarrow{OQ}$ vektorokat. Ha S a (P,Q) pontpár súlypontja, akkor
$$\overrightarrow{OS}= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}(u+v),$$

és a feltétel értelmében a (P', Q') pontpár súlypontja S', következésképpen

$$\overrightarrow{O'S'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'}\right).$$

Ezek alapján

$$\varphi(u+v) = \varphi\left(2 \cdot \frac{1}{2}(u+v)\right) \overset{(2)}{=} 2 \cdot \varphi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) = 2 \cdot \varphi\left(\overrightarrow{OS}\right) =$$
$$= 2 \cdot \overrightarrow{O'S'} = \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} =: \varphi\left(\overrightarrow{OP}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{OQ}\right) = \varphi(u) + \varphi(v),$$

φ tehát valóban additív.

φ ily módon lineáris, s a tétel igazolást nyert.

□

3.25. Következmény. *Az osztóviszonytartó leképezések affin leképezések.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A}$ és $\mathbb{A}'$ affin tér, s tekintsünk egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, $P \longmapsto P'$ osztóviszonytartó leképezést. Ekkor tetszőleges $A \neq B \neq P$ kollineáris pontok esetén $(ABP) = (A'B'P')$. Mivel

$$(ABP) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \iff P \text{ súlypontja } ((A,\lambda),(B,1-\lambda))\text{-nak},$$
$$(A'B'P') = \frac{1-\lambda}{\lambda} \iff P' \text{ súlypontja } ((A',\lambda),(B',1-\lambda))\text{-nak},$$

világos, hogy az osztóviszonytartás feltétele ekvivalens a tételbeli feltétellel.

□

3.26. Állítás *(az affin leképezések alaptétele).* Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ egy-egy affin tér, s tegyük föl, hogy $\mathbb{A}$ n-dimenziós. Megadva $\mathbb{A}$-nak egy $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázisát, s kijelölve $\mathbb{A}'$-nek egy tetszőleges $(A_i')_{i=0}^n$ pontsorozatát, létezik egy és csak egy olyan $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, hogy $f(A_i) = A_i'$ $(0 \le i \le n)$.

Bizonyítás.

Egyértelműség. Tegyük föl, hogy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ a kívánt tulajdonságú affin leképezés. Tekintve egy tetszőleges $P \in \mathbb{A}$ pontot, ez egyértelműen előállítható az $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázis affin kombinációjaként. Mivel az affin leképezések megőrzik az affin kombinációkat (*3.12.*), az $f(P)$ képpont csakis az $A_i' = f(A_i)$ $(0 \neq i \neq n)$ pontok ugyanolyan együtthatókkal képzett affin kombinációja lehet.

Létezés. Az $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^n$ vektorsorozat bázisa a V vektortérnek, ezért a lineáris leképezések alaptétele értelmében létezik egy és csak egy olyan $\varphi\colon V \to V'$ lineáris leképezés, hogy

$$\varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right) = \overrightarrow{A_0', A_i'}; \qquad 1 \neq i \neq n.$$

Ekkor minden $i \in \{0, \dots, n\}$ indexre

$$\overrightarrow{f(A_0)f(A_i)} = \varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right) = \overrightarrow{A_0'A_i'} = \overrightarrow{f(A_0)A_i'},$$

következésképpen ((A1) alapján) $f(A_i) = A'_i$ $(0 \neq i \neq n)$; f tehát a kívánt tulajdonságú affin leképezés.

□

3.27. Következmény.

(1) Megadva egy véges dimenziós affin térben két (nem föltétlenül különböző) affin bázist, létezik egy és csak egy olyan affinitás, amely az első bázis tagjait a második bázis megfelelő tagjaiba viszi át.

(2) Ha egy n-dimenziós affin tér egy affin transzformációja $n+1$ független pontot fixen hagy, akkor a transzformáció identitás. Speciálisan egy affin sík három nemkollineáris pontját fixen hagyó affin transzformáció az identikus transzformáció, s ha egy affin transzformáció egy egyenes két pontját fixen hagyja, akkor minden pontját fixen hagyja.

3.28. Definíció. Egy affin terek közötti bijektív leképezést **kollineáció**nak nevezünk, ha a leképezésnél bármely három kollineáris pont képe három kollineáris pont.

3.29. Példák.
(1) *Minden affin izomorfizmus kollineáció.* Valóban, tegyük föl, hogy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin izomorfizmus. Ekkor f definíció szerint bijektív. Tekintsünk egy $\overleftrightarrow{AB} \subset \mathbb{A}$ egyenest. Ha $P \in \mathbb{A}$, akkor P megkapható A és B affin kombinációjaként, s ezért – *3.12.*-re tekintettel – $f(P)$ affin kombinációja $f(A)$-nak és $f(B)$-nek Ebből következik, hogy $f(P) \in \overleftrightarrow{f(A)f(B)}$, hiszen $\overleftrightarrow{f(A)f(B)}$ affin altere $\mathbb{A}'$-nek, s egy affin altér tartalmazza bármely két pontjának minden affin kombinációját (*2.4.*).
(2) Egydimenziós affin terek közötti minden bijektív leképezés kollineáció.

3.30. Állítás *(a kollineációk elemi tulajdonságai)***.**

(1) Ha egy pont affin kombinációja bizonyos pontoknak, akkor egy kollineációnál adódó képe a pontok képeinek affin kombinációja (esetleg más együtthatókkal).

(2) Az affin függetlenség kollineáció során megőrződik.

(3) Véges dimenziós affin altér képe kollineációnál ugyanolyan dimenziós affin altér.

(4) Párhuzamos affin alterek képei kollineációnál párhuzamos affin alterek.

(5) Kollineáció inverze kollineáció; egy affin tér önamgára való összes kollineációi csoportot alkotnak a kompozíció műveletével.

Megjegyzés. Ha $\mathbb{A}$ affin tér, az összes $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ kollineációk alkotta csoportra a $\mathrm{Coll}(\mathbb{A})$ jelölést használjuk, s azt mondjuk, hogy $\mathrm{Coll}(\mathbb{A})$ $\mathbb{A}$ *kollineációcsoport*ja. *3.29*(1) értelmében $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \subset \mathrm{Coll}(\mathbb{A})$.

3.31. Definíció. Egy *test automorfizmus*án a test olyan bijektív transzformációját értjük, amely mind az összeadásra, mind a szorzásra nézve műveletartó.

3.32. Megjegyzések.
(1) A definíció értelmében egy $\sigma\colon K \to K$ bijektív transzformáció akkor automorfizmusa a K testnek, ha $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ és $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta)$, minden $\alpha, \beta \in K$ esetén. Egyszerűen adódik, hogy ekkor $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$.

(2) Megmutatható, hogy a $\mathbb{Q}$ racionális számtestnek és az $\mathbb{R}$ valós számtestnek egyetlen automorfizmusa van, az identikus transzformáció. A $\mathbb{C}$ komplex számtest bővelkedik nemidentikus automorfizmusokban, ezek közül azonban csak a $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ konjugálás folytonos.

3.33. Definíció. Legyen V és V' ugyanazon K test fölötti vektortér.

(1) Egy $\varphi\colon V \to V'$ leképezést *szemilineáris*nak mondunk, ha létezik olyan $\sigma\colon K \to K$ testautomorfizmus, hogy
$$\forall u, v \in V; \forall \lambda\mu \in K: \quad \varphi(\lambda u + \mu v) = \sigma(\lambda)\varphi(u) + \sigma(\mu)\varphi(v).$$

(2) Tekintsünk egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és egy $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ affin teret. Egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezést **szemiaffin**nak nevezünk, ha van olyan $\varphi\colon V \to V'$ szemilineáris leképezés, hogy
$$\forall A, B \in \mathbb{A}: \quad \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)f(B)}\,.$$

Megjegyzés. A *3.3.*-ban mondottak mintájára adódik, hogy egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ leképezés pontosan akkor szemiaffin, ha valamely – s így bármely – $O \in \mathbb{A}$ pont esetén f, mint az $\mathbb{A}_O$ és $\mathbb{A}'_{f(O)}$ linearizáltak közötti leképezés, szemilineáris.

3.34. Lemma. Szemiaffin leképezésnél kollineáris pontok képei kollineárisak.

Bizonyítás. Alkalmazva *3.33*(2) jelöléseit, tekintsük az $\mathbb{A}$ affin tér egy $\overleftrightarrow{AB} = \Phi_A^{-1}(\mathcal{U})$ egyenesét, ahol $\mathcal{U}$ jelöli az egyenes egydimenziós irányterét. Tetszőleges $P \in \overleftrightarrow{AB}$ pont esetén $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \in \varphi(\mathcal{U})$, ami ekvivalens azzal, hogy bármely $P \in \overleftrightarrow{AB}$ pont képpontjára $f(P) \in \Phi_A^{-1}(\varphi(\mathcal{U}))$, s mivel itt $\varphi(\mathcal{U})$ legfeljebb egydimenziós altere V'-nek, következik, hogy $f\left(\overleftrightarrow{AB}\right)$ legfeljebb egydimenziós affin altér $\mathbb{A}'$-ben. Ez a lemma helyességét jelenti.

$\square$

3.35. Tétel *(az affin geometria alaptétele). Ugyanazon test fölötti megegyező, véges, de 1-nél nagyobb dimenziójú affin terek között bármely kollineáció szemiaffin leképezés.*

Megjegyzés. Az alaptétel leglényegesebb mondanivalója az, hogy egy affin tér egy transzformációjának affinitás volta eldől egy, az affin tér struktúráját meghatározó vektortér-struktúránál (látszólag) sokkal elemibb struktúra, a ponotk és az egyenesek illeszkedési struktúrája ismeretében.

3.36. Következmény. *$n > 1$ dimenziós valós affin terek közötti minden kollineáció affin leképezés; speciálisan Coll$(\mathbb{A})$ = Aff$(\mathbb{A})$, ha $\mathbb{A}$ $n > 1$ dimenziós valós affin tér.*

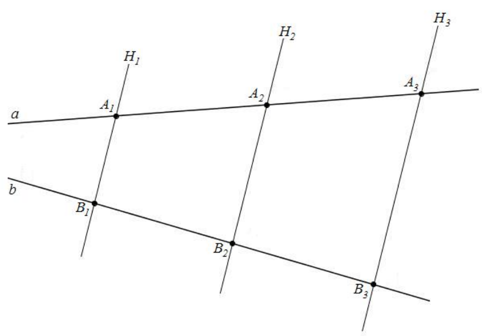
Bizonyítás. Mivel $\mathbb{R}$-nek az identikus transzformáció az egyetlen testautomorfizmusa, valós affin terek közötti minden szemiaffin leképezés affin. Így a Következmény adódik az affin geometria alaptételéből és *3.29*(1)-ből.

□

4. Az affin geometria néhány klasszikus tétele

4.1. Tétel *(a párhuzamos szelők tétele).* Legyenek H_1, H_2, H_3 egy véges (de legalább két-) dimenziós affin tér különböző, párhuzamos hipersíkjai. Tegyük föl, hogy a és b az affin tér olyan egyenesei, amelyek egyike sem gyengén párhuzamos az adott hipersíkokkal, s legyenek A_1, A_2, A_3, illetve B_1, B_2, B_3 a, illetve b metszéspontjai rendre H_1-gyel, H_2-vel és H_3-mal. Ekkor

$$(A_1A_2A_3) = (B_1B_2B_3).$$



Bizonyítás. Rögzítsünk egy O origót, s legyen $(A_1A_2A_3) = \lambda$. Ekkor *2.8.* értelmében

$$\overrightarrow{OA_3} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA_2}\,.$$

Tekintsük azt a B pontot, amelynek helyzetvektora

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB_2}\,.$$

Mivel B affin kombinációja B_1-nek és B_2-nek, $B \in \overleftrightarrow{B_1B_2} = b$ (például *2.2.* miatt). Bevezetve a $v_1 := \overrightarrow{A_1B_1}$, $v_2 := \overrightarrow{A_2B_2}$ vektorokat,

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + v_1, \qquad \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + v_2$$

írható, s így

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{1+\lambda}v_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}v_2 = \\ &= \overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{1+\lambda}v_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}v_2\end{aligned}$$

írható, ahol $\frac{1}{1+\lambda}v_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}v_2$ benne van a hipersíkok közös irányterében. Így *1.12.*-re tekintettel $B \in H_3$, következésképpen $B \in b \cap H_3 = \{B_3\}$, s ennélfogva $B = B_3$. Ekkor azonban $\overrightarrow{OB_3} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB_2}$, ami azt jelenti, hogy $(B_1B_2B_3) = \lambda$ – s ezt akartuk belátni.

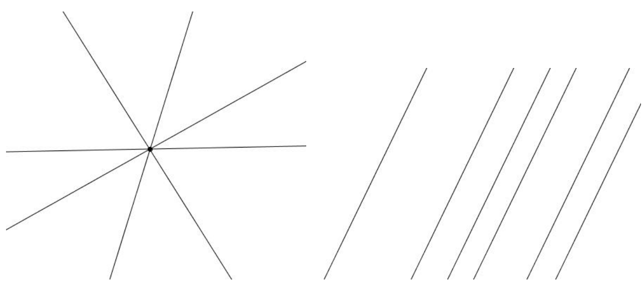
□

4.2. Definíció. Egy affin sík (azaz egy kétdimenziós affin tér) egyeneseinek egy halmazát *sugársor*nak nevezzük, ha

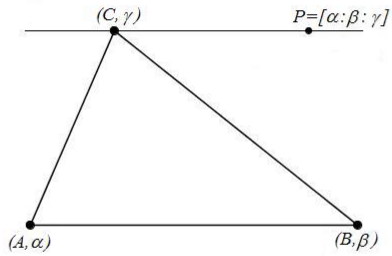
(1) a sík egy pontjára illeszkedő összes egyenesek alkotják (*metsző sugársor*) vagy

(2) a sík egy egyenesével párhuzamos összes egyenes tartozik hozzá (*párhuzamos sugársor*).

Az első esetben a sugársor egyeneseinek közös pontját a sugársor *tartó*jának vagy *alappontjá*nak hívjuk.



4.3. Lemma. Legyen (A, B, C) affin bázisa egy affin síknak, s legyenek egy P pont (A, B, C)-re vonatkozó baricentrikus koordinátái α, β, γ. A P pont akkor és csak akkor illeszkedik a C-n átmenő, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos egyenesre, ha $\alpha + \beta = 0$.



Bizonyítás. Rögzítsünk egy O origót, s jelölje l a C-n átmenő, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos egyenest. Ekkor $l = \Phi_C^{-1}\left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)$.

(1) Ha $P \in l$, akkor $\overrightarrow{CP} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ $(\lambda \in K)$, s így

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} =$$
$$= \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OC} = -\lambda\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

amiből $[\alpha : \beta : \gamma] = [-\lambda, \lambda, 1]$ és $\alpha + \beta = 0$ következik.

(2) Amennyiben $\alpha + \beta = 0$, úgy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC}}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \gamma\,\overrightarrow{OC}}{\gamma} = \overrightarrow{OC} - \frac{\alpha}{\gamma}\,\overrightarrow{AB},$$

s innen *1.12*(2) figyelembevételével $P \in l$ következik.

□

4.4. Tétel *(Ceva tétele)***.** Legyen A, B és C egy affin sík három nemkollineáris pontja, legyenek továbbá A_1, B_1 és C_1 rendre a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesekre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek egy sugársorhoz tartozzanak,

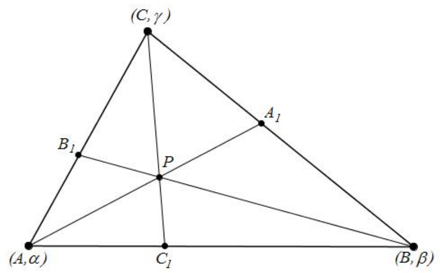
$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$$

teljesülése.

Bizonyítás. Nemkollineáris pontokról lévén szó, (A, B, C) affin bázisa az alapulvett affin síknak; meggondolásaink során erre vonatkozó baricentrikus koordinátákat fogjuk alkalmazni.

Szükségesség. Tegyük föl először, hogy az $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ egyenesek egy P tartójú metsző sugársorhoz tartoznak, s legyenek P (A, B, C)-re vonatkozó baricentrikus koordinátái α, β, γ.

Ez azt jelenti, hogy P súlypontja az $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ súlyozott pontrendszernek. A súlyok csoportosíthatósági tulajdonsága alapján P megkapható az $((A, \alpha), (B, \beta))$ rendszer $(\alpha + \beta)$-val súlyozott súlypontja és (C, γ) súlypontjaként is (*4.3.*-ra tekintettel $\alpha + \beta \neq 0$, hiszen most P nem lehet rajta a C-n átmenő, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos egyenesen). Mivel P rajta van a $\overleftrightarrow{CC_1}$



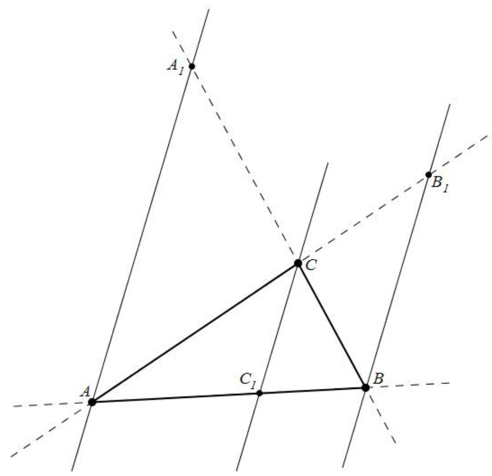
egyenesen, az $((A,\alpha),(B,\beta))$ súlyozott pontpár súlypontja csakis $\overleftrightarrow{CC_1}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ C_1 metszéspontja lehet. Így

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB},$$

amiből *2.18.* figyelembevételével $(ABC) = \frac{\beta}{\alpha}$ következik. Ugyanilyen meggondolással kapjuk, hogy $(BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta}$, $(CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma}$; így

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma} = 1.$$

Vizsgáljuk meg ezután azt az esetet, amikor az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek párhuzamosak.



Alkalmaza a párhuzamos szelők tételét ezekre az egyenesekre mint hipersíkokra, s az ezeket metsző $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ valamint $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{CB}$ egyenesekre, azt kapjuk, hogy

$$(ABC_1) = (A_1BC), \quad (CAB_1) = (CA_1B).$$

Az A_1, B, C pontokra *2.9*(5) azt adja, hogy

$$(A_1BC)(BCA_1)(CAB_1) = 1;$$

így az előbbi relációk figyelembevételével a kívánt

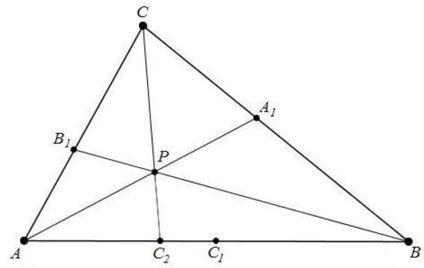
$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$$

egyenlőséghez jutunk.

Elegendőség. Tegyük föl, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. Ha az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek nem párhuzamosak, akkor közöttük van két metsző; legyen mondjuk $\{P\} = \overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{BB_1}$. Állítjuk először is, hogy $\overleftrightarrow{CP}$ *nem párhuzamos* $\overleftrightarrow{AB}$*-vel.* Valóban, legyenek P (A, B, C)-re vonatkozó baricentrikus koordinátái α, β, γ. Tegyük fel, állításunkkal ellentétben, hogy $\overleftrightarrow{CP} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. Ekkor *4.3.* értelmében $\alpha + \beta = 0$. Másrészt, az előbb látott módon, $(BCA_1) = \frac{\gamma}{\beta}$, $(CAB_1) = \frac{\alpha}{\gamma}$, így

$$(BCA_1)(CAB_1) = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\beta}{\beta} = -1;$$

ezt a feltételbe beírva $(ABC_1) = -1$ következik, ami ellentmondás. Létezik ily módon az $\overleftrightarrow{AB}$ és a $\overleftrightarrow{CP}$ egyenes C_2 metszéspontja.



Ekkor, a már bizonyítottak szerint, $(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. Ebből és a feltételből $(ABC_2) = (ABC_1)$ adódik, amiből *2.9*(3) alapján $C_1 = C_2$ következik. Beláttuk ezzel, hogy $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyaránt a P tartójú sugársorhoz tartozik; így a bizonyítás teljes.

□

Megjegyzés. Ceva tételéből közvetlenül adódik, hogy egy háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, hiszen egyeneseik nem párhuzamosak, az oldalfelező pontok pedig – röviden szólva – az oldalakat 1 osztóviszonnyal osztják.

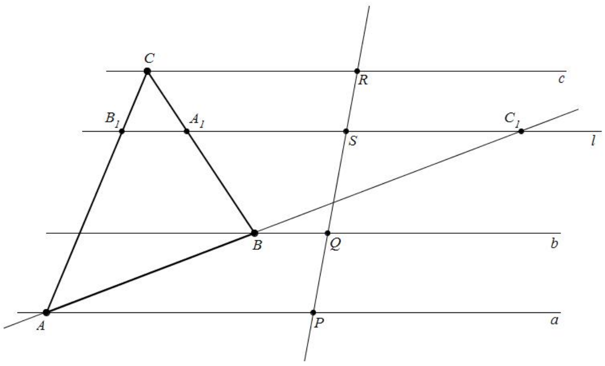
4.5. Tétel *(Menelaosz tétele)***.** Legyenek A, B, C egy affin sík nemkollineáris pontjai, s tegyük föl, hogy A_1, B_1 és C_1 rendre a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy A_1, B_1 és C_1 kollineáris legyen, az

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$$

reláció teljesülése.

Bizonyítás.

(1) Tegyük föl először, hogy van olyan l egyenes, amelyre A_1, B_1 és C_1 illeszkedik. Legyenek a, b, c rendre az A, B és C pontra illeszkedő, l-lel párhuzamos egyenesek (egyértelmű létezésüket *1.19.* garantálja). Ekkor l, a, b, c különböző, párhuzamos egyenesek. Messük el ezeket egy további egyenessel, a metszéspontok legyenek rendre S, P, Q és R.

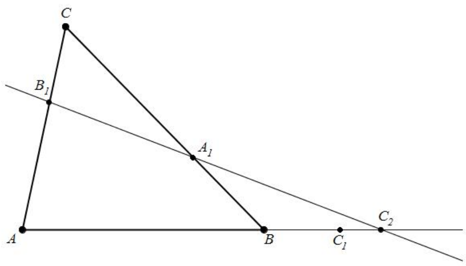


Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az l, a, b, c egyenesekre mint párhuzamos hipersíkokra, az imént felvett egyenesre, valamint az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{CA}$ egyenesre. Azt kapjuk, hogy

$$(ABC_1) = (PQS), \quad (BCA_1) = (QRS), \quad (CAB_1) = (RPS).$$

így $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = (PQS)(QRS)(RPS) \overset{2.9(6)}{=} -1$ adódik, amivel a feltétel szükségességét igazoltuk.

(2) Megfordítva, tegyük föl $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$ teljesülését, s tekintsük az $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ egyenest.



Ez nem lehet párhuzamos az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenessel, ellenkező esetben ugyanis a párhuzamos szelők tétele alapján $(ACB_1) = (BCA_1)$, s így feltételünk a

$$-1 = (ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = (ABC_1)(ACB_1)(CAB_1) \overset{2.9(4)}{=} (ABC_1)$$

relációhoz vezetne, ami lehetetlen. Létezik ily módon az $\overleftrightarrow{AB}$ és az $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ egyenes C_2 metszéspontja. (1) alapján ezzel a ponttal $(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = -1$ teljesül, s így a feltétel figyelembevételével $(ABC_1) = (ABC_2)$ adódik, amiből viszont *2.9*(3) alapján $C_1 = C_2$ következik. Ezzel megmutattuk az A_1, B_1, C_1 pontok kollinearitását.

$\square$

4.6. Megjegyzés. Tekintsük egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ affin tér

$$H_{O,\lambda} = \Phi_O^{-1} \circ \lambda 1_V \circ \Phi_O \qquad \text{és} \qquad H_{O,\mu} = \Phi_O^{-1} \circ \mu 1_V \circ \Phi_O$$

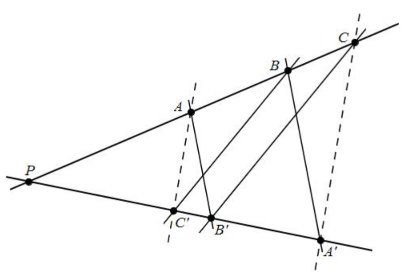
O középpontú homotéciáit (ld. *3.10.*). Ekkor

$$H_{O,\lambda} \circ H_{O,\mu} = \Phi_O^{-1} \circ \lambda\mu 1_V \circ \Phi_O = H_{O,\lambda\mu} = H_{O,\mu\lambda} = H_{O,\mu} \circ H_{O,\lambda};$$

következik ily módon, hogy ***a rögzített középpontú homotéciák egy kommutatív részcsoportot alkotnak*** $Aff(\mathbb{A})$***-ban, amely izomorf az alapulvett*** K^* ***multiplikatív csoportjával.***

4.7. Tétel *(Papposz tétele, affin változat)***.** Legyenek l és l' egy affin sík különböző egyenesei, s jelöljünk ki az l egyenesen különböző A, B, C, az l' egyenesen különböző A', B', C' pontokat. Ha l és l' metsző, tegyük föl, hogy a metszéspontjuk különbözik mind a hat ponttól. Amennyiben $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}$ és $\overleftrightarrow{BC'} \parallel \overleftrightarrow{B'C}$, úgy $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$ is fennáll.

Bizonyítás. Tegyük föl először, hogy l és l' metszi egymást egy P pontban.



3.20.-ból következően egyértelműen létezik olyan f P középpontú homotécia, amelynél $f(A) = B$. Ugyancsak 3.20., valamint a feltétel alapján ennél a homotéciánál $f(B') = A'$. Hasonló érveléssel tekinthetjük azt a P középpontú g homotéciát, amelynél $g(B) = C$; ekkor $g(C') = B'$. Legyen $h := f \circ g$. Ekkor az előrebocsátott megjegyzés szerint h szintén P középpontú homotécia, és $h = g \circ f$ is fennáll. Így

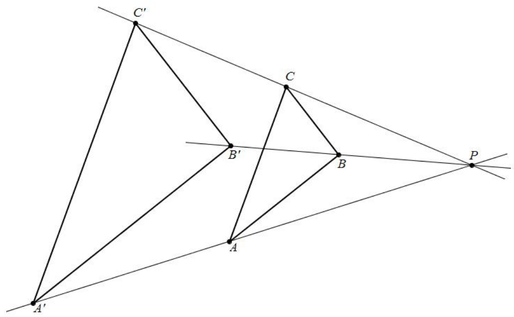
$$h(A) = g \circ f(A) = g(B) = C, \qquad h(C') = f \circ g(C') = f(B') = A',$$

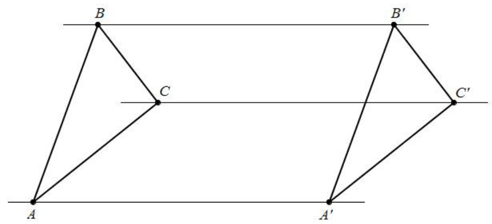
következésképpen h az $\overleftrightarrow{AC'}$ egyenest a $\overleftrightarrow{CA'}$ egyenesbe viszi át, s mivel a dilatációk *3.19.* értelmében párhuzamosságtartók, $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$.
Amennyiben az l és l' egyenes párhuzamos, az okoskodás teljesen analóg, a módosítás csupán annyi, hogy az f és g homotéciák helyett olyan transzlációkat kell alkalmazni, amelyek A-t B-be, illetve B-t C-be viszik át.

$\square$

Megjegyzés. A bizonyítás során – az előrebocsátott megjegyzésen keresztül – lényegesen felhasználtuk, hogy a testbeli szorzás kommutatív; ennek híján a tétel érvényét veszítené.

4.8. Tétel *(Desargues tétele, affin változat)*. Legyen A, B, C, A', B', C' hat pont egy affin síkon, föltéve, hogy $\{A, B, C\}$ és $\{A', B', C'\}$ nem kollineáris. Ha $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ és $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$, akkor az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek egy sugársorhoz tartoznak.





Bizonyítás.

(1) Tegyük föl, hogy az $\overleftrightarrow{AA'}$ és a $\overleftrightarrow{BB'}$ egyenes metszi egymást egy P pontban. Tekintsük azt a P középpontú homotéciát, amelynél $f(A) = A'$. Ekkor a *3.20.*-ban leírt szerkesztési eljárás és a $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ feltétel alapján $f(B) = B'$ is teljesül. Legyen $C'' := f(C)$. Mivel a dilatációk párhuzamosságtartók, következik, hogy

$$\overleftrightarrow{B'C''} \parallel \overleftrightarrow{BC} \qquad \text{és} \qquad \overleftrightarrow{A'C''} \parallel \overleftrightarrow{AC},$$

így C'' rajta van a B'-re illeszkedő, $\overleftrightarrow{BC}$-vel párhuzamos egyetlen egyenesen és az A'-re illeszkedő, $\overleftrightarrow{AC}$-vel párhuzamos egyetlen egyenesen is. Ezek az egyenesek éppen $\overleftrightarrow{B'C'}$ és $\overleftrightarrow{A'C'}$, melyeknek egyetlen közös pontja a C' pont, következésképpen $C'' = C'$. P, C és C'' a konstrukció alapján kollineáris, ezért $\overleftrightarrow{CC''}=\overleftrightarrow{CC'}$ egyenes is áthalad a P ponton – és ezt kellett belátnunk.

(2) Amennyiben $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$, tekintsük azt a transzlációt, amely az A pontot a B pontba viszi át. Ezt alkalmazva, előző gondolatmenetünk lényegi változtatás nélkül megismételhető.

□

5. Valós affin terek

Valós affin térben dolgozva, a valós számtest rendezési és topológiai tulajdonságainak köszönhetően számos olyan konstrukcióra mód nyílik, amelyre egy tetszőleges test fölötti affin térben nincs lehetőség. Erre 2.14.-ben, a szakaszok értelmezésekor már láttunk példát.

Emlékeztető a lineáris algebrából. Egy véges dimenziós, valós vektortér bázisainak halmazában ekvivalenciareláció vezethető be oly módon, hogy két, nem föltétlenül különböző, bázist ekvivalensnek nevezünk, ha az egyikről a másikra való átmenet (bázistranszformáció) mátrixa pozitív determinánsú. Ekkor az ekvivalenciaosztályok száma kettő; kijelölve és *pozitív*nak deklarálva ezek egyikét, azt mondjuk, hogy **irányítás**t adtunk meg a vektortéren. Az adott irányításhoz tartozó bázisokat *pozitív* vagy *jobbsodrású*, az ezekkel nem ekvivalens bázisokat *negatív* vagy *balsodrású* bázisokként említjük. Egy irányított vektorterek közötti lineáris izomorfizmust *irányítástartó*nak nevezünk, ha pozitív bázist pozitív bázisba visz át, különben *irányításváltó*nak mondjuk. Ha V véges dimenziós valós vektortér és $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$, φ akkor és csak akkor irányítástartó, ha $\det \varphi > 0$.

5.1. Definíció. Egy $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ véges dimenziós valós affin teret **irányított**nak nevezünk, ha V irányterén megadtunk egy irányítást. Ebben az esetben $\mathbb{A}$-nak egy $(A_i)_{i=0}^n$ bázisát *pozitív*nak (vagy *jobbsodrású*nak) mondjuk, ha $\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^n$ pozitív bázisa V-nek; ellenkező esetben *negatív*nak vagy (*balsodrású*nak) nevezzük.

5.2. Lemma. Legyen $(A_i)_{i=0}^n$ pozitív affin bázisa az $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ valós affin térnek, s tekintsünk egy $\sigma\colon \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ permutációt. Az $(A_{\sigma(i)})_{i=0}^n$ affin bázis akkor és csak akkor pozitív, ha a σ permutáció páros.

Bizonyítás. Minden permutáció előállítható transzpozíciók kompozíciójaként (sőt az előállításban szereplő tényezők számának paritása állandó). Elegendő ezért azt ellenőrizni, hogy transzpozíció végrehajtása esetén pozitív affin bázisból negatívat kapunk, és megfordítva.
Vezessük be az $a_j := \overrightarrow{A_0A_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ rövidítést (ekkor $(a_j)_{j=1}^n$ bázisa V-nek), s legyen σ transzpozíciója $\{0, 1, \ldots, n\}$-nek.

(1) Ha $\sigma(0) = 0$, akkor σ hatására az $(a_j)_{j=1}^n$ bázis két tagja cserélődik fel. A bázistranszformáció mátrixa az egységmátrixból két oszlop felcserélésével adódik, ezért a determinánsa negatív.

(2) Tegyük föl, hogy $\sigma(0) = i$, ahol $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ekkor σ hatása az $(a_j)_{j=1}^n$ bázison következő:

$$a_j = \overrightarrow{A_0A_j} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i} = a_j - a_i, \quad \text{ha } j \neq i\ ;$$
$$a_i = \overrightarrow{A_0A_i} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{A_iA_0} = -a_i.$$

Az „új" bázist tehát a „régi" bázisból úgy kapjuk, hogy annak i-edik tagját a többiből kivonjuk, magát az i-edik bázisvektort pedig (-1)-gyel szorozzuk. Világos, hogy ennek a bázistranszformációnak is negatív (mégpedig -1) a determinánsa.

$\square$

5.3. Definíció. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ és $(\mathbb{A}', V', \Phi')$ megegyező dimenziójú véges dimenziós valós affin tér. Egy $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin izomorfizmust *irányítástartó*nak nevezünk, ha az $\overrightarrow{f} : V \to V'$ linearizáltja irányítástartó, ellenkező esetben f-et *irányításváltó*nak mondjuk.

Megjegyzés. Az előrebocsátottakból világos, hogy egy affin izomorfizmus aszerint irányítástartó, illetve irányításváltó, amint valamely (s ezért bármely) pozitív affin bázist pozitív, illetve negatív affin bázisba visz át. Speciálisan egy $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ affinitás akkor és csak akkor irányítástartó, ha $\det\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$. A determinánsok szorzástétele alapján adódik, hogy irányítástartó affinitások kompozíciója és inverze is irányítástartó. Az irányítástartó affinitások ily módon részcsoportot, mégpedig 2 indexű részcsoportot alkotnak az $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ csoportban.

Példa. Ha $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ n-dimenziós valós affin tér és $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ eltolás vagy pozitív arányú homotécia, akkor f irányítástartó, hiszen az első esetben $\overrightarrow{f} = 1_V$, s így $\det \overrightarrow{f} = 1$, a második esetben pedig $\overrightarrow{f} = \lambda 1_V$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*_+)$, s ezért $\det \overrightarrow{f} = \lambda^n > 0$. Az is látható, hogy a negatív arányú homotéciák csak páros dimenziós affin térben irányítástartók.

Megállapodás. A természetes affin struktúrával ellátott $\mathbb{R}^n$ valós vektorteret irányítottnak tekintjük azzal az ún. *szokásos irányítás*sal, amelyet $\mathbb{R}^n$ kanonikus bázisa reprezentál.

5.4. Definíció és lemma. Legyenek A és B egy valós affin tér különböző pontjai. Az $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$ ponthalmazt az $\overline{AB}$ *szakasz belsejé*nek nevezzük, s rá az $\overset{\circ}{\overline{AB}}$ vagy $\mathrm{Int}\,\overline{AB}$ jelölést használjuk, pontjait pedig a szakasz *belső pontjai*nak hívjuk.
Egy P pont akkor és csak akkor belső pontja az $\overline{AB}$ szakasznak, ha $(ABP) > 0$.

Bizonyítás. A *2.14.* definíció értelmében

$$\overline{AB} = \left\{P \in \overleftrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AP} = \tau\, \overrightarrow{AB}, \quad \tau \in [0,1]\right\},$$

így $\overset{\circ}{\overline{AB}} = \left\{P \in \overleftrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AP} = \tau\, \overrightarrow{AB}, \quad \tau \in]0,1[\right\}$. Kijelölve egy O origót, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ írható. Ennek figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P \in \overline{AB} \quad &\iff \quad \exists \tau \in [0,1] : \ \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \tau\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &\iff \quad \exists \tau \in [0,1] : \ \overrightarrow{OP} = (1-\tau)\, \overrightarrow{OA} + \tau\, \overrightarrow{OB}\,. \end{aligned}$$

Az állítás igazolására térve át, tegyük föl először, hogy $P \in \overset{\circ}{\overline{AB}}$. Ekkor a most mondottak szerint

$$\overrightarrow{OP} = (1-\tau)\, \overrightarrow{OA} + \tau\, \overrightarrow{OB}, \qquad \tau \in]0,1[,$$

így *2.8.* alapján $(ABP) = \frac{\tau}{1-\tau} > 0$.
Megfordítva, ha $(ABP) = \mu > 0$, akkor – szintén *2.8.*-ra tekintettel – $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{OA} + \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{OB}$. Legyen $\tau := \frac{\mu}{1+\mu}$. Ekkor $\tau \in]0,1[$ és $\overrightarrow{OP} = (1-\tau)\overrightarrow{OA} + \tau\overrightarrow{OB}$, ami azt jelenti, hogy $P \in \overset{\circ}{\overline{AB}}$.

□

5.5. Megjegyzés. Ha $(A_i, \mu_i)_{i=0}^k$ olyan súlyozott pontrendszere egy affin térnek, hogy $\sum_{i=0}^k \mu_i = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a súlyok rendszere *normált.* Ebben az esetben a rendszer S súlypontjának tetszőleges O pontra vonatkozó helyzetvektora $\overrightarrow{OS} = \sum_{i=0}^k \mu_i \overrightarrow{OA_i}$. Alkalmas skalárral megszorozva a súlyok mindegyikét, minden súlyozott pontrendszerről áttérhetünk olyan rendszerre, ahol a súlyok rendszere normált, s amelyeknek súlypontja megegyezik az eredeti rendszer súlypontjával. n-dimenziós affin térben egy P pontnak egy $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázisra vonatkozó *normált baricentrikus koordinátái*n súlyok olyan $(\mu_i)_{i=0}^n$ normált rendszerét értjük, amelyre teljesül, hogy P súlypontja az $(A_i, \mu_i)_{i=0}^n$ súlyozott pontrendszernek.

5.6. Lemma. Legyen $\overleftrightarrow{AB}$ egyenese, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ pedig pontja egy valós affin síknak. Ha egy P pontnak az (A, B, C) affin bázisra vonatkozó normált baricentrikus koordinátái α, β, γ, akkor

(1) $\gamma = 0$ ekvivalens azzal, hogy $P \in \overleftrightarrow{AB}$;

(2) $\gamma > 0$ ekvivalens azzal, hogy $\overline{PC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$.

Bizonyítás. Rögzítve egy O origót, a P pont helyzetvektora $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, ahol $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
(1) $\gamma = 0$ esetén $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (1-\beta)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, P tehát affin kombinációja A-nak és B-nek, s így (ld. *2.4.*) $P \in \overleftrightarrow{AB}$.
Megfordítva, ha $P \in \overleftrightarrow{AB}$, akkor P egyértelműen előállítható (A, B) affin kombinációjaként, s így $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, $\alpha + \beta = 1$ írható, következésképpen P (A, B, C)-re vonatkozó normált baricentrikus koordinátáinak harmadik tagja 0.

(2) Tetszőlegesen választva egy $\tau \in [0, 1]$ paramétert, tekintsük a $\overline{PC}$ szakasz

$$\overrightarrow{OQ} = (1-\tau)\overrightarrow{OP} + \tau\overrightarrow{OC} = (1-\tau)\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\tau)\beta\overrightarrow{OB} + ((1-\tau)\gamma + \tau)\overrightarrow{OC}$$

helyzetvektorú Q pontját.
$\gamma > 0$ esetén ennek 3. baricentrikus koordinátája pozitív, így (1)-re tekintettel $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$. Ebből $Q \in \overline{PC}$ tetszőlegessége folytán $\overline{PC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ következik.
Ha $\gamma < 0$, akkor van olyan $\tau \in]0, 1[$ valós szám, hogy $(1-\tau)\gamma + \tau = 0$, nevezetesen $\tau = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Így a $\overline{PC}$ szakasz $\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\overrightarrow{OP} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\overrightarrow{OC}$ helyzetvektorú pontjának (A, B, C)-re vonatkozó 3. normált baricentrikus koordinátája 0, s ezért (1) miatt $\overset{\circ}{\overline{PC}} \cap \overleftrightarrow{AB} \neq \emptyset$. Beláttuk ezzel (2) teljesülését is.

□

5.7. Definíció. Egy valós affin tér egy részhalmazát *konvex*nek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza.

5.8. Példák.

(1) Bármely valós affin térben az összes affin altér konvex halmaz; speciálisan az üres halmaz, a pontok, az egyenesek és maga a tér is konvex halmazok.

(2) *A szakaszok konvex halmazok.* Valóban, tekintsük egy valós affin tér egy $\overline{AB}$ szakaszát. Föltehetjük, hogy $A \neq B$, különben nincs teendőnk. Legyen $A_1, B_1 \in \overline{AB}$; azt kell belátnunk, hogy ekkor $\overline{A_1B_1} \subset \overline{AB}$ is teljesül. Tekintsünk egy tetszőleges $P \in \overline{A_1B_1}$ pontot. Rögzítve egy O origót,

$$\overrightarrow{OP} = (1-\tau)\,\overrightarrow{OA_1} + \tau\,\overrightarrow{OB_1}, \qquad \tau \in [0,1]$$

írható. Itt $A_1, B_1 \in \overline{AB}$ folytán

$$\overrightarrow{OA_1} = (1-\alpha)\,\overrightarrow{OA} + \alpha\,\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OB_1} = (1-\beta)\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}; \qquad \alpha, \beta \in [0,1],$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-\tau)(1-\alpha)\,\overrightarrow{OA} + (1-\tau)\alpha\,\overrightarrow{OB} + \tau(1-\beta)\,\overrightarrow{OA} + \tau\beta\,\overrightarrow{OB} = \\ &= ((1-\tau)(1-\alpha) + \tau(1-\beta))\,\overrightarrow{OA} + ((1-\tau)\alpha + \tau\beta)\,\overrightarrow{OB} = \\ &= (1 - ((1-\tau)\alpha + \tau\beta))\,\overrightarrow{OA} + ((1-\tau)\alpha + \tau\beta)\,\overrightarrow{OB}\,.\end{aligned}$$

Itt $(1-\tau)\alpha + \tau\beta > 0$ nyilvánvalóan teljesül, s mivel

$$\begin{aligned} &\beta < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta - \alpha < 1 - \alpha \quad \overset{0<\tau<1}{\Rightarrow} \\ \overset{0<\tau<1}{\Rightarrow} \quad &\tau(\beta - \alpha) < 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (1-\tau)\alpha + \tau\beta < 1,\end{aligned}$$

következik, hogy $P \in \overline{AB}$. $P \in \overline{A_1B_1}$ tetszőlegessége folytán ez azt jelenti, hogy $\overline{A_1B_1} \subset \overline{AB}$.

(3) *Konvex halmaz képe és ősképe affin leképezésnél konvex halmaz.* A képre vonatkozó megállapítás igazolásához legyen $\mathbb{A}$ és $\mathbb{A}'$ valós affin tér, $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ affin leképezés, $K \subset \mathbb{A}$ konvex halmaz. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $K' := f(K) \subset \mathbb{A}'$ is konvex halmaz. Tegyük fel, hogy K' legalább kételemű (különben nincs teendő), s legyenek A' és B' K' különböző pontjai. Ekkor vannak olyan $A \neq B$ K-beli pontok, hogy $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Rögzítve $\mathbb{A}$-ban egy O origót, tekintsük $\mathbb{A}'$-ben az $O' = f(O)$ origót. Tetszőleges $P' \in \overline{A'B'}$ pont helyzetvektora megadható

$$\overrightarrow{O'P'} = (1-\tau)\,\overrightarrow{O'A'} + \tau\,\overrightarrow{O'B'}$$

alakban. Az $\overrightarrow{OP} := (1-\tau)\,\overrightarrow{OA} + \tau\,\overrightarrow{OB}$ helyzetvektorú pont az $\overline{AB}$ szakasz egy pontja, így K konvexsége miatt $P \in K$. Mivel az affin leképezések felcserélhetők az affin kombinációk képzésével (*3.21.*),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'f(P)} = \overrightarrow{f(O)f(P)} &= (1-\tau)\,\overrightarrow{f(O)f(A)} + \tau\,\overrightarrow{f(O)f(B)} = \\ &= (1-\tau)\,\overrightarrow{O'A'} + \tau\,\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'P'},\end{aligned}$$

Következésképpen $P' = f(P) \in K'$, amivel igazoltuk K' konvexségét. Konvex halmaz ősképének konvexsége ugyanilyen egyszerűen látható.

5.9. Lemma és definíció.

(1) Egy valós affin tér konvex halmazai tetszőleges családjának a metszete is konvex halmaz.

(2) Tekintve egy $\mathbb{A}$ valós affin tér egy S részhalmazát, az S-et tartalmazó $\mathbb{A}$-beli konvex halmazok között létezik legszűkebb, mégpedig az S-et tartalmazó összes $\mathbb{A}$-beli konvex halmaz metszete. Ezt a halmazt az S halmaz *konvex burká*nak nevezzük és $\mathrm{conv}(S)$-sel jelöljük.

5.10. Definíció. Valós affin térben egy affin kombinációt *konvex kombináció*nak mondunk, ha a benne szereplő együtthatók nemnegatívak.

Példa. Egy szakaszt két végpontjának összes konvex kombinációi alkotják.

5.11. Állítás. Egy ponthalmaz konvex burka megegyezik a ponthalmazból képezhető összes véges pontsorozat összes konvex kombinációinak halmazával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A}$ valós affin tér, $S \subset \mathbb{A}$, s jelölje $c(S)$ az S véges pontsorozataiból képezhető összes konvex kombinációk halmazát. Feladatunk annak megmutatása, hogy $c(S) = \mathrm{conv}(S)$.

(1) $c(S) \subset$ *conv*(S). Ha $P \in c(S)$, akkor egy O origó rögzítése után valamely $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok segítségével

$$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}; \qquad \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

írható. A szereplő pontok száma, azaz k szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $P \in \mathrm{conv}(S)$. Ez $k = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, a $k = 2$ esetben pedig adódik a konvexitás definíciójából. Tegyük föl, hogy $k > 2$, és hogy a k-nál kisebb tagszámú konvex kombinációk $\mathrm{conv}(S)$-ben vannak. Ha a felírt konvex kombinációban $\lambda_k = 1$, akkor

$$\overrightarrow{OP} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}} \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}} \overrightarrow{OA_{k-1}} \right) + \\ + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$$

írható. Ha

$$\overrightarrow{OQ} := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}} \overrightarrow{OA_1} + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}} \overrightarrow{OA_{k-1}},$$

akkor az indukciós feltevés értelmében $Q \in \mathrm{conv}(S)$, hiszen Q konvex kombinációja az $A_1, \ldots, A_{k-1}$ pontoknak. Mivel

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda_k) \overrightarrow{OQ} + \lambda_k \overrightarrow{OA_k},$$

P konvex kombinációja a $Q, A_k \in S$ pontoknak, így P is conv(S)-be tartozik.

(2) *conv*$(S) \subset c(S)$. Ennek igazolásához elegendő azt belátnunk, hogy $c(S)$ konvex, ugyanis $S \subset c(S)$ (S minden pontja egytagú konvex kombinációja önmagának), s így $c(S)$ konvexsége esetén a konvex burok definíciójából következik, hogy conv$(S) \subset c(S)$.

Legyen $A, B \in c(S)$. Egy O origó rögzítése után ekkor bizonyos $A_1, \ldots, A_k \in S$, illetve $B_1, \ldots, B_k \in S$ pontok segítségével

$$\overrightarrow{OA}= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+; \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1), \qquad \text{illetve}$$

$$\overrightarrow{OB}= \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OB_i} \qquad (\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}_+; \quad \mu_1 + \cdots + \mu_k = 1)$$

írható. Azt kell ellenőriznünk, hogy ha $P \in \overline{AB}$, akkor $P \in c(S)$. $P \in \overline{AB}$ esetén valamely $\tau \in [0, 1]$ valós számmal

$$\overrightarrow{OP}= (1-\tau) \overrightarrow{OA} + \tau \overrightarrow{OB}= \sum_{i=1}^{k} (1-\tau)\lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \sum_{j=1}^{l} \tau\mu_j \overrightarrow{OB_j} .$$

Itt a jobb oldali lineáris kombináció konvex kombináció, hiszen az együtthatók mindegyike nemnegatív és

$$\sum_{i=1}^{k} = (1-\tau)\lambda_i + \sum_{j=1}^{l} \tau\mu_j = (1-\tau) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \tau \sum_{j=1}^{l} = 1 - \tau + \tau = 1.$$

□

5. 12. Következmény. Egy valós affin tér egy részhalmaza akkor és csak akkor konvex, ha zárt a konvex kombinációk képzésére, azaz ha bármely véges pontsorozatával együtt annak minden konvex kombinációját is tartalmazza.

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbb{A}$ valós affin tér egy S részhalmazát. Ha S konvex, akkor $S = \text{conv}(S)$, s íggy az előző állítás miatt a véges S-beli pontsorozatok konvex kombinációi S-be tartoznak.

Megfordítva, ha S zárt a konvex kombinációk képzésére, akkor tetszőleges $A, B \in S$ pontok esetén A és B minden konvex kombinációja S-be tartozik, így $\overline{AB} \subset S$.

□

5.13. Tétel *(Carathéodory tétele)***.** Ha S nemüres ponthalmaz az $\mathbb{A}$ n-dimenziós valós affin térben, akkor S konvex burkának bármely pontja előállítható legfeljebb $n+1$ S-beli pont konvex kombinációjaként.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $P \in \text{conv}(S)$. Ekkor *5.11.* értelmében megadhatók $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok oly módon, hogy tetszőlegesen választott O origóval

$$(1) \qquad \overrightarrow{OP}= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}; \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \quad (1 \le i \le k), \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

írható. Ekkor P súlypontja az $(A_i, \lambda_i)_{i=1}^k$ súlyozott pontrendszernek, s ezért

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy k a legkisebb olyan pozitív egész, amellyel $\overrightarrow{OP}$ előállítható az (1) alakban. Ekkor a szereplő λ_i együtthatók mindegyike szükségképpen pozitív. Állítjuk, hogy $k \leq n+1$.
Indirekt módon folytatva okoskodásunkat, tegyük föl, hogy $k > n+1$. Ebben az esetben az $(A_i)_{i=1}^k$ pontsorozat affin értelemben függő, ezért a *2.5.*-ben mondottak alapján léteznek olyan nem csupa nulla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ való számok, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{PA_i} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Ekkor az $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ számok között kell negatívnak is lennie; legyen

$$\epsilon := \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \in \mathbb{R} \mid \alpha_i < 0, i \in \{1, \dots, k\} \right\}.$$

Világos, hogy $\epsilon > 0$.

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \epsilon\alpha_i) \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}\right) + \epsilon \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{OP} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} + \epsilon \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{OP} + \epsilon \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{PA_i}\right) \overset{(2),(3)}{=}$$
$$\overset{(2),(3)}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{OP} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{OP},$$

$\overrightarrow{OP}$ tehát a $\lambda_1 + \epsilon\alpha_1, \dots, \lambda_k + \epsilon\alpha_k$ skalárokkal lineárisan kombinálható az $\overrightarrow{OA_1}$ $, \dots, \overrightarrow{OA_k}$ vektorokból. Ez a lineáris kombináció konvex, hiszen

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \epsilon\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \epsilon \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

és minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén $\lambda_i + \epsilon\alpha_i \geq 0$ (ez utóbbi evidens, ha $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i < 0$ esetén pedig ϵ definíciója alapján $\epsilon \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \Leftrightarrow \epsilon\alpha_i \geq -\lambda_i \Leftrightarrow \lambda_i + \epsilon\alpha_i \geq 0$). Ugyanakkor a $\lambda_1 + \epsilon\alpha_1, \dots, \lambda_k + \epsilon\alpha_k$ skalárok valamelyike 0, hiszen van olyan $i \in \{1, \dots, k\}$ index, hogy $\epsilon = -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Ez azt jelenti, hogy P előáll k-nál kevesebb S-beli pont konvex kombinációjaként, ellentmondásban k minimalitásával.

□

5.14. Definíció.

(1) Valós affin térben *d-dimenziós* **szimplex**en $d+1$ affin értelemben független pont konvex burkát értjük. A 2-dimenziós szimplexeket *háromszögek*nek (*háromszög-lemez*eknek), a 3-dimenziós szimplexeket *tetraéderek*nek nevezzük.

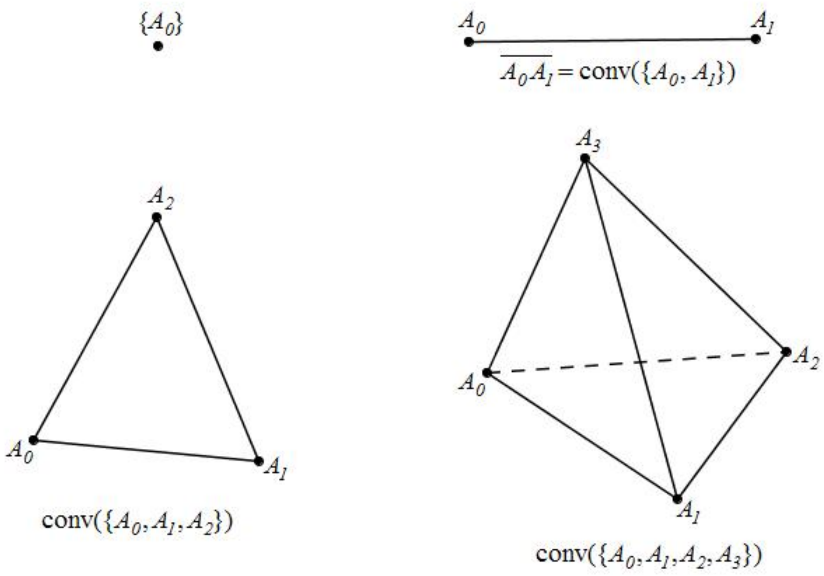
(2) Ha $\sigma := \operatorname{conv}(\{A_0, A_1, \ldots, A_d\})$ d-dimenziós szimplex, akkor az $A_0, A_1, \ldots, A_d$ pontokat a szimplex *csúcsai*nak hívjuk. Amennyiben $\{A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}\}$ $(k \in \{0, \ldots, d\})$ a σ szimplex csúcsainak egy részhalmaza, úgy a $\operatorname{conv}(\{A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}\})$ k-dimenziós szimplexeket σ egy *lapjá*nak mondjuk. Egy lap *valódi*, ha különbözik magától a szimplextől. A σ szimplex A_i csúcsával *szemközti lap* a $\operatorname{conv}\left(\left\{A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_d\right\}\right)$ szimplex (a $\widehat{\ }$ szimbólum azt jelenti, hogy az alatta lévő tag törlendő). Egy d-dimenziós szimplex olyan lapjait, amelyek $(d-1)$-dimenziós szimplexek, *határlapok*ként említjük, a határlapok unióját a szimplex *határá*nak nevezzük. A σ szimplex határát $\partial\sigma$-val jelöljük. A σ *szimplex belseje* $\operatorname{Int}\sigma := \sigma \setminus \partial\sigma$, ennek pontjai a szimplex *belső pontjai*. $\operatorname{Int}\sigma$-t *nyílt szimplex*nek is mondjuk.

Példák.

(1) A 0-dimenziós szimplexek az egypontú halmazok. A $\sigma_0 := \operatorname{conv}(\{A_0\}) = \{A_0\}$ szimplex határa $\partial\sigma_0 = \emptyset$, belseje $\operatorname{Int}\sigma_0 = \sigma_0 \setminus \partial\sigma_0 = \{A_0\}$.

(2) Az 1-dimenziós szimplexek a szakaszok: ha A_0 és A_1 egy valós affin tér különböző pontjai, akkor $\sigma_1 := \operatorname{conv}(\{A_0, A_1\}) = \overline{A_0A_1}$. $\partial\sigma_1 = \{A_0\} \cup \{A_1\} = \{A_0, A_1\}$, $\operatorname{Int}\sigma_1 = \overline{A_0A_1} \setminus \{A_0, A_1\}$. Így az 1-dimenziós szimplexek belsejének fogalma visszadja a szakaszok belsejének korábban (ld *5.4.*) bevezetett fogalmát.

Illusztráció



Megjegyzés. A szimplexek valós affin térbeli fogalma nem tévesztendő össze tetszőleges test fölötti affin térben bevezetett szimplex-fogalommal (v.ö. *2.13.*).

A korábbi, általánosabb szituációban – konvexitás híján – affin értelemben független pontok halmazára (a mostanival összevetve: a csúcsok halmazára) használtuk a szimplex elnevezést.

5.15. Állítás. Bármely halmaz konvex burka előáll azoknak a szimplexeknek az uniójaként, amelyeknek csúcsai az illető halmaz elemei.

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbb{A}$ valós affin tér egy S részhalmazát. Nyilvánvaló, hogy minden S-beli csúcsokkal rendelkező szimplex benne van $\mathrm{conv}(S)$-ben. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk egy $P \in \mathrm{conv}(S)$ pontot. Az *5.11.* állítás értelmében P megkapható véges sok S-beli pont konvex kombinációjaként; válasszunk egy olyan minimális elemszámú $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\} \subset S$ ponthalmazt, hogy $P \in \mathrm{conv}(\{A_0, A_1, \ldots, A_k\})$. Azt kell még belátnunk, hogy $(A_i)_{i=0}^{k}$ affin értelemben független. Ha ez nem volna így, akkor *2.5.* értelmében létezne olyan k-nál kisebb dimenziójú $\mathbb{B}$ affin altér, amelyre $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathbb{B}$ teljesül. Alkalmazva erre Caratheodory tételét, az következik, hogy P megkapható az $A_0, A_1, \ldots, A_k$ pontok közül legfeljebb k darabnak a konvex kombinációjaként, ellentmondásban a $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ elemszámának minimalitásával.

□

5.16. Állítás *(a síkfelbontás tétele).* Egy $\mathbb{A}$ valós affin sík minden l egyeneséhez léteznek olyan l *határegyenesű* **nyílt félsík**oknak nevezett nemüres, diszjunkt, konvex $\overset{\circ}{K_1}$ és $\overset{\circ}{K_2}$ halmazok úgy, hogy

(i) $\mathbb{A} \setminus l = \overset{\circ}{K_1} \cup \overset{\circ}{K_2}$;

(ii) $P \in \overset{\circ}{K_1}$ és $Q \in \overset{\circ}{K_2}$ esetén $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$.

Ha $l = \overleftrightarrow{AB}$ és $C \in \mathbb{A} \setminus l$, akkor a C pontot tartalmazó nyílt félsíkot az affin sík azon pontjai alkotják, amelyeknek az (A, B, C) affin bázisra vonatkozó 3. normált baricentrikus koordinátája pozitív – vagyis azok a $P \in \mathbb{A}$ pontok, amelyekre $\overline{PC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$ teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel az állítás második felében mondottaknak megfelelően, hogy $l = \overleftrightarrow{AB}$, s válasszunk egy $C \in \mathbb{A} \setminus l$ pontot. Ekkor (A, B, C) affin bázisa $\mathbb{A}$-nak. Legyen $\overset{\circ}{K_1}$ és $\overset{\circ}{K_2}$ $\mathbb{A}$ azon pontjainak halmaza, melyeknek (A, B, C)-re 3. normált baricentrikus koordinátája pozitív, illetve negatív. Rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ origót, ekkor

$$\overset{\circ}{K_1} = \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{OP} = \alpha\, \overrightarrow{OA} + \beta\, \overrightarrow{OB} + \gamma\, \overrightarrow{OC}; \alpha + \beta + \gamma = 1, \gamma > 0 \right\},$$
$$\overset{\circ}{K_2} = \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{OP} = \alpha\, \overrightarrow{OA} + \beta\, \overrightarrow{OB} + \gamma\, \overrightarrow{OC}; \alpha + \beta + \gamma = 1, \gamma < 0 \right\}.$$

(1) $\overset{\circ}{K_1}$ *és* $\overset{\circ}{K_2}$ *konvex részhalmaza* $\mathbb{A}$*-nak.* $\overset{\circ}{K_1}$ konvexségének igazolásához legyen

P és Q $\overset{\circ}{K}_1$ két tetszőleges pontja. Ezek helyzetvektorai a

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \beta_1 \overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}; \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \gamma_1 > 0, \text{ illetve}$$
$$\overrightarrow{OQ} = \alpha_2 \overrightarrow{OA} + \beta_2 \overrightarrow{OB} + \gamma_2 \overrightarrow{OC}; \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1, \gamma_2 > 0$$

alakban állíthatók elő. Bármely $\tau \in [0,1]$ esetén

$$(1-\tau) \overrightarrow{OP} + \tau \overrightarrow{OQ} =$$
$$= ((1-\tau)\alpha_1 + \tau\alpha_2) \overrightarrow{OA} + ((1-\tau)\beta_1 + \tau\beta_2) \overrightarrow{OB} + ((1-\tau)\gamma_1 + \tau\gamma_2) \overrightarrow{OC},$$

s itt $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$, $\tau \in [0,1]$ folytán $(1-\tau)\gamma_1 + \tau\gamma_2 > 0$, következésképpen a $\overline{PQ}$ tetszőleges pontja, s így maga a szakasz is, $\overset{\circ}{K}_1$-be tartozik. $\overset{\circ}{K}_2$ konvexsége analóg módon látható be.

(2) $\mathbb{A} \setminus l = \overset{\circ}{K}_1 \cup \overset{\circ}{K}_2$. Valóban, tekintsünk egy

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

helyzetvektorú P pontot. *5.6*(1) értelmében P akkor és csak akkor illeszkedik az l egyenesre, ha $\gamma = 0$; így

$$P \in \mathbb{A} \setminus l \iff \gamma > 0 \text{ vagy } \gamma < 0 \iff P \in \overset{\circ}{K}_1 \text{ vagy } P \in \overset{\circ}{K}_2 \iff$$
$$\iff P \in \overset{\circ}{K}_1 \cup \overset{\circ}{K}_2\,.$$

(3) $P \in \overset{\circ}{K}_1$ *és* $P \in \overset{\circ}{K}_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$. P és Q helyzetvektora előállítható az

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \beta_1 \overrightarrow{OB} + \gamma_1 \overrightarrow{OC}; \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \gamma_1 > 0, \text{ illetve}$$
$$\overrightarrow{OQ} = \alpha_2 \overrightarrow{OA} + \beta_2 \overrightarrow{OB} + \gamma_2 \overrightarrow{OC}; \quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1, \gamma_2 > 0$$

alakban. Ha $\tau := \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}$, akkor $\tau \in]0,1[$. Tekintsük a $\overline{PQ}$ szakasz $\overrightarrow{OR} = (1-\tau) \overrightarrow{OP} + \tau \overrightarrow{OQ}$ helyzetvektorú R pontját! Ennek az (A,B,C) affin bázisra vonatkozó 3. normált baricentrikus koordinátája

$$(1-\tau)\gamma_1 + \tau\gamma_2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}\gamma_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}\gamma_2 = 0,$$

így (ismét *5.6.*(1) alapján) $R \in l$, következésképpen $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$.

□

Megállapodás. Egy nyílt félsíknak és a határegyenesének az unióját *félsík*nak nevezzük. Ha két pont ugyanabban az l határegyenesű nyílt félsíkban van, akkor azt mondjuk, hogy a pontok az l egyenes *ugyanazon oldalán* vannak, ha pedig két pont különböző l határegyenesű félsíkban van, akkor az l egyenes *ellentétes oldalain* elhelyezkedő pontokról beszélünk.

5.17. Definíció. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ valós affin tér. Megadva egy $A \in \mathbb{A}$ pontot és V-nek egy $v \neq \mathbf{0}$ vektorát, a

$$\left\{P \in \mathbb{A} \,|\, \overrightarrow{AP} = \lambda v, \lambda \geq 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{A} \,|\, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda v, \lambda \geq 0\right\}$$

ponthalmazt A kezdőpontú, v *irányvektorú* **félegyenes**nek nevezzük ($O \in \mathbb{A}$ tetszőlegesen rögzített origó).

Megjegyzések.

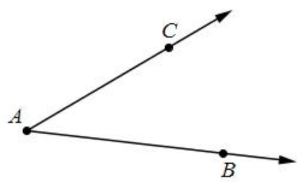
(1) Minden egyenes előáll két közös kezdőpontú félegyenes uniójaként, ezek irányvektorai egymás ellentettjei.

(2) Ha A és B különböző pontok, akkor létezik egy és csak egy A kezdőpontú, a B ponton átmenő félegyenes; ennek egy irányvektora $\overrightarrow{AB}$. Erre a félegyenesre az $\overrightarrow{AB}$ jelölést használjuk. Tehát:

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ P \in \overleftrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{AP} = \lambda\, \overrightarrow{AB}, \lambda \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ P \in \overleftrightarrow{AB} \,|\, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\, \overrightarrow{AB}, \lambda \geq 0 \right\}.$$

5.18. Definíció.

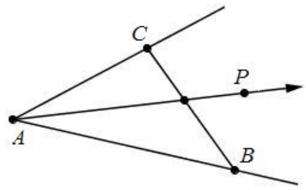
(1) Egy valós affin térben két, nem feltétlenül különböző félegyenes unióját *szögvonal*nak, röviden **szög**nek nevezzük. A félegyeneseket ilyenkor a szög *szár*ainak, közös kezdőpontjukat a szög *csúcs*ának hívjuk. Ha a szárak egybeesnek, *zérusszög*ről (vagy nullszögről) szólunk, ha pedig egy egyenest alkotnak, *egyenesszög*ről beszélünk. Egy szöget *valódi*nak mondunk, ha nem zérusszög és nem is egyenesszög. Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ szárakkal rendelkező szögre a $BAC\sphericalangle$ jelölést használjuk: $BAC\sphericalangle := \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$.



(2) Egy valós affin síkban tekintett valódi $BAC\sphericalangle$ *belsejé*n az $\overleftrightarrow{AB}$ határegyenesű, s a C pontot tartalmazó nyílt félsík, valamint az $\overleftrightarrow{AC}$ határegyenesű és a B pontot tartalmazó nyílt félsík metszetét értjük, s rá az $\mathrm{Int}BAC\sphericalangle$ jelölést használjuk. $\mathrm{Int}BAC\sphericalangle$ pontjait a szög *belső pontjai*nak hívjuk. Ha a szög síkjában egy pont nem belső pont és a szögvonalra sem illeszkedik, akkor a szög *külső pontjá*nak mondjuk.

5.19. Következmény. A $BAC\sphericalangle = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ szöget tartalmazó valós affin sík egy pontja akkor és csak akkor belső pontja a szögnek, ha az (A, B, C) affin bázisra vonatkozó 2. és 3. normált baricentrikus koordinátája pozitív. Az $ABC\triangle := \mathrm{conv}\,(\{A, B, C\})$ háromszög belső pontjainak és csakis ezeknek mindhárom (A, B, C)-re vonatkozó normált baricentrikus koordinátája pozitív.

5.20. Állítás *(a „crossbar-tétel”)*. Legyen adva egy valós affin síkon egy valódi $BAC\sphericalangle$. Ha P belső pontja a szögnek, akkor az $\overrightarrow{AP}$ félegyenes belső pontban metszi a $\overline{BC}$ szakaszt.



Bizonyítás. Legyenek a P pont normált baricentrikus koordinátái az (A, B, C) affin bázisra vonatkozóan α, β, γ. Ekkor egy O pont rögzítése után

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\, \overrightarrow{OA} + \beta\, \overrightarrow{OB} + \gamma\, \overrightarrow{OC}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

írható, s mivel feltételünk értelmében $P \in \mathrm{Int} BAC\sphericalangle$, az előző következményre tekintettel itt $\beta > 0$ és $\gamma > 0$. Így $1 - \alpha = \beta + \gamma > 0$, s képezhető a $\tau := \frac{1}{1-\alpha}$ *pozitív* skalár. Tekintsük az

$$\overrightarrow{OQ} := \overrightarrow{OA} + \tau\, \overrightarrow{AP}$$

helyzetvektorú Q pontot. $\tau > 0$ miatt $Q \in \overrightarrow{AP}$. Másrészt

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \tau \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \right) = (1 + \alpha\tau - \tau)\, \overrightarrow{OA} + \beta\tau\, \overrightarrow{OB} + \gamma\tau\, \overrightarrow{OC},$$

így Q-nak az (A, B, C)-re vonatkozó 1. normált baricentrikus koordinátája

$$1 + \alpha\tau - \tau = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1 - \alpha + \alpha - 1}{1-\alpha} = 0,$$

következésképpen $Q \in \overleftrightarrow{BC}$ (*5.6.*(1)). Így

$$\overrightarrow{OQ} = \beta\tau\, \overrightarrow{OB} + \gamma\tau\, \overrightarrow{OC} = \frac{\beta}{1-\alpha}\, \overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{1-\alpha}\, \overrightarrow{OC},$$

s mivel itt

$$\frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{\gamma}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1, \qquad \frac{\beta}{1-\alpha} > 0 \qquad \frac{\gamma}{1-\alpha} > 0,$$

az is igaz, hogy $Q \in \mathrm{Int}\, \overline{BC}$.

$\square$

5.21. Állítás *(a térfelbontás tétele)* **és definíció.** Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ $n > 1$ dimenziós valós affin tér, H pedig hipersíkja $\mathbb{A}$-nak. Léteznek olyan nemüres, diszjunkt, konvex $\overset{\circ}{K}_1$ és $\overset{\circ}{K}_2$ halmazok, hogy

(i) $\mathbb{A} \setminus H = \overset{\circ}{K}_1 \cup \overset{\circ}{K}_2$;

(ii) $P \in \overset{\circ}{K}_1$ és $Q \in \overset{\circ}{K}_2$ esetén $\overline{PQ} \cap H \neq \emptyset$.

$\overset{\circ}{K}_1$-t és $\overset{\circ}{K}_2$-t H-val mint *határsík*kal rendelkező **nyílt féltereknek** mondjuk, H-val képzett uniójukat **féltereknek** (olykor *zárt féltereknek*) nevezzük.

Bizonyítás. Az okoskodás teljesen analóg az *5.16.* igazolásakora alkalmazott gondolatmenettel. Legyen $(A_i)_{i=0}^{n-1}$ affin független pontcsaládja H-nak, s tekintsünk egy $A_n \in \mathbb{A} \setminus H$ pontot (ilyen pont $\dim \mathbb{A} = n$ folytán létezik). Ekkor $(A_i)_{i=0}^{n}$ affin bázisa $\mathbb{A}$-nak. Rögzítve egy $O \in \mathbb{A}$ origót, legyen

$$\overset{\circ}{K}_1 := \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}; \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_n > 0 \right\};$$

$$\overset{\circ}{K}_2 := \left\{ P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}; \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_n < 0 \right\}.$$

Világos, hogy ekkor $\overset{\circ}{K}_1 \neq \emptyset$ (például $A_n \in \overset{\circ}{K}_1$), $\overset{\circ}{K}_2 \neq \emptyset$ és $\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$. $\overset{\circ}{K}_1$ és $\overset{\circ}{K}_2$ konvexsége, valamint (i) és (ii) teljesülése ugyanúgy ellenőrizhető, mint korábban.

□

5.22. Állítás *(az n-dimenziós szimplexek szerkezete)*. Legyen $(\mathbb{A}, V, \Phi)$ n-dimenziós valós affin tér,

$$\sigma := \operatorname{conv}(\{A_0, A_1, \ldots, A_n\})$$

pedig n-dimenziós szimplex $\mathbb{A}$-ban. Minden $i \in \{0, \ldots, n\}$ index esetén tekintsük az A_i csúccsal szemközti lapot tartalmazó $H_i := \left\langle \left\{ A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_n \right\} \right\rangle$ hipersíkot, s jelölje K_i^+ a H_i félsíkú, az A_i pontot tartalmazó (zárt) félteret. Ha $\overset{\circ}{K_i^+} := K_i^+ \setminus H_i$ $(i \in \{0, \ldots, n\})$ és $c^+(\{A_0, \ldots, A_n\})$ az $A_0, \ldots, A_n$ pontok összes pozitív együtthatós konvex kombinációinak halmaza, akkor

(i) $\sigma = \bigcap_{i=0}^{n} K_i^+$;

(ii) $\operatorname{Int}\sigma = \bigcap_{i=0}^{n} \overset{\circ}{K_i^+} = c^+(\{A_0, \ldots, A_n\})$.

A bizonyítást mellőzzük.

5.23. Definíció.

(1) Valós affin tér egy nemüres konvex halmazának *dimenzió*ján a halmaz affin burkának dimenzióját értjük.

(2) Tegyük fel, hogy $\mathbb{A}$ $n > 1$ dimenziós valós affin tér.

(a) Egy nemüres $S \subset \mathbb{A}$ halmaznak egy $H \subset \mathbb{A}$ hipersík *támaszsík*ja, ha S benne van a H határsíkú (zárt) félterek egyikében, és nincs olyan S-et tartalmazó féltér, amelyet az előbbi féltér valódi módon tartalmaz. S *támaszféltere*n olyan S-et tartalmazó félteret értünk, amelynek határsíkja támaszhipersík.

(b) $\mathbb{A}$-nak egy részhalmazát *konvex poliéder*nek mondjuk, ha előállítható véges sok (zárt) $\mathbb{A}$-beli féltér metszeteként.

(c) Véges sok pont konvex burkát **konvex politop**nak nevezzük, a pontokat ilyenkor *definiáló pontok*ként is említjük. Definiáló pontok egy családját *minimális*nak mondjuk, ha a pontok egyike sincs benne a többi konvex burkában.

(d) Egy n-dimenziós konvex politop egy támaszhipersíkját *lényeges támaszhipersík*nak nevezzük, ha tartalmazza a politop n számú, affin értelemben független definiáló pontját. A lényeges támaszhipersíkokhoz tartozó támaszféltereket szintén lényegeseknek mondjuk. A konvex politopnak és lényeges támaszhipersíkjainak metszeteit a politop *oldallap*jainak hívjuk (ezek $(n-1)$-dimenziós konvex politopok), az oldallapok oldallapjait $(n-2)$*-dimenziós él*ekként említjük. Az eljárást folytatva a $(k+1)$-dimenziós élek oldallapjait k*-dimenziós él*eknek, végül a 0-dimenziós éleket *csúcs*oknak nevezzük.

5.24. Megjegyzések.

(1) Ha $A_0, A_1, \ldots, A_d$ egy valós affin tér affin független pontjai, akkor

$$\dim \operatorname{conv}\left(\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}\right) = \dim \left\langle \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}\right\rangle,$$

tehát egy korábban (*5.14.*) dd-dimenziósnak *mondott* szimplex d-dimenziós a mostani definíció szerinti értelemben is.

(2) Egy véges dimenziós valós affin tér affin alterei triviális példák konvex poliéderre. *5.22.*-ből következik, hogy n-dimenziós valós affin térben minden n-dimenziós szimplex konvex poliéder.

(3) „Konvex politop” helyett gyakran egyszerűen „politop”-ról szólunk. A szimplexek nyilvánvalóan speciális politopok. A 2-dimenziós politopokat *konvex sokszögek*nek (vagy *sokszöglemez*eknek) nevezzük. A 3-dimenziós politopok azok az alakzatok, amelyeket az elemi geometria szokásos szóhasználatában konvex poliéderekként szokás említeni; az általunk bevezetett poliéderfogalom ennél jóval általánosabb.

(4) A politopok oldallapjainak, éleinek és csúcsainak fogalma szimplexek esetén visszaadja a korábban bevezetett fogalmat. A politopok csúcsai az 1-dimenziós élet végpontjai. A csúcspontokat a politop többi pontjával szemben az a tulajdonság is kitünteti, hogy egy politop minden csúcstól különböző pontjához – és csakis ezekhez – létezik olyan, a politopba eső szakasz, amely az illető pontot belső pontként tartalmazza.

(5) A konvex poliéderek oldallapjai, élei és csúcsai a politopoknál látott mintára értelmezhetők. A csúcspontok a konvex poliéder olyan pontjaiként jellemezhetők, amelyekhez *nem létezik* a pontot belső pontként tartalmazó, a konvex poliéder által tartalmazott szakasz.

5.25. Definíció. n-dimenziós valós affin tér egy ponthalmazát *korlátos*nak nevezzük, ha létezik azt tartalmazó n-dimenziós szimplex.

5.26. Állítás. n-dimenziós valós affin térben minden n-dimenziós politop megkapható a lényeges támaszféltereinek metszeteként, s így konvex poliéder. Megfordítva, bármely korlátos konvex poliéder egyenlő a csúcsai halmazának konvex burkával. Ily módon *a politopok osztálya egybeesik a korlátos konvex poliéderek osztályával.*

5. 27. Megjegyzés. Legyen $n \geq 3$ egész szám, s tekintsük egy valós affin tér különböző $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontjait. Azt mondjuk, hogy

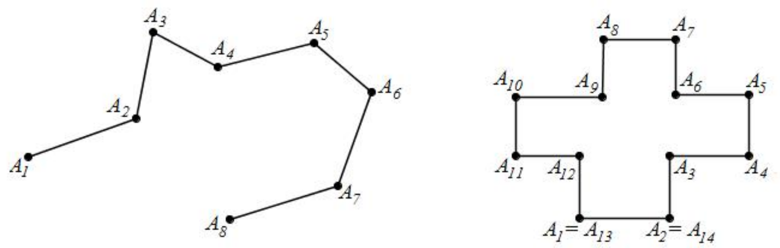
$$\overline{A_1A_2..A_n} := \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \cdots \cup \overline{A_{n-1}A_n}$$

töröttvonal, ha

(1) a benne szereplő szakaszok közül bármely kettőnek diszjunkt a belseje;

(2) az egymáshoz csatlakozó $\overline{A_iA_{i+1}}$ és $\overline{A_{i+1}A_{i+2}}$ szakaszok nem illeszkednek egy egyenesre ($1 \leq i \leq n-2$, ha $A_n \neq A_1$; $1 \leq i \leq n$, ha $A_n = A_1$, s ilyenkor megállapodunk abban, hogy $A_{n+1} := A_1$, $A_{n+2} := A_2$).

A töröttvonalat alkotó szakaszokat a töröttvonal *oldalai*nak is hívjuk. *Nem záródó*, illetve *záródó* töröttvonalról beszélünk aszerint, amint $A_n \neq A_1$, illetve $A_n = A_1$. A nem záródó esetben az A_1 és az A_n pontot *végpont*okként, az $A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontokat *töréspont*okként említjük. Ha a töröttvonal záródó, az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat *csúcspont*oknak mondjuk.



Nem záródó, illetve záródó töröttvonal

A *valós affin sík*on adott záródó töröttvonalat *sokszögvonal*nak nevezzük. Azokat az oldalaktól különböző szakaszokat, amelyek egy sokszögvonal két csúcsát kötik össze, *átló*knak hívjuk. Ha egy sokszögvonal oldalainak és csúcsainak közös száma n, akkor n-*szögvonal*ról, speciálisan az $n = 3$ és $n = 4$ esetben *háromszögvonal*ról, illetve *négyszögvonal*ról (röviden *háromszög*ről és *négyszög*ről) beszélünk és így tovább.

5.28. Definíció. Legyen adva a 3-dimenziós valós affin térben egy 3-dimenziós politop. Nevezzük a politop (kétdimenziós) oldallapjainak unióját *politopfelület*nek! Azt mondjuk, hogy *csomópont*oknak, *vonal*aknak és *tartomány*oknak nevezett pontok, illetve részhalmazok *hálózat*ot alkotnak egy politopfelületen, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) minden csomópont csúcsa, minden vonal (1-dimenziós) éle a politopnak; a tartományok oldallapok, vagy oldallapok uniói;

(2) minden csomópont (egy vagy több) vonal végpontjaként lép fel;

(3) bármely két vonalnak diszjunkt a belseje;

(4) bármely két csomóponthoz létezik olyan vonalak alkotta töröttvonal, amelynek az illető csomópontok a végpontjai;

(5) egyetlen csomópont és a politopfelület, mint tartomány, hálózatot alkot; ezt *primitív hálózat*nak mondjuk;

(6) a politop összes lapjai, mint tartományok, összes 1-dimenziós élei, mint vonalak és összes csúcsai, mint csomópontok hálózatot alkotnak; ezt *teljes hálózat*nak nevezzük.

Ha egy politopfelületen adott hálózathoz c_2 számú tartomány, c_1 számú vonal és c_0 számú csomópont tartozik, akkor a

$$c_2 - c_1 + c_0$$

számot a hálózat **Euler-karakterisztiká**jának nevezzük.

5.29. Definíció és lemma. Ha egy politopfelületen adott hálózathoz további élet csatolunk oly módon, hogy

(1) az új él egyik végpontja, de csakis az egyik, csomópontja a hálózatnak vagy

(2) a csatolt él két meglévő csomópontot köt össze, akkor azt mondjuk, hogy első, illetve második típusú *bővítés*t hajtottunk végre. *Bővítés során az Euler-karakterisztika nem változik.*

Bizonyítás. Legyen az adott hálózat tartományainak, vonalainak, illetve csomópontjainak száma c_2, c_1, illetve c_0.

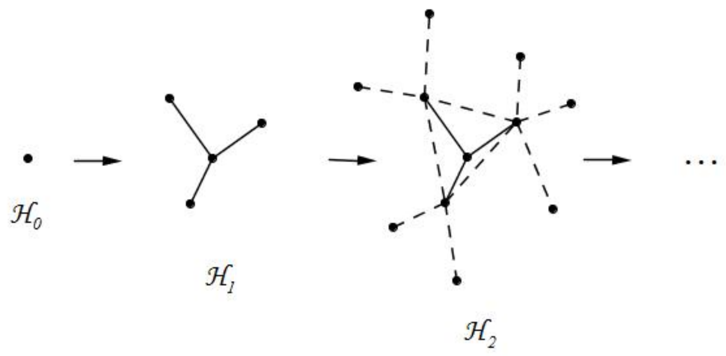
(1) 1. típusú bővítés során c_2 nem változik, c_1 és c_0 1-gyel nő, így $c_2 - (c_1 + 1) + (c_0 + 1) = c_2 - c_1 + c_0$ miatt az Euler-karakterisztika változatlan.

(2) 2. típusú bővítésnél c_0 nem változik, c_1 1-gyel nő. Ugyancsak 1-gyel nő c_2 is, mert az *5.28.*-beli (4) feltétel miatt az új él csatolásával vonalakból összetett záródó töröttvonalhoz jutunk a politopfelületen, amely egy újabb tartományt határoz meg. Mivel $(c_2 + 1) - (c_1 + 1) + c_0 = c_2 - c_1 + c_0$, az Euler-karakterisztika most sem változik.

□

5.30. Lemma. Egy politopfelület teljes hálózata megkapható egy primitív hálózatból véges számú 1. és 2. típusú bővítés eredményeként.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}_0$ az adott primitív hálózat, amelyet egyetlen A csúcs, mint csomópont, s az összes oldallap uniója, mint tartomány alkot. Csatoljuk $\mathcal{H}_0$-hoz mindazokat az éleket, amelyeknek egyik végpontja az A pont. Ekkor 1. típusú bővítést alkalmaztunk; a nyert hálózatot jelölje $\mathcal{H}_1$. (A $\mathcal{H}_1$-beli új csomópontok mintegy „egy lépésre vannak” A-tól.) Bővítsük ezután a $\mathcal{H}_1$-et oly módon, hogy csatoljuk hozzá mindazokat az éleket, amelyeknek egyik vagy mindkét végpontja $\mathcal{H}_1$-beli csomópont, de maga nem tartozik $\mathcal{H}_1$-be. Az így kapott hálózatot jelölje $\mathcal{H}_2$. (A $\mathcal{H}_2$-beli új csomópontok „két lépésre vannak” A-tól.)



A $\mathcal{H}_2$ hálózatot szintén az előbbi módon bővítjük, s az eljárást mindaddig folytatjuk, amíg az élek el nem fogynak. Világos, hogy így – véges számú lépésben – eljutunk a teljes hálózathoz.

$\square$

5.31. Tétel *(az Euler-féle poliédertétel)***.** Ha a háromdimenziós valós affin térben egy háromdimenziós politop oldallapjainak száma l, 1-dimenziós éleinek száma e, csúcsainak száma pedig c, akkor

$$l - e + c = 2,$$

azaz *egy politopfelület teljes hálózatának Euler-karakterisztikája 2.*

Bizonyítás. Tekintsük a politopfelület egy primitív hálózatát. Ennek Euler-karakterisztikája $1 - 0 + 1 = 2$. Az *5.30.* lemma értelmében ebből a primitív hálózatból véges számú 1. és 2. típusú bővítéssel megkapható a politopfelület teljes hálózata, *5.29.* pedig biztosítja, hogy a bővítés során az Euler-karakterisztika nem változik. Mivel a teljes hálózat l tartományt, e vonalat és c csomópontot tartalmaz, következik, hogy $l - c + e = 2$.

$\square$

5.32. Megjegyzések.

(1) Euler tétele kiterjeszthető az n-dimenziós valós affin tér n-dimenziós politopjaira is. Ha c_k jelöli egy ilyen politop k-dimenziós éleinek számát ($0 \leq k \leq n-1$), akkor

$$c_0 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^{n-1} c_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

röviden

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k = 1 + (-1) + n - 1.$$

Ez a fontos eredmény H. Poincaré-től származik.

(2) Az Euler-Poincaré formula levezetése során a politopok tulajdonságai közül viszonylag keveset használunk ki, így sejthető, hogy a tétel nagy mértékben általánosítható. Ha például egy politopfelületet gömbfelületté „fújunk fel" (bijektív, s inverzével együtt folytonos leképezéssel gömbfelületre képezzük le), s eközben az élek görbeívekké, a lapok felületdarabokká deformálódnak, a gömbfelületen adódó hálózat Euler-karakterisztikája változatlanul kettő lesz.

Megállapodás. Háromdimenziós politop esetén a kétdimenziós oldallapokat és az egydimenziós éleket egyszerűen *lap*okként, illetve *él*ekként említjük.

5.33 Definíció. Egy háromdimenziós politopot (p, q)-*típusú kvázireguláris politop*nak nevezünk, ha valamennyi lapjának p számú éle van, és minden csúcsában q számú él fut össze.

5.34. Tétel. A kvázireguláris politopok *lehetséges* típusait, ezek elnevezését, valamint l lapszámát, e élszámát és c csúcsszámát a következő táblázat tartalmazza:

Típus	p	q	l	e	c
tetraéder	3	3	4	6	4
oktaéder	3	4	8	12	6
ikozaéder	3	5	20	30	12
hexaéder	4	3	6	12	8
dodekaéder	5	3	12	30	20

Bizonyítás.

1. Mivel minden él két laphoz tartozik, a lapok élszámát összegezve, azaz a p élszámot az l lapszámmal szorozva, az élek számának kétszeresét kapjuk:

$$pl = 2e. \tag{1}$$

Másrészt minden él két csúcsot köt össze, ezért a csúcsokba futó élek számát összegezve, azaz q-nak és a c csúcsszámnak a szorzatát képezve, szintén az éleszám kétszeresét kapjuk:

$$qc = 2e. \tag{2}$$

Figyelembe véve még a

$$l - e + c = 2 \tag{3}$$

Euler-relációt, p és q segítségével l, e és c kifejezhető: $e = \frac{pl}{2}$, $qc = pl \Longrightarrow c = \frac{pl}{q}$, így

$$l - \frac{pl}{2} + \frac{pl}{q} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} l &= \frac{4q}{2p+2q-pq}, \\ e &= \frac{2pq}{2p+2q-pq}, \\ c &= \frac{4p}{2p+2q-pq}. \end{aligned}$$

2. (1)-ből és (2)-ből az $l = \frac{2e}{p}$, illetve $c = \frac{2e}{q}$ kifejezést (3)-ba helyettesítve, majd $2e$-vel osztva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

Innen $\frac{1}{e} > 0$ miatt az

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2p + 2q > pq \quad \Leftrightarrow \quad pq - 2p - 2q < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - 2p + pq - 2q < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(2-p) + q(2-p) < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad (2-p)(2-q) < 4 \quad \Leftrightarrow \quad (p-2)(q-2) < 4 \end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel $p \geq 3$ és $q \geq 3$, következik, hogy $(p-2)(q-2) \in \{1, 2, 3\}$. Így p és q értékeire a következő lehetőségek adódnak:

$p-2$	$q-2$	p	q
1	1	3	3
1	2	3	4
1	3	3	5
2	1	4	3
3	1	5	3

tehát egy kvázireguláris politop csakis $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$ és $(5,3)$ típusú lehet. Az egyes típusok esetén l-re, e-re és c-re adódó értékek kiszámíthatók az **1.**-ben levezetett formulák alapján; így megkapjuk a táblázat összes adatát.

□

Megjegyzés. A most igazolt tétel semmit sem szól a kvázireguláris politopok lehetséges típusainak *létezés*éről; erre a kérdésre később, az euklideszi geometria keretei között fogunk visszatérni.

II. EUKLIDESZI GEOMETRIA

6. Metrikus terek és euklideszi vektorterek

6.1. Emlékeztető.

(1) Legyen M nemüres halmaz. Egy

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto d(a,b)$$

függvényt M-en adott *távolságfüggvény*nek nevezzük, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

(M1) $\forall a \in M\colon d(a,a) = 0$;

(M2) $d(a,b) > 0$, ha $a \neq b$;

(M3) $d(a,b) = d(b,a)$ (*szimmetria*);

(M4) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Egy távolságfüggvénnyel ellátott halmazt (esetünkben az (M,d) párt) **metrikus tér**nek nevezünk, elemeit *pont*okként említjük.

Példák.

(a) Ha $M \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nemüres halmaz, és bármely $a, b \in M$ esetén $d(a,b) := |a-b|$, akkor d távolságfüggvény, amelyet a *szokásos* $\mathbb{R}$-beli távolságfüggvénynek hívunk.

(b) Legyen $n \in \mathbb{N}^*$, s legyen M tetszőleges nemüres részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Ha $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in M$ és $d(a,b) := \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, akkor d távolságfüggvény, amelyet az M-en adott *euklideszi távolságfüggvény*nek mondunk (ez $n = 1$ esetén az (a)-beli példára redukálódik).

(2) Legyen M metrikus tér a d távolságfüggvénnyel, s tekintsük M-nek egy nemüres A részhalmazát. Az A részhalmaz *átmérő*jén a

$$\mathrm{diam} A := \sup\left\{d(a,b) \in \mathbb{R} \mid (a,b) \in A \times A\right\}$$

bővített valós számot értjük. Ha $\mathrm{diam} A < \infty$, akkor az A halmazt *korlátos*nak mondjuk. Egy $p \in M$ pont A-tól való *távolság*a

$$\mathrm{dist}(p,A) := \inf\left\{d(p,a) \in \mathbb{R} \mid a \in A\right\}.$$

(3) Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) egy-egy metrikus tér, s tekintsünk egy $f\colon M_1 \to M_2$ leképezést.

(a) Azt mondjuk, hogy f **folytonos** egy $a \in M_1$ *pontban, ha minden* $\epsilon > 0$ *valós számhoz van olyan* $\delta > 0$ *valós szám, hogy*

$$p \in M_1 \text{ és } d_1(a,p) < \delta \quad \text{esetén} \quad d_2\left(f(a), f(p)\right) < \epsilon.$$

Ha ez a tulajdonság minden $a \in M_1$ pontban teljesül, akkor f-et M_1*-en folytonos*nak, vagy M_1 M_2-be való *folytonos leképezés*ének nevezzük.
(b) f-et **egyenletesen folytonos**nak mondjuk M_1-en, ha *minden* $\epsilon > 0$ *valós számhoz létezik olyan* $\delta > 0$ *valós szám, hogy*

$$\textit{ha } p, q \in M_1 \textit{ és } d_q(p, q) > \delta, \textit{ akkor } d_2\left(f(p), f(q)\right) < \epsilon.$$

Tulajdonságok.
(a) Az $f\colon M_1 \to M_2$ leképezés akkor és csak akkor folytonos egy $a \in M_1$ pontban, ha minden olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ M_1-beli sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ teljesül, azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ (*„átviteli elv”*).
(b) Ha az $f\colon M_1 \to M_2$ leképezés egyenletesen folytonos, akkor f M_1 minden pontjában folytonos.

(4) Az (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér közötti $f\colon M_1 \to M_2$ leképezést k-*Lipschitz-leképezés*nek mondjuk, ha van olyan k pozitív valós szám, hogy

$$\forall a, b \in M_1\colon d_2\left(f(a), f(b)\right) \le k d_1(a, b);$$

speciálisan $k < 1$ esetben *kontrakció*ról (*zsugorítás*ról) beszélünk. *Ha f k-Lipschitz-leképezés, akkor f egyenletesen folytonos.* – Valóban, tetszőlegesen megadva egy ϵ pozitív valós számot, legyen $\delta := \frac{\epsilon}{k+1}$. Ekkor

$$d_1(a, b) < \delta \quad\Rightarrow\quad d_2\left(f(a), f(b)\right) \le k d_1(a, b) < \frac{k}{k+1}\epsilon < \epsilon,$$

ami f egyenletes folytonosságát jelenti.

(5) Legyen M metrikus tér a d távolságfüggvénnyel. Egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ M-beli sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezzük, ha minden ϵ pozitív valós számhoz megadható $n_0 \in \mathbb{N}^*$ oly módon, hogy ha $m, n \ge n_0$, akkor $d(a_m, a_n) < \epsilon$. Egy metrikus teret **teljes**nek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.
Példák. $\mathbb{R}^n$, ellátva az euklideszi távolságfüggvénnyel, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljes metrikus tér. A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza a szokásos $\mathbb{R}$-beli távolságfüggvénnyel ellátva nem teljes metrikus tér.

6.2. Lemma *(a kontrakciós elv – vagy a Banach-féle fixponttétel)***.** *Egy teljes metrikus tér minden kontrakciójának létezik egy és csak egy fixpontja.* Nevezetesen: ha M teljes metrikus tér és $f\colon M \to M$ kontrakció, akkor létezik egyetlenegy olyan $a \in M$ pont, hogy $f(a) = a$, s ez megkapható tetszőleges $a_0 \in M$ pontból kiindulva az $a = \lim_{n\to\infty} f^n(a_0)$ határértékként ($f^n := f \circ \cdots \circ f$ (n tényező)).

Bizonyítás. Mivel f kontrakció, van olyan $\lambda \in]0, 1[$ valós szám, hogy tetszőleges $p, q \in M$ esetén $d(f(p), f(q)) \le \lambda d(p, q)$. Egy $a_0 \in M$ pont kiválasztása után legyen

$$a_1 := f(a_0), \quad a_2 := f(a_1) = f^2(a_0), \quad \ldots, \quad a_n := f(a_{n-1}) = f^n(a_0).$$

Állítjuk, hogy ekkor

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*: \quad d(a_{n+1}, a_n) \le \lambda^n d(a_1, a_0).$$

Valóban, ez igaz $n = 1$-re, hiszen

$$d(a_2, a_1) = d(f(a_1), f(a_0)) \leq \lambda d(a_1, a_0),$$

s ha föltesszük, hogy $d(a_n, a_{n-1}) \leq \lambda^{n-1} d(a_1, a_0)$ (indukció), akkor

$$d(a_{n+1}, a_n) = d(f(a_n), f(a_{n-1})) \leq \lambda d(a_n, a_{n-1}) \leq \lambda^n d(a_1, a_0).$$

Legyen ezek után $m, n \in \mathbb{N}^*$; $m > n$. Mivel

$$\begin{gathered}
d(a_n, a_m) \overset{\text{(M4)}}{\leq} d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_m) \leq \\
\leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + \cdots + d(a_{m-1}, a_m) \overset{(*)}{\leq} \\
\overset{(*)}{\leq} (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1}) d(a_1, a_0) = \lambda^n (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-n+1}) d(a_1, a_0) = \\
= \lambda^n \frac{\lambda^{m-n} - 1}{\lambda - 1} d(a_1, a_0) = \frac{\lambda^m - \lambda^n}{\lambda - 1} d(a_1, a_0) = \\
= \frac{\lambda^n - \lambda^m}{1 - \lambda} d(a_1, a_0) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(a_1, a_0),
\end{gathered}$$

következik, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat.
Így (M, d) teljessége folytán létezik az

$$a := \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f^n(a_0)$$

határérték. Mivel f kontrakció, az előrebocsátottak szerint f egyenletesen folytonos, s ezért – speciálisan – folytonos. Így az „átviteli elv” alkalmazásával

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = a$$

adódik, a tehát fixpont. Ha b további fixpontja f-nek, akkor

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b);$$

innen $0 \leq (\lambda - 1) d(a, b)$, ami $\lambda - 1 < 0$ és $d(a, b) \geq 0$ folytán csak úgy lehetséges, hogy $d(a, b) = 0$. Ez utóbbiból (M2) alapján $a = b$ következik.

□

6.3. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) metrikus tér. Egy $f\colon M_1 \to M_2$ leképezést *izometriá*nak nevezünk, ha

(1) *távolságtartó*, azaz minden $a, b \in M_1$-re $d_2(f(a), f(b)) = d_1(a, b)$ teljesül;

(2) *szürjektív*.

Két metrikus teret *izometrikus*nak mondunk, ha létezik közöttük izometria.

6.4. Megjegyzés. A távolságtartásból adódóan minden izometria injektív, s így – tekintettel a megkövetelt szürjektívségre – bijektív. Speciálisan egy metrikus teret önmagára képező izometriák csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve, amelyet a metrikus tér *izomeriacsoport*jának nevezünk. Egy M metrikus tér izometriacsoportjára az $I(M)$ jelölést használjuk.

6.5. Definíció. Legyen (M_1, d_1) és (M_2, d_2) legalább két pontot tartalmazó metrikus tér. Azt mondjuk, hogy egy $f\colon M_1 \to M_2$ leképezés ***hasonlóság*** M_1 és M_2 között, ha

(1) *aránytartó*: létezik olyan λ pozitív valós szám, hogy

$$\forall (a,b) \in M_1 \times M_2 : \quad d_2(f(a), f(b)) = \lambda d_1(a,b);$$

(2) *szürjektív*.

A λ pozitív valós számot az f ***hasonlóság arányá***nak hívjuk.

6.6. Megjegyzések.

(1) Miként az izometriák, a hasonlóságok is bijektív leképezések. Egy λ arányú hasonlóság inverze $\frac{1}{\lambda}$ arányú hasonlóság.

(2) Egy M metrikus teret önmagára képező hasonlóságok csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve; ezt a csoportot M ***hasonlósági csoport***jának nevezzük és $\mathrm{Sim}(M)$-mel jelöljük. Ha $\mathrm{Sim}(M)$ minden eleméhez hozzárendeljük az arányát, akkor egy $\mathrm{Sim}(M) \to \mathbb{R}_+^*$ homomorfizmust kapunk a pozitív valós számok multiplikatív csoportjába. Ennek a homomorfizmusnak a magja az $I(M)$ izometriacsoport. $I(M)$ ilyen módon részcsoportja $\mathrm{Sim}(M)$-nek. Ez a részcsoport nem szükségképpen valódi, például minden korlátos M metrikus tér esetén $\mathrm{Sim}(M) = I(M)$.

6.7. Emlékeztető.

1. Egy V valós vektortéren adott **skaláris szorzat**on $V \times V \to \mathbb{R}$ *pozitív definit szimmetrikus bilineáris formá*t értünk. **Euklideszi vektortér**en véges (de legalább 1-) dimenziós, skaláris szorzattal ellátott valós vektorteret értünk. Az euklideszi vektorterek skaláris szorzatát egyöntetűen a $\langle , \rangle$ szimbólummal jelöljük, s külön alkotóelemként nem szerepeltetjük a tér jelölésében.

2. Ha V euklideszi vektortér, egy $v \in V$ *vektor hossza* vagy *normája* $\|v\| := \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$. Bármely $u, v \in V$ esetén

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| ,$$

ez a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz, röviden *CBS-egyenlőtlenség*. Ennek alkalmazásával egyszerűen levezethető a

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad (u, v \in V)$$

ún. háromszög-egyenlőtlenség.

((CBS)-ben akkor és csak akkor teljesül az egyenlőség, ha a vektorok lineárisan függők; a háromszög-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor kapunk egyenlőséget, ha a vektorok egyike nemnegatív skalárszorosa a másiknak.)

3. Euklideszi vektortérben két vektort *ortogonális*nak nevezünk, ha a skaláris szorzatuk 0. Ha V n-dimenziós euklideszi vektortér és a $b_1, b_2, \dots, b_n$ vektorok páronként ortogonális, egységhosszúságú vektorok, azaz

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}; \qquad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

akkor $(b_i)_{i=1}^n$ bázisa V-nek; egy ilyen bázist *ortonormált bázis*nak nevezünk. Ha $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa V-nek, akkor minden $v \in V$ vektort egyértelműen előállítható a

$$v = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \cdots + \langle v, b_n \rangle b_n$$

alakban; ez v-nek egy ún. *Fourier-előállítás*a. Kiindulva V-nek egy tetszőleges $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ bázisából, képezhetjük a

$$b_1 := v_1, \quad b_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1, \quad b_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle v_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2, \quad \dots,$$
$$b_n := v_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v_n, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i$$

vektorokat. Ezek páronként ortogonális, nemzérus vektorok, amelyekből egységhosszúságú vektorokat képezve, V-nek egy ortonormált bázisához jutunk. Ez az eljárás a *Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció.*

4. Egy euklideszi vektorterek közötti $\varphi \colon V \to W$ leképezést *skalárisszorzat-tartó*nak mondunk, ha $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ teljesül minden $u, v \in V$ vektor esetén. Egy euklideszi vektortér önmagába való skalárisszorzat-tartó leképezéseit *ortogonális transzformációk*nak nevezzük. Megmutatható, hogy *minden ortogonális transzformáció lineáris transzformáció*, s hogy a V euklideszi vektortér egy $\varphi \colon V \to V$ transzformációjára a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(i) φ *ortogonális* transzformáció;

(ii) φ *normatartó lineáris* transzformáció;

(iii) φ valamely – és ezért bármely – *ortonormált bázist ortonormált bázisba vivő lineáris transzformáció.*

A V euklideszi vektortér ortogonális transzformációi a $GL(V)$ általános lineáris csoportnak egy részcsoportját alkotják, amelyet *ortogonális csoport*nak nevezünk és $O(V)$-vel jelölünk.

5. Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér euklideszi vektortér, ha ellátjuk az ún. *kanonikus skaláris szorzat*tal, amelyet az

$$\langle a, b \rangle := \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots + \alpha_n \beta_n, \quad \text{ha } a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

előírás értelmez. Az is jól ismert, hogy $\mathbb{R}^n$ lineáris transzformációi természetes módon azonosíthatók az $n \times n$-es valós mátrixokkal, amelyek $\mathbb{R}^n$ elemein, mint oszlopvektorokon, bal oldalról való szorzás formájában hatnak. Ilye módon a kanonikus skaláris szorzással ellátott $\mathbb{R}^n$ vektortér ortogonális csoportja mátrixcsoportnak tekinthető. Ezt $O(n)$-nel jelöljük, s az elemeit *ortogonális mátrix*oknak hívjuk. Szintén ismert a lineáris algebrából, hogy egy $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mátrixra a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(i) $A \in O(n)$;

(ii) $\forall v \in \mathbb{R}^n$: $\|Av\| = \|v\|$;

(iii) A oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;

(iv) A sorvektorai ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;

(v) ${}^t\!AA = 1_n$;

(vi) $A({}^t\!A) = 1_n$.

Egyszerűen megmutatható, hogy *egy euklideszi vektortér egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor ortogonális transzformáció, ha ortonormált bázisra vonatkozóan ortogonális mátrix reprezentálja.* Ebből és az ortogonális mátrixok iménti jellemzéséből következik, hogy egy *ortogonális transzformáció determinánsa csakis* 1 *vagy* -1 *lehet.* Az 1 determinánsú, s ennélfogva irányítástartó ortogonális transzformációk részcsoportját alkotják $O(V)$-nek, ezt a részcsoportot $O^+(V)$-vel jelöljük. Használjuk az

$$O^-(V) := \{\varphi \in O(V) \mid \det \varphi = -1\}$$

jelölést is, $O^-(V)$ azonban *nem* részcsoportja $O(V)$-nek.

7. Euklideszi affin terek

7.1. Definíció.

(1) Egy $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ véges dimenziós valós affin teret **euklideszi affin tér**nek, vagy egyszerűen **euklideszi tér**nek nevezünk, ha az iránytere euklideszi vektortér. (Amennyiben félreértés veszélye nem áll fenn, az euklideszi tér elnevezést gyakran csak az $\mathbb{E}$ alaphalmazra használjuk.)

(2) Két – nem föltétlenül különböző – euklideszi affin teret **izomorf**nak mondunk, ha létezik közöttük olyan affin izomorfizmus, amelynek linearizáltja skalárisszorzat-tartó leképezés az irányterek között.

(3) Egy n-dimenziós $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér *Descartes-féle* (vagy *ortonormált*) *koordinátarendszer*én olyan $(O, (b_i)_{i=1}^n)$ affin koordinátarendszert értünk, ahol $(b_i)_{i=1}^n$ ortonormált bázisa az iránytérnek. Egy $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázist szintén Descartes-félének mondunk, ha $\left(A_0, \left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^n\right)$ Descartes-féle koordinátarendszer.

7.2. Állítás. Minden n-dimenziós euklideszi affin tér izomorf a természetes affin struktúrával és a kanonikus skaláris szorzattal ellátott $\mathbb{R}^n$ valós vektortérrel.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ n-dimenziós euklideszi affin tér, s jelöljünk ki ebben egy $(O, (b_i)_{i=1}^n)$ Descartes-féle koordinátarendszert. Ismert a lineáris algebrából – de közvetlenül is könnyen ellenőrizhető –, hogy a

$$\varphi_B \colon V \to \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \nu_i b_i \mapsto \varphi_B(v) := (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

leképezés skalárisszorzat-tartó lineáris izomorfizmus V és $\mathbb{R}^n$ között. Tekintsük ezután az

$$f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n, \quad A \mapsto f(A) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \text{ ha } \overrightarrow{OA} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

leképezést! Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ esetén

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) b_i,$$

s így

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)f(B)} &:= f(B) - f(A) := (\beta_1, \ldots, \beta_n) - (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \\ &= (\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n) = \varphi_B\left(\overrightarrow{AB}\right); \end{aligned}$$

f tehát affin leképezés, amelynek linearizáltja a $\varphi_B\colon V \to \mathbb{R}^n$ skalárisszorzat-tartó izomorfizmus. Ebből (*3.4*(4) figyelembevételével) következik, hogy f izomorfizmus az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ és az $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, -)$ euklideszi tér között.

□

7.3. Állítás. Ha $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér, akkor $\mathbb{E}$ metrikus tér a

$$d\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto d(A, B) := \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

távolságfüggvénnyel.

Bizonyítás.

(M1) Tetszőleges $A \in \mathbb{E}$ pont esetén $d(A, A) := \left\|\overrightarrow{AA}\right\| \overset{1.4(1)}{=} \|\mathbf{0}\| = 0$.

(M2) Ha $A \neq B$, akkor $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$, s így $d(A, B) := \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \neq 0$ a skaláris szorzat pozitív definitsége miatt.

(M3) $d(A, B) := \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \overset{1.4(2)}{=} \left\|-\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| =: d(A, B)$.

(M4) Tetszőleges $A, B, C \in \mathbb{E}$ pontok esetén, fölhasználva az euklideszi vektorterekben érvényes háromszög-egyenlőtlenséget,

$$d(A, C) := \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \overset{(A2)}{=} \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = d(A, B) + d(B, C).$$

□

7.4. Állítás ***(az euklideszi térbeli szakaszok metrikus jellemzése).*** Legyenek A és B egy euklideszi tér különböző pontjai. Egy $P \notin \{A, B\}$ pont akkor és csak akkor belső pontja az $\overline{AB}$ szakasznak, ha

$$d(A, P) + d(P, B) = d(A, B).$$

Bizonyítás.

(1) Tegyük föl először, hogy $P \in \operatorname{Int} \overline{AB}$. Ekkor van olyan $\tau \in]0,1[$ valós szám, hogy a P pont helyzetvektora tetszőleges O pontra vonatkozóan

$$\overrightarrow{OP} = (1-\tau)\,\overrightarrow{OA} + \tau\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Így

$$\begin{aligned}
d(A,P) &:= \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right\| = \left\|-\tau\,\overrightarrow{OA} + \tau\,\overrightarrow{OB}\right\| = \\
&= \tau\left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| = \tau\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \tau d(A,B),\\
d(P,B) &:= \left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right\| = \left\|-(1-\tau)\tau\,\overrightarrow{OA} + (1-\tau)\,\overrightarrow{OB}\right\| = \\
&= (1-\tau)\left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| = (1-\tau)\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = (1-\tau)d(A,B),
\end{aligned}$$

következésképpen

$$d(A,P) + d(P,B) = \tau d(A,B) + (1-\tau)d(A,B) = d(A,B).$$

(2) Megfordítva, tegyük föl, hogy $d(A,P) + d(P,B) = d(A,B)$, azaz hogy $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| + \left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}\right\|$. Ekkor a *6.7*(2)-ben mondottakból következően van olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{PB}$. ($\lambda = 0$ nem lehet a pontok különbözősége miatt.) Innen $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right)$, illetve

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OB}$$

következik.

Ha $\tau := \frac{\lambda}{1+\lambda}$, akkor $\frac{1}{1+\lambda} = 1-\tau$, $\tau \in]0,1[$ és $\overrightarrow{OP} = (1-\tau)\,\overrightarrow{OA} + \tau\,\overrightarrow{OB}$, ami azt jelenti, hogy $P \in \operatorname{Int} \overline{AB}$.

□

7.5. Következmény *(a háromszög-egyenlőtlenség euklideszi affin térben)***.** Ha A, B, C egy euklideszi tér pontjai, akkor $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $B \in \overline{AC}$.

7.6. Definíció. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér. $\mathbb{E}$-nek, mint a

$$d\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \quad (A,B) \mapsto d(A,B) := \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

távolságfüggvénnyel ellátott metrikus térnek az izometriáit *euklideszi izometriá*knak, *egybevágósági transzformáció*knak vagy *egybevágóság*oknak is mondjuk. Egy euklideszi tér két ponthalmazát **egybevágó**nak nevezzük, ha van olyan euklideszi izometria, amely az egyiket a másikra képezi le.

Megjegyzés. Euklideszi térben dolgozva mindig adottnak tételezzük a fentiekben bevezetett d távolságfüggvényt. Az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér izometriacsoportját (a korábban mondottaknak megfelelően) $I(\mathbb{E})$-vel jelöljük. További meggondolásaink egyik célja éppen az izometriacsoport szerkezetének felderítése (legalábbis 2 és 3 dimenzióban).

7.7. Példák. Vegyünk alapul egy $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin teret.

(1) Transzlációk. Tegyük fel, hogy $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ transzláció, azaz olyan affin transzformáció, amelynek linearizáltja V identikus transzformációja: $\overrightarrow{T} = 1_V$. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ pontok esetén

$$d(T(A), T(B)) = \left\|\overrightarrow{T(A)T(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A, B),$$

tehát T távolságtartó. Belátjuk, hogy T szürjektív is. *3.11*(1)-ből tudjuk, hogy T-hez létezik egy és csak egy olyan $u \in V$ vektor – az eltolási vektor –, hogy $\overrightarrow{PT(P)} = u$, minden $P \in \mathbb{E}$ esetén. Megadva tetszőlegesen egy B pontot és kijelölve egy O origót, legyen A az $\overrightarrow{OA} := \overrightarrow{OB} - u$ helyzetvektorú pont. Ekkor

$$\overrightarrow{OT(A)} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT(A)} = \overrightarrow{OB} - u + u = \overrightarrow{OB},$$

következésképpen $B = T(A)$, amivel igazoltuk T szürjektívségét. Ily módon *egy euklideszi affin tér transzlációi izometriák.* A *3.11*(3)-ban mondottakból következően $\mathbb{E}$ összes transzlációi a V iránytér additív csoportjával izomorf részcsoportot alkotnak $I(\mathbb{E})$-ben.

(2) Ortogonális izometriák. Rögzítve egy $O \in \mathbb{E}$ origót, tekintsük $\mathbb{E}$ O-beli vektorizáltját, az $\mathbb{E}_O$ vektorteret (*1.5.*). $\mathbb{E}_O$ és V között lineáris izomorfizmus a

$$\Phi_O\colon A \in \mathbb{E}_O \longmapsto \Phi_O(A) := \overrightarrow{OA} \in V$$

leképezés. Megkívánva, hogy Φ_O legyen skalárisszorzat-tartó, $\mathbb{E}_O$ természetes módon euklideszi vektortérré tehető.

Tekintsünk egy $\overrightarrow{f} \in O(V)$ ortogonális transzformációt, s legyen

$$f := \Phi_{f(O)}^{-1} \circ \overrightarrow{f} \circ \Phi_O$$

(v.ö. *3.3*(2)). Ekkor f nyilvánvalóan bijektív. Mivel tetszőleges $A \in \mathbb{E}$ pont esetén

$$f(A) := \Phi_{f(O)}^{-1}\, \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi_{f(O)}(f(A)) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right),$$

3.2.-ből következik, hogy f affin transzformáció. Ezt felhasználva,

$$\forall A, B \in \mathbb{E}: \quad d(f(A), f(B)) := \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| =$$
$$= \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| := d(A, B);$$

f tehát távolságtartó, s ily módon *izometria.* Az ortogonális transzformációkból így konstruálható – velük origó rögzítése után azonosítható – izometriákat **ortogonális izometriák**nak nevezzük.

Következő meggondolásaink annak megmutatására irányulnak, hogy a bemutatott példák kimerítik az euklideszi izometriák alaptípusait. Első nagyobb eredményünk legfontosabb mondanivalója az lesz, hogy *egy euklideszi affin tér minden izometriája affinitás.*

7.8. Lemma. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér; $O, A, B \in \mathbb{E}$, s tegyük föl, hogy $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ egységvektor. Ebben az esetben $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ akkor és csak akkor merőleges, ha $d(A,B) = \sqrt{2}$.

Bizonyítás.

$$d(A,B) = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad (d(A,B))^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA}\right\|^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \right\rangle = 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \right\rangle = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\rangle = 0.$$

□

7.9. Lemma. Ha egy euklideszi affin tér egy izometriája egy affin bázis minden tagját fixen hagyja, akkor az izometria az identikus transzformáció.

Bizonyítás. Legyen adva az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér. Tegyük föl, hogy $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ izometria, amely egy $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázis minden tagját fixen hagyja: $f(A_i) = A_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Válasszunk egy tetszőleges $P \in \mathbb{E}$ pontot, s legyen $P' := f(P)$. Meg fogjuk mutatni, hogy $P' = P$.
Tekintsük azt az $\left(O, \left(\overrightarrow{OA_i}\right)_{i=1}^n\right)$ affin koordinátarendszert, ahol $O := A_0$. A feltétel alapján

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}: \quad d(A_i, P) = d(f(A_i), f(P)) = d(A_i, P') \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{A_iP}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_iP'}\right\|.$$

Ez $i = 0$ esetén azt jelenti, hogy $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \left\|\overrightarrow{OP'}\right\|$. Ha $i \in \{1, \ldots, n\}$, akkor $\overrightarrow{A_iP} = \overrightarrow{A_iO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i}$ és $\overrightarrow{A_iP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA_i}$ alapján

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{A_iP}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_iP'}\right\| \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{A_iP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{A_iP'}\right\|^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i}\right\|^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA_i} \right\rangle = \\
& \quad = \left\langle \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA_i} \right\rangle \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OP}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA_i} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{OA_i}\right\|^2 = \\
& \quad = \left\|\overrightarrow{OP'}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OA_i} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{OA_i}\right\|^2 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA_i} \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$ vektor ortogonális az $\left(\overrightarrow{OA_i}\right)_{i=1}^{n}$ bázis minden tagjára, s ennélfogva V minden vektorára, amiből $\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{0}$, $P' = P$ következik.

□

7.10. Tétel. *Egy euklideszi affin tér izometriái pontosan azok az affinitások, amelyeknek linearizáltja ortogonális transzformáció.*

Bizonyítás. Vegyük alapul az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ n-dimenziós euklideszi affin teret.
(1) *Ha* $f \in \mathit{Aff}(\mathbb{E})$ *és* $\overrightarrow{f} \in O(V)$, *akkor* $f \in I(\mathbb{E})$. Valóban, tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ pontok esetén

$$d(f(A), f(B)) := \left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| := d(A, B),$$

felhasználva, hogy ortogonalitása miatt $\overrightarrow{f}$ normatartó.
(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy $f \in I(\mathbb{E})$. Kiválasztva egy $A_0 \in \mathbb{E}$ pontot, tekintsük azt a $T\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ transzlációt, amelynek eltolási vektora (*3.11*(1)) az $\overrightarrow{f(A_0)A_0}$ vektor. T, mint láttuk, izometria, így izometria a

$$g := T \circ f$$

leképezés. *g-nek A_0 fixpontja*, ugyanis tetszőleges O origót véve, az eltolási vektor konstans volta alapján

$$\overrightarrow{Og(A_0)} = \overrightarrow{OT(f(A_0))} = \overrightarrow{Of(A_0)} + \overrightarrow{f(A_0)T(f(A_0))} =$$
$$= \overrightarrow{Of(A_0)} + \overrightarrow{f(A_0)A_0} = \overrightarrow{OA_0}$$

adódik, amiből valóban $g(A_0) = A_0$ következik.
Megmutatjuk, hogy $g = T \circ f$ *affinitás, amelynek linearizáltja ortogonális transzformáció.* Válasszunk egy A_0 origójú $\left(A_0, \left(\overrightarrow{A_0A_i}\right)_{i=1}^{n}\right)$ ortonormált koordinátarendszert, s legyen $B_i := g(A_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ekkor $\left(\overrightarrow{A_0B_i}\right)_{i=1}^{n}$ szintén ortonormált bázisa V-nek, ugyanis

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \quad \left\|\overrightarrow{A_0B_i}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(A_0)g(A_i)}\right\| =$$
$$= d(g(A_0), g(A_1)) = d(A_0, A_1) = \left\|\overrightarrow{A_0A_i}\right\| = 1,$$

tehát a tagjai egységhosszúak, s mivel

$$\forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\} : \quad d(B_i, B_j) = d(g(A_i), g(A_j)) = d(A_i, A_j) \overset{7.8.}{=} \sqrt{2},$$

(szintén) *7.8.*-ból következik, hogy $\left\langle \overrightarrow{A_0B_i}, \overrightarrow{A_0B_j} \right\rangle = 0$. Tekintettel a lineáris leképezések alaptételére, létezik pontosan egy olyan $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció, amelyre

$$\varphi\left(\overrightarrow{A_0A_i}\right) = \overrightarrow{g(A_0)g(A_i)} = \overrightarrow{A_0B_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

teljesül. φ ráadásul *ortogonális transzformáció*, hiszen ortonormált bázist ortonormált bázisba visz át. *3.5.* alapján létezik egy és csak egy olyan $h \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ affinitás, hogy

$$h(A_0) = A_0 \quad \text{és} \quad \overrightarrow{h} = \varphi^{-1}.$$

Ekkor tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ index esetén

$$\overrightarrow{A_0 h(B_i)} = \overrightarrow{h(A_0)h(B_i)} = \overrightarrow{h}\left(\overrightarrow{A_0 B_i}\right) = \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{A_0 B_i}\right) = \overrightarrow{A_0 A_i},$$

következésképpen $h(B_i) = A_i$, s ennélfogva

$$h \circ g(A_i) = h(B_i) = A_i \qquad (1 \le i \le n).$$

Mivel $h \circ g(A_0) = A_0$ is teljesül, a $h \circ g$ izometria az $(A_i)_{i=0}^n$ affin bázis minden tagját fixen hagyja, s ezért a *7.9.* lemma értelmében $h \circ g = 1_{\mathbb{E}}$. Innen $g = h^{-1}$, ami azt jelenti, hogy g is affinitás, hiszen affinitás inverze. Végül *3.4.*(4) figyelembevételével $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{h^{-1}} = \left(\overrightarrow{h}\right)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi$, g linearizáltja tehát ortogonális transzformáció.

□

8. Az euklideszi terek izometriáinak és hasonlóságainak szerkezete

8.1. Emlékeztető.

(1) Legyen V euklideszi vektortér, U pedig alterre V-nek. Ekkor az U altér

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle u, v \rangle = 0\}$$

ortogonális komplementere is altér, s teljesülnek a következők:

(i) $V = U \oplus U^\perp, \quad U^{\perp\perp} = U.$

(ii) A

$$\begin{aligned} &\pi_U \colon V \to V, \quad v \mapsto \pi_U(v) := u, \\ &\text{ha } v = u + w; \quad u \in U, w \in U^\perp \end{aligned}$$

transzformáció lineáris; $\mathrm{Im}(\pi_U) = U$, $\mathrm{Ker}(\pi_U) = U^\perp$. Ezt a transzformációt az U **altérre való merőleges vetítés**nek (**ortogonális projekció**nak) hívjuk, a $\pi_U(v)$ vektor a v vektor U*-beli ortogonális vetülete*. Az ortogonális vetület normája sohasem nagyobb a vektor normájánál, ez az ún. *Bessel-egyenlőtlenség*. Közvetlenül kiolvasható a definícióból, hogy $\pi_U^2 = \pi_U$. Ha $(e_i)_{i=1}^k$ ortonormált bázisa az U altérnek, akkor az U-ra való merőleges vetítés explicite megadható a

$$\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, e_i \rangle \, e_i \qquad (v \in V)$$

formulával.

(2) (*Az ortogonális transzformációk szerkezete*) Legyen V n-dimenziós euklideszi vektortér, φ pedig ortogonális transzformációja V-nek. *V felbomlik a φ transzformáció legfeljebb kétdimenziós, páronként ortogonális invariáns altereinek direkt összegére*, s ebből következően létezik V-nek olyan ortonormált bázisa, amelyre vonatkozóan φ mátrixa a

$$\begin{pmatrix} 1_p & & & & \\ & -1_q & & & \\ & & R_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\Theta_r} \end{pmatrix}$$

alakú tömb-diagonális mátrix, ahol 1_p és 1_q a $p \times p$-es, illetve a $q \times q$-as egységmátrix,

$$R_{\Theta_k} := \begin{pmatrix} \cos\Theta_k & -\sin\Theta_k \\ \sin\Theta_k & \cos\Theta_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq r;$$

$p + q + r = n$. Ez az alak a tömbök sorrendjétől eltekintve egyértelmű, ha megköveteljük, hogy minden $k \in \{1, \ldots, r\}$-re $0 < \Theta_k < \pi$ legyen.

8.2. Definíció és lemma. Legyen V n-dimenziós euklideszi vektortér ($n \geq 1$), U altere V-nek, s tekintsük a $V = U \oplus U^\perp$ ortogonális direkt felbontást. A

$$\sigma_U \colon V \to V, \quad v \mapsto \sigma_U(v) := u - w,$$
$$\text{ha } v = u + w; \quad u \in U, w \in U^\perp$$

transzformációt az U *altérre való (lineáris) tükrözés*nek nevezzük. Erre érvényesek a következők:

(1) $\sigma_U = 2\pi_U - 1_V$, így σ_U valóban lineáris transzformáció.

(2) σ_U *ortogonális transzformáció.*

(3) $\sigma_U^2 = 1_V$ – σ_U *involúció.*

(4) σ_U fixvektorai az U altér vektorai és csakis ezek.

(5) Ha V legalább kétdimenziós, U hiperaltere V-nek, $\overrightarrow{n} \in U^\perp$ pedig egységvektor, akkor

$$\forall v \in V: \quad \sigma_U(v) = v - 2\left\langle v, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}\ .$$

Bizonyítás.

(1) Legyen $v = u + w$; $u \in U$, $w \in U^\perp$. Ekkor

$$(2\pi_U - 1_V)(v) = 2\pi_U(v) - v \overset{8.1.(ii)}{=} 2u - (u + w) = u - w =: \sigma_U(v).$$

(2) Az előbbi jelölésekkel

$$\|\sigma_U(v)\| = \|u - w\| = \langle u - w, u - w\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle u + w, u + w\rangle^{\frac{1}{2}} = \|v\|\,,$$

hiszen $\langle u, w\rangle = 0$, σ_U tehát normatartó. A linearitás és a normatartás ekvivalens az ortogonalitással (*6.7.*(4)).

(3)

$$\sigma_U^2 = \sigma_U \circ \sigma_U \overset{(1)}{=} (2\pi_U - 1_V) \circ (2\pi_U - 1_V) = 4\pi_U^2 - 4\pi_U + 1_V =$$
$$\overset{8.1.(ii)}{=} 4\pi_U - 4\pi_U + 1_V = 1_V.$$

(4) Legyen $v = u + w$; $u \in U$, $w \in U^\perp$.

$$\sigma_U(v) = v \quad \Leftrightarrow \quad u - w = u + w \quad \Leftrightarrow \quad w = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow v \in U.$$

(5) Ha U hiperaltér, azaz $(n-1)$-dimenziós altér, akkor ($V = U \oplus U^\perp$ miatt) $\dim U^\perp = 1$, s ezért az $\overrightarrow{n} \in U^\perp$ egységvektor ortonormált bázisa $U^\perp$-nek. Tekintve egy $v = u + w$ ($u \in U$, $w \in U^\perp$) vektort, itt $w = \lambda \overrightarrow{n}$ írható.
Így $\langle v, \overrightarrow{n}\rangle = \langle u + \lambda \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}\rangle = \lambda \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}\rangle = \lambda$ (hiszen $\langle u, \overrightarrow{n}\rangle = 0$), következésképpen $w = \langle v, \overrightarrow{n}\rangle \overrightarrow{n}$. Ezt figyelembe véve,

$$\sigma_U(v) := u - w = v - 2w = v - 2\langle v, \overrightarrow{n}\rangle \overrightarrow{n},$$

amit állítottunk.

□

8.3. Lemma. Egy legalább kétdimenziós euklideszi vektortér minden irányításváltó ortogonális transzformációja előállítható egy irányítástartó ortogonális transzformáció és egy hiperaltérre való (lineáris) tükrözés kompozíciójaként.

Bizonyítás. Legyen V n-dimenziós euklideszi vektortér ($n \geq 2$), $\varphi \in O^-(V)$. Jelöljük ki V-nek egy U $(n-1)$-dimenziós alterét, s legyen $(u_i)_{i=1}^{n-1}$ bázisa U-nak, u_n pedig egységvektora $U^\perp$-nek. Ekkor $(u_i)_{i=1}^{n}$ ortonormált bázisa V-nek. Tekintsük a σ_U lineáris tükrözést. Ennek az $u_1, \ldots, u_{n-1}$ vektorok fixvektorai (*8.2.*(4)), míg

$$\sigma_U(u_n) \overset{8.2.(5)}{=} u_n - 2\langle u_n, u_n\rangle u_n = u_n - 2u_n = -u_n;$$

tehát σ_U mátrixa az $(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)$ bázisra vonatkozóan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Így $\det \sigma_U = -1$. Ha $\psi := \sigma_U \circ \varphi$, akkor φ ortogonális transzformáció (mert ilyenek kompozíciója), és

$$\det \psi = \det(\sigma_U \circ \varphi) = \det \sigma_U \det \varphi = (-1) \cdot (-1) = 1$$

folytán $\psi \in O^+(V)$. Mivel $\sigma_U^2 = 1_V$, σ_U invertálható, s az inverze önmaga. Így a $\psi = \sigma_U \circ \varphi$ relációból $\varphi = \sigma_U \circ \psi$, amivel φ-t egy irányítástartó ortogonális transzformáció és egy hiperaltérre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként állítottuk elő.

$\square$

Megjegyzések.

(1) Az irányítástartó ortogonális transzformációkat a *vektortér forgás*aiként, az irányításvalókat pedig a *nemvalódi forgás*aiként is említjük.

(2) A következőkben egy affin tér egy $\mathbb{B}$ affin alterében irányterére a $\overrightarrow{\mathbb{B}}$ jelölést is fogjuk használni.

8.4. Definíció. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ lealább kétdimenziós euklideszi affin tér.

(1) Amennyiben $\mathbb{H}$ hipersíkja $\mathbb{E}$-nek, úgy az egydimenziós $\left(\overrightarrow{\mathbb{H}}\right)^\perp$ altér tetszőleges generátorelemét $\mathbb{H}$ egy *normálvektor*ának nevezzük. Ha ez – ráadásul – egységvektor, akkor *normálegységvektor*ról beszélünk.

(2) Legyen l egyenese, $\mathbb{B}$ pedig legalább egydimenziós affin altere $\mathbb{E}$-nek. Azt mondjuk, hogy l és $\mathbb{B}$ **merőleges**ek és az $l \perp \mathbb{B}$ jelölést használjuk, ha az $\overrightarrow{l}$ és $\overrightarrow{\mathbb{B}}$ iránytérre $\overrightarrow{l} \subset \left(\overrightarrow{\mathbb{B}}\right)^\perp$ (vagy – ekvivalens módon – $\overrightarrow{\mathbb{B}} \subset \left(\overrightarrow{l}\right)^\perp$) teljesül.

(3) $\mathbb{E}$ $\mathbb{H}_1$ és $\mathbb{H}_2$ *hipersíkjait merőlegesek*nek nevezzük, s ilyenkor is a $\mathbb{H}_1 \perp \mathbb{H}_2$ jelölést használjuk, ha $\left(\overrightarrow{\mathbb{H}_1}\right)^\perp \subset \overrightarrow{\mathbb{H}_2}$ (vagy $\left(\overrightarrow{\mathbb{H}_2}\right)^\perp \subset \overrightarrow{\mathbb{H}_1}$).

Megjegyzés. Közvetlenül adódik a definícióból, hogy két egyenes, illetve két hipersík akkor és csak akkor merőleges, ha irányvektoraik, illetve normálvektoraik ortogonálisak.

8.5. Állítás *(a hipersíkok Hesse-féle egyenlete)***.** Egy O origó rögzítése után egy legalább kétdimenziós euklideszi affin tér minden hipersíkjának egyenlete megadható

$$\left\langle \overrightarrow{x} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$$

alakban, ahol A a hipersík egy tetszőlegesen rögzített pontja, $\overrightarrow{n}$ a hipersík egy normálvektora, $\overrightarrow{x}$ pedig egy szimbólum. (Ez azt jelenti, hogy a tér egy P pontja akkor és csak akkor illeszkedik a hipersíkra, ha $\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle$.)

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{H}$ hipersíkja az $\mathbb{E}$ euklideszi affin térnek, $A \in \mathbb{H}$, $\overrightarrow{n} \in \left(\overrightarrow{\mathbb{H}}\right)^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tekintsük a

$$\widetilde{\mathbb{H}} := \left\{ P \in \mathbb{E} \mid \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \right\}$$

ponthalmazt. Nyilvánvalóan azt kell belátnunk, hogy $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H}$.
Ha $P \in \mathbb{H}$, akkor az affin alterek definíciója értelmében $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\in\overrightarrow{\mathbb{H}}$; így $\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$, ami azt jelenti, hogy $P \in \widetilde{\mathbb{H}}$.
Megfordítva, ha $P \in \widetilde{\mathbb{H}}$, s ennélfogva $\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$, akkor $\overrightarrow{AP}\in \left(\mathscr{L}\left(\overrightarrow{n}\right)\right)^{\perp} = \left(\overrightarrow{\mathbb{H}}\right)^{\perp\perp} =\overrightarrow{\mathbb{H}}$, amiből $P \in \mathbb{H}$ következik (ismét az affin alterek definíciója alapján).
Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbb{H}$ és $\widetilde{\mathbb{H}}$ kölcsönösen tartalmazza egymást.

□

8.6. Lemma és definíció. Legyenek A és B egy legalább kétdimenziós euklideszi affin tér különböző pontjai. A tér azon pontjai, amelyek A-tól és B-től ugyanakkora távolságra vannak, $\overrightarrow{AB}$ normálvektorú hipersíkot alkotnak. Ezt a hipersíkot az $\overline{AB}$ szakasz *felezőmerőleges hipersík*jának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{E}$ az alapulvett euklideszi affin tér,

$$\mathbb{H} := \{P \in \mathbb{E} \mid d(P, A) = d(P, B)\}\,.$$

Tekintsük $\overline{AB}$ F felezőpontját. Ekkor $F \in \mathbb{H}$, és a következő megállapítások tehetők:

$$P \in \mathbb{H} \quad\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \left\|\overrightarrow{PB}\right\| \quad\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB}\right\| = \left\|\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FP}\right\| \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FP}\right\|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{FA}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FP}\right\rangle + \left\|\overrightarrow{FP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{FB}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FP}\right\rangle + \left\|\overrightarrow{FP}\right\|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FP}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FP}\right\rangle \quad\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FA}\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AB}\right\rangle = 0 \quad \overset{8.5.}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow$ P illeszkedik az F ponton átmenő, $\overrightarrow{AB}$ normálvektorú hipersíkra.

□

8.7. Állítás *(Pitagorasz tétele)***.** Ha A, B és C egy legalább kétdimenziós euklideszi affin tér különböző pontjai, akkor

$$(d(A, B))^2 + (d(B, C))^2 = (d(A, C))^2 \quad\Leftrightarrow\quad \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}\,.$$

Bizonyítás.

$$(d(A, B))^2 + (d(B, C))^2 = (d(A, C))^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\|^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right\rangle \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

(figyelembe véve, hogy $\overrightarrow{AB}\neq \mathbf{0}$, $\overrightarrow{BC}\neq \mathbf{0}$ a pontok különbözősége miatt).

$\square$

8.8. Állítás. Legyen $\mathbb{H}$ hipersíkja a legalább kétdimenziós $\mathbb{E}$ euklideszi affin térnek. Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{n}$ normálegységvektora, A egy tetszőleges pontja $\mathbb{H}$-nak. Megadva egy P pontot, *létezik egy és csak egy olyan m egyenes, amely illeszkedik a P pontra és merőleges $\mathbb{H}$-ra.* Egy O origó rögzítése után érvényesek a következők:

(1) m paraméteres előállítása

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \tau\,\overrightarrow{n}, \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

(2) Az m egyenes abban a T pontban metszi a hipersíkot, amelynek helyzetvektora

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} - \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}\ .$$

(3) $\mathrm{dist}(P, \mathbb{H}) = d(P,T) = \left| \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \right|$.

Bizonyítás. A $\mathbb{H}$ hipersíkra merőleges m egyenesre a merőlegesség definíciója alapján $\overrightarrow{m} \subset \left(\overrightarrow{\mathbb{H}}\right)^{\perp} = \mathscr{L}\left(\overrightarrow{n}\right)$ kell, hogy teljesüljön; m irányvektorai tehát $\overrightarrow{n}$ nemzérus skalárszorosai – és csakis ezek – lehetnek. Mivel m-nek illeszkednie kell a P pontra, *1.19.* figyelembevételével következik m egyértelmű létezése. A mondottakból az is világos, hogy m pontjainak helyzetvektorai, s csakis ezek, $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \tau\,\overrightarrow{n}$ $(\tau \in \mathbb{R})$ alakban állíthatók elő, amivel (1) is igazolást nyert. *8.5.*-re tekintettel az m egyenes egy τ paraméterű pontja akkor és csak akkor illeszkedik $\mathbb{H}$-ra, ha

$$0 = \left\langle \overrightarrow{OP} + \tau\,\overrightarrow{n} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \tau \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \tau = -\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle .$$

Ebből következik, hogy a $\{T\} := m \cap \mathbb{H}$ metszéspont egyértelműen létezik, s helyzetvektora

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} - \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}\ .$$

Innen

$$d(P,T) := \left\| \overrightarrow{PT} \right\| = \left\| \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP} \right\| = \left| \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \right| .$$

Ha Q tetszőleges, T-től különböző pontja $\mathbb{H}$-nak, akkor $\overleftrightarrow{PT} \perp \overleftrightarrow{TQ}$, s így a Pitagorasz-tétel alapján

$$(d(P,Q))^2 = (d(P,T))^2 + (d(T,Q))^2 > (d(P,T))^2 \quad \Rightarrow \quad d(P,Q) > d(P,T),$$

következésképpen $d(P,T) = \mathrm{dist}(P, \mathbb{H})$.

$\square$

8.9. Definíció és lemma. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ legalább kétdimenziós euklideszi affin tér. Azt mondjuk, hogy a tér P és P' pontja *szimmetrikus* egy $\mathbb{H}$ hipersíkra nézve, ha $\mathbb{H}$ felezőmerőleges hipersíkja a $\overline{PP'}$ szakasznak. Ebben az esetben a P és a P' pont egy tetszőlegesen választott O pontra vonatkozó helyzetvektora között az

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}$$

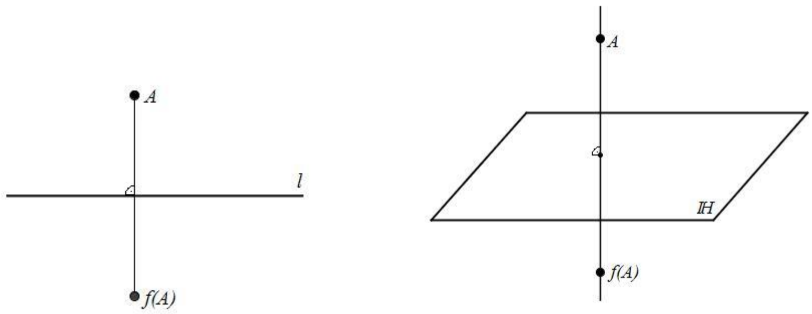
összefüggés áll fenn, ahol $\overrightarrow{n}$ normálegységvektora, A tetszőlegesen rögzített pontja $\mathbb{H}$-nak. Azt a

$$\sigma_{\mathbb{H}} \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad P \mapsto \sigma_{\mathbb{H}}(P)$$

leképezést, amelynél P és $\sigma_{\mathbb{H}}(\mathrm{P})$ szimmetrikus $\mathbb{H}$-ra nézve, ha $P \notin \mathbb{H}$, $P \in \mathbb{H}$ esetén pedig $\sigma_{\mathbb{H}}(P) := P$, a $\mathbb{H}$ **hipersíkra vonatkozó tükrözés**nek nevezzük, s ilyenkor $\mathbb{H}$-t *szimmetriasík*ként említjük. Ha speciálisan $\dim \mathbb{H} = 1$, akkor $\mathbb{H}$-t *szimmetriatengely*nek, röviden *tengely*nek; magát a transzformációt **tengelyes tükrözés**nek hívjuk. Tetszőleges $P \in \mathbb{E}$ pont esetén a $\sigma_{\mathbb{H}}(P) =: P'$ pont egy O pontra vonatkozó helyzetvektora az

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}$$

formulával adható meg.



Hipersíkra vonatkozó tükrözés két-, illetve háromdimenziós esetben

Bizonyítás. Tekintve egy $P \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{H}$ pontot, legyen T „a P-ből a $\mathbb{H}$-ra bocsátott merőleges egyenes talppontja”, azaz a P-re illeszkedő, $\mathbb{H}$-ra merőleges egyenes és $\mathbb{H}$ metszéspontja (*8.8.*). *8.6.* figyelembevételével világos, hogy P és egy további P' pont akkor és csak akkor szimmetrikus $\mathbb{H}$-ra nézve, ha T felezőpontja $\overline{PP'}$-nek, azaz ha $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right)$. Innen

$$\overrightarrow{OP'} = 2\,\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP} \overset{8.8.(2)}{=} \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}\ .$$

Ez a formula $P \notin \mathbb{H}$ esetén megadja a $\sigma_{\mathbb{H}}(\mathrm{P})$ helyzetvektorát. Ha $P \in \mathbb{H}$, akkor $\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} = 0$ (*8.5.*), így $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$, $P' = P$ következik; tehát ilyenkor is a kívánt eredményt kapjuk.

□

8.10. Állítás. *Minden hipersíkra vonatkozó tükrözés involutív izometria, amelynek fixpontjai a szimmetriasík pontjai, és csakis ezek.* (Az involutívság azt jelenti, hogy a transzformációt önmagával komponálva az identitást kapjuk.)

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{H}$ hipersíkja a legalább kétdimenziós $\mathbb{E}$ euklideszi affin térnek, s tegyük fel, hogy $\underline{n}$ normálegységvektora, A egy pontja $\mathbb{H}$-nak. Rögzítsünk egy O origót, s tekintsük a $\sigma_{\mathbb{H}}$ tükrözést. Tetszőleges $P \in \mathbb{E}$ pont esetén az előző lemma értelmében

$$\overrightarrow{O\sigma_{\mathbb{H}}(P)} = \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} := \overrightarrow{OP} - 2\lambda \overrightarrow{n},$$

bevezetve a $\lambda := \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle$ rövidítést. Ekkor

$$\overrightarrow{O\sigma^2_{\mathbb{H}}(P)} = \overrightarrow{OP} - 2\lambda \overrightarrow{n} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - 2\lambda \overrightarrow{n} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} =$$
$$= \overrightarrow{OP} - 2\lambda \overrightarrow{n} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} + 4\lambda \overrightarrow{n} =$$
$$= \overrightarrow{OP} + 2\lambda \overrightarrow{n} - 2\lambda \overrightarrow{n} = \overrightarrow{OP},$$

következésképpen $\sigma^2_{\mathbb{H}}(P) = P$, s így – P tetszőlegessége folytán – $\sigma^2_{\mathbb{H}} = 1_{\mathbb{E}}$, $\sigma_{\mathbb{H}}$ tehát involúció. Ebből automatikusan következik, hogy $\sigma_{\mathbb{H}}$ invertálható (s így bijektív) és $\sigma^{-1}_{\mathbb{H}} = \sigma_{\mathbb{H}}$.

$$\sigma_{\mathbb{H}}(P) = P \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{O\sigma_{\mathbb{H}}(P)} = \overrightarrow{OP} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0 \quad \overset{8.5.}{\Leftrightarrow} \quad P \in \mathbb{H},$$

$\sigma_{\mathbb{H}}$ fixpontjai tehát a $\mathbb{H}$-ra illeszkedő pontok és csakis ezek.
Belátjuk végül, hogy $\sigma_{\mathbb{H}}$ távolságtartó. Tetszőleges $P, Q \in \mathbb{E}$ esetén

$$d(\sigma_{\mathbb{H}}(P), \sigma_{\mathbb{H}}(Q)) = \left\| \overrightarrow{\sigma_{\mathbb{H}}(P)\sigma_{\mathbb{H}}(Q)} \right\| = \left\| \overrightarrow{O\sigma_{\mathbb{H}}(P)} - \overrightarrow{O\sigma_{\mathbb{H}}(Q)} \right\| =$$
$$= \left\| \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} + 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} \right\| =$$
$$= \left\| \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} \right\|.$$

Bevezetve a $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ rövidítést,

$$\left\| \overrightarrow{v} - 2\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} \right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{v} - 2\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v} - 2\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n} \right\rangle =$$
$$= \left\| \overrightarrow{v} \right\|^2 - 4\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle + 4\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \right\rangle^2 \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{v} \right\|^2$$

adódik, s így

$$d(\sigma_{\mathbb{H}}(P), \sigma_{\mathbb{H}}(Q)) = \left\| \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \right\| = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = d(P, Q)$$

következik. Ezzel az állítást igazoltuk.

□

8.11. Lemma. Ha v és w egy euklideszi vektortér vektorai és $\|v\| = \|w\|$, akkor létezik olyan U hiperaltér, hogy $\sigma_U(v) = w$.

Bizonyítás. Ha $v = w$, akkor minden v-t tartalmazó hiperaltér megfelel. $v \neq w$ esetén legyen $U := (\mathscr{L}(v - w))^{\perp}$. Ekkor $\frac{1}{\|v-w\|}(v - w)$ normálegységvektora U-nak, és *8.2.*(5) alapján

$$\sigma_U(v) = v - 2\frac{\langle v, v - w\rangle}{\langle v - w, v - w\rangle}(v - w) =$$
$$= v - 2\frac{\|v\|^2 - \langle v, w\rangle}{2\|v\|^2 - 2\langle v, w\rangle}(v - w) = v - (v - w) = w.$$

$\square$

8.12. Tétel *(Élie Cartan). Ha V n-dimenziós euklideszi vektortér, akkor V minden ortogonális transzformációja előállítható legfeljebb n hiperaltérre való tükrözés kompozíciójaként, vagy az identikus transzformáció.*

Bizonyítás.

(1) Ha $\dim V = 1$, akkor $O(V) = \{1_V, -1_V\}$. Itt -1_V a $\{\mathbf{0}\}$ „hipersíkra" való tükrözés, s ezért az állítás igaz. – Megjegyzendő, hogy ebben az esetben 1_V csak páros számú tükrözés kompozíciójaként kapható meg, ezért kelett a tételt az adott formában megfogalmazni.

(2) Tegyük fel, hogy $n \geq 2$, és hogy a tétel igaz n-nél kisebb dimenziójú euklideszi vektorterekre. Legyen $\varphi \in O(V)$, s válasszunk egy tetszőleges $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektort. Ha $w := \varphi(v)$, akkor $\|w\| = \|v\|$, s az előrebocsátott lemma alapján létezik olyan hiperaltérre való tükrözés, jelölje ezt σ, hogy $\sigma(w) = v$. *8.2.*(2) értelmében σ ortogonális transzformáció, így $\sigma \circ \varphi$ is az. Mivel $\sigma \circ \varphi(v) = \sigma(w) = v$, $\sigma \circ \varphi$-nek v fixvektora, s így $\mathscr{L}(v)$ (pontonként fix) invariáns altere. A lineáris algebrából ismert, hogy ortogonális transzformáció invariáns alterének ortogonális komplementere, esetünkben $U := (\mathscr{L}(v))^{\perp}$, is invariáns altér. $\dim U = n - 1$, és $\sigma \circ \varphi \restriction$ szintén ortogonális transzformáció, így az indukciós feltevés értelmében előállítható legfeljebb $n-1$ U*-beli* hiperaltérre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként (vagy $\sigma \circ \varphi \restriction U = 1_U$, de ekkor $\varphi = \sigma$, s az állítás igaz):

$$\sigma \circ \varphi \restriction U = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k, \qquad k \geq n - 1.$$

Itt minden σ_i $(i \in \{1, \ldots, k\})$ tükrözéshez megadható egy $\overrightarrow{n_i} \in U$ egységvektor úgy, hogy

$$\forall u \in U: \quad \sigma_i(u) = u - 2\left\langle u, \overrightarrow{n_i}\right\rangle \overrightarrow{n_i}\,.$$

Mivel $V = \mathscr{L}(v) \oplus U$, minden $z \in V$ vektor egyértelműen előállítható a

$$z = \lambda v + u; \qquad \lambda \in \mathbb{R}, u \in U$$

alakban. Terjesszük ki a σ_i tükrözéseket V transzformációivá a

$$\widetilde{\sigma_i}(z) = \widetilde{\sigma_i}(\lambda v + u) := \lambda v + \sigma_i(u) = \lambda v + u - 2\left\langle u, \overrightarrow{n_i}\right\rangle \overrightarrow{n_i}$$

előírással! Mivel $\overrightarrow{n_i} \in U = (\mathscr{L}(v))^{\perp}$, $\left\langle v, \overrightarrow{n_i}\right\rangle = 0$, s így

$$\widetilde{\sigma_i}(z) = z - 2\left\langle z, \overrightarrow{n_i}\right\rangle \overrightarrow{n_i} \qquad (i \in \{1, \ldots, k\})$$

írható, amiből világos, hogy a $\widetilde{\sigma_i}$ transzformációk valóban V*-beli* hiperalterekre való tükrözések. Ezek segítségével $\sigma \circ \varphi$ a

$$\sigma \circ \varphi = \widetilde{\sigma_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\sigma_k}$$

alakban állítható elő, ahonnan

$$\varphi = \sigma \circ \widetilde{\sigma_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\sigma_k}$$

adódik, ami igazolja az állítást.

□

Megjegyzés. Tekintettel számos alkalmazásra, a tétel igen fontos. Ha euklideszi vektortér helyett egy K test fölötti véges dimenziós, *nemelfajuló szimmetrikus bilineáris formával ellátott* vektorteret vennénk alapul, az állítás akkor is igaz maradna, de a bizonyítás lényegesen nehezebbé válna. Ez az általánosítás *Jean Dieudonné* nevéhez fűződik.

8.13. Következmény. Kétdimenziós euklideszi vektortér minden irányításváltó ortogonális transzformációja (azaz nemvalódi forgása) origón átmenő egyenesre (ún. vektoregyenesre) való tükrözés; minden forgása két ilyen tükrözés kompozíciója.

8.14. Következmény. *Egy n-dimenziós euklideszi affin tér bármely izometriája előállítható legfeljebb $n+1$ hipersíkra való tüközés kompozíciójaként.*

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ n-dimenziós euklideszi affin tér, $f \in I(\mathbb{E})$.

(1) Ha f-nek létezik A fixpontja, akkor – azonosítva a linearizáltjával – az $\mathbb{E}_A$ vektorizált ortogonális transzformációjaként interpretálható, s mint ilyen, Cartan tétele értelmében előállítható legfeljebb n $\mathbb{E}_A$-beli hiperaltérre vonatkozó tükrözés kompozíciójaként. Ezek a tükrözések $\mathbb{E}$-ben hipersíkra való tükrözéseket jelentenek, így ekkor az állítás igaz.

(2) Tegyük föl, hogy f-nek nincs fixpontja. Válasszunk egy tetszőleges A pontot, s tekintsük ennek $A' := f(A)$ képpontját. Ha az $\overline{AA'}$ szakasz felezőmerőleges hipersíkja $\mathbb{H}$, akkor $\sigma_{\mathbb{H}} \circ f$ olyan izometria, amely az A pontot fixen hagyja. Így az (1)-ben mondottak szerint $\sigma_{\mathbb{H}} \circ f$ előállítható legfeljebb n számú $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_k$ hipersíkra való tükrözés kompozíciójaként, azaz $\sigma_{\mathbb{H}} \circ f = \sigma_{\mathbb{H}_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\mathbb{H}_k}$ írható, ahonnan

$$f = \sigma_{\mathbb{H}} \circ \sigma_{\mathbb{H}_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\mathbb{H}_k}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

□

8.15. Lemma. Euklideszi affin tér izometriájának fixpontjai affin alteret alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér, $f \in I(\mathbb{E})$, $\mathrm{Fix}(f) := \{P \in \mathbb{E} \mid f(P) = P\}$. Föltehetjük, hogy $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, ellenkező esetben ugyanis az állítás automatikusan igaz. Tetszőlegesen rögzítve egy $O \in \mathrm{Fix}(f)$ pontot,

$$P \in \mathrm{Fix}(f) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} \in V_{(1)},$$

ahol $V_{(1)}$ az $\overrightarrow{f} \in O(V)$ linearizált 1 sajátértékéhez tartozó sajátaltere. Megfordítva,

$$\overrightarrow{OP} \in V_{(1)} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{f(O)f(P)} = \overrightarrow{Of(P)} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(P) = P \quad \Rightarrow \quad P \in \mathrm{Fix}(f).$$

Ily módon $\left\{\overrightarrow{OP} \in V \mid P \in \mathrm{Fix}(f)\right\} = V_{(1)}$, amivel beláttuk, hogy $\mathrm{Fix}(f)$ affin altér, sőt az is kiderült, hogy $\mathrm{Fix}(f)$ irányterét az $\overrightarrow{f}$ linearizált 1 sajátértékéhez tartozó sajátaltere alkotja.

□

8.16. Tétel *(az izometriák természetes felbontása)***.** Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér. Bármely $f \in I(\mathbb{E})$ izometriához egyértelműen található olyan $v \in V$ vektor és $g \in I(\mathbb{E})$ izometria, hogy

(1) $\mathrm{Fix}(g) := \{P \in \mathbb{E} \mid g(P) = P\}$ nemüres;

(2) $v \in \overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)}$;

(3) $f = T_v \circ g$, ahol T_v a v eltolási vektorral rendelkező transzláció.

Ekkor T_v és g felcserélhető és $\overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)} = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$.

Bizonyítás.

(1) Első lépésként azt mutatjuk meg, hogy

$$(*) \qquad V = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) \oplus \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right).$$

Mivel a szereplő alterek dimenziójának összege a nullitás+rang tétel értelmében $\dim V$-vel egyenlő, ehhez elegendő azt ellenőrizni, hogy az alterek ortogonálisak. Legyen $u \in \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$, $w \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$. Ekkor $\overrightarrow{f}(u) = u$, illetve létezik olyan $z \in V$ vektor, hogy $w = \overrightarrow{f}(z) - z$. Így

$$\langle u, w\rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(z) - z\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(z)\right\rangle - \left\langle \overrightarrow{f}(u), z\right\rangle = \langle u, z\rangle - \langle u, z\rangle = 0,$$

felhasználva, hogy (*7.10.*-re tekintettel) $\overrightarrow{f}$ ortogonális transzformáció. Ezzel $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$ és $\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$ ortogonális, s ezáltal $(*)$ teljesülését igazoltuk.

(2) A levezetett reláció birtokában a bizonyítás egyszerűen *8.16.*-ra való hivatkozással is befejezhető, hasznosabb lesz azonban, ha reprodukáljuk *3.16.* bizonyításának gondolatmenetét. Rögzítsünk ebből a célból egy tetszőleges O origót. Tekintve az $\overrightarrow{Of(O)}$ vektort, ez $(*)$ alapján egyértelműen előállítható

$$\overrightarrow{Of(O)} = v + \overrightarrow{f}(z) - z; \quad \overrightarrow{f}(v) = v, \quad z \in V$$

alakban. Ha az A pontot az $\overrightarrow{AO} = z$ előírással definiáljuk, akkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Af(A)} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} = \\ &= z + v + \overrightarrow{f}(z) - z + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OA}\right) = v + \overrightarrow{f}(z) - \overrightarrow{f}(z) = v; \end{aligned}$$

így a v eltolási vektorral rendelkező T_v transzlációra $T_v(A) = f(A)$ teljesül. Tekintsük ezután a

$$g := T_{-v} \circ f$$

izometriát. Mivel $g(A) = T_{-v}(f(A)) = T_{-v} \circ T_v(A) = T_{\mathbf{0}}(A) = A$, A fixpontja g-nek, tehát $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$. Fennáll továbbá, hogy

$$g \circ T_v \circ g^{-1} \overset{3.14.}{=} T_{\overrightarrow{g}(v)} = T_{\overrightarrow{f}(v)} = T_v;$$

így

$$g \circ T_v = T_v \circ g,$$

azaz T_v és g felcserélhető.
Annak ellenőrzése van még hátra, hogy a v vektor és a g izometria egyértelműen meghatározott. Tegyük föl, hogy egy $v' \in V$ vektorral és egy $g' \in I(\mathbb{E})$ izometriával is teljesül, hogy

$$f = T_{v'} \circ g', \quad \mathrm{Fix}(g') \neq \emptyset, \quad \overrightarrow{g'}(v') = v'.$$

Ekkor $\overrightarrow{Af(A)} = v$, $\overrightarrow{A'f(A')} = v'$, s így

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)A'} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(A')} + \overrightarrow{f(A')A'} =$$
$$= v + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AA'}\right) - v' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AA'}\right) = v - v'.$$

Itt a jobb oldali vektor a $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$ altérbe tartozik, a bal oldali pedig $\mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$-be, s mivel ezeknek csak a zérusvektor a közös eleme, következik, hogy $v' = v$, amiből pedig $g = g'$ is adódik. (Az állításban szereplő, s az okoskodásunk során fel is használt $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$ tulajdonság világos az előrebocsátott lemmából és annak bizonyításából.)

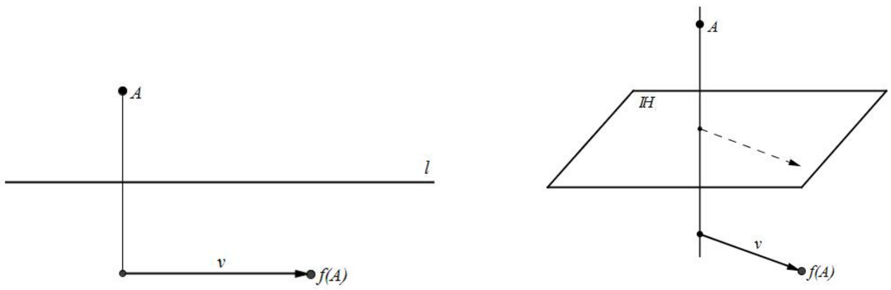
□

8.17. Megjegyzés. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér. *Egy $f \in I(\mathbb{E})$ izometriának akkor és csak akkor van egyetlen fixpontja, ha Ker$\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) = \{\mathbf{0}\}$;* ezt a pontot az izometria *centrum*ának is hívjuk. – Valóban, *3.15.*-ben már megmutattuk, hogy egy véges dimenziós affin tér egy affin transzformációjának akkor és csak akkor van egyetlen fixpontja, ha a linearizáltjának az 1 nem sajátértéke, ami éppen annyit jelent, hogy $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) = \{\mathbf{0}\}$. Észrevételünk következik a *8.15.* bizonyításában mondottakból is: láttuk, hogy a $\mathrm{Fix}(f)$ affin altér iránytere az $\overrightarrow{f}$ linearizált 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere, így $\mathrm{Fix}(f)$ akkor és csak akkor egyelemű, ha ez utóbbi altér 0-dimenziós.

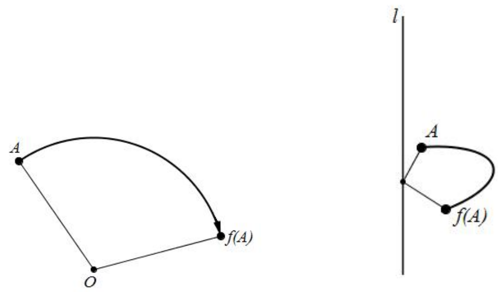
8.18. Definíció.

(1) Egy legalább kétdimenziós euklideszi affin tér egy transzformációját **csúsztatva tükrözés**nek nevezzük, ha előállítható egy hipersíkra vonatkozó tükrözés és egy olyan transzláció kompozíciójaként, amelynek eltolási vektora a hipersík irányterébe eső nemzérus vektor.

(2) Az euklideszi affin sík egy *irányítástartó izometriáját* **pont körüli forgatás** nak mondjuk, ha egyetlen fixpontja van vagy az identikus transzformáció. A háromdimenziós euklideszi affin tér fixponttal rendelkező *irányítástartó izometriáit* **tengely körüli forgatás**oknak hívjuk.



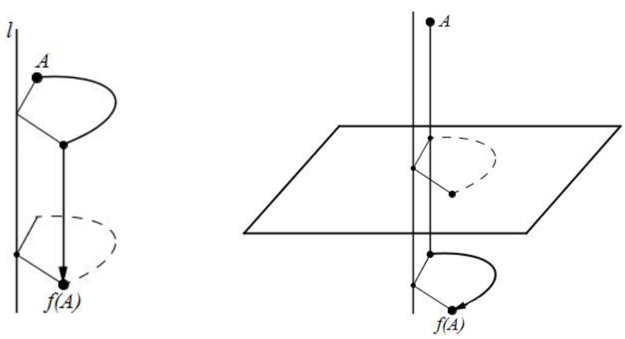
Csúsztatva tükrözés két-, illetve háromdimenziós esetben



Pont körüli, illetve tengely körüli forgatás

(3) A háromdimenziós euklideszi affin tér egy transzformációja

> **forgatva tükrözés**, ha nemidentikus tengely körüli forgatás és a tengelyre merőleges síkra való tükrözés kompozíciója;
>
> **csavarmozgás**, ha nemidentikus tengely körüli forgatás és egy olyan transzláció kompozíciója, amelynek eltolási vektora irányvektora a tengelynek.



Forgatva tükrözés és csavarmozgás

8.19. Megjegyzések.

(1) A csúsztatva tükrözések, forgatva tükrözések és csavarmozgások

előállításában szereplő transzformációk *8.16.* értelmében felcserélhetők.

(2) Legyen $\mathbb{E}$ háromdimenziós euklideszi affin tér, s tegyük fel, hogy $f \in I(\mathbb{E})\setminus 1_{\mathbb{E}}$ tengely körüli forgatás. Ekkor a definíció értelmében $\overrightarrow{f} \in O^+(V)$, s így a lineáris algebrából ismert módon alkalmas (e_1, e_2, e_3) ortonormált bázisban $\overrightarrow{f}$-et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

alakú ortogonális mátrix reprezentálja (tekintettel arra is, hogy $\overrightarrow{f} \neq 1_V$). Ekkor az $l_1 := \mathscr{L}(e_1)$ vektoregyenes pontonként fix invariáns altere $\overrightarrow{f}$-nek. Ha A fixpontja f-nek és l az A-ra illeszkedő, l_0-lal párhuzamos egyenes, akkor l pontonként fix egyenese az f izometriának, hiszen

$$\forall P \in l: \quad \overrightarrow{AP} \in l_0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{AP}; \qquad \text{így}$$

$$\overrightarrow{Af(P)} = \overrightarrow{f(A)f(P)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{AP} \quad \Rightarrow \quad f(P) = P.$$

Indokoltan vezettük be tehát f-re a „tengely körüli forgatás” elnevezést.

8.20. Tétel. *Az euklideszi affin sík bármely izometriája* ***transzláció, tengelyes tükrözés, csúsztatva tükrözés*** *vagy* ***pont körüli forgatás****. A háromdimenziós euklideszi affin tér bármely izometriája* ***transzláció, síkra vonatkozó tükrözés, csúsztatva tükrözés, egyenes körüli forgatás, csavarmozgás*** *vagy* ***forgatva tükrözés****. Ha az identikus transzformációtól eltekintünk, akkor ezek a transzformációtípusok diszjunktak.*

Bizonyítás.

(A) Tegyük fel először, hogy $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ kétdimenziós euklideszi affin tér, s legyen $f \in I(\mathbb{E})$. A Cartan-tételből következően az $\overrightarrow{f} \in O(V)$ linearizált az identikus transzformáció, tengelyes tükrözés vagy két tengelyes tükrözés kompozíciója lehet (ld. *8.13.*).

(1) Ha $\overrightarrow{f} = 1_V$, akkor f *transzláció.*

(2) $\overrightarrow{f} = \sigma_{l_0}$, *ahol* l_0 *vektoregyenes* (azaz 1-dimenziós vektor-altér V-ben).

(a) Ha *f-nek van A fixpontja*, akkor az A-ra illeszkedő, l_0 irányterű egyenes – az előző érveléssel – pontonként fix invariáns egyenese f-nek, és *f l-re vonatkozó tükrözés.*

(b) Tegyük föl, hogy *f-nek nincs fixpontja*! Ekkor a természetes felbontás tétele (*8.16.*) értelmében egyértelműen létezik olyan fixponttal rendelkező g izometria és $v \in \mathrm{Fix}(g)$ vektor, hogy $f = T_v \circ g$. Innen *3.4.*(3) figyelembevételével $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{T_v \circ g} = \overrightarrow{T_v} \circ \overrightarrow{g} = \overrightarrow{g}$, tehát $\overrightarrow{g} = \sigma_{l_0}$ és $v \in l_0$. $v \neq \mathbf{0}$, ellenkező esetben ugyanis $f = g$ adódna, ami lehetetlen, hiszen f-nek nincs, g-nek van fixpontja. Mindez azt jelenti, hogy *f csúsztatva tükrözés*, az eltolási vektor $v \in l_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$, a tükrözés tengelye v irányvektorú egyenes.

(3) $\overrightarrow{f} = \sigma_{m_0} \circ \sigma_{l_0}$, $l_0 \neq m_0$. Indirekt módon okoskodva belátjuk, hogy ekkor $\overrightarrow{f}$-nek nincs $\mathbf{0}$-tól különböző fixvektora. – Tegyük fel, hogy $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ és $\overrightarrow{f}(v) = v$. Ez azzal ekvivalens, hogy $\sigma_{m_0}(v) = \sigma_{l_0}(v)$. Ha $\overrightarrow{n_l}$ az l, $\overrightarrow{n_m}$ az m egyenes normálegységvektora, akkor *8.2.*(5) alapján

$$v - 2\langle v, \overrightarrow{n_l}\rangle \overrightarrow{n_l} = v - 2\langle v, \overrightarrow{n_m}\rangle \overrightarrow{n_m} \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, \overrightarrow{n_l}\rangle \overrightarrow{n_l} = \langle v, \overrightarrow{n_m}\rangle \overrightarrow{n_m}\,.$$

Mivel $l_0 \neq m_0$, $\overrightarrow{n_l}$ és $\overrightarrow{n_m}$ lineárisan független, innen $\langle v, \overrightarrow{n_l}\rangle = \langle v, \overrightarrow{n_m}\rangle = 0$ következik. Ez azt jelenti, hogy v ortogonális V minden vektorára, ami csak úgy lehetséges, hogy $v = \mathbf{0}$, s így *8.17.* értelmében f-nek egyetlen fixpontja van, amivel beláttuk, hogy f *pont körüli forgatás*.

(B) Legyen a továbbiakban $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ a háromdimenziós euklideszi affin tér, és $f \in I(\mathbb{E})$. Minként a síkbeli esetben, f lehetséges típusainak áttekintéséhez most is az $\overrightarrow{f} \in O(V)$ linearizált vizsgálatán keresztül jutunk el.

(1) Ha f *irányítástartó*, akkor $\overrightarrow{f} \in O^+(V)$ és két alapeset adódik:

(a) $\overrightarrow{f} = 1_V$ – ekkor f *transzláció*;

(b) $\overrightarrow{f}$ mátrixa alkalmas (e_1, e_2, e_3) ortonormált bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in]0, 2\pi[.$$

Ekkor $\overrightarrow{f}$ egyetlen sajátértéke az 1, és $V_{(1)} = \mathscr{L}(e_1)$ pontonként fix egydimenziós invariáns altér.

(b$_1$) Ha f-nek *van fixpontja*, akkor f *tengely körüli forgatás*, a tengely a fixpontra illeszkedő, $\mathscr{L}(e_1)$ irányú egyenes (ld. *8.19.*(2)).

(b$_2$) Amennyiben f-nek *nincs fixpontja*, úgy – ismét *8.16.*-ra való hivatkozással – $f = T_v \circ g$ alakú előállítás lehetséges, ahol g fixponttal rendelkező izometria és $v \in \overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)}$. Azonban $\overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)} = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{g} - 1_V\right) = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) = \mathscr{L}(e_1)$, tehát f *csavarmozgás*: $\mathscr{L}(e_1)$ irányú tengely körüli forgatás és $v \in \mathscr{L}(e_1) \setminus \{\mathbf{0}\}$ eltolási vektorral rendelkező transzláció kompozíciója.

(2) f *irányításváltó*, azaz a definíció értelmében $\overrightarrow{f} \in O^-(V)$. Ekkor $\det \overrightarrow{f} = -1$, s $\overrightarrow{f}$-nek a V iránytér egy alkalmas $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ortonormált bázisra vonatkozó mátrixa a *8.1.*(2)-ben mondottaknak megfelelően kétféle lehet.

(a) $M_{\mathscr{E}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Ekkor $\dim \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right) = 2$, tehát az 1 sajátértéke $\overrightarrow{f}$-nek, mégpedig 2 geometriai multiplicitással. A megfelelő sajátaltér:

$$U := \mathscr{L}(e_1, e_2) = \mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$$

pontonként fix 2-dimenziós invariáns altere az $\overrightarrow{f}$ linearizáltnak, amely ily módon U-ra való (lineáris) tükrözést jelent.

(a$_1$) Ha f-nek van A fixpontja és $\mathbb{H}$ az A-ra illeszkedő, U iránytérű sík, akkor $f = \sigma_{\mathbb{H}}$ (síkra vonatkozó tükrözés).

(a$_2$) Amennyiben f-nek nincs fixpontja, akkor ismét a természetes felbontás tétele alapján

$$f = T_v \circ g$$

írható, ahol g fixponttal rendelkező izometria és $v\ \in \overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)} \setminus \{\mathbf{0}\}$. A már többször alkalmazott érveléssel $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$, így $\overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)} = U$; f tehát *csúsztatva tükrözés*, a szimmetriasíkjának iránytere $\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - 1_V\right)$, a transzláció-rész eltolási vektora $\overrightarrow{f}$-nek fixvektora.

(b) $M_{\mathscr{E}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta \in]0, 2\pi[)$

Ekkor $\overrightarrow{f}$ egyetlen (valós) sajátértéke a -1, s mivel $\dim\left(\mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f} - 1_V\right) = 0$, *$f$-nek (8.17.* értelmében) *egyetlenegy fixpontja van.* Az $M_{\mathscr{E}}\left(\overrightarrow{f}\right)$ mátrixot a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

szorzatként állítva elő, látható, hogy az $\overrightarrow{f}$ linearizált a $\mathscr{L}(e_2, e_3)$ síkra vonatkozó tükrözés és a $\mathscr{L}(e_1)$ tengely körüli forgatás kompozíciója, amiből következik, hogy maga *f forgatva tükrözés.* A tükrözés síkja a fixpontra illeszkedő, $\mathscr{L}(e_2, e_3)$ iránytérű sík, a forgatás tengelye erre merőleges, s szintén átmegy a fixponton.

$\square$

8.21. Lemma.

(1) Az euklideszi affin terek homotéciái hasonlóságok, mégpedig egy $\lambda \in \mathbb{R}^*$ arányú homotécia $|\lambda|$ arányú hasonlóság.

(2) Egy euklideszi affin tér minden hasonlósága előállítható egy tetszőlegesen előírt középpontú homotécia és egy izometria kompozíciójaként.

Bizonyítás. Legyen adva egy $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér.

(1) Tekintsünk egy

$$H_{O,\lambda} \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad P \mapsto P'$$

homotéciát. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ pontok esetén

$$d(A', B') = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\right\| \overset{3.10.}{=} \left\|\lambda\,\overrightarrow{OB} - \lambda\,\overrightarrow{OA}\right\| =$$
$$= |\lambda| \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\| = |\lambda| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda|\, d(A, B),$$

$H_{O,\lambda}$ tehát valóban $|\lambda|$ arányú hasonlóság (a szürjektívség automatikusan teljesül).

(2) Legyen $f \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E})$ λ arányú hasonlóság ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Kiválasztva egy tetszőleges O pontot mint centrumot, képezzük a $g = H_{O,\frac{1}{\lambda}} \circ f$ transzformációt. Legyen $A, B \in \mathbb{E}$ szintén tetszőleges; $A' := g(A)$, $B' := g(B)$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(A', B') &= \left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = \left\| \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} \right\| = \left\| \overrightarrow{OH_{O,\frac{1}{\lambda}}(f(B))} - \overrightarrow{OH_{O,\frac{1}{\lambda}}(f(A))} \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{Of(B)} - \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{Of(A)} \right\| = \frac{1}{\lambda} \left\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \right\| = \\ &= \frac{1}{\lambda} d(f(A), f(B)) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda d(A, B) = d(A, B); \end{aligned}$$

g tehát izometria, $f = H_{O,\lambda} \circ g$ pedig a kívánt előállítása f-nek.

□

8.22. Állítás. Egy euklideszi affin tér egy transzformációja pontosan akkor hasonlóság, ha olyan affinitás, amelynek linearizáltja egy ortogonális transzformáció pozitív skalárszorosa:

$$f \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E}) \text{ és } \overrightarrow{f} = h_\lambda \circ \varphi, \text{ ahol } \varphi \in O(V), \\ h_\lambda \text{ pedig pozitív arányú homotéciája } V\text{-nek.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ affin tér egy $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ transzformációját.

(1) Tegyük föl először, hogy $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ és $\overrightarrow{f} = \lambda\varphi$, ahol $\varphi \in O(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ esetén

$$\begin{aligned} d(f(A), f(B)) &= \left\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \right\| = \left\| \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \right\| = \left\| \lambda\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \right\| = \\ &= |\lambda| \left\| \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) \right\| = \lambda \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \lambda d(A, B), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $f \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E})$.

(2) Legyen, megfordítva, $f \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E})$. Ha f aránya λ, akkor az előző lemma értelmében

$$f = H_{O,\lambda} \circ g; \qquad g \in I(\mathbb{E}), O \in \mathbb{E}$$

írható; innen *3.4.*(3) figyelembevételével $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{H_{O,\lambda}} \circ \overrightarrow{g}$. Itt *7.10.* értelmében $\overrightarrow{g} \in O(V)$. Mivel tetszőleges $A, B \in \mathbb{E}$ esetén

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_{O,\lambda}(A)H_{O,\lambda}(B)} &= \overrightarrow{OH_{O,\lambda}(B)} - \overrightarrow{OH_{O,\lambda}(A)} = \\ &= \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{AB} = h_\lambda\left(\overrightarrow{AB}\right), \end{aligned}$$

$\overrightarrow{H_{O,\lambda}} = h_\lambda$. Ily módon $\overrightarrow{f} = h_\lambda \circ \overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{g} \in O(V)$ – s ezt kellett belátnunk.

□

8.23. Állítás *(a hasonlóságok fixponttétele). Ha egy hasonlóság nem egybevágóság, akkor létezik egyetlen fixpontja.*

1. bizonyítás. Legyen $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin tér, s tegyük föl, hogy $f \in \mathrm{Sim}(\mathbb{E})$ λ arányú hasonlóság; $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Ha – ráadásul – $0 < \lambda < 1$, akkor f kontrakciója $\mathbb{E}$-nek, amely teljes metrikus tér, s így a Banach-féle fixponttétel értelmében (ld. *6.2.*) f-nek létezik egyetlenegy fixpontja. $\lambda > 1$ esetén f^{-1} $\frac{1}{\lambda}$ (s így 1-nél kisebb) arányú hasonlóság, van tehát egy és csak egy olyan A pont, hogy $f^{-1}(A) = A$. Innen $f(A) = A$ adódik, vagyis A fixpontja f-nek, s további fixpont most sincs.

2. bizonyítás. Tartsuk meg az eddig használt jelöléseket. A *8.22.* állítás értelmében

$$\overrightarrow{f} = \lambda\varphi; \qquad \varphi \in O(V), \lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

Ekkor $\overrightarrow{f}$*-nek az* 1 *nem sajátértéke*, hiszen ha egy nemzérus v vektorra $v = \overrightarrow{f}(v) = \lambda\varphi(v)$, akkor $\|v\| = \|\lambda\varphi(v)\| = \lambda\|v\|$ következik, ami ellentmond annak, hogy $v \neq \mathbf{0}$ és $\lambda \neq 1$. Így azonban a *3.15.* állítás biztosítja, hogy f-nek létezik egyetlenegy fixpontja.

□

8.24. Tétel *(a 2- és 3-dimenziós euklideszi affin terek hasonlóságainak osztályozása).*

(1) Az euklideszi sík minden nemizometrikus, *irányítástartó* hasonlósága egy közös centrumú pont körüli forgatás és egy pozitív arányú homotécia kompozíciója („forgatva nyújtás"). A közös centrum a hasonlóság fixpontja, a transzformációk sorrendje közömbös.

(2) Az euklideszi sík minden nemizometrikus, *irányításváltó* hasonlósága egy tengelyes tükrözés és egy pozitív arányú homotécia kompozíciója. A homotécia centruma a hasonlóság fixpontja és illeszkedik a tengelyre, a transzformációk sorrendje közömbös.

(3) Az euklideszi tér minden nemizometrikus *irányítástartó* hasonlósága egy tengely körüli forgatás és egy pozitív arányú homotécia kompozíciója. A homotécia centruma a hasonlóság fixpontja és illeszkedik a tengelyre, a transzformációk felcserélhetők.

(4) Az euklideszi tér minden *irányításváltó* hasonlósága egy forgatva tükrözés és egy pozitív arányú homotécia kompozíciója. A homotécia centruma a hasonlóság fixpontja és illeszkedik a forgatás tengelyére; a forgatva tükrözés és a homotécia felcserélhető.

Forgatásként minden esetben megengedjük az identikus transzformációt is.

Bizonyítás. Vektorizáljuk az adott $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin teret ($\dim \mathbb{E} \in \{1, 2\}$) a vizsgált hasonlóság O fixpontjában! Ekkor *8.22.* alapján a hasonlóság az $\mathbb{E}_0 \cong V$ vektorizált

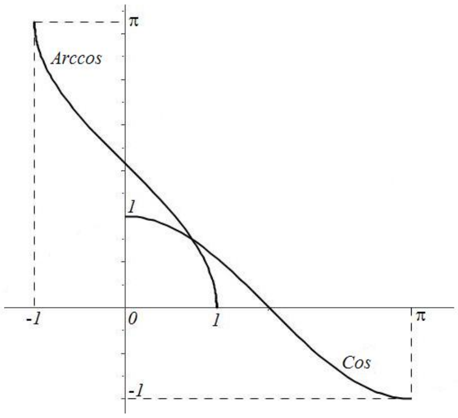
$$h_\lambda \circ \varphi; \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \varphi \in O(V)$$

alakú transzformációjával azonosítható. A φ-re adódó lehetőségeket leírja *8.1.*(2), ezek áttekintésével a megadott osztályozáshoz jutunk.

□

9. Szögmérték. Egybevágósági tételek

9.1. Emlékeztető.
(1) A cos függvény bijektíven, mégpedig szigorúan monoton csökkenő módon képezi le a $[0,\pi]$ zárt intervallumot a $[-1,1]$ zárt intervallumra. Így a $\mathrm{Cos} := \cos \restriction [0,\pi]$ függvény invertálható, inverzére az Arccos vagy a Cos^{-1} jelölést használjuk; ez $[-1,1]$-ról $[0,\pi]$-re való bijektív – szigorúan monoton csökkenő – leképezés.



A cos és az Arccos függvények grafikonja

(2) Legyenek u és v egy euklideszi vektortér nemzérus vektorai. A CBS-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1;$$

$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v$ pozitív skalárszorosa u-nak;
$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad v$ negatív skalárszorosa u-nak.
Létezik ily módon egy és csak egy olyan $\theta \in [0,\pi]$ szám, amelyre

$$\theta = \mathrm{Cos}^{-1}\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

teljesül, ezt az u és v *vektorok szögé*nek nevezzük.

9.2. Lemma. $\mathrm{Cos}^{-1}(t) + \mathrm{Cos}^{-1}(-t) = \pi$ minden $t \in [-1,1]$ esetén.

Bizonyítás. Az addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\cos(\pi - \mathrm{Cos}^{-1}(-t)) = (cos\pi)(-t) + \sin\pi\sin(\mathrm{Cos}^{-1}(-t)) = (-1)(-t) = t,$$

ami azt jelenti, hogy $\pi - \mathrm{Cos}^{-1}(-t) = \mathrm{Cos}^{-1}(t)$.

$\square$

9.3. Definíció. Legyenek O, A, B egy euklideszi affin tér pontjai, s tegyük fel, hogy $O \neq A$ és $O \neq B$. Az $AOB\sphericalangle$ **euklideszi mérték**én (vagy egyszerűen **mérték**én) az

$$m(AOB\sphericalangle) := \mathrm{Cos}^{-1} \frac{\left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{OA} \right\| \left\| \overrightarrow{OB} \right\|} \in [0, \pi]$$

valós számot értjük.

9.4. Megjegyzések.
(1) Egy $AOB\sphericalangle$ $\overrightarrow{OA}$, illetve $\overrightarrow{OB}$ *szögszár*ának *irányvektorán* olyan u, illetve v vektort értünk, amelyre

$$\overrightarrow{OA} = \lambda u, \quad \lambda > 0; \qquad \text{illetve} \qquad \overrightarrow{OB} = \mu v, \quad \mu > 0$$

teljesül. Közvetlenül látható, hogy

$$m\,(AOB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

ahol u, illetve v az $\overrightarrow{OA}$, illetve az $\overrightarrow{OB}$ szögszár *tetszőleges* irányvektora. Ha speciálisan irányvektorként u, illetve v *egységvektor*t választunk, akkor

$$m(AOB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1} \langle u, v \rangle .$$

(2) Tegyük fel, hogy az $AOB\sphericalangle$ az $\mathbb{E}$ euklideszi affin síkon van adva, s legyen az $\overrightarrow{OA}$, illetve $\overrightarrow{OB}$ szögszár irányvektora az u, illetve a v *egységvektor*. Jelöljük ki $\mathbb{E}$-nek egy $(O; (e_1, e_2))$ ortonormált koordinátarendszerét. Egyszerűen átgondolható, hogy egyértelműen léteznek olyan $\alpha, \beta \in]-\pi, \pi]$ valós számok, amelyekkel

$$u = (\cos\alpha)e_1 + (\sin\alpha)e_2, \quad \text{illetve} \quad v = (\cos\beta)e_1 + (\sin\beta)e_2$$

írható. *Az $AOB\sphericalangle$ euklideszi mértéke az az egyértelműen meghatározott $\theta \in [0, \pi]$ valós szám, amelyre*

$$(*) \qquad R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{vagy} \quad R_\theta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

teljesül, ahol (ld. 8.1.(2)) $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Valóban, ha $\theta = m(AOB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1} \langle u, v \rangle$, akkor

$$\cos\theta = \langle u, v \rangle = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta),$$

s így például $\alpha > \beta$ esetén $\theta = \alpha - \beta$ és

$$R_\theta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Azonosítva az R_θ ortogonális mátrixot az általa reprezentált ortogonális transzformációval, $(*)$ úgy is kifejezhető, hogy

$$R_\theta(u) = v \quad \text{vagy} \quad R_\theta(v) = u.$$

Ezzel az írásmóddal, a feltételek részletezése nélkül, a továbbiakban is élni fogunk.

9.5. Állítás *(az euklideszi szögmérték elemi tulajdonságai)***.** Egy szög euklideszi mértéke

(1) akkor és csak akkor 0, ha a szög a zérusszög;

(2) akkor és csak akkor π, ha a szög egyenesszög;

(3) 0 és π közé esik, ha a szög valódi.

A szögmérték akkor és csak akkor $\frac{\pi}{2}$, ha a száregyenesek merőlegesek.

□

9.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy euklideszi affin tér két szögének egyike a másiknál *nagyobb*, illetve *kisebb*, ha az euklideszi mértékeik között ilyen kapcsolat áll fenn. A $\frac{\pi}{2}$ mértékű szögeket *derékszög*eknek nevezzük; a derékszögnél kisebb szögeket *hegyesszög*eknek, a derékszögnél nagyobbakat *tompaszög*eknek hívjuk.

9.7. Következmény. Egy $AOB\sphericalangle$ akkor és csak akkor hegyesszög, ha $\left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\rangle > 0$; akkor és csak akkor tompaszög, ha $\left\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\rangle < 0$.

□

9.8. Megjegyzés. Legyen $\mathbb{E}$ az euklideszi affin sík. Tekintsünk egy $l \subset \mathbb{E}$ egyenest, amelynek A egy pontja, $\overrightarrow{n}$ pedig egy normálvektora. Egyszerűen megmutatható, hogy az l határegyenesű nyílt félsíkok a következőképpen is megadhatók:

$$\left\{ P \in \mathbb{E} \mid \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle > 0 \right\}, \quad \text{illetve} \quad \left\{ P \in \mathbb{E} \mid \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle < 0 \right\}$$

($O \in \mathbb{E}$ tetszőlegesen rögzített origó).

9.9. Állítás *(az euklideszi szögmérték teljessége)***.** Legyen $\mathring{\mathscr{H}}$ nyílt félsíkja az $\mathbb{E}$ euklideszi affin síknak, s legyen $\overrightarrow{OA}$ egy félegyenes $\mathring{\mathscr{H}}$ határegyenesén.

Minden $\theta \in]0,\pi[$ valós számhoz létezik egy és csak egy olyan $\overrightarrow{OB}$ félegyenes, hogy $B \in \overset{\circ}{\mathscr{K}}$ és $m(AOB\sphericalangle) = \theta$.

Bizonyítás. Legyen v egységhosszúságú irányvektora az $\overrightarrow{OA}$ félegyenesnek, $\overrightarrow{n}$ pedig legyen v-re merőleges egységvektor. Az O pontot origónak választva, föltehetjük, hogy

$$\overset{\circ}{\mathscr{K}} = \left\{ P \in \mathbb{E} \mid \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} > 0 \right\rangle \right\}.$$

Tekintsük azt a B pontot, amelynek helyzetvektora

$$\overrightarrow{OB} := (\cos\theta)v + (\sin\theta)\overrightarrow{n}\ .$$

Mivel $\overrightarrow{OA} = \lambda v$ $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$,

$$\left\langle \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \left\langle (\cos\theta)v + (\sin\theta)\overrightarrow{n} - \lambda v, \overrightarrow{n} \right\rangle = \sin\theta > 0,$$

következésképpen $B \in \overset{\circ}{\mathscr{K}}$. $\overrightarrow{OB}$ (szintén) egységvektor, ezért

$$m(AOB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\left\langle v, (\cos\theta)v + (\sin\theta)\overrightarrow{n} \right\rangle = \mathrm{Cos}^{-1}(\cos\theta) = \theta,$$

amivel beláttuk, hogy az $\overrightarrow{OB}$ félegyenes a kívánt tulajdonságú.
Hátra van még az egyértelműség igazolása. Tegyük föl, hogy $B' \in \overset{\circ}{\mathscr{K}}$ olyan pont, amelyre $m(AOB'\sphericalangle) = \theta$ teljesül. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB}$.
Legyen w irány-egységvektora $\overrightarrow{OB'}$-nek. Mivel $\left(v, \overrightarrow{n}\right)$ ortonormált bázisa az iránytérnek, a Fourier-előállítáa (*6.7.*(3)) alapján

$$w = \langle w, v\rangle\, v + \left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}$$

írható. A feltétel értelmében $\theta = m(AOB'\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\langle w, v\rangle$; innen $\langle w, v\rangle = \cos\theta$, s így

$$w = (\cos\theta)v + \left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle \overrightarrow{n}\ .$$

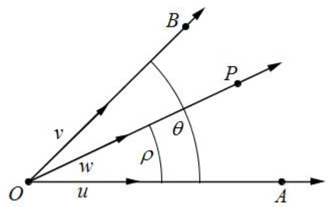
Felhasználva, hogy $1 = \|w\| = \cos^2\theta + \left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle^2$, azt kapjuk, hogy $\left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sin\theta$. $B' \in \overset{\circ}{\mathscr{K}}$ miatt $\left\langle \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \right\rangle > 0$, ami azt adja, hogy $\left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle > 0$, következésképpen $\left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle = \sin\theta$ és $w = (\cos\theta)v + (\sin\theta)\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OB}$. Így $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB}$ valóban teljesül.

□

9.10. Lemma. Legyen adva az euklideszi affin síkon egy valódi $AOB\sphericalangle$. Ha P belső pontja a szögnek, akkor $m(AOP\sphericalangle) < m(AOB\sphericalangle)$.

Bizonyítás. Legyenek u, v és w az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OP}$ szögszárak egységhosszúságú irányvektorai. Jelöljön $u^\perp$ u-ra, $v^\perp$ v-re merőleges egységvektort. Mivel $P \in \mathrm{Int}OAB\sphericalangle$, $\left\langle w, u^\perp \right\rangle$ és $\left\langle v, u^\perp \right\rangle$ azonos előjelű. Legyen $\overrightarrow{n} \in \left\{u^\perp, -u^\perp\right\}$ az a vektor, amelyre $\left\langle w, \overrightarrow{n} \right\rangle > 0$. Ekkor az előző bizonyításban látottak szerint

$$w = (\cos\varrho)u + (\sin\varrho)\overrightarrow{n} \quad \text{és} \quad v = (\cos\theta)u + (\sin\theta)\overrightarrow{n}$$



írható, ahol $\varrho = m(AOP\sphericalangle)$ $\theta = m(AOB\sphericalangle)$. Így

$$v^{\perp} = \pm \left((\sin\theta)u - (\cos\theta)\,\overrightarrow{n}\right)$$

következik. $P \in \mathrm{Int}OAB\sphericalangle$ miatt $\left\langle u, v^{\perp}\right\rangle$ és $\left\langle w, v^{\perp}\right\rangle$ is azonos előjelű. Mivel $\left\langle(\sin\theta)u - (\cos\theta)\,\overrightarrow{n}, u\right\rangle > 0$, így

$$\left\langle(\cos\varrho)u + (\sin\varrho)\,\overrightarrow{n}, (\sin\theta)u - (\cos\theta)\,\overrightarrow{n}\right\rangle = \cos\varrho\sin\theta - \sin\varrho\cos\theta > 0$$

adódik. Az utóbbi relációból azt kapjuk, hogy

$$\sin\varrho\cos\theta < \cos\varrho\sin\theta, \quad \text{illetve} \quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta} < \frac{\cos\varrho}{\sin\varrho}, \quad \text{azaz} \quad \mathrm{ctg}\theta < \mathrm{ctg}\varrho.$$

(Az osztások lehetségesek voltak, mert $\theta, \varrho \in]0, \pi[$, és $]0, \pi[$ fölött a sin függvény pozitív). A ctg függvény $]0, \pi[$-n szigorúan monoton csökken, így az utóbbi relációból $\varrho < \theta$, azaz $m(AOP\sphericalangle) < m(AOB\sphericalangle)$ következik – s ezt akartuk belátni.

□

9.11. Lemma. Legyen az $AOB\sphericalangle$ egyenesszög az $\mathbb{E}$ euklideszi síkon, s legyen $P \in \mathbb{E} \setminus \overleftrightarrow{AB}$ tetszőleges pont. Ekkor $m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = \pi$.

Bizonyítás. Legyenek u, v és w rendre az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$ szögszárak egységhosszúságú irányvektorai. Mivel az $AOB\sphericalangle$ egyenesszög, A és B az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes különböző O kezdőpontú félegyeneseihez tartoznak, s ezért $v = -u$. Így

$$m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}(\langle u, w\rangle) + \mathrm{Cos}^{-1}(\langle w - u\rangle) =$$
$$= \mathrm{Cos}^{-1}(\langle u, w\rangle) + \mathrm{Cos}^{-1}(-\langle w - u\rangle) \overset{9.2.}{=} \pi.$$

□

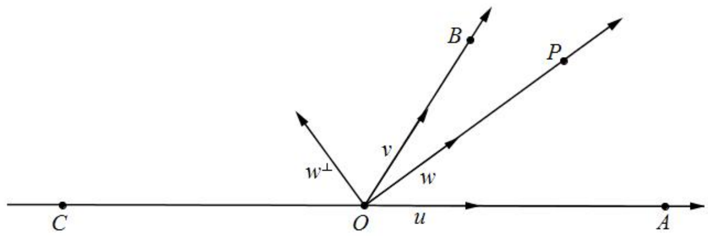
9.12. Tétel. *Az euklideszi szögmérték rendelkezik az additivitás tulajdonságával*: ha $P \in \mathrm{Int}AOB\sphericalangle$, akkor

$$m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = m(AOB\sphericalangle).$$

Bizonyítás.

(1) Azt igazoljuk először, hogy

$$m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) \leq \pi.$$



Legyen ebből a célból $C \in \overleftrightarrow{OA} \setminus \overrightarrow{OA}$ tetszőleges. A *9.10.* és *9.11.* lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$m(POB\sphericalangle) \leq m(POC\sphericalangle) = \pi - m(AOP\sphericalangle),$$

innen valóban a kívánt reláció következik.
(2) Legyen u, v és w rendre az $\overrightarrow{OA}$, az $\overrightarrow{OB}$, és az $\overrightarrow{OP}$ szögszár egységhosszúságú irányvektora, s jelöljön $w^\perp$ w-re merőleges egységvektort. (Ekkor $\left(w, w^\perp\right)$ ortonormált bázisa az iránytérnek.) Tudjuk, hogy

$$m(AOP\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\langle u, w\rangle, \quad m(POB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\langle v, w\rangle,$$
$$m(AOB\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\langle u, v\rangle.$$

Az addíciós tétel alapján

$$\begin{aligned}\cos(m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle)) &= cos\left(\mathrm{Cos}^{-1}\langle u, w\rangle + \mathrm{Cos}^{-1}\langle v, w\rangle\right) = \\ &= \langle u, w\rangle\langle v, w\rangle - \sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}\langle u, w\rangle\right)\sin\left(\mathrm{Cos}^{-1}\langle v, w\rangle\right) = \\ &= \langle u, w\rangle\langle v, w\rangle - \sqrt{1 - \langle u, w\rangle^2}\sqrt{1 - \langle v, w\rangle^2}.\end{aligned}$$

A $\left(w, w^\perp\right)$ bázisra vonatkozó Fourier-előállítást alkalmazva

$$u = \langle u, w\rangle w + \left\langle u, w^\perp\right\rangle w^\perp,$$

írható, s mivel $\|u\|^2 = 1$, innen $\langle u, w\rangle^2 + \left\langle u, w^\perp\right\rangle^2 = 1$, illetve
Innen

$$\sqrt{1 - \langle u, w\rangle^2} = \pm\left\langle u, w^\perp\right\rangle$$

következik. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\sqrt{1 - \langle v, w\rangle^2} = \pm\left\langle v, w^\perp\right\rangle.$$

$P \in \mathrm{Int}ABD\sphericalangle$ miatt A és B az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes különböző oldalain van, s ezért $\left\langle u, w^\perp\right\rangle$ és $\left\langle v, w^\perp\right\rangle$ ellentétes előjelű, következésképpen $\sqrt{1 - \langle u, w\rangle^2}\sqrt{1 - \langle v, w\rangle^2} = -\left\langle u, w^\perp\right\rangle\left\langle v, w^\perp\right\rangle$. Így a fentebb nyert reláció az alábbi módon alakítható:

$$\begin{aligned}\cos(m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle)) &= \langle u, w\rangle\langle v, w\rangle + \left\langle u, w^\perp\right\rangle\left\langle v, w^\perp\right\rangle = \\ &= \left\langle v, \langle u, w\rangle w + \left\langle u, w^\perp\right\rangle w^\perp\right\rangle = \langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle = \cos(m(AOB\sphericalangle)).\end{aligned}$$

Az (1)-ben tett észrevételre tekintettel a cos függvény argumentumában levő számok mind a bal, mind a jobb oldalon $[0, \pi]$ intervallumból valók, amely fölött a cos bijektív; így a nyert eredményből a kívánt

$$m(AOP\sphericalangle) + m(POB\sphericalangle) = m(AOB\sphericalangle)$$

relációhoz jutunk.

□

9.13. Állítás. Az euklideszi affin sík két szöge akkor és csak akkor egybevágó, ha egyenlő az euklideszi szögmértékük.

Bizonyítás. Legyen adva az $(\mathbb{E}, V, \Phi)$ euklideszi affin síkon az $\mathscr{A} = ACB\sphericalangle$ és az $\mathscr{A}' = A'C'B'\sphericalangle$, s legyenek a $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ szögszárak egységhosszúságú irányvektorai rendre u, v, u', v' .
(1) Ha $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}'$, akkor – definíció szerint – van olyan $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ izometria, hogy $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$. Mivel az izometriák affinitások, f $\mathscr{A}$ száregyeneseit $\mathscr{A}'$ száregyeneseibe, s így $\mathscr{A}$ csúcsát $\mathscr{A}'$ csácsába viszi át, és egyben az is következik, hogy $\mathscr{A}$ szárainak képei $\mathscr{A}'$-nek szárai. Az $\overrightarrow{f}$ linearizált ortogonális transzformáció, s világos a mondottakból, hogy $\overrightarrow{f}(u)$ és $\overrightarrow{f}(v)$ $\mathscr{A}'$ szárainak egységhosszúságú irányvektorai. $\overrightarrow{f}$ ortogonalitásának felhasználásával

$$m(A'C'B'\sphericalangle) = \mathrm{Cos}^{-1}\left(\left\langle \overrightarrow{f}(u), \overrightarrow{f}(v)\right\rangle\right) = \mathrm{Cos}^{-1}(\langle u, v\rangle) = m(ACB\sphericalangle),$$

amivel beláttuk, hogy *kongruens szögeknek egyenlő az euklideszi mértéke.*
(2) Megfordítva, tegyük föl, hogy

$$m(ACB\sphericalangle) = m(A'C'B'\sphericalangle) = \alpha.$$

Az is föltehető (ld. *9.4.*(2)), hogy

$$R_\alpha(u) = v, \quad R_\alpha(u') = v', \qquad R_\alpha \in O(V).$$

Jelöljön $u^\perp$ u-ra ortogonális egységvektort, s jelentse $\beta \in [0, \pi]$ azt a számot, amelyre

$$u' = (\cos\beta)u + (\sin\beta)u^\perp = R_\beta(u).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} v' = R_\alpha(u') = R_\alpha \circ R_\beta(u) = R_{\alpha+\beta}(u) = R_{\beta+\alpha}(u) = \\ = R_\beta \circ R_\alpha(u) = R_\beta(v), \end{aligned}$$

tehát az R_β ortogonális transzformációnál

$$R_\beta(u) = u' \quad \text{és} \quad R_\beta(v) = v'. \qquad (*)$$

3.5. értelmében létezik egy és csak egy olyan $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ affinitás, amelyre

$$f(C) = C' \quad \text{és} \quad \overrightarrow{f} = R_\beta$$

teljesül. Ekkor f izometria; megmutatjuk, hogy $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$.
Egy O origó rögzítése után a $\overrightarrow{CA}$ szögszár tetszőleges P pontjának helyzetvektora

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\tau u, \qquad \tau \in \mathbb{R}_+^*.$$

Így

$$\overrightarrow{Of(P)}=\overrightarrow{Of(C)}+\overrightarrow{f(C)f(P)}=\overrightarrow{OC'}+\vec{f}\left(\overrightarrow{CP}\right)=\overrightarrow{OC'}+\vec{f}\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}\right)=$$

$$=\overrightarrow{OC'}+R_\beta(\tau u)=\overrightarrow{OC'}+\tau R_\beta(u)\overset{(*)}{=}\overrightarrow{OC'}+\tau u'$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $f(P)\in\overrightarrow{C'A'}$; következésképpen $f\left(\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{C'A'}$.
Hasonló módon, tetszőleges $Q\in\overrightarrow{CB}$ esetén $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) és

$$\overrightarrow{Of(Q)}=\overrightarrow{Of(C)}+\overrightarrow{f(C)f(Q)}=\overrightarrow{OC'}+\vec{f}\left(\overrightarrow{CQ}\right)=\overrightarrow{OC'}+R_\beta(\lambda v)=$$

$$=\overrightarrow{OC'}+\lambda R_\beta(v)\overset{(*)}{=}\overrightarrow{OC'}+\tau v',$$

tehát $f(Q)\in\overrightarrow{C'B'}$, s így $f\left(\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{C'B'}$ következik. Beláttuk ily módon, hogy $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$, s ezzel igazoltuk $\mathscr{A}$ és $\mathscr{A}'$ egybevágóságát.

□

Megjegyzés. Az állítás minden euklideszi affin térben igaz, de az általános esetben a bizonyítás hosszabb.

9.14. Lemma *(konjugálási szabály tükrözésekre)*. Legyen l egy egyenese az $\mathbb{E}$ euklideszi affin síknak, s tekintsük a σ_l tengelyes tükrözést. Ha $g\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ tetszőleges izometria, akkor a $g^{-1}\circ\sigma_l\circ g$ transzformáció is tengelyes tükrözés, mégpedig

$$g^{-1}\circ\sigma_l\circ g=\sigma_{g^{-1}(l)}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy g^{-1} szintén izometria, s így egyben affinitás; ezért $g^{-1}(l)$ egyenes. Tetszőleges $P\in g^{-1}(l)$ pont esetén $g(P)\in l$ miatt

$$g^{-1}\circ\sigma_l\circ g(P)=g^{-1}\left(g(P)\right)=P;$$

$g^{-1}(l)$ tehát pontonként fix egyenese a $g^{-1}\circ\sigma_l\circ g$ transzformációnak. $g^{-1}\circ\sigma_l\circ g\neq 1_{\mathbb{E}}$, ellenkező esetben ugyanis $\sigma_l\circ g=g$, innen pedig $\sigma_l=1_{\mathbb{E}}$ adódna, ami lehetetlen. Így $g^{-1}\circ\sigma_l\circ g$ olyan izometriája az euklideszi affin síknak, amelynek van egyetlenegy pontonként fix invariáns egyenese – a $g^{-1}(l)$ egyenes –; következésképpen $g^{-1}\circ\sigma_l\circ g=\sigma_{g^{-1}(l)}$.

□

9.15. Következmény. Legyenek l és m az euklideszi affin sík különböző egyenesei. A σ_l és a σ_m tengelyes tükrözés akkor és csak akkor felcserélhető, ha a tengelyeik merőlegesek:

$$\sigma_l\circ\sigma_m=\sigma_m\circ\sigma_l \qquad \Leftrightarrow \qquad l\perp m.$$

Bizonyítás.

(1) Tegyük fel először, hogy $l \perp m$. Ekkor $\sigma_l(m) = m$, s így egyben $\sigma_l^{-1}(m) = m$, és a konjugálási szabály alkalmazásával a

$$\sigma_l^{-1} \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_{\sigma_l^{-1}(m)} = \sigma_m$$

relációhoz jutunk. Innen

$$\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_l \circ \sigma_m,$$

a két tengelyes tükrözés tehát felcserélhető.

(2) Megfordítva, tegyük föl, hogy $\sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_l \circ \sigma_m$ teljesülését. Innen (komponálva mindkét oldalt σ_l^{-1}-gyel)

$$\sigma_l^{-1} \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_{\sigma_m}.$$

Másrészt, a konjugálási szabály értelmében ,

$$\sigma_l^{-1} \circ \sigma_m \circ \sigma_l = \sigma_{\sigma_l^{-1}(m)}.$$

A két relációt összevetve ,

$$\sigma_{\sigma_l^{-1}(m)} = \sigma_m$$

adódik, amiből $\sigma_l^{-1}(m) = m$, illetve $m = \sigma_l(m)$ következik (hiszen a tengelyes tükrözést egyértelműen meghatározza a tengelye). Azt kaptuk, hogy m invariáns egyenese σ_l-nek, $m \neq l$ miatt csak úgy lehetséges, hogy $m \perp l$.

□

9.16. Definíció és lemma. Legyenek l és m az euklideszi affin sík egymásra merőleges egyenesei, a metszéspontjukat jelölje F. A

$$\varrho_F := \sigma_l \circ \sigma_m = \sigma_m \circ \sigma_l$$

transzformációt F *centrumú* **középpontos tükrözés**nek vagy F *körüli* **félforgatás**nak nevezzük. Rögzítve egy O origót,

$$\forall P \in M : \quad \overrightarrow{O\varrho_F(P)} = -\overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{OF};$$

tehát tetszőleges F-től különböző pont képpontja az a $\varrho_F(P)$ pont, amelyre teljesül, hogy F felezőpontja a $\overline{P\varrho_F(P)}$ szakasznak.

Bizonyítás. Jelölje $\overrightarrow{n_l}$, illetve $\overrightarrow{n_m}$ az l, illetve az m egyenes egy-egy egységhosszúságú normálvektorát. Ekkor (ld. *8.9.*) tetszőleges $P \in \mathbb{E}$ pont esetén

$$\overrightarrow{O\sigma_l(P)} = \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_l} \right\rangle \overrightarrow{n_l} =: \overrightarrow{OP'},$$

$$\overrightarrow{O\sigma_m(P')} = \overrightarrow{OP'} - 2\left\langle \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_m} \right\rangle \overrightarrow{n_m} =$$

$$= \overrightarrow{OP} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_l} \right\rangle \overrightarrow{n_l} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF} - 2\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_l} \right\rangle \overrightarrow{n_l}, \overrightarrow{n_m} \right\rangle \overrightarrow{n_m} =$$

$$= \overrightarrow{OP} - 2\left(\left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_l} \right\rangle \overrightarrow{n_l} + \left\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{n_m} \right\rangle \overrightarrow{n_m} \right) =$$

$$= \overrightarrow{OP} - 2\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF} \right) = -\overrightarrow{OP} + 2\,\overrightarrow{OF}$$

(felhasználva, hogy $l \perp m$ miatt $\langle \overrightarrow{n_l}, \overrightarrow{n_m} \rangle = 0$, s alkalmazva az $(\overrightarrow{n_l}, \overrightarrow{n_m})$ ortonormált bázis szerinti Fourier-előállítást).

$\square$

9.17. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy euklideszi affin térben két szög *váltószög-pár*t alkot, ha az egyik szög szárainak egységhosszúságú irányvektorai ellentettjei a másik szög egységhosszúságú irányvektorainak.

9.18. Lemma. A váltószögek egybevágók.

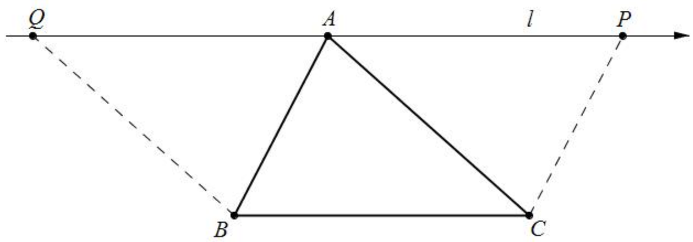
Bizonyítás. Tekintsük az $\mathscr{A}_1 = A_1B_1C_1\sphericalangle$ és $\mathscr{A}_2 = A_2B_2C_2\sphericalangle$ váltószögeket! Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy ezek az euklideszi affin síkon vannak adva, s hogy A_1 és B_1 a C_1 csúcstól, A_2 és B_2 a C_2 csúcstól egységnyi távolságra van. Ha $C_1 = C_2 := C$, akkor C felezőpontja az $\overline{A_1A_2}$ és a $\overline{B_1B_2}$ szakasznak is. Ekkor *9.16.* alkalmazásával $\varrho_C(A_1) = A_2$, $\varrho_C(B_1) = B_2$ adódik, s így $\varrho_C(\mathscr{A}_1) = \mathscr{A}_2$ következik, míg $C_1 \neq C_2$ esetén a $\varrho_{C_2} \circ T_{\overrightarrow{C_1C_2}}$ izometriával teljesül ugyanez.

$\square$

Megjegyzés. Tekintve egy valós affin térben egy ABC háromszöget, azt mondjuk, hogy $A\sphericalangle := BAC\sphericalangle$, $B\sphericalangle := CBA\sphericalangle$ és $C\sphericalangle := ACB\sphericalangle$ a *háromszög szögei.*

9.19. Tétel *(Euklidész).* *Euklideszi affin térben bármely háromszög szögei euklideszi mértékeinek összege π.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy ABC háromszöget. *1.19.* értelmében létezik egy és csak egy olyan l egyenes, amely illeszkedik az A pontra és párhuzamos a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenessel.



Az l egyenes megadható

$$l = \overrightarrow{AP} \cup \overrightarrow{AQ}$$

alakban, ahol – egy O origó rögzítése után –

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC}\,.$$

A B pont belső pontja a $QAC\sphericalangle$-nek, ugyanis az $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC}$ reláció átírható $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ alakba, ahonnan

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OC}\,.$$

Innen kiolvasható, hogy a B pont (A, Q, C) affin bázisra vonatkozó 2. és 3. normált baricentrikus koordinátája pozitív, ebből pedig *5.19.* alapján $B \in \mathrm{Int}QAC\sphericalangle$ következik. Alkalmazva a szögmérték additivitását (*9.12.*),

$$m(QAC\sphericalangle) = m(QAB\sphericalangle) + m(BAC\sphericalangle).$$

Mivel a $QAP\sphericalangle$ egyenesszög, *9.11.* alapján azt kapjuk, hogy $m(QAC\sphericalangle) + m(CAP\sphericalangle) = \pi$, a két utóbbi relációból pedig azt, hogy

$$(*) \qquad m(QAB\sphericalangle) + m(BAC\sphericalangle) + m(CAP\sphericalangle) = \pi.$$

A konstrukcióból kiolvashatóan a $QAB\sphericalangle$ és az $ABC\sphericalangle$, valamint $CAP\sphericalangle$ és az $ACB\sphericalangle$ váltószögek. A váltószögek egybevágók (*9.18.*) és az egybevágó szögek mértéke egyenlő (*9.13.*), így $(*)$-ból a kívánt $m(ABC\sphericalangle) + m(BAC\sphericalangle) + m(ACB\sphericalangle) = \pi$ relációhoz jutunk.

$\square$