9. Euklideszi és nemeuklideszi síkok

Definíció. (1) Egy Hilbert-síkot euklideszi síknak nevezünk, ha érvényes benne a következő, euklideszi párhuzamossági axióma:

(EP) Tetszőlegesen adott egyeneshez és rá nem illeszkedő ponthoz LEGFELJEBB EGY olyan egyenes létezik, amely illeszkedik a pontra és párhuzamos az adott egyenessel.

Klasszikus euklideszi síkon olyan euklideszi síkot értünk, amelyben érvényes a kör-kör metszési axióma. Ha egy euklideszi sík a Dedekind-féle folytonossági axiómának tesz eleget, valós euklideszi síknak mondjuk.

(2) Egy Hilbert-síkot nemeuklideszi síknak nevezünk, ha az euklideszi párhuzamossági axióma tagadása teljesül benne, azaz a következő axióma:

$\neg$(EP) LÉTEZIK olyan egyenes és arra nem illeszkedő pont, hogy a pontra LEGALÁBB KÉT, az adott egyenessel párhuzamos egyenes illeszkedik.

Valós hiperbolikus síkon olyan nemeuklideszi síkot értünk, amely eleget tesz a Dedekind-féle folytonossági axiómának.

Megjegyzések (1) Euklideszi síkban 8.6. (8) és (EP) következményeként adott egyenessel adott ponton át egyetlenegy párhuzamos húzható.

(2) Az értelmezés szerint a valós euklideszi sík olyan abszolút sík, amelyben érvényes az (EP) axióma; ez így megfelel az „euklideszi sík" Geometria I, II tárgyakban tanult fogalmának.

(3) A „klasszikus euklideszi sík" fogalma általánosabb, mint a valós euklideszi síké. Valójában az igen egyszerű (KK) axióma elegendő az elemi geometria céljaihoz, így a klasszikus euklideszi síkok axiómáiból az Elemek I. könyvének szinte valamennyi tétele kifogástalanul levezethető. Ennél a megközelítésnél nincs szükség sem a valós számokra, sem a folytonosságra való hivatkozásra: az euklideszi geometria valódi lényege a legtermészetesebb és leggazdaságosabb módon fejthető ki.

(4) A definíció értelmében a valós hiperbolikus sík olyan abszolút sík, amelyben a $\neg$(EP) axióma érvényes.

Modell a klasszikus euklideszi síkokra

Tegyük fel, hogy K euklideszi test, azaz olyan rendezett test, amelyben minden pozitív elemnek van négyzetgyöke, és tekintsük a K fölötti

$$KA^2 := (K^2, \mathcal{L}_{K^2})$$

affin síkot. K rendezettsége folytán ez ellátható egy $R \subset K^2 \times K^2 \times K^2$ geometriai rendezéssel. Értelmezzünk egy $d : K^2 \times K^2 \longrightarrow K$ függvényt a

$$d(A,B) := \begin{cases} 0, \text{ ha } A = B, \\ \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2}, \text{ ha } A = (\alpha_1, \alpha_2),\ B = (\beta_1, \beta_2) \end{cases}$$

előírással. Az egybevágóságot a d függvény segítségével definiáljuk:

(a) $\overline{AB} \cong \overline{CD} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} d(A,B) = d(C,D)$.

(b) Tekintsünk egy $ABC\measuredangle$-et és egy $DEF\measuredangle$. Válasszuk meg az $A \in \overrightarrow{BA}$, $C \in \overrightarrow{BC}$, $D \in \overrightarrow{ED}$, $F \in \overrightarrow{EF}$ pontokat úgy, hogy $d(B,A) = d(B,C) = d(E,D) = d(E,F) = 1$. Legyen ezek után $ABC\measuredangle \cong DEF\measuredangle \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

Megmutatható, hogy a szakaszok és szögek így értelmezett egybevágóságára (C1) - (C6) teljesül, $(K^2, \mathcal{L}_{K^2}, \mathcal{R}, \cong)$ ily módon Hilbert-sík. Mivel KA^2 affin sík, ebben a Hilbert-síkban (EP) automatikusan teljesül. Abból következően végül, hogy a K test euklideszi, a kapott Hilbert-sík a (KK) axiómának is eleget tesz. Amennyiben a K test Dedekind-rendezett, úgy $K \cong \mathbb{R}$, és a valós euklideszi sík modelljéhez jutunk.

Definíció. (1) Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R}, \cong)$ és egy $(\mathcal{P}', \mathcal{L}'; \mathcal{R}', \cong')$ Hilbert-sík izomorf, ha van olyan

$$\varphi: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}', \quad P \longmapsto \varphi(P) =: P'$$

bijekció, amely

egyenestartó: $l \in \mathcal{L} \iff \varphi(l) \in \mathcal{L}'$;

rendezéstartó: $A - B - C \iff A' - B' - C'$;

egybevágóságtartó: $\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \overline{A'B'} \cong \overline{C'D'}$,

$$ABC\sphericalangle \cong DEF\sphericalangle \iff A'B'C'\sphericalangle \cong D'E'F'\sphericalangle .$$

(2) Egy axiómarendszer kategorikus, ha bármely két modellje izomorf.

METATÉTEL (1) A klasszikus euklideszi síkok axiómarendszere nem kategorikus.

(2) A valós euklideszi sík és a valós hiperbolikus sík axiómarendszere kategorikus. Δ

Definíció. (1) Legyenek A, B, C, D egy rendezett illeszkedési sík általános helyzetű pontjai. Azt mondjuk, hogy

$$ABCD\square := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

négyszög, ha a szereplő szakaszok közül bármely kettőnek legfeljebb végpontja lehet közös. A megadott pontok és a kijelölt szakaszok a négyszög csúcsai, ill. oldalai; az $A\sphericalangle := DAB\sphericalangle$, $B\sphericalangle := ABC\sphericalangle$,

$C\sphericalangle := BCD\sphericalangle$, $D\sphericalangle := CDA\sphericalangle$ szögek a *négyszög szögei*; $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ az *átlói*.

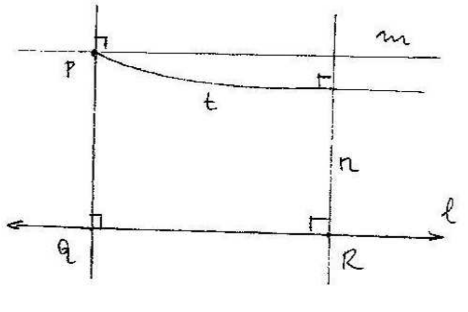
(2) Hilbert-síkban egy négyszög *Lambert-négyszög*, ha van három derékszöge; *téglalap*, ha minden szöge derékszög. Egy Hilbert-síkot *szemieuklideszinek* nevezünk, ha valamennyi Lambert-négyszöge téglalap.

(3) Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-síkban érvényes a *hegyesszög-hipotézis*, ha minden Lambert-négyszögének van hegyesszöge.

Megjegyzések. (1) Lambert-négyszög minden Hilbert-síkban létezik. Ennek három szöge a definíció szerint derékszög; a megmaradó hegyesszög, derékszög és tompaszög egyaránt lehet. Megmutatható, hogy abszolút síkban ez a „negyedik szög" csak derékszög vagy hegyesszög lehet. (2) Téglalap létezésével kapcsolatban egy Hilbert-síkban semmi nem mondható.

9.1. állítás ($\neg$(EP) univerzalitása). Ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor BÁRMELY egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén LEGALÁBB KÉT olyan egyenes van, amely illeszkedik a pontra és párhuzamos az egyenessel.

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{P},\mathcal{L};\mathcal{R},\cong)$ Hilbert-sík; $l\in\mathcal{L}$, $P\notin l$ tetszőleges. Egyértelműen létezik olyan $Q\in l$



pont, hogy $\overleftrightarrow{PQ}\perp l$ (8.6.(7)). Hasonló módon:

$$\exists!\, m\in\mathcal{L}:\ m\perp\overleftrightarrow{PQ},\ P\in m.$$

Válasszunk tetszőlegesen egy $R\in l\setminus\{Q\}$ pontot, és legyen n az R-en átmenő, l-re merőleges egyenes. Tekintsük végül azt az egyetlen, P-n átmenő t egyenest, amely merőleges n-re. Ekkor

$m \parallel l$ (mert $\overleftrightarrow{PQ}$ közös merőlegesük) és $P \in m$,

$t \parallel l$ (mert n közös merőlegesük) és $P \in t$,

$m \neq t$, ellenkező esetben ui. létezne téglalap.

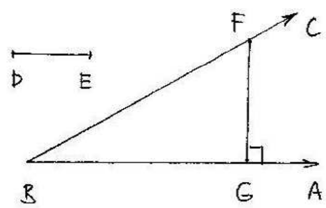
P-re tehát legalább két l-lel párhuzamos egyenes illeszkedik. □

<u>9.2. Következmény.</u> Ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor a sík bármely pontján át végtelen sok olyan egyenes halad, amely párhuzamos egy, a pontra nem illeszkedő adott egyenessel.

<u>Bizonyítás.</u> Ha az előző konstrukcióban változtatjuk az R pontot, akkor további, P-n átmenő, l-lel párhuzamos egyenesekhez jutunk. Ezek különbözők, ellenkező esetben létezne téglalap. □

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-sík <u>eleget tesz Arisztotelész axiómájának</u>, ha teljesül benne a következő:

> Megadva egy ABC hegyesszöget és egy $\overline{DE}$ szakaszt, létezik olyan $F \in \overrightarrow{BC}$ pont, hogy ha G az F-ből $\overleftrightarrow{BA}$-ra bocsátott merőleges talppontja, akkor
> $\overline{FG} > \overline{DE}$.

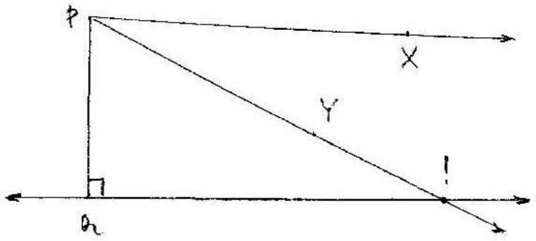


<u>9.3. Tétel.</u> (1) (<u>Marvin Greenberg, 2008.</u>) Ha egy Hilbert-sík eleget tesz Arisztotelész axiómájának, akkor vagy nemeuklideszi sík, vagy pedig a hegyesszög-hipotézis teljesül benne.

(2) Ha egy Hilbert-sík eleget tesz Arisztotelész axiómájának és érvényes benne az egyenes-kör metszési tulajdonság, akkor a valós euklideszi,

vagy a valós hiperbolikus sík. Speciálisan: egy abszolút sík csakis a valós euklideszi vagy a valós hiperbolikus sík lehet. Δ

Definíció. (1) Legyen adva egy Hilbert-síkban egy l egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont. A P-ből l-re bocsátott merőleges talppontját jelölje Q. Azt mondjuk, hogy egy $\overrightarrow{PX}$ félegyenes



a P-ből induló, l-lel határpárhuzamos vagy kritikusan párhuzamos félegyenes, ha nem metszi l-et, de minden olyan $\overrightarrow{PY}$ félegyenes metszi l-et, ahol Y az az $XPQ\sphericalangle$ belső pontja.

(2) Egy Hilbert-síkot hiperbolikus síknak nevezünk, ha teljesül benne a következő, Hilbert-féle hiperbolikus párhuzamossági axióma:

(HP) Bármely l egyeneshez és bármely $P \notin l$ ponthoz létezik olyan l-lel határpárhuzamos $\overrightarrow{PX}$ félegyenes, amely nem merőleges a P-ből l-re bocsátott merőlegesre.

9.4. Következmények. (1) Minden hiperbolikus sík nem-euklideszi sík. (2) Hiperbolikus síkon – a határpárhuzamos félegyenesek definíciójában szereplő jelölésekkel – a $QPX\sphericalangle$ hegyesszög. Létezik egy további, P-ből induló, l-lel határpárhuzamos félegyenes: az a $\overrightarrow{PX'}$ félegyenes, ahol X' a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes X-et nem tartalmazó oldalán van és amelyre $QPX'\sphericalangle \cong QPX\sphericalangle$ teljesül. Δ

9.5. Definíció és állítás. Hiperbolikus síkon, az eddigi jelölések megtartása mellett, a $QPX\sphericalangle$-et és bármely ezzel egybevágó szöget a $\overline{PQ}$ szakaszhoz tartozó

<u>párhuzamossági szögnek</u> nevezzük és $\Pi(\overline{PQ})$-val jelöljük. Erre teljesülnek a következők:

(i) $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'} \implies \Pi(\overline{PQ}) = \Pi(\overline{P'Q'})$,

(ii) $\overline{PQ} < \overline{P'Q'} \implies \Pi(\overline{PQ}) > \Pi(\overline{P'Q'})$. Δ

<u>Megjegyzés.</u> A $\Pi(\overline{PQ})$ jelölés <u>N. I. Lobacsevszkijtől</u> származik.

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy hiperbolikus sík két egyenese

<u>határpárhuzamos/aszimptotikusan párhuzamos</u>, ha egyikük tartalmaz olyan félegyenest, amely határpárhuzamos a másikkal;

<u>széttartóan párhuzamos/ultrapárhuzamos/hiperpárhuzamos</u>, ha van közös merőlegesük.

<u>Megjegyzés.</u> Nyilvánvaló, hogy mind a határpárhuzamos, mind a széttartóan párhuzamos egyenesek párhuzamosak.

<u>9.6. Tétel.</u> Ha egy hiperbolikus sík két egyenese párhuzamos, de nem határpárhuzamos, akkor széttartóan párhuzamos, és <u>egyetlen</u> közös merőlegesük van. Így módon egy hiperbolikus sík két egyenesére a következő három lehetőség közül egy és csak egy teljesül:

(1) az egyenesek metszők;

(2) az egyenesek határpárhuzamosak;

(3) az egyenesek széttartóan párhuzamosak. Δ

<u>Összefoglalás</u> Megadva egy hiperbolikus síkon egy l egyenest, egy $P \notin l$ pontot, a következő megállapítások tehetők:

(1) Létezik pontosan két P-ből induló, l-lel határpárhuzamos félegyenes, ezek egyenesei párhuzamosak l-lel.

(2) Végtelen sok olyan P-n átmenő egyenes van,

amely nem lép be az l egyenes és a két P-ből határpárhuzamos félegyenes közötti tartományba. Ezek az egyenesek mind széttartóan párhuzamosak l-lel, és így vele egyetlen közös merőlegesük van. Az l-lel széttartóan párhuzamos egyenesek egyikének és l-nek a közös merőlegese az a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes, ahol Q a P-ből l-re bocsátott merőleges talppontja. A többi egyenesnek és l-nek a közös merőlegese P-től különböző ponton megy át. Δ

10. A Beltrami - Cayley - Klein modell

(A) A projektív geometriai háttér

10.1. Állítás és definíció. Tekintsük az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkot.

(1) Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris automorfizmusa (azaz invertálható lineáris transzformációja) az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek. A

$$[\varphi] : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2, \quad [u] \longmapsto [\varphi]([u]) := [\varphi(u)]$$

transzformáció jól definiált bijekciója $\mathbb{R}P^2$-nek (az inverze $[\varphi^{-1}]$), ezt a transzformációt a φ által indukált projektivitásnak, röviden projektivitásnak nevezzük. Két lineáris automorfizmus akkor és csak akkor származtatja ugyanazt a projektivitást, ha egyikük a másik nemzérus skalárszorosa.

(2) $\mathbb{R}P^2$ összes projektivitásai csoportot alkotnak a kompozíció művelettel, ezt $PGL(\mathbb{R}^3)$-mal jelöljük és projektív általános lineáris csoportnak hívjuk. A projektivitások megőrzik a kettősviszonyt: ha

A, B, C, D $\mathbb{R}P^2$ különböző, kollineáris pontjai és $\Phi \in PGL(\mathbb{R}^3)$, akkor $cr(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)) = cr(A, B, C, D)$.

(3) $\mathbb{R}P^2$ projektivitáscsoportja megegyezik $\mathbb{R}P^2$ kollineációcsoportjával:

$$\boxed{PGL(\mathbb{R}^3) = Koll(\mathbb{R}P^2)}.$$

(4) Azok a projektivitások, amelyek invariánsan hagyják $\mathbb{R}P^2$ ideális egyenesét, részcsoportját alkotják $PGL(\mathbb{R}^3)$-nak. Ezt a részcsoportot $P_A GL(\mathbb{R}^3)$-mal jelöljük, elemeit a <u>projektív sík affinitásai</u>nak vagy <u>affin projektivitás</u>oknak nevezzük. A $P_A GL(\mathbb{R}^3)$ csoport izomorf az $\mathbb{R}^2$ valós vektortér affinitásainak csoportjával, amely egybeesik az $\mathbb{R}A^2$ valós affin sík kollineációcsoportjával:

$$\boxed{P_A GL(\mathbb{R}^3) \cong Aff(\mathbb{R}^2) = Koll(\mathbb{R}A^2)}.$$

<u>Megjegyzések.</u> (1) Jelöljük a szokásos módon $GL_3(\mathbb{R})$-rel a 3×3-as, valós, invertálható mátrixok csoportját. Ha $A \in GL_3(\mathbb{R})$, akkor az

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longmapsto L_A(v) := A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

transzformáció lineáris automorfizmusa $\mathbb{R}^3$-nak. Megfordítva, minden $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris automorfizmushoz létezik egy és csak egy olyan $A \in GL_3(\mathbb{R})$, hogy $\varphi = L_A$. Ily módon $\mathbb{R}^3$ lineáris automorfizmusainak csoportja azonosítható a $GL_3(\mathbb{R})$ mátrixcsoporttal, következésképpen $\mathbb{R}P^2$ projektivitásai a

$$[v] \in \mathbb{R}P^2 \longmapsto [Av] \in \mathbb{R}P^2, \quad A \in GL_3(\mathbb{R})$$

alakú transzformációk és csakis ezek.

(2) A $PGL(\mathbb{R}^3) = Koll(\mathbb{R}P^2)$ egyenlőség <u>a projektív geometria alaptételének</u> egy speciális esete. Annak be-

látása, hogy $PGL(\mathbb{R}^3) \subset Koll(\mathbb{R}P^2)$ igen egyszerű, a nehéz rész a fordított irányú tartalmazás igazolása.

<u>10.2. Definíció és állítás.</u> (1) Azt mondjuk, hogy egy projektív sík egy kollineációjának egy C pont <u>centruma</u>, ha minden C-n átmenő egyenes invariáns egyenes; egy t egyenes <u>tengelye</u>, ha minden t-re illeszkedő pont fixpont.

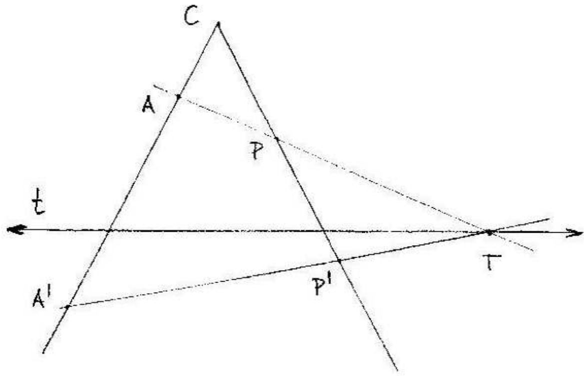
(2) <u>Egy projektív sík egy kollineációjának akkor és csak akkor van tengelye, ha van centruma.</u> Egy nemidentikus kollineációnak vagy pontosan egy centruma és tengelye van, vagy pedig ezek egyikével sem rendelkezik; az egyetlen centrummal és tengellyel rendelkező kollineációkat <u>centrális-axiális kollineációk</u>nak hívjuk. Egy centrális-axiális kollineációt egyértelműen meghatároz a centruma, a tengelye és egy, a tengelyre nem illeszkedő, a centrumtól különböző pont képének ismerete.

(3) Egy centrális-axiális kollineációt <u>elációnak</u> nevezünk, ha a centruma illeszkedik a tengelyre, <u>homológiának</u> mondunk, ha a centruma nincs rajta a tengelyen. Megállapodunk abban, hogy az identikus transzformáció eláció is és homológia is.

<u>Szerkesztés</u> Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ projektív sík, és tegyük fel, hogy $\varphi: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ C centrumú, t tengelyű kollineáció, amelynél egy $A \notin \{C\} \cup t$ pont képe az A' pont. Föltehetjük, hogy $A' \neq A$, ellenkező esetben ugyanis, könnyen látható módon, φ az identikus transzformáció lenne.

Mivel C centrum, a $\overleftrightarrow{CA}$ egyenes invariáns egyenese φ-nek, ezért $\varphi(A) =: A' \in \overleftrightarrow{CA}$. Megszerkesztjük egy tetszőleges, t-re nem illeszkedő, C-től különböző pont P' képpontját.

1. eset: $P \notin \overleftrightarrow{AA'}$



Legyen $T := \overleftrightarrow{AP} \cap t$. Ekkor T fixpont, így $\varphi(\overleftrightarrow{AT}) = \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(T)} = \overleftrightarrow{A'T}$; következésképpen

$P' := \varphi(P) \in \overleftrightarrow{A'T}$.

Másrészt $P' \in \overleftrightarrow{CP}$ is fennáll, tehát

$$\boxed{P' = \overleftrightarrow{CP} \cap \overleftrightarrow{A'T}}\ .$$

2. eset: $P \in \overleftrightarrow{AA'} \setminus \{A, A'\}$

Válasszunk egy $\overleftrightarrow{AA'}$-re és t-re nem illeszkedő B pontot, és szerkesszük meg ennek B' képpontját az 1. esetben látott módon. Mivel $P \notin \overleftrightarrow{BB'}$, a (B, B') pontpár birtokában a P' képpont a már ismert eljárással szerkeszthető.

10.3. Lemma és definíció. Legyen adva az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkban egy t egyenes és egy t-re nem illeszkedő C pont. Értelmezzünk egy $\varphi : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ transzformációt a következőképpen:

(i) $\varphi(P) := P$, ha $P \in \{C\} \cup t$;

(ii) ha $P \notin \{C\} \cup t$ és $T := \overleftrightarrow{CP} \cap t$, akkor $\varphi(P)$ az a pont, amelyre $cr(C, T, P, \varphi(P)) = -1$, azaz $h(C, T, P, \varphi(P))$ teljesül.

Ekkor $\varphi \in PGL(\mathbb{R}^3)$; ezt a projektivitást C centrumú, t tengelyű harmonikus homológiának nevezzük.

Bizonyítás. Közvetlenül adódik, hogy φ kollineációja $\mathbb{R}P^2$-nek, így $Koll(\mathbb{R}P^2) = PGL(\mathbb{R}^3)$ alapján következik az állítás. $\square$

10.4. Definíció. Az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív sík egy ponthalmazát *másodrendű görbének* nevezzük, ha pontjainak reprezentáns vektorai egy

$${}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} = 0$$

alakú egyenletnek tesznek eleget, ahol $A = (\alpha_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ nemzérus szimmetrikus mátrix, amelyet a *másodrendű görbe mátrixaként* említünk, $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ egy szimbólumok alkotta oszlopmátrix, ${}^t\underline{x} := (x_1\ x_2\ x_3)$ ennek transzponáltja. Az

$$A_{33} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

mátrixot a görbe *magmátrixának* hívjuk. Egy másodrendű görbét *nemelfajulónak*, ill. *elfajulónak* mondunk aszerint, amint a mátrixának determinánsa nem nulla, ill. nulla; *affinnak* nevezzük, ha a magmátrixa különbözik a zérusmátrixtól.

Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$,

$$\begin{aligned}
{}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} &= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\
&= (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{pmatrix} = \\
&= \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{21}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{23}x_2x_3 \\
&+ \alpha_{31}x_1x_3 + \alpha_{32}x_2x_3 + \alpha_{33}x_3^2 = \\
&= \alpha_{11}x_2^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{33}x_3^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

adódik, tehát a másodrendű görbék egyenlete

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{33}x_3^2 = 0,$$

röviden

$$\sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{ij}x_ix_j = 0 \qquad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

alakú.

10.5. Lemma. $\mathbb{R}P^2$ egy másodrendű görbéje akkor és csak akkor affin, ha nem tartalmazza $\mathbb{R}P^2$ ideális egyenesét.

Bizonyítás. Tekintsük az

$$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

egyenletű másodrendű görbét. Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy erre akkor és csak akkor illeszkedik az ideális egyenes, azaz az egyenletnek akkor és csak akkor tesz eleget minden $(\lambda,\mu,0)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$ alakú reprezentáns vektorral rendelkező projektív pont, ha az

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

egyenletnek minden valós számpár megoldása. Ez pontosan akkor következik be, ha

$$A_{33}:=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Tehát a másodrendű görbe akkor és csak akkor nem tartalmazza az ideális egyenest, ha magmátrixa különbözik a zérusmátrixtól. □

10.6. Állítás és definíció. (1) Ha egy másodrendű görbe tartalmaz egyenest, akkor elfajuló.

(2) Ha $\mathbb{R}P^2$ egy másodrendű görbéje elfajuló, akkor vagy egyetlen pontból, vagy egyetlen egyenesből, vagy pedig két egyenesből áll. Ezekben az esetekben a görbe egyenlete rendre a következő alakra hozható:

(i) $x_1^2+x_2^2=0$ – pont;

(ii) $x_1^2=0$ – (kettős) egyenes;

(iii) $x_1^2-x_2^2=0$ – két egyenes.

(3) Amennyiben $\mathbb{R}P^2$ egy másodrendű görbéje <u>nemelfajuló</u>, úgy az egyenlete a következő alakok valamelyikére hozható:

$$(\text{ü}) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \ ;$$

$$(\text{k}) \qquad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \ .$$

Az (ü) egyenlet az üres alakzat egyenlete, amelyet most <u>képzetes projektív körnek</u> is mondunk, a (k) egyenlet által megadott másodrendű görbét <u>projektív körként</u> említjük. Δ

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy $[u] \in \mathbb{R}P^2$ pont egy ${}^t\underline{x}A\underline{x} = 0$ egyenletű másodrendű görbére vonatkozóan <u>konjugált</u> egy $[v] \in \mathbb{R}P^2$ ponthoz, ha

$${}^t u A v = 0 .$$

<u>Megjegyzés.</u> A konjugáltság nyilvánvalóan független a tekintett pontok reprezentáns vektorainak választásától és szimmetrikus reláció:

$${}^t u A v = 0 \implies 0 = ({}^t u A v)^t = {}^t v\, {}^t A^t ({}^t u) = {}^t v A u .$$

Szólhatunk így módon <u>egymáshoz konjugált</u> pontokról. Magától értetődő, hogy egy pont akkor és csak akkor konjugált önmagához, ha illeszkedik a másodrendű görbére.

<u>10.7. Lemma.</u> Egy pontnak egy másodrendű görbére vonatkozó konjugáltjai vagy egy egyenest alkotnak, vagy pedig a teljes síkot belepik.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen az adott másodrendű görbe egyenlete ${}^t\underline{x}A\underline{x} = 0$. Egy $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ reprezentáns vektorú projektív ponthoz $\mathbb{R}P^2$-nek azok és csak azok a pontjai konjugáltak, amelyeknek reprezentáns vektorai eleget tesznek a

$$(v_1 \ v_2 \ v_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

lineáris egyenletnek. Ennek mátrixa, ${}^t v A \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ legfeljebb 1-rangú. Ha ${}^t v A \neq \underline{0}$, akkor a rang 1, és a megoldó altér $3-1=2$ dimenziós, így ebben az esetben $[v]$ konjugáltjai egyenest alkotnak $\mathbb{R}P^2$-ben. Amennyiben ${}^t v A = \underline{0}$, úgy a rang 0, és a megoldó altér $\mathbb{R}^3$; akkor tehát $\mathbb{R}P^2$ minden pontja konjugált $[v]$-hez. □

<u>Definíció.</u> Legyen adva az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkban egy másodrendű görbe.

(1) Ha egy pont konjugáltjai a másodrendű görbére vonatkozóan egyenest alkotnak, akkor ezt az egyenest a pont <u>polárisának</u> nevezzük.

(2) Ha egyetlen olyan pont van, amely egy egyenes minden pontjához konjugált, akkor ezt a pontot az egyenes <u>pólusának</u> hívjuk.

(3) Ha egy pont a sík minden pontjához konjugált az adott másodrendű görbére vonatkozóan, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a görbe <u>szinguláris pontja</u>.

<u>10.8. Következmény.</u> $\mathbb{R}P^2$ egy másodrendű görbéjének akkor és csak akkor van szinguláris pontja, ha a görbe elfajuló.

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsünk egy ${}^t\underline{x} A \underline{x} = 0$ egyenletű másodrendű görbét. A <u>10.7.</u> lemma bizonyításában látottak szerint egy $[v] \in \mathbb{R}P^2$ pont akkor és csak akkor szinguláris pontja a görbének, ha ${}^t v A = 0$; illetve, ekvivalens módon, ha $A v = 0$. Szinguláris pont tehát akkor és csak akkor létezik, ha az $A\underline{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek (ahol $A \in M_3(\mathbb{R})$) van nemtriviális megoldása. Ennek szükséges és elegendő feltétele $\det A = 0$ teljesülése – azaz a másod-

rendű görbe elfajultsága. □

<u>10.9. Állítás.</u> Nemelfajuló másodrendű görbére vonatkozóan minden pontnak van polárisa, és minden egyenesnek van pólusa. Ha a másodrendű görbe egyenlete

$$ {}^t\underline{x} A \underline{x} = 0 \qquad (A \in M_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = A,\ \det A \neq 0), $$

akkor egy $[v] = [{}^t(v_1\ v_2\ v_3)]$ pont polárisának egyenlete

$$ ({}^t v A)\underline{x} = 0 ; $$

egy $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ egyenletű egyenes pólusának egy reprezentáns vektora pedig pedig az

$$ A\underline{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} $$

lineáris egyenletrendszer megoldásával nyerhető.

Minden pont a saját polárisának a pólusa, és minden egyenes a saját pólusának a polárisa.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Mivel a görbe nemelfajuló, nincs szinguláris pontja (<u>10.8.</u>), és így minden pontnak van polárisa.

(2) Ha $\mathbb{R}P^2$ egy egyenesének minden pontja konjugált egy adott ponthoz, akkor (1)-ből következően ennek a pontnak az illető egyenes a polárisa.

(3) Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen adott,

$$ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 , \qquad (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\} $$

egyenletű egyenes egyetlen pontnak a polárisa.

<u>10.7.</u> bizonyításából már tudjuk, hogy egy $[v] = [{}^t(v_1\ v_2\ v_3)]$ pont polárisának egyenlete

$$ ({}^t v A)\underline{x} = 0 , $$

így a megadott, u_1, u_2, u_3 vonalkoordinátájú egyenesnek $[v]$ akkor és csak akkor pólusa, ha a

$$ {}^t v A = (u_1\ u_2\ u_3) , $$

illetve az ezzel ekvivalens

$$A v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

reláció $[v]$ egy alkalmas reprezentáns vektorára, és csakis erre teljesül. Így módon a tekintett egyenesnek akkor és csak akkor van pólusa, ha az

$$A \underline{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Ez azonban teljesül, mert $\det A \neq 0$ miatt létezik az A^{-1} inverz mátrix, és így az egyetlen megoldás $A^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$. $\square$

Példa Adva van $\mathbb{R}P^2$-ben a $2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_3^2 = 0$ egyenletű másodrendű görbe, meghatározzuk a

$P = [p] := [{}^t(3, 1, 1)]$ pont polárisát és a

$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ egyenletű l egyenes pólusát.

A görbe mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 11 & -12 & 0 \end{vmatrix} = -(24-11) \neq 0,$$

a görbe tehát nemelfajuló.

$${}^t p\, A = (3\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = (3\ -5\ 3),$$

így P polárisának egyenlete

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0.$$

l pólusának egy reprezentáns vektora a

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásából ${}^t(2\ 1\ 0)$.

<u>10.10. Állítás.</u> Ha egy egyenes két pontban metsz egy másodrendű görbét, akkor az egyenesnek a metszéspontokra vonatkozóan harmonikusan konjugált pontjai konjugáltak a másodrendű görbére nézve.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen a vizsgált másodrendű görbe egyenlete ${}^t\underline{x}A\underline{x} = 0$. Tegyük fel, hogy egy l egyenes az $[u] \neq [v]$ pontokban metszi a görbét, és hogy az $[a], [b] \in l$ pontok harmonikusan konjugáltak az $[u], [v]$ pontpárra nézve. Ekkor az $[u], [v]$ pontok is harmonikusan konjugáltak az $[a], [b]$ pontpárra nézve, és így ha $u = \lambda a + \mu b$, akkor <u>7.6.</u> értelmében $v = \lambda a - \mu b$. Mivel $[u]$ és $[v]$ a másodrendű görbe pontjai,

$$0 = {}^t u A u = (\lambda {}^t a + \mu {}^t b) A (\lambda a + \mu b) = \lambda^2({}^t a A a) + 2\lambda\mu({}^t a A b) + \\ + \mu^2({}^t b A b)$$

(felhasználva, hogy ${}^t b A a = {}^t({}^t b A a) = {}^t a\, {}^t A\, {}^t({}^t b) = {}^t a A b$).

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$0 = \lambda^2({}^t a A a) - 2\lambda\mu({}^t a A b) + \mu^2({}^t b A b).$$

Kivonva a második relációt az elsőből, $4\lambda\mu({}^t a A b) = 0$ adódik, amiből ${}^t a A b = 0$ következik, hiszen a pontok különbözősége folytán $\lambda\mu \neq 0$.

Ezzel beláttuk, hogy $[a]$ és $[b]$ konjugált az adott másodrendű görbére nézve. □

<u>10.11. Következmény.</u> Ha egy egyenes két pontban metsz egy másodrendű görbét, és tartalmaz két, a görbére nézve konjugált pontot, akkor ezek a pontpárok harmonikusan konjugáltak egymáshoz. △

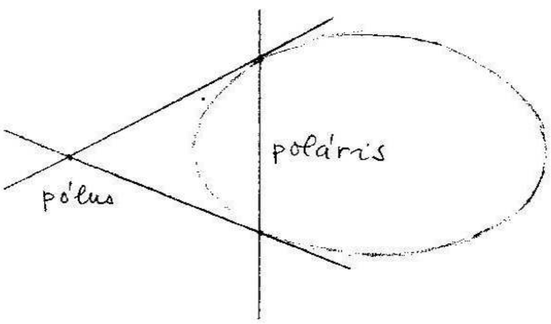
<u>Definíció.</u> Az $\mathbb{R}P^2$ projektív sík egy nemelfajuló másodrendű görbéjének <u>érintőjén</u> olyan egyenest értünk, amelynek <u>egyetlen - valódi vagy ideális - közös pontja van</u>

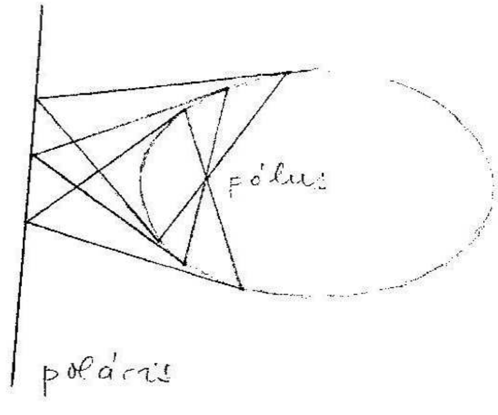
van a görbével, ezt a közös pontot érintési pontnak hívjuk.

10. 12. Tétel. (1) Egy nemelfajuló másodrendű görbe tetszőleges pontjának polárisa a görbe illető pontbeli érintőegyenese.

(2) Ha egy pont nem illeszkedik egy másodrendű görbére és a pontból két érintő húzható a görbéhez, akkor a pont polárisa az érintési pontok összekötő egyenese.

(3) Ha egy pontból nem húzható érintő egy nemelfajuló másodrendű görbéhez, akkor a polárisa azon pontok halmaza, amelyekben a ponton áthaladó egyenesek és a görbe metszéspontjaiban húzott érintők metszik egymást. Δ





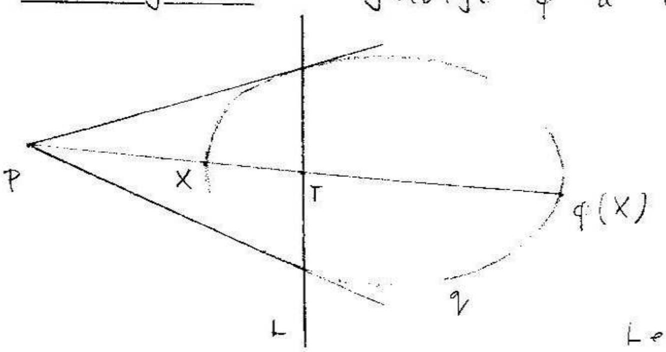
Definíció. Azt mondjuk, hogy egy pont az $\mathbb{R}P^2$ projektív sík egy másodrendű görbéjének külső pontja, ha a polárisa (két pontban) metszi a görbét, belső pontja, ha a polárisának nincs közös pontja a görbével. Egy másodrendű görbe belső pontjainak halmazát a görbe belsejének nevezzük.

10. 13. Lemma és definíció. Legyen adva az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkon egy projektív kör, azaz egy nemüres, nemelfajuló másodrendű görbe. Jelöljük ezt a másodrendű görbét q-val, a belsejét pedig

pedig $\mathbb{B}$-vel. $\mathbb{RP}^2$-nek azok a projektivitásai, amelyek invariánsan hagyják – azaz önmagába transzformálják – q-t, részcsoportját alkotják $PGL(\mathbb{R}^3)$-nak. Ezt a részcsoportot $Aut(q)$-val jelöljük és az elemeit <u>q automorfizmusainak</u> hívjuk. q automorfizmusai q belsejét is invariánsan hagyják: ha $\varphi \in Aut(q)$, akkor $\varphi(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$. $\triangle$

<u>10.14. Lemma.</u> Legyen adva egy $q \subset \mathbb{RP}^2$ projektív kör, egy $P \notin q$ pont, és jelölje L a P pont q-ra vonatkozó polárisát. Ekkor a P centrumú, L tengelyű harmonikus homológia automorfizmusa q-nak.

<u>Bizonyítás.</u> Jelölje φ a vizsgált harmonikus homológiát.



Ha $X \in q \setminus L$ és $T := \overleftrightarrow{PX} \cap L$, akkor φ definíciója értelmében
$$cr(P, T, X, \varphi(X)) = -1.$$
Legyen $X' := (\overleftrightarrow{PT} \cap q) \setminus \{X\}$.
Ekkor P és T konjugáltsága miatt <u>10.11.</u> alapján a (P, T, X, X') pontnégyes harmonikus, így $cr(P, T, X, X') = -1$ is fennáll, amiből $\varphi(X) = X'$ következik. Ezzel beláttuk, hogy φ invariánsan hagyja q-t; tehát $\varphi \in Aut(q)$. $\square$

(B) <u>A modell megkonstruálása</u>

<u>1. lépés</u>: <u>az illeszkedési struktúra</u>

Legyen adva egy $q \subset \mathbb{RP}^2$ projektív kör, a belsejét jelölje $\mathbb{B}$. Nevezzük $\mathbb{B}$-t <u>Klein-síknak</u>, az elemeit <u>K-pontoknak</u> (ha nem fenyeget félreértés: <u>pontoknak</u>), az $\ell := L \cap \mathbb{B}$ alakú nemüres ponthalmazokat pedig, ahol $L \subset \mathbb{R}P^2$ projektív egyenes, **$\mathbb{K}$-egyeneseknek**. Ha $\mathcal{L}_K$ jelöli az összes $\mathbb{K}$-egyenesek halmazát, akkor

$(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K)$ Hilbert-féle illeszkedési sík.

Megjegyzés. Ha $l = L \cap \mathbb{B} \in \mathcal{L}_K$, akkor azt mondjuk, hogy az l K-egyenes a L projektív egyenesből származik. Amennyiben $L \cap q = \{A, B\}$, úgy az A és a B pontot l végeiként említjük (ezek természetesen nem pontjai l-nek).

2. lépés: a geometriai rendezés

Értelmezzük az $R_K \subset \mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ relációt a következőképpen:

$$(A, P, B) \in R_K \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} A, P, B \text{ különböző, kollineáris} \\ \text{pontok, és ha } Q \text{ az } \overleftrightarrow{AB} \text{ K-egyenes} \\ \text{egyik vége, akkor } cr(A, B, P, Q) < 0 . \end{cases}$$

Ez a reláció jól definiált: független attól, hogy $\overleftrightarrow{AB}$ melyik végét használjuk fel az értelmezésénél. Megmutatható, hogy R_K eleget tesz az (R1)-(R4) axiómáknak, s így

$(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K, R_K)$ rendezett illeszkedési sík.

3. lépés: egybevágóság

Nevezzük a kiindulásul szolgáló q projektív kör automorfizmusainak a $\mathbb{B}$ Klein-síkra való leszűkítéseit **$\mathbb{K}$-egybevágóságoknak**. A „között van" reláció értelmezése és a projektivitások kettősviszony-tartása alapján azonnal adódik, hogy a K-egybevágóságok rendezéstartók, így szakaszt szakaszba visznek át, amelynek végpontjai az eredeti szakasz végpontjainak képei. Értelmezzük ezek után a $\mathbb{K}$-szakaszok és K-szögek egybevágóságát a következőképpen:

$$\overline{AB} \cong_K \overline{CD} \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \text{van olyan } \varphi \text{ K-egybevágóság, hogy} \\ \varphi(A) = C,\ \varphi(B) = D \end{cases};$$

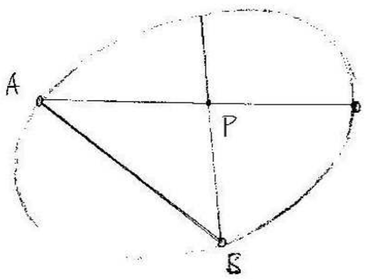
$$ABC\sphericalangle \cong_K A'B'C'\sphericalangle \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{array}{l} \exists P \in \overrightarrow{BA},\ \exists Q \in \overrightarrow{BC},\ \exists P' \in \overrightarrow{B'A'},\ \exists Q' \in \overrightarrow{B'C'}: \\ \overline{BP} \cong_K \overline{B'P'},\ \overline{BQ} \cong_K \overline{B'Q'},\ \overline{PQ} \cong_K \overline{P'Q'}. \end{array}$$

A definíció szerint tehát két szakasz K-egybevágó, ha van olyan K-egybevágóság, amely az egyiküket a másikba viszi át, s megmutatható, hogy a szögek K-egybevágóságának is ugyanez a jelentése. Hosszadalmas munkával az is ellenőrizhető, hogy a $\cong_K$ reláció eleget tesz a (C1) - (C6) axiómáknak, tehát

$$\underline{(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K; \mathcal{R}_K, \cong_K) \text{ Hilbert-sík.}}$$

<u>10.15. Tétel.</u> <u>A</u> $(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K; \mathcal{R}_K, \cong_K)$ <u>Hilbert sík valós hiperbolikus sík.</u>

<u>Bizonyítás.</u> A Dedekind-féle folytonossági axióma és $\neg$(EP) teljesülését kell még ellenőriznünk. Az előbbit mellőzzük, mert további előismereteket igényelne. Az utóbbi egyszerűen adódik:



Tekintsünk egy A, B végekkel rendelkező l K-egyenest és egy $P \in \mathbb{B} \setminus l$ pontot. Ha $m_1 := \overleftrightarrow{AP} \cap \mathbb{B}$, $m_2 := \overleftrightarrow{BP} \cap \mathbb{B}$ ($\overleftrightarrow{AP}$ és $\overleftrightarrow{BP}$ projektív egyenesek), akkor m_1 és m_2 különböző P-n átmenő, l-lel párhuzamos K-egyenesek. Δ

<u>Megjegyzések.</u> (1) A megkonstruált valós hiperbolikus síkot <u>Klein-síkként</u> is emlegetjük, s gyakran egyszerűen $\mathbb{B}$-vel jelöljük. (2) A bizonyításban szereplő m_1 és m_2 egyenes ténylegesen határpárhuzamos l-lel.

Definíció. A Klein-sík egy l egyenesére vonatkozó tükrözésen (vagy hiperbolikus tükrözésen) annak a harmonikus homológiának a $\mathbb{B}$-re való leszűkítését értjük, amelynek tengelye az l egyenest származtató L projektív egyenes, a centruma L pólusa.

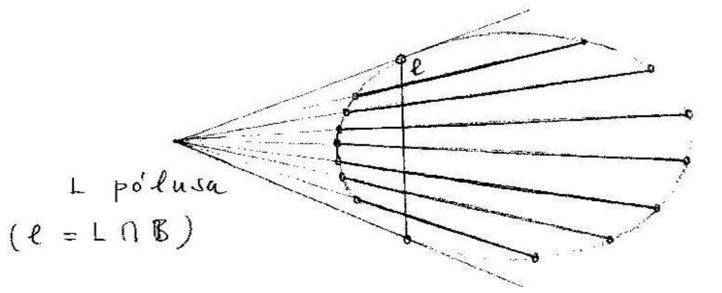
Megjegyzés. 10.14.-ből következően a hiperbolikus tükrözések K-egybevágóságok.

10.16. Állítás (a K-egyenesek merőlegességének jellemzése). Két K-egyenes akkor és csak akkor merőleges, ha az egyikükre vonatkozó hiperbolikus tükrözésnek a másik egyenes invariáns egyenese.

Bizonyítás. Legyenek l és m K-egyenesek, és jelölje s_l az l-re vonatkozó hiperbolikus tükrözést. Ha $s_l(m)=m$, akkor s_l az $l \cup m$ által tartalmazott négy szög egyikét a mellékszögébe viszi át, ez az szög tehát (K-) egybevágó az egyik mellékszögével, és így derékszög – következésképpen $l \perp m$.

Megfordítva, ha $l \perp m$, akkor s_l m-et invariánsan hagyja, mert derékszöget derékszögbe visz át. □

10.17. Következmény. Egy l K-egyenesre merőleges K-egyenesek az l-et származtató projektív egyenes pólusán átmenő egyenesek által származtatott K-egyenesek, és csak ezek. □



Az l K-egyenesre merőleges K-egyenesek

Megjegyzés. Az elmondottak alapján egyszerűen megoldhatók a következő feladatok:

(1) merőleges szerkesztése adott K-pontból adott K-egyenesre;

(2) két széttartóan párhuzamos K-egyenes közös merőlegesének megszerkesztése.

10.18. Tétel. Létezik a Klein-síkon olyan $d_K : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ távolságfüggvény (azaz a metrikus terek definíciójában szereplő axiómáknak eleget tevő függvény), amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) Tetszőleges A és B K-pont és $\varphi : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ K-egybevágóság esetén $d_K(\varphi(A), \varphi(B)) = d_K(A, B)$, azaz a K-egybevágóságok izometriák (távolságtartók) a d_K távolságfüggvényre nézve.

(2) d_K eleget tesz a vonalzó-axiómának: minden l K-egyeneshez van olyan $f : l \longrightarrow \mathbb{R}$ bijekció, hogy tetszőleges $A, B \in l$ esetén
$$d_K(A, B) = |f(A) - f(B)| .$$

Az (1)-(2) tulajdonságokkal rendelkező távolságfüggvényt ad meg a
$$d_K(A, B) := \begin{cases} \frac{1}{2}\left|\ln cr(A, B, X, Y)\right|, & \text{ha } A \neq B; \\ 0, & \text{ha } A = B \end{cases}$$
ún. Cayley-féle távolságformula, ahol X és Y az $\overleftrightarrow{AB}$ K-egyenes végei. Minden, az (1), (2) feltételeknek eleget tevő $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ távolságfüggvény d_K-nak pozitív skalárszorosa. Δ