Megállapodások

(1) A szokásos halmazelméleti nyelvet és írásmódot használjuk. Részhalmazról szólva megengedjük az egybeesést is, tehát $S \subset T$ esetén $S = T$ is teljesülhet. S valódi részhalmaza T-nek, ha $S \subset T$, de $S \neq T$.

(2) $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát, amelybe a 0-t is beleértjük. $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(3) Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geqq 2$, akkor n objektumról szólva n különböző objektumra gondolunk. Amennyiben egybeeséseket is megengedünk, úgy az „n nem feltétlenül különböző objektum" kifejezést használjuk.

1. Illeszkedési struktúrák

Definíció. Egy $\mathbb{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ párt illeszkedési struktúrának nevezünk, ha

(1) $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ halmazok;

(2) az $\mathcal{L}$ halmaz elemei a $\mathcal{P}$ halmaz részhalmazai.

Elnevezések, jelölések egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ illeszkedési struktúrával kapcsolatban

(1) A $\mathcal{P}$ halmaz elemeit pontoknak, az $\mathcal{L}$ halmaz elemeit egyeneseknek hívjuk.

(2) Ha P egy pont, ℓ egy egyenes és $P \in \ell$, akkor azt mondjuk, hogy a P pont illeszkedik az ℓ egyenesre, vagy hogy az ℓ egyenes illeszkedik

a P pontra. Szinonimák: a P pont rajta van az l egyenesen; az l egyenes átmegy a P ponton, ...

(3) Pontok egy halmaza kollineáris, ha van olyan egyenes, amely illeszkedik a pontok mindegyikére; egyenesek egy halmaza konkurrens, ha van olyan pont, amely rajta van az egyenesek mindegyikén. Két konkurrens egyenest metszőnek mondunk.

(4) l és m párhuzamos egyenes, ha $l = m$ vagy $l \cap m = \emptyset$; ilyenkor azt írjuk, hogy $l \parallel m$.

„Definíció." Vegyünk alapul egy illeszkedési struktúrát. A

pont, egyenes, rajta van, átmegy,
metsz, összeköt, kollineáris, konkurrens

szavakból a logikai összekötők (és, vagy, nem, ha ... akkor, akkor és csak akkor) és kvantorok (bármely, létezik) segítségével felépített állítás duálisán azt az állítást értjük, amely az adott állításból a

pont $\longleftrightarrow$ egyenes, rajta van $\longleftrightarrow$ átmegy,
metsz $\longleftrightarrow$ összeköt, kollineáris $\longleftrightarrow$ konkurrens

felcserélésekkel keletkezik. Ugyanígy értelmezzük egy fogalom duálisát.

Példa. Négy pontot általános helyzetűnek nevezünk, ha a pontok között nincs három kollineáris. A fogalom duálisa: négy egyenes általános helyzetű, ha közöttük nincs három konkurrens.

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy illeszkedési struktúra Hilbert-féle, ha eleget tesz a következő axiómáknak:

(I1) Bármely két pontra illeszkedik egyetlenegy egyenes.

(I2) Minden egyenesre illeszkedik legalább két pont.

(I3) Létezik legalább három nemkollineáris pont.

Megjegyzések. Legyen $H = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra.

(1) Ha $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ és $A \neq B$, akkor (I1) értelmében létezik egyetlenegy A-ra és B-re illeszkedő egyenes, ezt $\overleftrightarrow{AB}$-vel jelöljük.

(2) Ha $l \in \mathcal{L}$, $m \in \mathcal{L}$ és $l \neq m$, akkor l-nek és m-nek legfeljebb egy közös pontja van. Valóban, ha $\{A, B\} \subset l \cap m$ volna, ahol $A \neq B$, akkor (I1) miatt $l = \overleftrightarrow{AB} = m$ adódna, ami ellentmondás.

Példa. Legyen

$$\mathcal{P} := \{A, B, C\}, \quad \mathcal{L} := \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}.$$

Ezeknek a halmazoknak a létezését a halmazelmélet axiómái biztosítják. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $H_0 := (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ az (I1)–(I3) axiómák mindegyikének eleget tesz, és így Hilbert-féle illeszkedési struktúra. Ebben a pontok, az egyenesek és az egy egyenesre illeszkedő pontok száma egyaránt minimális, H_0-at ezért a Hilbert-féle illeszkedési struktúrák *minimális modelljének* nevezzük.

<u>Definíció.</u> (1) Hilbert-féle illeszkedési geometriában <u>háromszögön</u> olyan háromelemű ponthalmazt értünk, amelyet nemkollineáris pontok alkotnak. Ekkor a pontokat a háromszög <u>csúcsainak</u>, az általuk meghatározott három egyenest <u>oldalegyeneseknek</u> vagy <u>oldalaknak</u> hívjuk.

(2) Egy $\{A, B, C\}$ és egy $\{A', B', C'\}$ háromszög közötti <u>megfeleltetésen</u> egy $f: \{A, B, C\} \longrightarrow \{A', B', C'\}$ bijekciót értünk. Ha az f megfeleltetésnél $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ és $f(C) = C'$, akkor azt mondjuk, hogy

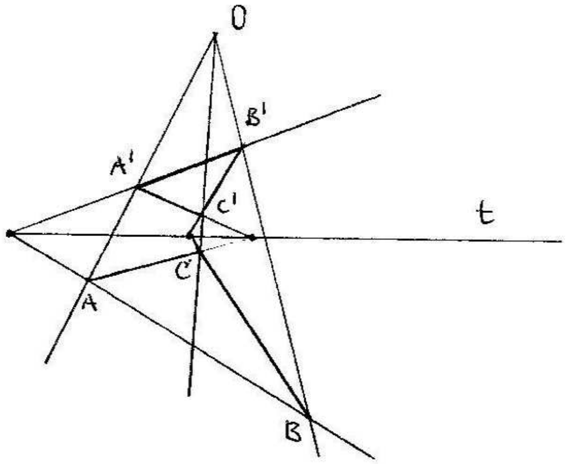
A és A', B és B', C és C' <u>megfelelő csúcsok</u>;

$\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{A'C'}$, $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ <u>megfelelő oldalak</u>.

(3) Egy Hilbert-féle illeszkedési struktúra két háromszöge egy <u>pontra nézve perspektív</u> vagy <u>centrálisan perspektív</u>, ha van olyan megfeleltetés a háromszögek között, amelynél az egymásnak megfelelő csúcsokra illeszkedő három egyenes konkurrens; ekkor az egyenesek közös pontját a <u>perspektíva középpontjának</u> vagy <u>centrumának</u> hívjuk.

(4) Egy Hilbert-féle illeszkedési struktúra két háromszöge egy <u>egyenesre nézve perspektív</u> vagy <u>tengelyesen perspektív</u>, ha van olyan megfeleltetés a háromszögek között, amelynél az egymásnak megfelelő oldalak metszéspontjai (léteznek és) kollineárisak. Ekkor a kollineáris pontok egyenesét a perspektíva <u>tengelyének</u> nevezzük.

Szemléltetés



Az $\{A, B, C\}$ és az $\{A', B', C'\}$ háromszög az O pontra nézve centrálisan, a t egyenesre nézve tengelyesen perspektív.

Definíció. Legyen $\mathbf{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra, és tekintsünk egy $\varphi: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ transzformációt.

(1) $P \in \mathcal{P}$ fixpontja φ-nek, ha $\varphi(P) = P$; $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ invariáns halmaza (vagy invariáns alakzata) φ-nek, ha
$P \in \mathcal{H} \Longrightarrow \varphi(P) \in \mathcal{H}$, azaz ha $\varphi(\mathcal{H}) := \{\varphi(P) \in \mathcal{P} \mid P \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{H}$.
$\mathcal{H}$ pontonként fix invariáns halmaz, ha minden pontja fixpontja φ-nek.

(2) A φ transzformáció egyenestartó, ha bármely egyenest egyenesbe visz át, azaz ha

$$l \in \mathcal{L} \Longrightarrow \varphi(l) := \{\varphi(P) \in \mathcal{P} \mid P \in l\} \in \mathcal{L}.$$

Az egyenestartó bijekciókat kollineációknak nevezzük.

Jelölés: $\mathrm{Koll}(\mathbf{H})$ – a $\mathbf{H}$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra összes kollineációinak halmaza.

1.1. Állítás. Legyen $\mathbf{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra.

(1) $\mathrm{Koll}(\mathbf{H})$ csoport a leképezés-kompozíció műveletére nézve. A csoport egységeleme az $1_{\mathcal{P}}: P \in \mathcal{P} \longmapsto P \in \mathcal{P}$ identikus transzformáció, egy φ kollineáció inverze a φ^{-1} inverz transzformáció.

(2) Ha A és B különböző fixpontjai egy φ kollineációnak, akkor az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes invariáns egyenese φ-nek, mégpedig $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{AB}$.
(3) Ha egy kollineáció két invariáns egyenese metsző, akkor a metszéspontjuk fixpont.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Annak igazolásához, hogy $(\mathrm{Koll}(\mathbf{H}), \circ)$ csoport, elegendő a következőket megmutatni:

$$1_{\mathcal{P}} \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H})\,; \quad \varphi, \psi \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H}) \Rightarrow \varphi\circ\psi \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H})\,;$$
$$\varphi \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H}) \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H}).$$

Az első tulajdonság teljesülése nyilvánvaló. Ha φ és ψ kollineáció, akkor $\varphi\circ\psi$ bijektív, mert bijekciók kompozíciója is bijekció. Tetszőleges $l \in \mathcal{L}$ egyenes esetén $\psi(l)$ egyenes, mert ψ egyenestartó; így φ egyenestartása miatt $\varphi\circ\psi(l) = \varphi(\psi(l))$ is egyenes, amivel beláttuk, hogy $\varphi\circ\psi \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H})$.
Ha $\varphi \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H})$, akkor létezik a φ^{-1} inverz transzformáció, és ez is bijektív. Ellenőriznünk kell, hogy φ^{-1} szintén egyenestartó. Tekintsünk ebből a célból egy tetszőleges $l \in \mathcal{L}$ egyenest. Ha $A, B \in l$ és $A \neq B$, akkor (I1) miatt $l = \overleftrightarrow{AB}$. Legyen $A' := \varphi^{-1}(A)$, $B' := \varphi^{-1}(B)$. φ^{-1} bijektívsége folytán $A' \neq B'$, így – ismét (I1) alapján – egyértelműen létezik az $m := \overleftrightarrow{A'B'}$ egyenes. Mivel φ egyenestartó, $\varphi(m) = \varphi(\overleftrightarrow{A'B'}) = \overleftrightarrow{\varphi(A')\varphi(B')} = \overleftrightarrow{AB} = l$, amiből $\varphi^{-1}(l) = \varphi^{-1}(\varphi(m)) = m$ következik. Ezzel igazoltuk, hogy $\varphi^{-1} \in \mathrm{Koll}(\mathbf{H})$.
(2) $\varphi(A) = A$ és $\varphi(B) = B$ esetén φ egyenestartása azt adja, hogy $\varphi(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overleftrightarrow{AB}$.
(3) Legyenek l és m különböző invariáns egyenesei a φ kollineációnak. Ha $l \cap m = \{P\}$,

$$\varphi(P) \in \varphi(\ell \cap m) \subset \varphi(\ell) \cap \varphi(m) = \ell \cap m = \{P\},$$

tehát $\varphi(P) = P$, azaz P fixpont. □

2. Affin síkok

Definíció. Egy $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ illeszkedési struktúrát affin síknak nevezünk, ha eleget tesz a következő axiómáknak:

(A1) = (I1) Bármely két pontra illeszkedik egyetlenegy egyenes.

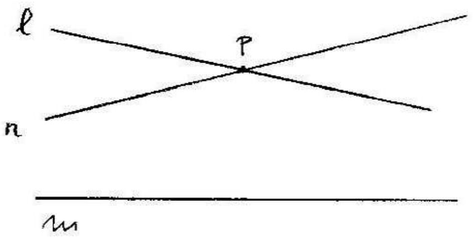
(A2) Megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot, LÉTEZIK EGY ÉS CSAK EGY olyan egyenes, amely illeszkedik a pontra és párhuzamos az adott egyenessel.

(A3) = (I3) Létezik legalább három nemkollineáris pont.

Az (A2) axiómát affin párhuzamossági axiómaként említjük.

2.1. Állítás. Egy affin sík egyeneseinek halmazában a párhuzamosság ekvivalenciareláció.

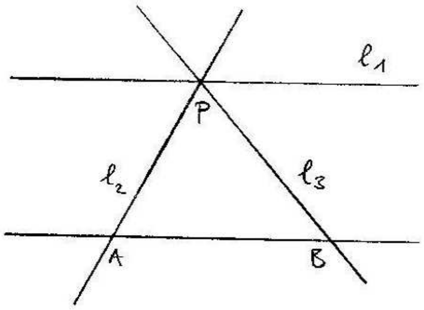
Bizonyítás. A reflexivitás és a szimmetria kiolvasható a párhuzamosság definíciójából. A tranzitivitás igazolása céljából tegyük fel, hogy egy affin sík ℓ, m és n egyeneseire $\ell \parallel m$ és $m \parallel n$ teljesül. Ha az egyenesek között van két egybeeső, akkor $\ell \parallel n$ automatikusan következik. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor ℓ, m és n páronként különbözők. Ha, állításunkkal ellentétben, ℓ-nek és n-nek volna P metszéspontja, akkor a $P \notin m$ pontra két m-mel párhuzamos egyenes (ℓ és n) illeszkedne, ami ellentmond az (A2) axiómának.



□

2.2. Állítás. Egy affin sík minden pontjára legalább három egyenes illeszkedik.

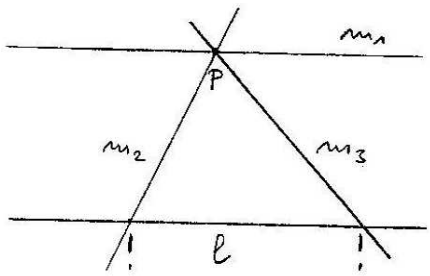
Bizonyítás. Legyen $A = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ affin sík, s tekintsünk egy tetszőleges $P \in \mathcal{P}$ pontot. (A3) alapján van olyan



A és B pont, hogy az A, B, P pontok nem kollineárisak. (A1) értelmében egyértelműen létezik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes, (A2) alapján pedig létezik (egy és csak egy) P-re illeszkedő, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos ℓ_1 egyenes. (A1) biztosítja az $\ell_2 := \overleftrightarrow{AP}$ és az $\ell_3 := \overleftrightarrow{BP}$ egyenes létezését is; a kapott ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 egyenesek P-re illeszkedő különböző egyenesek. □

2.3. Állítás. Egy affin sík minden egyenesére legalább két pont illeszkedik, következésképpen az affin síkok Hilbert-féle illeszkedési struktúrák.

Bizonyítás. Tekintsük egy affin sík egy tetszőleges ℓ egyenesét. (A3)-ból következően létezik ℓ-re nem illeszkedő P pont, (A2) miatt pedig van egy és



csak egy olyan P-re illeszkedő m_1 egyenes, amely párhuzamos ℓ-lel. Eközben $P \notin \ell$ miatt $m_1 \cap \ell = \emptyset$. Az előző állítás értelmében P-re még legalább két további egyenes illeszkedik; jelölje ezeket m_2 és m_3. m_2-nek és m_3-nak az (A2) axiómabeli egyértelműség követelmény miatt már metszenie kell az ℓ egyenest, mégpedig különböző pontokban. ℓ-re tehát legalább két pont illeszkedik. □

Modellek affin síkra

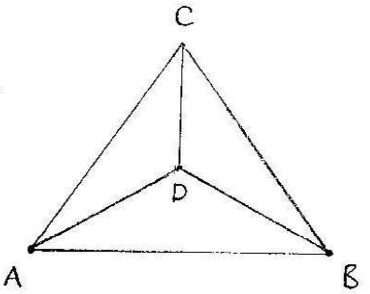
① A minimális modell Tekintsünk egy $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ négyelemű halmazt, és jelentse $\mathcal{L}$ $\mathcal{P}$ összes kételemű részhalmazainak halmazát, azaz legyen

$$\mathcal{L} := \{\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}\}.$$

Állítjuk, hogy ekkor $\mathbf{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ affin sík.

Valóban, (A1) teljesülése következik $\mathcal{L}$ definíciójából. Az is nyilvánvaló, hogy a pontok közül bármely három nemkollineáris, (A3) tehát „bőven igaz". (A2) a lehetséges véges sok eset megvizsgálásával közvetlenül ellenőrizhető. Legyen adva például az $\{A,B\}$ egyenes és a $C \notin \{A,B\}$ pont. Ekkor $\{C,D\}$ C-re illeszkedő, $\{A,B\}$-vel párhuzamos egyenes, és további ilyen egyenes nincs.

Szemléltetés



A megkonstruált modellben a pontok, az egyenesek és az egy egyenesre illeszkedő pontok száma - könnyen átgondolható módon - a lehető legkisebb; ezért a „minimális" jelző.

② A 9 pont - 12 egyenes affin sík Induljunk ki egy

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$$

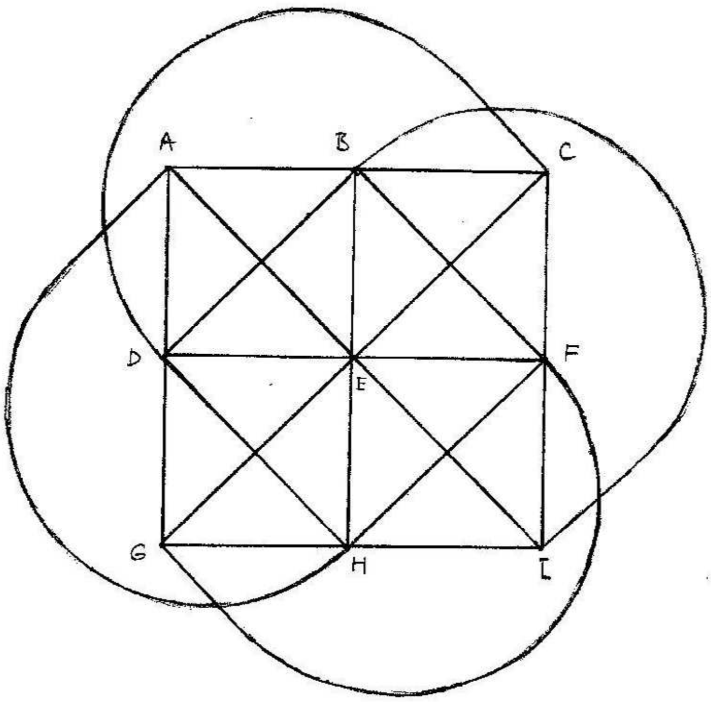
kilencelemű halmazból, és legyenek az

$\mathcal{L}$ halmaz elemei a $\mathcal{P}$ halmaz következő részhalmazai:

$\{A, B, C\}$, $\{A, E, I\}$, $\{A, D, G\}$, $\{C, E, G\}$,
$\{D, E, F\}$, $\{B, F, G\}$, $\{B, E, H\}$, $\{B, D, I\}$,
$\{G, H, I\}$, $\{C, D, H\}$, $\{C, F, I\}$, $\{A, F, H\}$.

A fellépő véges sok eset közvetlen (bár kissé hosszadalmas) vizsgálatával ellenőrizhető, hogy ekkor $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ affin sík. Az egyenesek felsorolása úgy történt, hogy egy oszlopba az egymással párhuzamos egyenesek kerültek.

Szemléltetés



Algebrai leírás Tekintsük a $(\mathbb{Z}_3; +, \cdot)$ háromelemű testet, ahol $\mathbb{Z}_3 := \{0, 1, 2\}$, és az összeadás, ill. a szorzás művelettáblája a következő:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Legyen

$$\mathcal{P} := \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \left\{ \begin{matrix} (0,0), & (0,1), & (0,2), \\ (1,0), & (1,1), & (1,2), \\ (2,0), & (2,1), & (2,2) \end{matrix} \right\} ;$$

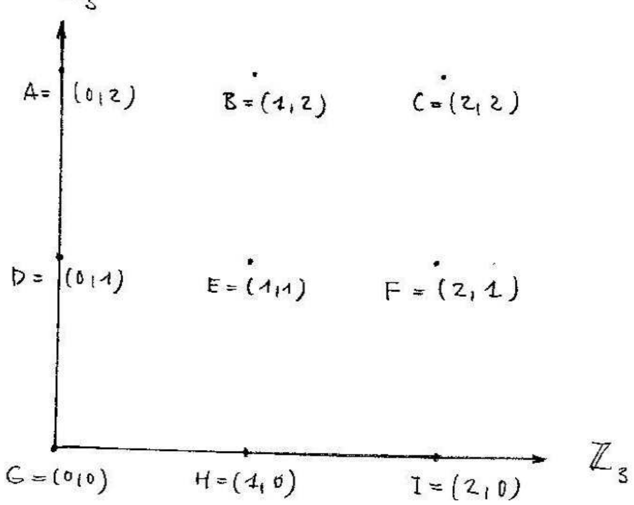
a pontokra – az előzőekkel összhangban – vezessük be a következő jelöléseket:

$A := (0,2)$, $B := (1,2)$, $C := (2,2)$;

$D := (0,1)$, $E := (1,1)$, $F := (2,1)$;

$G := (0,0)$, $H := (1,0)$, $I := (2,0)$.

Szemléltetés



$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 =: (\mathbb{Z}_3)^2$ kétdimenziós vektortér a $\mathbb{Z}_3$ test fölött az összeadás és a skalárral való szorzás „komponensenkénti" értelmezése esetén; egy bázisa például az $((1,0), (0,1))$ vektorpár (ez az ún. kanonikus bázis). Megmutatjuk, hogy e vektortér összes egydimenziós lineáris sokaságainak halmaza éppen a fent megadott $\mathcal{L}$ halmaz. Az összes egydimenziós lineáris sokaságok a

$\operatorname{span}((1,0))$, $\operatorname{span}((2,1))$, $\operatorname{span}((0,1))$, $\operatorname{span}((1,1))$

egydimenziós vektor-alterek (az ún. vektoregyenesek) és ezek eltoltjai.

(1) $$\underline{\operatorname{span}((1,0))} := \{ x(1,0) \in (\mathbb{Z}_3)^2 \mid x \in \mathbb{Z}_3 \}$$
$$= \{ (0,0), (1,0), (2,0) \} = \{ G, H, I \} .$$

span((1,0)) egyenlete: $\underline{y = 0}$.

span((1,0)) különböző eltoltjai:

$\mathrm{span}((1,0)) + (0,1) = \{(0,1), (1,1), (2,1)\} = \{D, E, F\}$,

egyenlete: $\underline{y = 1}$;

$\mathrm{span}((1,0)) + (0,2) = \{(0,2), (1,2), (2,2)\} = \{A, B, C\}$,

egyenlete: $\underline{y = 2}$.

(2) $\underline{\mathrm{span}((2,1))} = \{(0,0), (2,1), (1,2)\} = \{B, F, G\}$,

span((2,1)) egyenlete $\underline{x + y = 0}$.

span((2,1)) különböző eltoltjai:

$\mathrm{span}((2,1)) + (1,1) = \{(1,1), (0,2), (2,0)\} = \{A, E, I\}$,

egyenlete: $\underline{x + y = 2}$;

$\mathrm{span}((2,1)) + (1,0) = \{(1,0), (0,1), (2,2)\} = \{C, D, H\}$,

egyenlete: $\underline{x + y = 1}$.

(3) $\underline{\mathrm{span}((0,1))} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\} = \{A, D, G\}$,

span((0,1)) egyenlete: $\underline{x = 0}$.

A különböző eltoltak:

$\mathrm{span}((0,1)) + (1,0) = \{(1,0), (1,1), (1,2)\} = \{B, E, H\}$,

egyenlete: $\underline{x = 1}$;

$\mathrm{span}((0,1)) + (2,0) = \{(2,0), (2,1), (2,2)\} = \{C, F, I\}$,

egyenlete: $\underline{x = 2}$.

(4) $\underline{\mathrm{span}((1,1))} = \{(0,0), (1,1), (2,2)\} = \{C, E, G\}$,

egyenlete: $\underline{y = x}$.

A különböző eltoltak:

$\mathrm{span}((1,1)) + (0,1) = \{(0,1), (1,2), (2,0)\} = \{B, D, I\}$,

egyenlete: $\underline{y = x + 1}$;

$\mathrm{span}((1,1)) + (1,0) = \{(1,0), (2,1), (0,2)\} = \{A, F, H\}$,

egyenlete: $\underline{y = x - 1}$.

③ Vektortér-modell

A 9 pont – 12 egyenes modell algebrai konstrukciójának általánosításaként megmutatjuk, hogy egy tetszőleges test fölötti kétdimenziós vektortér természetes módon tekinthető affin síknak.

(A) Emlékeztető a lineáris algebrából Előkészítésként röviden összefoglaljuk a legszükségesebb lineáris algebrai fogalmakat és tényeket. A következőkben V egy K test fölötti vektorteret jelent.

(1) Egy vektortér altereire a nagyobb nyomaték kedvéért a vektor-altér elnevezést is fogjuk használni; speciálisan az 1- és 2-dimenziós altereket vektoregyeneseként, ill. vektorsíkként is említjük.

(2) Ha S nemüres részhalmaza a V vektortérnek, akkor az összes véges S-beli vektorsorozat összes lineáris kombinációinak halmaza altere V-nek. Ezt az alteret az S által generált altérnek nevezzük és rá a $\text{span}(S)$ jelölést használjuk. Megmutatható, hogy $\text{span}(S)$ az S vektorhalmazt tartalmazó összes altér metszete. Megállapodunk abban, hogy $\text{span}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$, ahol a $\underline{0}$ V zérusvektora. Amennyiben $S = \{v_1, \dots, v_k\}$, úgy $\text{span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ helyett egyszerűen azt írjuk, hogy $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$. A vektoregyenesek egyetlen, nem zérus vektor által generált alterek, azaz

$$\text{span}(v) = \{ \varrho v \in V \mid \varrho \in K \}, \quad v \neq \underline{0}$$

alakúak. A vektorsíkokat két lineárisan független vektor generálja, ezért ezek a

$$\text{span}(u, v) = \{ \lambda u + \mu v \in V \mid \lambda, \mu \in K \}$$

alakban megadható alterek, ahol $\lambda u + \mu v = \underline{0}$

esetén $a = u = 0$.

(3) Ha U altere, „a" pedig egy vektora a V vektortérnek, akkor az

$$a + U := \{ a+u \in V \mid u \in U \}$$

vektorhalmazt az U altér <u>a-val való eltoltjának</u> vagy a V vektortér egy <u>lineáris sokaságának</u> nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az üres vektorhalmaz is lineáris sokaság.

<u>2.4. Lemma.</u> Legyen U altere a V vektortérnek. A következő megállapítások ekvivalensek:

(a) $a + U = b + U$;

(b) $b \in a + U$;

(c) $-a + b \in U$.

<u>Bizonyítás.</u> <u>(a) ⟹ (b)</u> $b = b + \underline{0} \in b + U \overset{(a)}{=} a + U$.

<u>(b) ⟹ (c)</u> Ha $b \in a + U$, akkor van olyan $u \in U$ vektor, $b = a + u$; innen $-a + b = u \in U$ adódik.

<u>(c) ⟹ (a)</u> A feltétel értelmében most $-a + b =: u \in U$, így $b + U = (a + u) + U = a + (u + U)$. Azonban $u + U$ minden vektora $u + u'$ alakú, ahol $u, u' \in U$, amiből $u + U \subset U$ következik, hiszen U altér. Ugyanilyen okból $-u + U \subset U$ is fennáll, ebből pedig $U \subset u + U$ adódik. A nyert kétirányú tartalmazás miatt $u + U = U$, és így $b + U = a + U$. □

<u>2.5. Következmény.</u> Ha $L = a + U$ nemüres lineáris sokasága a V vektortérnek, akkor $a \in L$, és a lineáris sokaság bármely $v \in L$ vektor segítségével előállítható $L = v + U$ alakban. Az U altér egyértelműen meghatározott: ha egy $W \subset V$ altérre teljesül, hogy $L = b + W$, akkor $W = U$.

<u>Bizonyítás.</u> $a = a + \underline{0} \in a + U =: L$, tehát $a \in L$.

Ha $v \in L$ tetszőleges, akkor $v \in a+U$ miatt a Lemma alapján $L = a+U = v+U$ szintén fennáll.

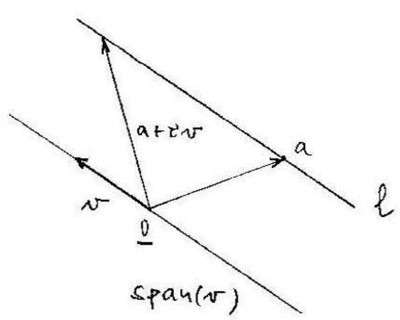
Végül $L = a+U = b+W$ esetén a mondottak értelmében $a+U = a+W$ is írható, amiből $W = U$ következik. □

Ily módon minden nemüres lineáris sokaság egy egyértelműen meghatározott vektor-altér eltoltja. Ezt az alteret a lineáris sokaság *irányterének*, a dimenzióját a *lineáris sokaság dimenziójának* nevezzük. Az üres lineáris sokaság dimenziója megállapodás szerint -1.

(8) Egy *vektortér egyenesein* a *vektortér egydimenziós lineáris sokaságait* értjük. Ily módon a V vektortér egyenesei az

$$l = a + \mathrm{span}(v) = \{a + tv \in V \mid t \in K\}, \quad v \neq \underline{0}$$

alakú részhalmazok. A $\mathrm{span}(v)$ irányteret (amely egy vektoregyenes) ilyenkor az *egyenes irányának* nevezzük, és azt is mondjuk, hogy l az „a" ponton átmenő, $\mathrm{span}(v)$ irányú egyenes. $\mathrm{span}(v)$ nemzérus vektorait az egyenes *irányvektoraiként* említjük.



Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a vektortér elemeire kétféle elnevezést is használtunk: *vektoroknak* és *pontoknak* is mondtuk őket. A „pont" elnevezés használata esetén „geometriai pont"-ra gondolunk, és a szemléltetés is ennek megfelelően történik (·), a jelöléseire pedig gyakran latin nagybetűket használunk. Ha „vektor" elnevezést alhalmazunk, akkor a szemléltetés a $\underline{0}$ origónak megfelelő „pont"-ból induló „nyíl"-lal történik.

<u>2.6. Állítás.</u> Legyen V $n \geq 2$ dimenziójú vektortér a K test fölött. Ha $\mathcal{L}_V$ jelöli V összes egyeneseinek – azaz egydimenziós lineáris sokaságainak – halmazát, akkor
$$\mathcal{A}(K, V) := (V, \mathcal{L}_V)$$
Hilbert-féle illeszkedési struktúra. Amennyiben V kétdimenziós vektortér, úgy ez az illeszkedési struktúra affin sík.

<u>Bizonyítás.</u> Azt kell ellenőriznünk, hogy $\mathcal{A}(K, V)$ eleget tesz az (I1)–(I3) axiómáknak, és hogy a $\dim V = 2$ esetben (A2) is teljesül.

<u>(I1)</u> Legyenek A és B V különböző pontjai. Ha
$$l := A + \operatorname{span}(B-A),$$
akkor l egyenes, mert $A \neq B$ folytán $B - A \neq \underline{0}$. Az l egyenes illeszkedik mindkét megadott pontra, hiszen $A = A + 0\cdot(B-A) \in l$ és $B = A + 1\cdot(B-A) \in l$. <u>Létezik</u> tehát A-ra és B-re illeszkedő egyenes; belátjuk, hogy ez egyértelműen meghatározott. Tegyük fel ebből a célból, hogy
$$m := P + \operatorname{span}(v) \quad (v \neq \underline{0})$$
szintén A-ra és B-re illeszkedő egyenes. Ekkor
$$A \in P + \operatorname{span}(v) \overset{2.4.}{\Longrightarrow} A + \operatorname{span}(v) = P + \operatorname{span}(v),$$
$$B \in P + \operatorname{span}(v) \Longrightarrow B + \operatorname{span}(v) = P + \operatorname{span}(v);$$
így $A + \operatorname{span}(v) = B + \operatorname{span}(v)$, amiből – szintén <u>2.4.</u> alapján – $B - A \in \operatorname{span}(v)$ adódik. Mivel $B - A \neq \underline{0}$ és $\operatorname{span}(v)$ 1-dimenziós, így $\operatorname{span}(v) = \operatorname{span}(B-A)$ írható, és azt kapjuk, hogy
$$m = P + \operatorname{span}(v) = A + \operatorname{span}(B-A) = l.$$

(I2) Mivel minden testnek van legalább két eleme, a 0 és az 1, tetszőleges $\ell = A + \mathrm{span}(v)$ $(v \neq 0)$ egyenesre illeszkedik legalább két pont: az $A = A + 0 \cdot v$ és az $A + v = A + 1 \cdot v$ pont.

(I3) A $\dim V \geq 2$ feltétel miatt V-nek léteznek lineárisan független A és B pontjai. Tekintsük az

$$\overleftrightarrow{AB} = A + \mathrm{span}(B - A)$$

egyenest! Erre nem illeszkedik az $O := 0$ origó, ellenkező esetben ugyanis volna olyan $t \in K$ skalár, hogy

$$O = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB,$$

amiből A és B függetlensége folytán az következik, hogy $t = 1$ és $t = 0$ – és ez ellentmondás. Így módon O, A és B V-nek nemkollineáris pontjai.

Tegyük fel ezek után, hogy $\dim V = 2$. Legyen $\ell, m \in \mathcal{L}_V$; $\ell \neq m$. Azt mutatjuk meg először, hogy ℓ és m pontosan akkor párhuzamos, ha ugyanaz az irányuk.

(a) Ha $\ell \nparallel m$, akkor a párhuzamosság definíciója és $\ell \neq m$ miatt a két egyenesnek van egy és csak egy P közös pontja, így 2.5. figyelembevételével

$$\ell = P + \mathrm{span}(v), \text{ ill. } m = P + \mathrm{span}(w)$$

írható, ahol v és w nemzérus vektorok. Ismét alkalmazva, hogy $\ell \neq m$, innen $\mathrm{span}(v) \neq \mathrm{span}(w)$ következik. Beláttuk így, hogy

$$\ell \nparallel m \implies \ell \text{ és } m \text{ iránya különböző},$$

amivel logikailag ekvivalens az

$$\ell \text{ és } m \text{ iránya azonos} \implies \ell \parallel m$$

állítás.

(B) Tegyük fel a másik irányú implikáció igazolása végett, hogy $l = A + \mathrm{span}(v)$ és az $m = B + \mathrm{span}(w)$ egyenes iránya különböző: $\mathrm{span}(v) \neq \mathrm{span}(w)$. Ekkor v és w lineárisan független, hiszen egyikük sem skalárszorosa a másiknak. Mivel feltevésünk szerint most V kétdimenziós, következik, hogy a (v, w) vektorpár bázisa V-nek. Így (egyértelmű módon)

$$A - B = \lambda v + \mu w \; ; \quad \lambda, \mu \in K$$

írható. Innen $A - \lambda v = B + \mu w$ adódik, ahol $A - \lambda v \in l$, $B + \mu w \in m$. Ez azt jelenti, hogy $l \cap m \neq \emptyset$. Beláttuk tehát:

$$\underline{l \text{ és } m \text{ iránya különböző} \implies l \cap m \neq \emptyset.}$$

Ezzel logikailag ekvivalens az

$$\underline{l \parallel m \implies l \text{ és } m \text{ iránya azonos}}$$

állítás.

<u>(A2) igazolása.</u> Legyen adva egy $l = A + \mathrm{span}(v)$ egyenes és egy $P \notin l$ pont. Az előzőek szerint az $m := P + \mathrm{span}(v)$ egyenes P-re illeszkedő, l-lel párhuzamos egyenes. További ilyen egyenes nem létezik, mert – mint azt megmutattuk – minden l-lel párhuzamos egyenes $\mathrm{span}(v)$ irányú, és ha egy $\mathrm{span}(v)$ irányú egyenes illeszkedik a P pontra, akkor <u>2.5.</u> értelmében $P + \mathrm{span}(v)$ alakban adható meg, tehát azonos m-mel. □

④ A valós affin sík

Legyen $\mathbb{R}^2$ a rendezett valós számpárok halmaza. Az összeadás és a skalárral való szorzás komponenszerinti, azaz az

$$(\alpha_1,\alpha_2)+(\beta_1,\beta_2):=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2),\text{ ill. }\lambda(\alpha_1,\alpha_2):=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2)$$

$(\lambda\in\mathbb{R})$ definíció szerinti értelmezéssel $\mathbb{R}^2$ valós vektortér. $\mathcal{L}_E$-vel jelölve $\mathbb{R}^2$ egyeneseinek (azaz egydimenziós lineáris sokaságainak) halmazát, az előző pontban mondottak szerint

$$\mathbb{R}A^2:=(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}_E)$$

affin sík, ezt az affin síkot a valós affin síknak nevezzük. A valós affin sík egyeneseit euklideszi egyenesekként is említjük.

3. Vektorterek affin geometriája

A következőkben V-vel egy K test fölötti vektorteret jelölünk.

Definíció. A V vektortér véges sok vektorának affin kombinációján a vektorok olyan lineáris kombinációját értjük, amelyben az együtthatók összege 1.

3.1. Lemma. Egy vektortér bármely egyenesének pontjai, és csak ezek, megkaphatók az egyenes két pontjának affin kombinációiként.

Bizonyítás. Tekintsük a V vektortérben az

$$l=\overleftrightarrow{AB}=A+\operatorname{span}(B-A)\qquad(A\neq B)$$

egyenest.

$$P\in l\iff\exists\,\tau\in K:\ P=A+\tau(B-A)=(1-\tau)A+\tau B$$

$$\iff P\text{ affin kombinációja }A\text{-nak és }B\text{-nek.}\quad\square$$

*Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha a K test legalább háromelemű, akkor egy $L\subset V$ halmaz pontosan akkor lineáris sokasága V-nek, ha

$$a, b \in L;\ t \in K \implies (1-t)a + tb \in L$$

(azaz ha L bármely két pontjával együtt a két pontra illeszkedő egyenest is tartalmazza).

Definíció. (1) Legyen $a \in V$ rögzített vektor. A

$$T_a : V \longrightarrow V,\quad v \longmapsto T_a(v) := v + a$$

transzformációt a V vektortér a-val való transzlációjának hívjuk.

(2) Egy $f : V \longrightarrow V$ transzformációt affin transzformációnak nevezzük, ha előáll egy lineáris transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként, azaz ha

$$f = T_a \circ \varphi\ ;\quad a \in V,\ \varphi \in \mathrm{End}(V)$$

alakú. Ekkor azt mondjuk, hogy φ a transzformáció lineáris része, T_a pedig a transzláció része.

(3) Egy affin transzformációt affin automorfizmusnak, röviden affinitásnak nevezzük, ha bijektív.

3.2. Lemma. (1) Két affin transzformáció kompozíciója is affin transzformáció.

(2) Egy $f = T_a \circ \varphi$ affin transzformáció pontosan akkor bijektív, ha φ bijektív (és így lineáris automorfizmusa V-nek).

(3) Egy V vektortér összes affinitásai csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoport V affin csoportjának nevezzük és $\mathrm{Aff}(V)$-vel jelöljük.

Bizonyítás. (1) Tekintsük a

$$T_a \circ \varphi \quad \text{és} \quad T_b \circ \psi\ ;\ a, b \in V\ ;\ \varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$$

affin transzformációkat. Tetszőleges $v \in V$ vektor esetén

$$(T_a\circ\varphi)\circ(T_b\circ\psi)(v) = T_a\circ\varphi\,(\psi(v)+b) = \varphi(\psi(v))+\varphi(b)+a$$
$$= T_{a+\varphi(b)}\circ(\varphi\circ\psi)\,(v),$$

tehát

$$(T_a\circ\varphi)\circ(T_b\circ\psi) = T_{a+\varphi(b)}\circ(\varphi\circ\psi),$$

ami igazolja, hogy $\varphi\circ\psi$ affin transzformáció, hiszen $\varphi\circ\psi\in\mathrm{End}(V)$.

(2) Minden transzláció invertálható (mégpedig $T_a^{-1}=T_{-a}$), így bijektív. Ha $\varphi\in\mathrm{End}(V)$ bijektív, akkor így $f=T_a\circ\varphi$ is bijektív, hiszen bijekciók kompozíciója bijekció. Megfordítva, ha $f=T_a\circ\varphi$ bijektív, akkor ugyanilyen okból $\varphi=T_a^{-1}\circ f=T_{-a}\circ f$ szintén bijektív.

(3) Az (1)-ben és (2)-ben mondottakból következik, hogy affinitások kompozíciója is affinitás. $1_V\in\mathrm{Aff}(V)$, és ha $f=T_a\circ\varphi\in\mathrm{Aff}(V)$, akkor

$$f^{-1}=(T_a\circ\varphi)^{-1}=\varphi^{-1}\circ T_{-a}=T_{-\varphi^{-1}(a)}\circ\varphi^{-1}$$

(ui. tetszőleges $v\in V$-re $\varphi^{-1}\circ T_{-a}(v)=\varphi^{-1}(v-a)=$
$=\varphi^{-1}(v)-\varphi^{-1}(a)=T_{-\varphi^{-1}(a)}\circ\varphi^{-1}(v)$), következésképpen $f^{-1}\in\mathrm{Aff}(V)$. Beláttuk így, hogy $\mathrm{Aff}(V)$ részcsoportja az összes $V\longrightarrow V$ bijekciók csoportjának, s ezért a „saját jogán" csoport. $\square$

<u>Megjegyzés.</u> Közvetlenül adódik, hogy a V vektortér transzlációi részcsoportját alkotják $\mathrm{Aff}(V)$-nek, így V összes transzlációinak halmaza maga is csoport a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot $\mathrm{Trans}(V)$-vel jelöljük. A $\mathrm{Trans}(V)$ csoport kommutatív, ugyanis tetszőleges $a,b\in V$ esetén

$$T_a\circ T_b = T_{a+b} = T_{b+a} = T_b\circ T_a.$$

Ugyancsak csoportot alkotnak a V vektortér bijektív lineáris transzformációi (azaz lineáris automorfizmusai); ezt a csoportot a V vektortér általános lineáris csoportjának hívjuk és $GL(V)$-vel jelöljük. (Angolul: general linear group – ezért GL.)

Az előző bizonyítás (1) pontjából kiolvasható, hogy az

$$\mathrm{Aff}(V) \longrightarrow GL(V), \quad f = T_a \circ \varphi \longmapsto \varphi$$

leképezés szürjektív csoport-homomorfizmus, amelynek magja (azaz az $1_V \in GL(V)$ egységelembe leképezett elemek halmaza) $\mathrm{Trans}(V)$.

A csoportelméletből ismert a következő két alapvető tétel:

(a) Egy G csoport egy H részcsoportja akkor és csak akkor normális részcsoport, ha fellép egy homomorfizmus magjaként.

(b) Ha $h : G \longrightarrow G'$ szürjektív csoport-homomorfizmus, amelynek magja H, akkor a G/H faktorcsoport izomorf G'-vel, izomorfizmust ad meg köztük az

$$aH \in G/H \longmapsto h(a) \in G'$$

leképezés.

Megállapíthatjuk ezek alapján, hogy $\mathrm{Trans}(V)$ normális részcsoportja az $\mathrm{Aff}(V)$ csoportnak, az $\mathrm{Aff}(V)/\mathrm{Trans}(V)$ faktorcsoport izomorf a
ϟ $GL(V)$ csoporttal:

$$\boxed{\mathrm{Aff}(V)/\mathrm{Trans}(V) \cong GL(V)} \; ;$$

izomorfizmust ad meg az

$$f\,\mathrm{Trans}(V) \in \mathrm{Aff}(V)/\mathrm{Trans}(V) \longmapsto \varphi \in GL(V), \text{ ha } f = T_a \circ \varphi$$

leképezés.

(ϟ : veszélyes kanyar!)

<u>3.3. Lemma.</u> Az affin transzformációk megőrzik az affin kombinációkat: ha $f: V \longrightarrow V$ affin transzformáció és $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, akkor $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i)$.

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $f = T_a \circ \varphi$, ahol $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $a \in V$. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) + a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(v_i) + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) a =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\varphi(v_i) + a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i),$$

és ezt kellett igazolnunk. □

<u>3.4. Állítás.</u> Legyen V a K test fölötti vektortér, és tegyük fel, hogy K-ban $1+1 \neq 0$. V-nek egy f transzformációja pontosan akkor affin transzformáció, ha megőrzi bármely két pont összes affin kombinációját, azaz ha tetszőleges $u, v \in V$ és $t \in K$ esetén

$$(*) \qquad f((1-t)u + tv) = (1-t)f(u) + tf(v).$$

<u>Bizonyítás.</u> A feltétel szükségessége következik az előző lemmából.

Az elegendőség igazolása végett tegyük fel, hogy az $f: V \longrightarrow V$ transzformáció eleget tesz a $(*)$ feltételnek. Legyen

$$a := f(\underline{0}) \; ; \quad \varphi(v) := f(v) - a \; , \quad v \in V.$$

Ekkor $f = T_a \circ \varphi$; ha sikerül megmutatnunk, hogy a $\varphi: V \longrightarrow V$ transzformáció lineáris, akkor készen vagyunk. Tetszőleges $v \in V$ vektor és $\lambda \in K$ skalár esetén

$$f(\lambda v) = f((1-\lambda)\underline{0} + \lambda v) \overset{(*)}{=} (1-\lambda) f(\underline{0}) + \lambda f(v) =$$

$$= (1-\lambda) a + \lambda f(v).$$

Felhasználva ezt az észrevételt,

$$\varphi(\lambda v) := f(\lambda v) - a = (1-\lambda)a + \lambda f(v) - a =$$
$$= -\lambda a + \lambda f(v) = \lambda\,(f(v) - a) = \lambda\varphi(v)$$
adódik, ami azt jelenti, hogy φ homogén.
Az additivitás igazolása céljából legyen $u, v \in V$ tetszőleges. Mivel K-ban $1+1 =: 2 \neq 0$, létezik az $\frac{1}{2} \in K$ reciprok, és a következők írhatók:

$$\begin{aligned}
\varphi(u+v) &= \varphi\left(2\cdot\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\right)\right) \\
&= 2\,\varphi\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\right) && \text{(mert } \varphi \text{ homogén)} \\
&= 2\left(f\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}v\right) - a\right) && (\varphi \text{ definíciója miatt}) \\
&\overset{(*)}{=} 2\left(\tfrac{1}{2}f(u) + \tfrac{1}{2}f(v) - a\right) \\
&= f(u) + f(v) - 2a \\
&= f(u) - a + f(v) - a \\
&= \varphi(u) + \varphi(v) && (\varphi \text{ definíciója miatt});
\end{aligned}$$

ezzel beláttuk, hogy φ additív. A homogenitás és az additivitás együttes teljesülése φ kívánt linearitását jelenti. □

Megjegyzések. (1) Ha $f \in \mathrm{Aff}(V)$, akkor tetszőleges $\ell \in \mathcal{L}_V$ egyenes esetén $f(\ell) \in \mathcal{L}_V$, ha ugyanis $f = T_a \circ \varphi$, ahol $a \in V$, $\varphi \in GL(V)$, és $\ell = P + \mathrm{span}(v)$ $(v \neq \underline{0})$, akkor

$$f(\ell) = \varphi(P + \mathrm{span}(v)) + a = \varphi(P) + a + \mathrm{span}(\varphi(v))$$
$$= f(P) + \mathrm{span}(\varphi(v)),$$

és itt $\varphi \in GL(V)$ miatt $\varphi(v) \neq \underline{0}$; $f(\ell)$ tehát az $f(P)$ ponton átmenő, $\varphi(v)$ irányvektorú egyenes. V affinitásai így egyben kollineációi V-nek, azaz

$$\boxed{\mathrm{Aff}(V) \text{ részcsoportja } \mathrm{Koll}(V)\text{-nek}}.$$

Megfordítva, egy vektortér kollineációi nem feltétlenül affinitások. Illusztrációként tekintsük a $\mathbb{C}$ komplex számtest fölött a $\mathbb{C}^2$ vektorteret és az

$$f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z_1, z_2) \longmapsto f(z_1, z_2) := (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

leképezést. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ekkor $f \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C}^2)$. f azonban nem affinitás. Mivel f az origót fixen hagyja, pontosan akkor lenne affinitás, ha lineáris volna. A linearitás viszont nem teljesül, ugyanis $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén

$$f(\lambda(z_1, z_2)) = f(\lambda z_1, \lambda z_2) := (\overline{\lambda z_1}, \overline{\lambda z_2}) = (\bar{\lambda}\bar{z}_1, \bar{\lambda}\bar{z}_2)$$
$$= \bar{\lambda}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \bar{\lambda} f(z_1, z_2) \neq \lambda f(z_1, z_2)$$

(a $\bar{\ }$ végig komplex konjugáltat jelöl).

(2) Egy K test (vagy ferdetest) automorfizmusán olyan $\sigma: K \longrightarrow K$ bijekciót értünk, amely művelettartó az összeadásra és a szorzásra nézve, azaz amelyre tetszőleges $\alpha, \beta \in K$ esetén

$$\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \quad \sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta).$$

Ekkor

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1,$$

ugyanis

$$\sigma(0) = \sigma(0+0) = \sigma(0) + \sigma(0) \implies \sigma(0) = 0,$$
$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = \sigma(1)\sigma(1) \implies \sigma(1) = 1$$

(felhasználva, hogy $\sigma(0) = 0$ és σ bijektivitása miatt $\sigma(1) \neq 0$).

Könnyen megmutatható, hogy a $\mathbb{Z}_p$ maradékosztálytestnek (ahol p prímszám) és a $\mathbb{Q}$ racionális számtestnek egyetlen automorfizmusa van, az identikus transzformáció. Felhasználva a $\mathbb{Q}$-ra vonatkozó észrevételt, igazolható, hogy az $\mathbb{R}$ valós számtestnek is az identikus transzformáció az egyetlen automorfizmusa. Meglepő módon a $\mathbb{C}$ komplex számtestnek nem megszámlálhatóan végtelen sok automorfizmusa van; ennek bizonyítása finomabb algebrai ismereteket igényel. Könnyen belátható viszont, hogy $\mathbb{C}$-nek pontosan két olyan automorfizmusa van, amely fixen hagyja a valós számokat: az identikus transzformáció és a konjugálás.

(3) Egy K test (vagy ferdetest) fölötti V vektortér egy $\varphi: V \longrightarrow V$ transzformációját <u>szemilineárisnak</u> nevezzük, ha van olyan $\sigma: K \longrightarrow K$ testautomorfizmus, hogy tetszőleges $u, v \in V$ és $\lambda, \mu \in K$ esetén $\varphi(\lambda u + \mu v) = \sigma(\lambda)\varphi(u) + \sigma(\mu)\varphi(v)$.
(Az (1) végén szereplő $f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ transzformáció szemilineáris.)

Az affin geometria alaptétele <u>Legyen K legalább háromelemű test, V pedig a K test fölötti, legalább 2-dimenziós (de véges dimenziójú) vektortér. Ekkor V minden kollineációja egy bijektív szemilineáris transzformáció és egy transzláció kompozíciója.</u> △

<u>**Következmény.**</u> Az 1-nél nagyobb véges dimenziójú <u>valós</u> vektorterek minden kollineációja affinitás, s így ebben az esetben a kollineáció-csoport és az affinitás-csoport egybeesik.

Ez az alaptételből annak alapján adódik, hogy $\mathbb{R}$ egyedüli automorfizmusa az identikus transzformáció. □

A $\dim V \geq 2$, ill. a „K legalább háromelemű" feltételt illetően gondoljuk meg, hogy ha $\dim V = 1$ vagy K csak két elemet tartalmaz, akkor <u>minden</u> $V \longrightarrow V$ bijektív kollineáció!

Definíció. Egy vektortér pontjainak egy legalább kéttagú, véges sorozatát affin értelemben függőnek nevezzük, ha van olyan tagja, amely előállítható a többi affin kombinációjaként. Ellenkező esetben, vagyis ha a pontok egyike sem kapható meg a többi pont affin kombinációjaként, affin értelemben független, röviden affin-független pontsorozatról beszélünk.

Példa. Bármely két pont affin független. Egy háromtagú pontsorozat akkor és csak akkor függő affin értelemben, ha kollineáris pontok alkotják.

3.5. Lemma. Legyen V a K test fölötti vektortér. V egy $(v_i)_{i=0}^{k}$ $(k \geq 1)$ pontsorozatára a következő állítások ekvivalensek:

(1) A pontsorozat affin független.

(2) Ha $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i = 0$ és $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$, akkor $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

(3) A $(v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0)$ vektorsorozat lineárisan független. (Itt v_0 szerepét a pontsorozat bármely tagja átveheti.)

Bizonyítás. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy a skalárok valamelyike nem zérus, például $\lambda_0 \neq 0$. Ekkor létezik az $\frac{1}{\lambda_0}$ reciprok, és így a $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \underline{0}$ relációból azt kapjuk, hogy

$$v_0 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} v_k .$$

Itt a jobb oldali együtthatók összege 1, ugyanis a $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ feltételből $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)$, és ezért

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = \frac{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1 .$$

v_0 tehát affin kombinációja a többi pontnak, ami ellentmond a pontsorozat affin-függetlenségének.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$ Tegyük fel, hogy $\lambda_1(v_1-v_0)+\ldots+\lambda_k(v_k-v_0)=\underline{0}$. Ekkor $-(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)v_0+\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k=\underline{0}$, s mivel itt az együtthatók összege zérus, a feltétel alapján az együtthatók mindegyikének eltűnése, és így $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$ következik. Ezzel beláttuk, hogy a $v_1-v_0,\ldots,v_k-v_0$ vektorokból a zérusvektor csak triviálisan kombinálható lineárisan, a vektorrendszer tehát lineárisan független.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (1)}$ Ismét indirekt érvelést alkalmazunk. Ha a v_0 vektor affin kombinációja a vektorrendszer többi tagjának, akkor

$$v_0=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k\ ,\quad \lambda_1+\ldots+\lambda_k=1.$$

Ez a reláció a következőképpen alakítható át:

$$(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)v_0=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k,$$

$$\lambda_1(v_1-v_0)+\ldots+\lambda_k(v_k-v_0)=\underline{0}.$$

Innen $(v_1-v_0,\ldots,v_k-v_0)$ lineáris függetlensége miatt $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$ következik, ellentmondásban azzal, hogy $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$.

Amennyiben a $v_1,\ldots,v_k$ vektorok valamelyike, mondjuk v_1, kapható meg a $(v_i)_{i=0}^{k}$ vektorsorozat többi tagjának affin kombinációjaként, úgy

$$v_1=\lambda_0 v_0+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_k v_k\ ,\quad \lambda_0+\lambda_2+\ldots+\lambda_k=1$$

írható. Átalakítva:

$$v_1=\big(1-(\lambda_2+\ldots+\lambda_k)\big)v_0+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_k v_k,$$

$$v_1-v_0=\lambda_2(v_2-v_0)+\ldots+\lambda_k(v_k-v_0)$$

– és ez ellentmond a $(v_1-v_0,\ldots,v_k-v_0)$ vektorrendszer lineáris függetlenségének. □

<u>Definíció és lemma.</u> Legyen V a K test fölötti vektortér, elemeit nevezzük pontoknak és vektoroknak is. A

$$\rho : V \times V \longrightarrow V, \quad (a,b) \longmapsto \rho(a,b) := b - a =: \overrightarrow{ab}$$

leképezést a V vektortér <u>természetes affin struktúrájának</u> mondjuk. Ez rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) Minden $a \in V$ pont és $v \in V$ vektor esetén létezik egy és csak egy olyan $b \in V$ pont, hogy $\overrightarrow{ab} = v$.

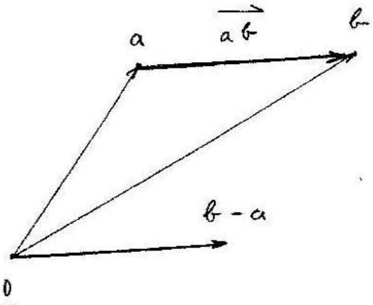
(ii) Tetszőleges $a, b, c \in V$ pontok esetén
$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

<u>Bizonyítás.</u> (i) Mivel
$$\overrightarrow{ab} = v \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} b - a = v \Longleftrightarrow b = a + v;$$
$a \in V$ és $b \in V$ megadása után a $b = a + v$ pont, és csakis ez, eleget tesz az $\overrightarrow{ab} = v$ feltételnek.

(ii) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = (b - a) + (c - b) = c - a =: \overrightarrow{ac}$. □

<u>Megállapodás.</u> Vektortérben dolgozva, a továbbiakban mindig feltesszük, hogy a vektortér el van látva a természetes affin struktúrával. Egy V vektortér elemeire a „pont" és a „vektor" elnevezéseit egyaránt használjuk; tetszőleges $a, b \in V$ pontok esetén azonban $\overrightarrow{ab} := b - a$ mindig vektorként említendő. Az (a,b) rendezett pontpárt az $\overrightarrow{ab}$ vektor <u>„a" kezdőpontú, b végpontú reprezentánsának</u> hívjuk.

<u>Szemléltetés</u>



<u>Példa</u> Ha A és B különböző pontjai a V vektortérnek, akkor $\overrightarrow{AB} := B - A$ irányvektora az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesnek, és $\overleftrightarrow{AB} = A + \operatorname{span}(\overrightarrow{AB})$.

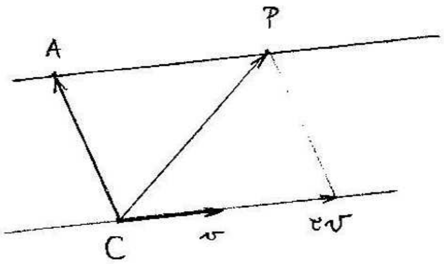
Definíció. (1) Rögzítve a V vektortér egy C pontját, egy $P \in V$ pont C-re vonatkozó helyzetvektorán a $\overrightarrow{CP} = P - C$ vektort értjük.

(2) A V vektortér egy affin koordinátarendszere olyan $(C, \mathcal{B})$ pár, ahol C egy rögzített pontja, $\mathcal{B} = (v_i)_{i=1}^n$ pedig bázisa a V vektortérnek. A C pontot a koordinátarendszer kezdőpontjának vagy origójának hívjuk. Egy $P \in V$ pont $(C, \mathcal{B})$-re vonatkozó koordinátáin a pont C-re vonatkozó helyzetvektorának a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáit, azaz a $\overrightarrow{CP} = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ előállítás által egyértelműen meghatározott $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ skalár n-es tagjait értjük.

Példák (1) Rögzítsünk a V vektortérben egy $(C, \mathcal{B}) = (C, (v_i)_{i=1}^n)$ affin koordinátarendszert, és tekintsünk egy $\ell = A + \mathrm{span}(v)$ $(v \neq 0)$ egyenest. Az egyenes pontjainak, és csakis ezeknek, a C-re vonatkozó helyzetvektora előállítható

$$(1) \qquad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \tau v, \qquad \tau \in K$$

alakban. Valóban,



$$\begin{aligned} P \in \ell &\iff \exists \tau \in K: \ P = A + \tau v \\ &\iff \exists \tau \in K: \ P - C = A - C + \tau v \\ &\iff \exists \tau \in K: \ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \tau v \end{aligned}$$

Ha $\overrightarrow{CP} = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, $\overrightarrow{CA} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ és $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, akkor az (1) reláció a

$$\sum_{i=1}^n \xi_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \tau \lambda_i) v_i$$

alakot ölti. Megállapíthatjuk ennek alapján, hogy egy, a $(C, \mathcal{B})$ affin koordinátarendszerre vonatkozóan $\xi_1, \dots, \xi_n$ koordinátákkal rendelkező P pont akkor és csak akkor illeszkedik az $A + \mathrm{span}(v)$ egyenesre, ha van olyan $\tau \in K$ skalár, hogy

$$\xi_i = \alpha_i + t\,v_i \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ilyen értelemben azt mondjuk, hogy

$$\boxed{x_i = \alpha_i + t\,v_i \quad ; \quad i \in \{1, \dots, n\}}$$

relációk, ahol $x_1, \dots, x_n$ már puszta szimbólumok, az $A + \mathrm{span}(v)$ <u>egyenes paraméteres előállításának koordinátakifejezései</u> a $(C, \mathcal{B})$ affin koordinátarendszerre vonatkozóan.

Hasonlóan tárgyalható a V vektortér síkjainak, és általában a k-dimenziós lineáris sokaságainak ($k \in \{1, \dots, \dim V\}$) paraméteres előállítása.

(2) Ha V n-dimenziós vektortér a K test fölött és $(A_i)_{i=0}^{n}$ affin független $(n+1)$-tagú pontsorozat, akkor $(A_0, (\overrightarrow{A_0A_i})_{i=1}^{n})$ affin bázisa V-nek. – Valóban, a pontok affin függetlensége miatt 3.5. értelmében az $\overrightarrow{A_0A_i} = A_i - A_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vektorok n-tagú lineárisan független vektorrendszerét, és így bázisát alkotják V-nek.

∼·∼

Bemutatjuk a vektorterek természetes affin struktúrájának egy kézenfekvő és ésszerű általánosítását. Ezáltal megszabadulhatunk attól a kisebb kényelmetlenségtől, hogy ugyanarra az objektumra két elnevezést („pont" és „vektor") kelljen használni.

<u>Definíció.</u> Legyen $\mathcal{P}$ egy pontoknak nevezett elemek alkotta nemüres halmaz, V egy K test fölötti vektortér,

$$\delta: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow V, \quad (A, B) \longmapsto \delta(A, B) =: \overrightarrow{AB}$$

pedig egy <u>affin struktúrának</u> mondott leképezés.

Az $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, V, \varrho)$ hármast <u>affin pont-vektor tér</u>nek nevezzük, ha eleget tesz a következő axiómáknak:

$(PV)_1$ <u>Bármely $P \in \mathcal{P}$ ponthoz és $v \in V$ vektorhoz létezik egy és csak egy olyan Q pont, hogy $\overrightarrow{PQ} = v$.</u>

$(PV)_2$ <u>Tetszőleges A, B, C pontok esetén $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.</u>

A V vektorteret ekkor <u>iránytér</u>nek hívjuk; egy affin pont-vektor tér dimenzióján az iránytérének dimenzióját értjük.

<u>Megjegyzések</u>. (1) Az „affin pont-vektor tér"-elnevezés mellett gyakori az <u>affin tér</u> elnevezés is. A jelölésnél az affin struktúrát rendszerint nem tüntetjük fel: $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, V, \varrho)$ helyett egyszerűen azt írjuk, hogy $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, V)$. Szintén gyakori, hogy a $\mathcal{P}$ ponthalmazt is affin térként említik; ez nem vezet félreértésre az affin struktúra rögzítése után.

(2) Tetszőlegesen rögzítve a $(\mathcal{P}, V)$ affin pont-vektor tér egy O pontját, $(PV)_1$ értelmében a

$$\varrho_O : \mathcal{P} \longrightarrow V, \quad P \longmapsto \varrho_O(P) := \varrho(O, P) =: \overrightarrow{OP}$$

leképezés bijekció. Ezt az O pontra mint origóra vonatkozó <u>helyzetvektor-megfeleltetés</u>nek hívjuk, az $\overrightarrow{OP}$ vektort a P pont <u>O-ra vonatkozó</u> <u>helyzetvektorá</u>nak mondjuk. A korábbiak analógiájára, a $(\mathcal{P}, V)$ affin pont-vektor tér egy <u>O origójú</u> <u>affin koordinátarendszere</u> olyan $(O, \mathcal{B})$ pár, ahol $O \in \mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ pedig bázisa V-nek. Egy P pont $(O, \mathcal{B})$-re vonatkozó <u>koordinátái</u> a pont $\overrightarrow{OP}$ helyzetvektorának a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái.

(3) Az affin pont-vektor terek geometriájának ki-

építése – eltekintve a speciális technikai részletektől – ugyanolyan gondolatmenetet követ, mint a vektortér alapú tárgyalás. Az összehasonlítás kedvéért (és egyben tanulságos volta miatt) bemutatunk néhány kiinduló lépést.

Vegyünk alapul egy $(\mathcal{P}, V)$ affin pont-vektor teret, ahol V egy K test fölötti vektortér. Egyszerűen megmutatható (feladat!) a következők teljesülése:

(i) $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$, minden $P \in \mathcal{P}$ esetén.

(ii) Ha $\overrightarrow{PQ} = \underline{0}$, akkor $P = Q$.

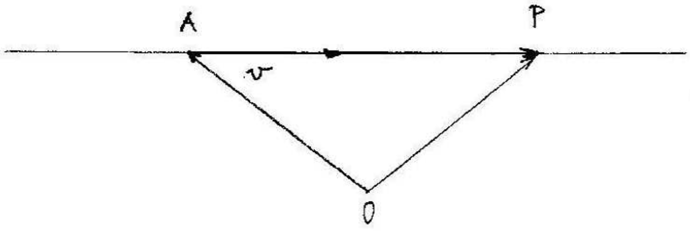
(iii) Tetszőleges (P, Q) pontpár esetén $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

(iv) A $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ és a $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ egyenlőség ekvivalens („paralelogramma-szabály”).

<u>Egyenesek értelmezése</u> Legyen $A \in \mathcal{P}$ egy rögzített pont, $v \in V$ pedig nemzérus vektor. Ekkor az

$$\ell := \{ P \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AP} \in \mathrm{span}(v) \}$$

ponthalmazt <u>egyenesnek</u>, mégpedig v irányvektorú egyenesnek hívjuk. Mivel $\overrightarrow{AA} = \underline{0} = 0 \cdot v$, $A \in \ell$.



Kijelölve egy $O \in \mathcal{P}$ origót,

$$P \in \ell \overset{\text{def.}}{\iff} \exists\, t \in K: \ \overrightarrow{AP} = tv$$

$$\iff \exists\, t \in K: \ \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = tv$$

$$\iff \exists\, t \in K: \ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + tv \quad \text{(felhasználva (iii)-t).}$$

Megállapíthatjuk, hogy origó rögzítése után egy affin pont-vektor egyenesei ugyanúgy jellemezhetők, mint a vektortérbeli egyenesek (v.ö. a 30. oldalon tárgyalt példával).

<u>Síkok értelmezése</u> Legyen A rögzített pontja $\mathcal{P}$-nek, és tegyük fel, hogy u és v lineárisan független vektorai V-nek. Az

$$S := \{ P \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AP} \in \operatorname{span}(u,v) \}$$

ponthalmazt <u>síknak</u> nevezzük, amelynek $\operatorname{span}(u,v)$ az <u>iránytere</u>. (Azt is mondjuk, hogy a síkot u és v <u>feszíti ki</u>.) $A \in S$ most is teljesül, hiszen $\overrightarrow{AA} = \underline{0} = 0 \cdot u + 0 \cdot v \in \operatorname{span}(u,v)$. Rögzítve egy $O \in \mathcal{P}$ origót, iménti gondolatmenetünk megismételhető:

$$P \in S \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \lambda, \mu \in K: \quad \overrightarrow{AP} = \lambda u + \mu v$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in K: \quad \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = \lambda u + \mu v$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in K: \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda u + \mu v .$$

<u>Affin pont-vektor tér affin transzformációi</u> Egy $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ transzformációt <u>affin transzformációnak</u> mondunk, ha van olyan $\varphi: V \longrightarrow V$ <u>lineáris transzformáció</u>, hogy bármely $P, Q \in \mathcal{P}$ pont esetén

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az itt szereplő lineáris transzformáció egyértelműen meghatározott; ezt az affin transzformáció <u>linearizáltjának</u> hívjuk és rá az $\vec{f}$ jelölést is használjuk.

Ha speciálisan a természetes affin struktúrával ellátott V vektortérről van szó (azaz $\mathcal{P} := V$, $\varrho := \delta$), akkor visszakapjuk V affin transzformációinak korábban bevezetett fogalmát. Valóban, tegyük fel, hogy az $f: V \longrightarrow V$ transzformációhoz létezik olyan $\varphi: V \longrightarrow V$ lineáris transzformáció, amelyre tetszőleges $u, v \in V$ esetén

$$\overrightarrow{f(u)f(v)} = \varphi(\overrightarrow{uv}).$$

Ez a természetes affin struktúra definíciója alapján azzal ekvivalens, hogy

$$f(v) - f(u) = \varphi(v) - \varphi(u) \quad ; \quad u, v \in V.$$

Ha itt az $u := \underline{0}$ választással élünk és bevezetjük az $a := f(u)$ vektort, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(v) = \varphi(v) + a \quad , \quad v \in V ;$$

tehát $f = T_a \circ \varphi$. Ez azt jelenti, hogy f affin transzformációja V-nek a korábbi értelemben.

(4) Befejezve rövid áttekintésünket az affin pont-vektor terekről, megállapíthatjuk, hogy ezek nem sokban különböznek a vektorterektől. Az eltérés – szemléletesen szólva – csupán annyi, hogy az affin terek esetében „elfelejtettük", hogy hol van origó, és minden pont egyenrangúvá vált. Pontosabban: a megfelelő fogalmak bevezetése után megmutatható, hogy <u>minden V irányterű affin tér izomorf a természetes affin struktúrával ellátott V vektortérrel.</u> Erre is tekintettel,

affin geometriai vizsgálatainkat egy, a természetes affin struktúrával ellátott VEKTORTÉRben végezzük

.

~ ∘ ~

<u>3.6. Lemma és definíció.</u> Legyen V a K test fölötti vektortér. Tekintsünk egy $l \subset V$ egyenest, és jelöljük ki az l egyenes $A \neq B$ pontjait.

(1) Minden $P \in l \setminus \{B\}$ ponthoz létezik egy és csak egy olyan $\lambda \in K$ skalár, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$. Ezt a skalárt a P pont <u>A-ra és B-re vonatkozó</u> <u>osztóviszonyának</u> nevezzük és (ABP)-vel jelöljük.

(2) Az osztóviszony a -1 értéket nem veheti föl.

(3) Ha $(ABP)=\lambda$, akkor a P pont tetszőlegesen választott C origóra vonatkozó helyzetvektora

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}}{1+\lambda},$$

következésképpen P helyzetvektora megkapható A és B helyzetvektorának affin kombinációjaként olyan α, ill. β együtthatókkal, amelyekre $\frac{\beta}{\alpha}=(ABP)$ teljesül.

<u>Bizonyítás.</u> (1) $P\in \ell$ és $P\neq B$ miatt az $\ell=\overleftrightarrow{AB}$ egyenes előállítható $\ell = A+\mathrm{span}(\overrightarrow{PB})$ alakban. Mivel $P\in\ell$, egyértelműen létezik olyan $\lambda\in K$ skalár, hogy $P = A+\lambda\overrightarrow{PB}$; azaz $P-A=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$. Ezzel az osztóviszonynak mondott $\lambda =: (ABP)$ skalár egyértelmű létezését igazoltuk.

(2) $(ABP)=-1$ esetén a definíció azt adná, hogy $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{PB}$, amiből $\underline{0}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}=B-A$ következik, és így azt kapjuk, hogy $A=B$. Ezt azonban kizártuk.

(3) Ha $(ABP)=\lambda$, azaz $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, akkor egy C origó kijelölése után a következő ekvivalens megállapítások tehetők:

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB} \iff \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\lambda(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})$$
$$\iff \overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$$
$$\overset{(2)}{\iff} \overrightarrow{CP}=\frac{\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}}{1+\lambda}.$$

Így megkaptuk a P pont helyzetvektorának kívánt előállítását. Ha $\alpha := \frac{1}{1+\lambda}$, $\beta := \frac{\lambda}{1+\lambda}$, akkor $\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$, ez a kombináció affin, és

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot(1+\lambda)=\lambda=(ABP). \qquad \square$$

<u>Megjegyzés.</u> (3)-ból $C:=\underline{0}$ és $\vartheta := \frac{\lambda}{1+\lambda}$ választásával következik, hogy $(ABP)=\frac{\vartheta}{1-\vartheta} \iff P=(1-\vartheta)A+\vartheta B$.

<u>Következmény.</u> Egy vektortér minden affin transzformációja osztóviszonytartó: ha $f : V \longrightarrow V$ affin transzformáció, $A \neq B \neq P$ kollineáris pontjai V-nek, és $f(A) \neq f(B) \neq f(P)$, akkor $(f(A) f(B) f(P)) = (A B P)$.

Megfordítva, ha a K alaptestben $1+1 \neq 0$, akkor V minden osztóviszonytartó transzformációja affin transzformáció.

<u>Bizonyítás.</u> Az első megállapítás adódik abból, hogy az affin transzformációk megőrzik az affin kombinációkat (<u>3.3.</u>), és hogy $(ABP) = \lambda$ esetén az imént látottak szerint P $\frac{1}{1+\lambda}$ és $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ együtthatókkal képzett affin kombinációja A-nak és B-nek.

A megfordítás igazolása céljából tekintsük a V vektortér $A \neq B$ pontjait, és ezek egy

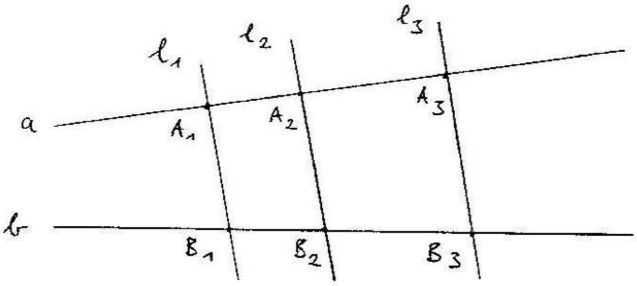
$$P = (1-\varrho)A + \varrho B \quad , \quad \varrho \in K$$

affin kombinációját. Föltehetjük, hogy $P \notin \{A, B\}$; ekkor $\varrho \notin \{0, 1\}$, és <u>3.1.</u>(3)-ból következően $(ABP) = \frac{\varrho}{1-\varrho}$. Ha $f : V \longrightarrow V$ megőrzi az osztóviszonyt, akkor $(f(A) f(B) f(P)) = \frac{\varrho}{1-\varrho}$, amiből $f(P) = (1-\varrho) f(A) + \varrho f(B)$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy f megtartja bármely két pont összes affin kombinációját; így <u>3.4.</u> alapján f affin transzformáció. $\square$

4. Az affin geometria néhány klasszikus tétele

> Ebben a fejezetben V egy K test fölötti KÉTDIMENZIÓS vektortér, ellátva a természetes affin struktúrával.

4.1. Tétel (a párhuzamos szelők tétele). Legyenek l_1, l_2, l_3 V különböző, párhuzamos egyenesei. Ha az $a \neq b$ egyenesek ezeket a különböző A_1, A_2, A_3, ill. B_1, B_2, B_3 pontokban metszik, akkor $(A_1A_2A_3) = (B_1B_2B_3)$.



Bizonyítás. Legyen $(A_1A_2A_3) = \frac{\tau}{1-\tau}$. Ekkor 3.6. (3)-ból következően

$$A_3 = (1-\tau)A_1 + \tau A_2.$$

Tekintsük a

$$B := (1-\tau)B_1 + \tau B_2$$

pontot. 3.1.-re tekintettel $B \in \overleftrightarrow{B_1B_2} = b$; ha sikerül belátnunk, hogy $B = B_3$, akkor $(B_1B_2B_3) = \frac{\tau}{1-\tau}$ következik és készen vagyunk.

Párhuzamosságuk folytán l_1, l_2 és l_3 közös v irányvektorral rendelkezik (ld. 2.6. bizonyítását), így

$$l_i = A_i + \mathrm{span}(v), \quad i \in \{1,2,3\}$$

írható. Mivel $B_i \in l_i$, 2.4. alapján $B_i - A_i \in \mathrm{span}(v)$ ($i \in \{1,2,3\}$); léteznek ezért olyan $\alpha, \beta \in K$ skalárok, hogy $B_1 - A_1 = \alpha v$, $B_2 - A_2 = \beta v$. Ezt felhasználva,

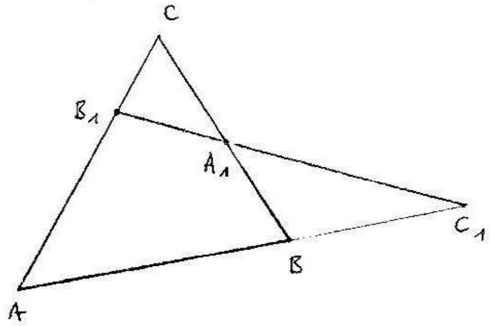
$$B = (1-\tau)(A_1 + \alpha v) + \tau(A_2 + \beta v) = (1-\tau)A_1 + \tau A_2 +$$
$$+ ((1-\tau)\alpha + \tau\beta)v = A_3 + ((1-\tau)\alpha + \tau\beta)v \in l_3.$$

B tehát rajta van a „b" és az ℓ_3 egyenesen is, így $B = B_3$ valóban teljesül. □

<u>4.2. Tétel</u> (<u>Menelaosz tétele</u>). Legyenek A, B, C a V kétdimenziós vektortér nemkollineáris pontjai; legyenek továbbá A_1, B_1 és C_1 rendre a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Ekkor annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az A_1, B_1 és C_1 pontok kollineárisak legyenek, az

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$$

reláció teljesülése.



<u>Bizonyítás.</u> Az osztóviszony jelentése alapján, felhasználva, hogy egy egyenes minden pontja megkapható az egyenesen kijelölt két pont affin kombinációjaként, a következő megállapítások tehetők:

$$A_1 \in \overleftrightarrow{BC} \setminus \{B, C\} \Rightarrow \exists\, \alpha \in K \setminus \{0,1\}: \ A_1 = (1-\alpha)B + \alpha C$$
$$\Rightarrow (BCA_1) = \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

$$B_1 \in \overleftrightarrow{CA} \setminus \{C, A\} \Rightarrow \exists\, \beta \in K \setminus \{0,1\}: \ B_1 = (1-\beta)C + \beta A$$
$$\Rightarrow (CAB_1) = \frac{\beta}{1-\beta};$$

$$C_1 \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \{A, B\} \Rightarrow \exists\, \gamma \in K \setminus \{0,1\}: \ C_1 = (1-\gamma)A + \gamma B$$
$$\Rightarrow (ABC_1) = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Az A_1, B_1, C_1 pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $C_1 \in \overleftrightarrow{A_1B_1}$, azaz ha van olyan ε skalár, hogy $C_1 = (1-\varepsilon)A_1 + \varepsilon B_1$ (ahol a pontok különbözősége folytán $\varepsilon \notin \{0,1\}$). Felhasználva

a pontok előállítását, ez azzal ekvivalens, hogy
$$(1-\gamma)A+\gamma B=(1-\tau)\big((1-\alpha)B+\alpha C\big)+\tau\big((1-\beta)C+\beta A\big).$$
Innen rendezés után az
$$\big((1-\gamma)-\tau\beta\big)A+\big(\gamma+(\tau-1)(1-\alpha)\big)B+\big((\tau-1)\alpha-\tau(1-\beta)\big)C=\underline{0}$$
relációhoz jutunk. Itt az együtthatók összege 1 és az A, B, C pontok affin függetlenek (hiszen nem kollineárisak), ezért 3.5. alapján arra következtethetünk, hogy az együtthatók mindegyike 0:
$$1-\gamma=\tau\beta\,,\quad \gamma=(1-\tau)(1-\alpha)\,,\quad \tau(1-\beta)=(\tau-1)\alpha\,.$$
Ezekből a relációkból
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}=-\frac{\tau(1-\beta)}{\gamma}=-\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma}\implies\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{\gamma}{1-\gamma}=-1\,,$$
ami az állítás helyességét jelenti. □

4.3. Lemma. Ha A, B, C különböző kollineáris pontok, akkor $(ABC)(BCA)(CAB)=1$.

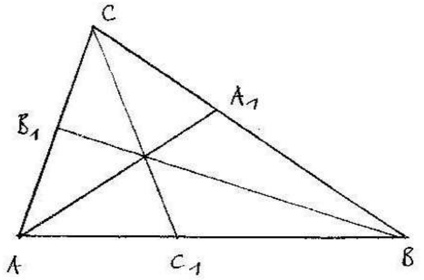
Bizonyítás. Legyen $\lambda:=(ABC)$, $\mu:=(BCA)$, $\nu:=(CAB)$. Ekkor $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}=\mu\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}=\nu\overrightarrow{BA}$; így
$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}=\lambda\nu\overrightarrow{BA}=\lambda\nu\mu\overrightarrow{AC}\,,$$
következésképpen $\lambda\mu\nu=1$, ami igazolja az észrevételt. □

4.4. Tétel (Ceva*) tétele). Legyenek A, B, C a V kétdimenziós vektortér nemkollineáris pontjai; legyenek továbbá A_1, B_1 és C_1 rendre a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre illeszkedő, A-tól, B-től és C-től különböző pontok. Az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek akkor és csak akkor konkurrensek vagy párhuzamosak, ha
$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=1.$$

Bizonyítás. (1) Megmutatjuk, hogy amennyiben az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek nem párhuzamosak, úgy ezek akkor és csak akkor konkurrensek, ha teljesül az

*) Giovanni CEVA (1647-1734) olasz matematikus.

$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$ feltétel.



Állításunkat koordinátageometriai meggondolásokkal igazoljuk. Az A, B, C pontok nem kollineárisak, így affin függetlenek, és ezért

$$(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

affin koordinátarendszer. Ennek alapvetőelével dolgozunk.

$\overrightarrow{AA} = \underline{0} = 0\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} = 0\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}$

miatt az A, B és C pont koordinátái a választott koordinátarendszerre vonatkozóan rendre

$$(0,0), \quad (1,0), \quad \text{ill.} \quad (0,1).$$

$\overleftrightarrow{AC}$ egyenlete $x = 0$, $\overleftrightarrow{AB}$ egyenlete $y = 0$; így

$\underline{B_1 \text{ koordinátái } (0,\beta);\ C_1 \text{ koordinátái } (\gamma, 0)}$

alakúak, ahol $\beta, \gamma \in K \setminus \{0\}$.

$\overleftrightarrow{BC}$ egyenlete Az egyenletet $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0$ alakban keresve, $B \in \overleftrightarrow{BC}$ miatt $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$; $C \in \overleftrightarrow{BC}$ miatt $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$; a két relációból $\alpha_1 = \alpha_2 =: 1$, $\alpha_3 = -1$, így

$\underline{\overleftrightarrow{BC} \text{ egyenlete } x + y = 1.}$

Ebből következik, hogy

$\underline{A_1 \text{ koordinátái } (\lambda, 1-\lambda),\ \lambda \in K}$

alakúak.

$\overleftrightarrow{BB_1}$ egyenlete Ezt is $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0$ alakban keresve, $B \in \overleftrightarrow{BB_1}$ miatt $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $B_1 \in \overleftrightarrow{BB_1}$ miatt $\alpha_2\beta + \alpha_3 = 0$. A két relációból $\alpha_1 = \alpha_2\beta$. Itt élhetünk az $\alpha_1 := 1$ választással; ekkor

$\alpha_2 = \frac{1}{\beta}$, $\alpha_3 = -1$, és így

$\overleftrightarrow{BB_1}$ egyenlete $x + \frac{1}{\beta} y = 1$.

Hasonló módon kapjuk, hogy

$\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenlete $\frac{1}{\gamma} x + y = 1$.

Feltevésünk értelmében az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek nem párhuzamosak; tegyük fel például, hogy $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ metsző. Ekkor az

$$\begin{cases} x + \frac{1}{\beta} y = 1 \\ \frac{1}{\gamma} x + y = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, egyetlen megoldása az

$$\left(\frac{(1-\beta)\gamma}{1-\beta\gamma}, \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma} \right) \in K^2$$

skalárpár.

Az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek akkor és csak akkor konkurrensek, ha ez az elempár megoldása $\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenletének. Ha ezt az egyenletet is $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 = 0$ alakban keressük, akkor

$A \in \overleftrightarrow{AA_1} \Rightarrow \alpha_3 = 0$; $A_1 \in \overleftrightarrow{AA_1} \Rightarrow \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 = 0$,

így élhetünk az $\alpha_1 := \lambda - 1$, $\alpha_2 := \lambda$ választással.

Tehát

$\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenlete: $(\lambda - 1)x + \lambda y = 0$.

Így módon

$$\overleftrightarrow{AA_1}, \overleftrightarrow{BB_1} \text{ és } \overleftrightarrow{CC_1} \text{ konkurrens} \Leftrightarrow (\lambda-1)\frac{(1-\beta)\gamma}{1-\beta\gamma} + \lambda \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(1-\beta)\gamma = -\lambda\beta(1-\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{1-\beta}{\beta} \frac{\gamma}{1-\gamma} = 1.$$

Másrészt:

$$(ABC_1) = \gamma_1 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AC_1} = \gamma_1 \overrightarrow{C_1B} \Longleftrightarrow (\gamma, 0) = \gamma_1 \left((1,0) - (\gamma, 0) \right)$$

$$\Longleftrightarrow (\gamma, 0) = (\gamma_1(1-\gamma), 0) \Longleftrightarrow \gamma_1 = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

tehát $\underline{(ABC_1) = \frac{\gamma}{1-\gamma}}$.

Hasonló módon,

$(BCA_1) = \alpha_1 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{BA_1} = \alpha_1 \overrightarrow{A_1C} \Longleftrightarrow (\lambda-1, 1-\lambda) = \alpha_1(-\lambda, \lambda)$

$\Longleftrightarrow \alpha_1 = \frac{1-\lambda}{\lambda}$,

így $\underline{(BCA_1) = \frac{1-\lambda}{\lambda}}$; végül

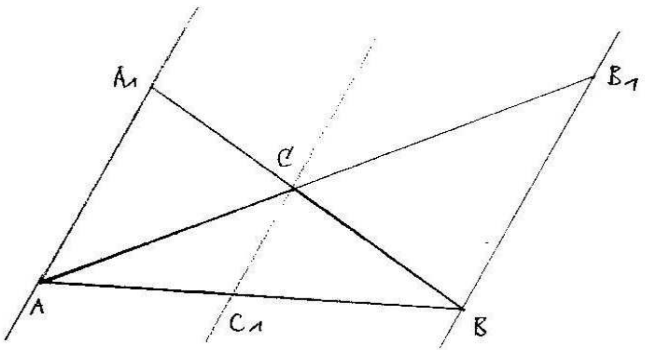
$(CAB_1) = \beta_1 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{CB_1} = \beta_1 \overrightarrow{B_1A} \Longleftrightarrow (0, \beta-1) = \beta_1(0, -\beta)$

$\Longleftrightarrow \beta_1 = \frac{1-\beta}{\beta}$,

vagyis $\underline{(CAB_1) = \frac{1-\beta}{\beta}}$.

Ezzel a vizsgált esetben igazoltuk az állítást.

(2) Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AA_1} \parallel \overleftrightarrow{BB_1} \parallel \overleftrightarrow{CC_1}$.



Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét ezekre a párhuzamosokra, valamint az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{BC}$, továbbá az $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{CB}$ „szelő egyenesekre"! Azt kapjuk, hogy

$$(ABC_1) = (A_1BC), \text{ ill. } (CAB_1) = (CA_1B).$$

Ugyanakkor az A_1, B, C kollineáris pontokra a $\underline{4.3.}$ lemma értelmében

$$(A_1BC)(BCA_1)(CA_1B) = 1$$

teljesül, amiből az imént fölírt relációk figyelembevételével a kívánt

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$$

egyenlőséghez jutunk.

(3) Tegyük fel végül, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. Ha az (1)-ben mondottaknak megfelelően az $(A\,;\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))$ affin koordinátarendszerre vonatkozóan

A, B és C koordinátái rendre $(0,0)$, $(1,0)$ és $(0,1)$;

A_1, B_1 és C_1 koordinátái rendre $(\lambda, 1-\lambda)$, $(0,\beta)$, $(\gamma,0)$

$(\beta, \gamma, \lambda \in K \setminus \{0,1\})$, akkor a már elvégzett számolások szerint feltételünk az

$$(*) \qquad \frac{1-\beta}{\beta}\,\frac{\gamma}{1-\gamma}\,\frac{1-\lambda}{\lambda} = 1$$

alakot ölti. Ha $\overleftrightarrow{AA_1} \parallel \overleftrightarrow{BB_1} \parallel \overleftrightarrow{CC_1}$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük föl ezért, hogy az egyenesek között van két metsző, mondjuk $\overleftrightarrow{BB_1} \cap \overleftrightarrow{CC_1} = \{Q\}$. Ekkor, szintén az (1)-ben látottak szerint,

$$Q \text{ koordinátái } \left(\frac{(1-\beta)\gamma}{1-\beta\gamma}, \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma} \right).$$

Állítjuk, hogy hogy $\overleftrightarrow{AQ} \nparallel \overleftrightarrow{BC}$. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét. Ekkor $\overleftrightarrow{AQ}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ iránya egyenlő, ezért

$\overrightarrow{AQ} = Q - A$ nemzérus skalárszorosa $\overrightarrow{BC} = C - B$ -nek.

Mivel $\overrightarrow{AQ}$ koordinátái $= Q - A$ koordinátái $= Q$ koordinátái,

$\overrightarrow{BC}$ koordinátái $= C - B$ koordinátái $= (-1, 1)$,

így az következik, hogy

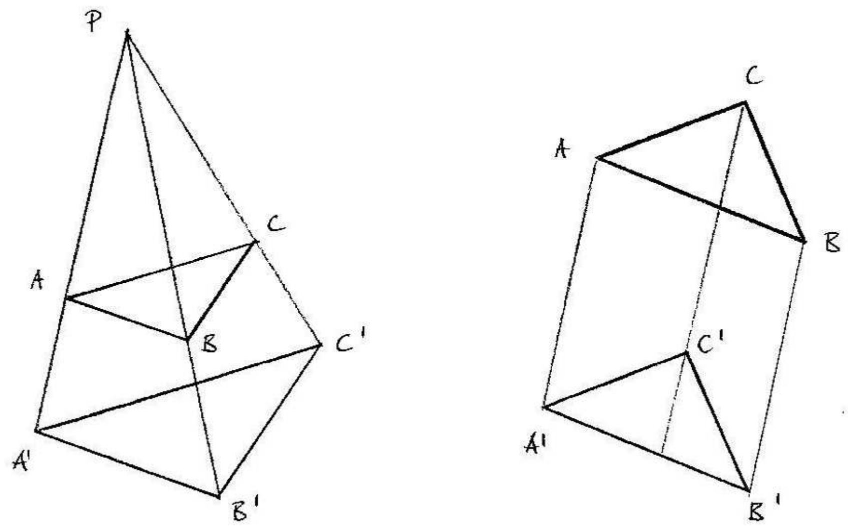
$$\frac{(1-\beta)\gamma}{1-\beta\gamma} = -\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma} \iff \frac{1-\beta}{\beta}\,\frac{\gamma}{1-\gamma} = -1 .$$

Összevetve ezt a (*) relációval, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \overset{(1)}{=} (BCA_1) = -1 ,$$

ami ellentmondás, hiszen az osztóviszony a -1 értéket nem veheti föl (ld. 3.6.). Tehát $\overleftrightarrow{AQ} \nparallel \overleftrightarrow{BC}$ valóban teljesül, ezért az $\overleftrightarrow{AQ}$ egyenes metszi a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenest egy A_2 pontban. Ekkor az $\overleftrightarrow{AA_2}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyenesek konkurrensek, így a már bizonyítottak szerint $(ABC_1)(BCA_2)(CAB_1) = 1$ teljesül. Összevetve ezt a feltétellel, azt kapjuk, $(BCA_1) = (BCA_2)$, amiből $A_1 = A_2$ következik (hiszen A_1 és A_2 is ugyanazzal az affin kombinációval nyerhető B-ből és C-ből). Így az $\overleftrightarrow{AA_1}$ egyenes áthalad $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ metszéspontján, egyeneseink tehát konkurrensek. □

4.5. Tétel (a Desargues-tétel affin alakja és a kis Desargues-tétel). Legyenek A, B, C, A', B', C' a V kétdimenziós vektortér különböző pontjai, és tegyük fel, hogy az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek is különbözők. Ha az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek konkurrensek vagy párhuzamosak, és $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$, akkor $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ is teljesül.



Bizonyítás. (1) $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ konkurrensek, közös pontjuk a P pont. $A' \in \overleftrightarrow{PA} \setminus \{P, A\}$, ill. $B' \in \overleftrightarrow{PB} \setminus \{P, B\}$ miatt van olyan $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$, ill. $\mu \in K \setminus \{0, 1\}$ skalár, hogy

$$A' = P + \lambda(A - P), \quad B' = P + \mu(B - P).$$

Ebből a két relációból

$$A' - B' = \lambda(A - P) - \mu(B - P).$$

Másrészt $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ miatt ezeknek az egyeneseknek közös az iránya, így

$$A' - B' = \varrho\,(A - B) \quad , \quad \varrho \in K \setminus \{0\}$$

írható. A tett észrevételek alapján

$$\varrho(A-P) - \varrho(B-P) = \varrho(A-B) = A' - B'$$
$$= \lambda(A-P) - \mu(B-P).$$

$(A-P, B-P)$ azonban bázisa V-nek, hiszen A, B és P affin független (mert nem kollineárisak), ld. 3.5., s mivel bázisvektorokból minden vektor egyértelműen kombinálható lineárisan, a kapott relációból

$$\lambda = \mu = \varrho$$

következik. Ugyanilyen meggondolásokkal kapjuk az

$$A' \in \overleftrightarrow{PA} \setminus \{P, A\}, \quad C' \in \overleftrightarrow{PC} \setminus \{P, C\}, \quad \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$$

feltételek alapján, hogy

$$C' = P + \varrho(C-P), \text{ és így } C' - P = \varrho(C-P),$$

tehát itt is a fentebbi ϱ skalárszorzó lép fel!

Ezek után

$$C' - B' = (C'-P) - (B'-P) = \varrho(C-P) - \varrho(B-P)$$
$$= \varrho(C-B)$$

adódik, ami $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ párhuzamosságát jelenti.

(2) $\underline{\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}}$

(a) Előkészítésként megmutatjuk, hogy ha egy (K, L, M, N) rendezett pontnégyes paralelogramma, azaz általános helyzetű pontok alkotják, és $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{NM}$, $\overleftrightarrow{KN} \parallel \overleftrightarrow{LM}$ (ld. Feladatok!), akkor

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM} \text{ és } \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}.$$

Valóban, a vizsgált két-két egyenes párhuzamossága miatt

$$\overrightarrow{KL} = \lambda \overrightarrow{NM}, \text{ ill. } \overrightarrow{KN} = \nu \overrightarrow{LM}; \quad \lambda, \nu \in K \setminus \{0\}$$

írható. Másrészt $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ML}$, ahonnan $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{KN} - \overrightarrow{LM}$, és így

$$(\lambda - 1)\overrightarrow{NM} = (\nu - 1)\overrightarrow{LM}.$$

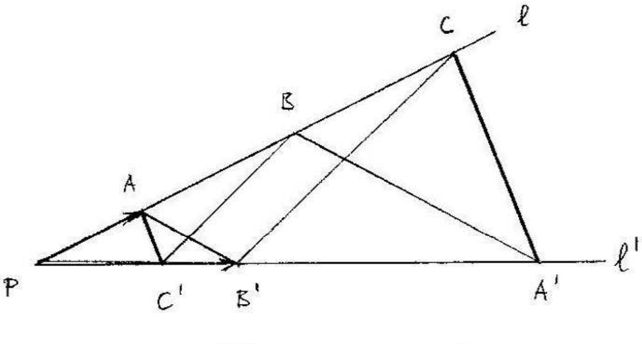
Azonban az $\overrightarrow{NM} = M - N$ és $\overrightarrow{LM} = M - L$ vektorok lineárisan függetlenek, hiszen az L, M, N pontok nem kollineárisak; így $\lambda = \mu = 1$ következik, ami a tett észrevétel helyességét jelenti.

(b) Rátérünk a kis Desargues-tétel igazolására. A feltétel értelmében

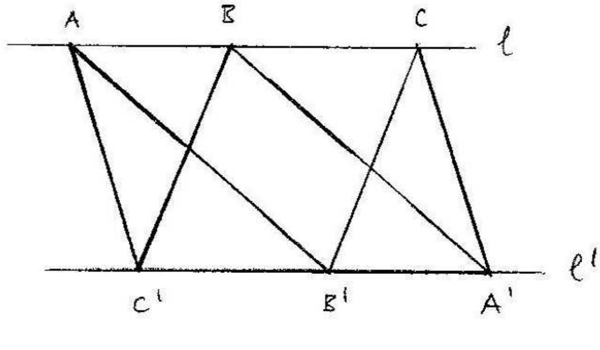
$$(A, B, B', A') \text{ paralelogramma} \overset{(a)}{\Longrightarrow} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'},$$
$$(A, C, C', A') \text{ paralelogramma} \overset{(a)}{\Longrightarrow} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'};$$

így $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'C'}$, amiből következik, hogy $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$. □

<u>4.6. Tétel</u> (<u>a Pappos-tétel affin alakja</u>). Legyenek l és l' a V kétdimenziós vektortér különböző egyenesei. Jelöljünk ki az l egyenesen különböző A, B, C, az l' egyenesen különböző A', B', C' pontokat úgy, hogy ezek különbözzenek l és l' metszéspontjától is, ha az létezik. Ekkor $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}$ és $\overleftrightarrow{BC'} \parallel \overleftrightarrow{B'C}$ esetén $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$ is fennáll.



$a := \overrightarrow{PA}$, $b' := \overrightarrow{PB'}$



<u>Bizonyítás.</u> (1) Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor l és l' metszi egymást egy P pontban. Legyen

$$a := \overrightarrow{PA}, \quad b' := \overrightarrow{PB'}.$$

l és l' különbözősége folytán „a" és b' lineárisan független vektorok; minden további adatot és feltételt a segítségükkel fejezünk ki.

$$B \in \overleftrightarrow{PA} \implies \overrightarrow{PB} = \beta \overrightarrow{PA} = \beta a,$$
$$C \in \overleftrightarrow{PA} \implies \overrightarrow{PC} = \gamma \overrightarrow{PA} = \gamma a;$$
$$A' \in \overleftrightarrow{PB'} \implies \overrightarrow{PA'} = \alpha' \overrightarrow{PB'} = \alpha' b',$$
$$C' \in \overleftrightarrow{PB'} \implies \overrightarrow{PC'} = \gamma' \overrightarrow{PB'} = \gamma' b';$$

és a pontok különbözősége miatt $\beta, \gamma, \alpha', \gamma'$ egyike sem zérus.

$\underline{\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}}$, ezért van olyan $\lambda \in K \setminus \{0\}$ skalár

hogy $\overrightarrow{BA'} = \lambda \overrightarrow{AB'}$.

S.H. $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{PA'} - \overrightarrow{PB} = \alpha' b' - \beta a$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PA} = b' - a$,

így a feltétel azt adja, hogy

$$\alpha' b' - \beta a = \lambda b' - \lambda a,$$

amiből „a" és b' lineáris függetlensége miatt

(*) $$\alpha' = \beta = \lambda$$

következik.

$\underline{\overleftrightarrow{BC'} \parallel \overleftrightarrow{B'C}}$, így alkalmas $\mu \in K \setminus \{0\}$ skalár

segítségével $\overrightarrow{BC'} = \mu \overrightarrow{CB'}$ írható.

Mivel $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{PC'} - \overrightarrow{PB} = \gamma' b' - \beta a$, $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{PB'} - \overrightarrow{PC} = b' - \gamma a$,

feltételünk a

$$\gamma' b' - \beta a = \mu b' - \mu \gamma a$$

alakba írható, amiből

(**) $\gamma' = \mu$, $\beta = \mu\gamma$, és így $\underline{\underline{\beta = \gamma'\gamma = \gamma\gamma'}}$

következik.

Ezek alapján

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{PC'} - \overrightarrow{PA} = \gamma' b' - a = \frac{1}{\gamma}(\gamma\gamma' b' - \gamma a) \overset{(**)}{=} \frac{1}{\gamma}(\beta b' - \gamma a),$$

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{PA'} - \overrightarrow{PC} = \alpha' b' - \gamma a \overset{(*)}{=} \beta b' - \gamma a = \gamma \overrightarrow{AC'},$$

amiből $\overleftrightarrow{AC'}$ és $\overleftrightarrow{A'C}$ párhuzamossága következik.

(2) Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor $\ell \parallel \ell'$. Ekkor (A, B, A', B') parallelogramma, így (felhasználva a <u>4.5.</u> bizonyításának (2)/(a) pontjában tett észrevételt) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA'}$ és $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$. Hasonló módon, (B, C, B', C') szintén parallelogramma, s ezért $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$. Ezek alapján

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{CA'},$$

következésképpen $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$. □

<u>Megjegyzések.</u> (1) <u>Nem minden affin síkban érvényes az (affin, ill. a kis) Desargues-tétel.</u> Ennek klasszikus illusztrációja a következő, Forest MOULTON amerikai matematikustól származó példa (1902):

Rögzítünk egy $k > 1$ valós számot. Tetszőleges β és μ valós számok esetén legyen

$$\ell_{\mu,\beta} := \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta = \mu\xi + \beta\},$$

$$m_{\mu,\beta} := \{(\xi, \mu\xi + \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \geqq 0\} \cup \{(\xi, k\mu\xi + \beta \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \leqq 0\}.$$

Ha

$$\mathcal{L}_M := \{\{\xi\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \mid \xi \in \mathbb{R}\} \cup \{\ell_{\mu,\beta} \subset \mathbb{R}^2 \mid \mu, \beta \in \mathbb{R};\ \mu \geqq 0\}$$
$$\cup \{m_{\mu,\beta} \subset \mathbb{R}^2 \mid \mu, \beta \in \mathbb{R};\ \mu < 0\}$$

és

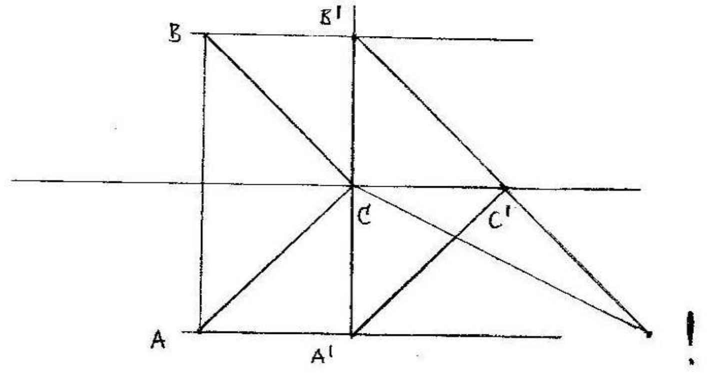
$$\mathcal{M}_k := (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_M),$$

akkor egyszerű, de kissé hosszadalmas számolásokkal igazolható, hogy $\mathcal{M}_k$ affin sík. Ezt az affin síkot (k paraméterű) <u>Moulton-síknak</u> hívjuk.

$\mathcal{M}_k$-ban nem teljesül a kis Desargues-tétel.

Tekintsük ennek megmutatására a következő hat pontot:

$A = (-1,-1)$, $B = (-1,1)$, $C = (0,0)$; $A' = (0,-1)$, $B' = (0,1)$, $C' = (1,0)$.



Ekkor $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ különböző, párhuzamos egyenesek (a közös irányuk span((1,0))).

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ ((0,1) mindkettőjüknek irányvektora),

$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ ((1,1) közös irányvektoruk).

$k := 2$ választással élve

$\overleftrightarrow{BC}$ egyenlete $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$;

$\overleftrightarrow{B'C'}$ egyenlete $y = \begin{cases} -x+1, & \text{ha } x \geq 0; \\ -2x+1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Következik ily módon, hogy $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ metszi egymást a $(2,-1)$ pontban, tehát $\overleftrightarrow{BC} \not\parallel \overleftrightarrow{B'C'}$.

(2) Megmutatható, hogy a Desargues-tétel affin változatából következik a kis Desargues-tétel (szokás ezért az előbbit a nagy affin Desargues-tételként is említeni).

(3) Fontos eredmény, hogy ha egy affin síkban érvényes a 4.6.-ban megfogalmazott Pappos-féle tulajdonság, akkor az illető affin síkban

teljesül a nagy affin Desargues-tétel. (Ez G. Hessenberg egy 1905-ből származó, nevezetes projektív geometriai tételének affin verziója.)

(4) A Pappos-tétel bizonyítása során egyetlen helyen (ld. 48. old., (**)), de igen lényegesen kihasználtuk a K-beli szorzás kommutativitását. Ha test helyett ferdetestet vennénk alapul (azaz – a többi axióma megtartása mellett – elejtenénk a K-beli szorzás kommutativitásának követelményét), akkor a tétel érvényét vesztené.

5. A projektív síkok axiómái és elemi tulajdonságai

Definíció. (1) Egy $\mathbf{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ illeszkedési struktúrát projektív síknak nevezünk, ha eleget tesz a következő axiómáknak:

(P1) = (I1) Bármely két pontra illeszkedik egyetlenegy egyenes.

(P2) Bármely két egyenes metsző.

(P3) Létezik négy általános helyzetű pont.

(2) Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ és egy $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$ projektív sík közötti izomorfizmuson egyenestartó bijekciót értünk, azaz olyan $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ bijektív leképezést, amelyre teljesül, hogy bármely $\ell \in \mathcal{L}$ egyenes esetén

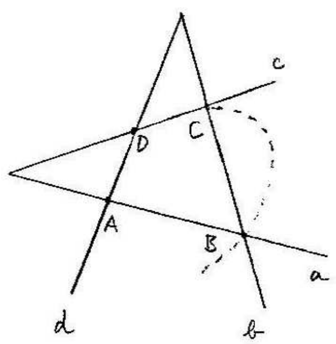
$$\varphi(\ell) := \{ \varphi(P) \in \mathcal{P}' \mid P \in \ell \} \in \mathcal{L}'.$$

Megjegyzések. (1) (P1) és (P2) alapján egy projektív sík bármely két egyenesének egyetlenegy közös pontja van. Egy projektív sík egy adott pontjára illeszkedő összes egyenesek halmazát sugársornak nevezzük; dualizálva: a sík egy egyenesére illeszkedő összes pontok halmazát pontsorként is említjük. Egy sugársor egyeneseinek közös pontja a sugársor tartópontja, egy pontsor pontjainak közös egyenese a pontsor tartóegyenese.

(2) Egy projektív sík önmagára való izomorfizmusai éppen a már értelmezett kollineációk (ld. 1. fejezet). Az 1.1.-ben mondottaknak megfelelően egy projektív sík önmagára való összes kollineációi csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével, amelyet Koll(P)-vel jelölünk.

5.1. Lemma. Minden projektív síkban van négy általános helyzetű egyenes, azaz négy olyan egyenes, amelyek között nincs három konkurrens.

Bizonyítás. Tekintsünk egy projektív síkot, és – (P3) alkalmazásával – jelöljünk ki ebben négy általános helyzetű pontot; legyenek ezek A, B, C, D. (P1) alapján egyértelműen léteznek az $a := \overleftrightarrow{AB}$, $b := \overleftrightarrow{BC}$, $c := \overleftrightarrow{CD}$, $d := \overleftrightarrow{DA}$ egyenesek; megmutatjuk, hogy közöttük nincs három konkurrens.



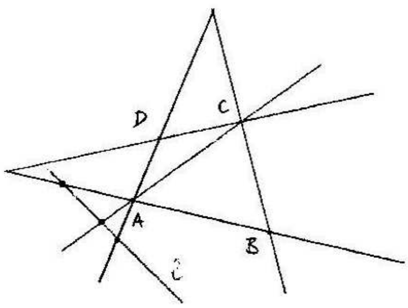
(1) Jegyezzük meg először, hogy az a, b, c, d egyenesek között nincs két egybeeső, ellenkező esetben ugyanis az A, B, C, D pontok között volna három kollineáris.

(2) Indirekt módon folytatva tegyük fel, hogy az egyenesek között van három konkurrens, mondjuk a, b és c. Ekkor a „c" egyenes átmegy „a" és b egyértelműen meghatározott B metszéspontján, és így a $B \neq C$ pontokra „b" és „c" egyaránt illeszkedik. Ebből (P1) alapján $b = c$ következik,

ami ellentmond az (1) megállapításnak. □

5.2. Lemma. Egy projektív sík minden egyenesére illeszkedik legalább három pont.

Bizonyítás. Jelöljünk ki egy projektív síkban egy tetszőleges l egyenest. Megmutatjuk, hogy erre az egyenesre legalább három pont illeszkedik. (P3) alkalmazásával adjunk meg a síkon egy (A, B, C, D) általános helyzetű pontnégyest.



(1) Tegyük fel először, hogy $A \notin l$. (P2) alapján az l egyenes metszi az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ egyenesek mindegyikét. A metszéspontok feltevésünk értelmében különböznek az A ponttól, és (P1)-re tekintettel egymástól is; ekkor tehát az l egyenesre illeszkedik legalább három pont.

(2) Ha $A \in l$, akkor B és C közül legalább az egyik pont nem illeszkedik l-re, hiszen az A, B, C, D pontok között nincs három kollineáris. Így az (1)-beli gondolatmenetet megismételve a B és a C pont valamelyikével, most is azt kapjuk, hogy az l egyenesre legalább három pont illeszkedik. □

5.3. Állítás és definíció. Legyen $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ projektív sík, és jelölje $\mathcal{P}^*$ $\mathbb{P}$ összes sugársorainak halmazát. Ha $\mathbb{P}^d := (\mathcal{L}, \mathcal{P}^*)$, akkor $\mathbb{P}^d$ projektív sík, amelyet a $\mathbb{P}$ projektív sík duálisának nevezünk.

Bizonyítás. $\mathbb{P}^d$ illeszkedési struktúra, hiszen $\mathcal{L}$ egy halmaz, $\mathcal{P}^*$ pedig $\mathcal{L}$ részhalmazainak egy halmaza. Feladatunk annak az ellenőrzése, hogy $\mathbb{P}^d$ eleget tesz a (P1)-(P3) axiómáknak. A konstrukció szerint

$\mathbb{P}^d$ „pontjai" – $\mathbb{P}$ egyenesei ; $\mathbb{P}^d$ „egyenesei" – $\mathbb{P}$ sugársorai.

Ennek alapján a $\mathbb{P}^d$-re vonatkozó (P1)-(P3) állításokat lefordítjuk a $\mathbb{P}$-beli nyelvre, és megmutatjuk, hogy az így kapott (D1)-(D3) állítások következményei a $\mathbb{P}$-ben érvényes (P1)-(P3) axiómáknak.

(1) A $\mathbb{P}^d$-re vonatkozó (P1) állítás így hangzik:

„Ha $l, m \in \mathcal{L}$ különböző „pontok", akkor létezik egy és csak egy olyan $\mathbb{P}^*$-beli „egyenes", amely illeszkedik l-re és m-re."

Az ennek megfelelő $\mathbb{P}$-beli állítás:

(D1) $\left\{\right.$ Ha $l, m \in \mathcal{L}$ különböző egyenesek, akkor létezik egy és csak egy olyan sugársor, amelyhez mindkét egyenes hozzátartozik.

Bebizonyítjuk (D1)-et. A $\mathbb{P}$-ben érvényes (P2) axióma miatt l-nek és m-nek van egyetlenegy „A" közös pontja. Az A tartópontú sugársor tartalmazza mindkét egyenest. Továbbá, $B \neq A$ tartópontú sugársorra ez nem teljesülhet, ellenkező esetben ugyanis A-ra és B-re l is és m is illeszkedne, ami $l \neq m$ és (P1) miatt lehetetlen.

(2) A $\mathbb{P}^d$-re vonatkozó (P2) állítás így szól:

„Bármely két $\mathbb{P}^*$-beli „egyenes"-nek van közös „pont"-ja."

A megfelelő $\mathbb{P}$-beli állítás:

(D2) Bármely két sugársornak van közös egyenese.

Ez abból adódik, hogy két sugársor különböző

A, B tartópontokkal rendelkezik, így (P1) miatt egyértelműen létezik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes, amely mindkét sugársorhoz hozzátartozik.

(3) A $\mathbb{P}^d$-re vonatkozó (P3) állítás a következő:

„Létezik négy általános helyzetű „pont"."

Lefordítva ezt a $\mathbb{P}$-beli nyelvre, a

(D3) <u>létezik négy általános helyzetű egyenes</u>

állítást kapjuk. Ez azonban éppen az <u>5.1.</u> lemma, amely igaz. □

<u>5.4. „Tétel" – a dualitás elve.</u> Ha egy, a projektív geometria nyelvén, a logika szabályai szerint felépített $\mathcal{T}$ állítás <u>tétele</u> a projektív síkok mindegyikének (azaz a logika megengedett következtetési szabályainak alkalmazásaival <u>levezethető</u> a (P1)-(P3) axiómákból, és ilyen értelemben <u>igaz</u>), akkor a $\mathcal{T}$ állítás $\mathcal{T}^d$ duálisa is tétele az összes projektív síknak.

<u>„Bizonyítás."</u> Tekintsünk egy $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ projektív síkot. Mivel a $\mathcal{T}$ állítás igaz minden projektív síkban, speciálisan igaz $\mathbb{P}$-ben és ennek $\mathbb{P}^d$ duálisában is. A $\mathcal{T}^d$ duális állítás $\mathbb{P}$-re vonatkozóan nem más, mint az eredeti állítás $\mathbb{P}^d$-re vonatkozóan, a következők miatt:

$\mathbb{P}^d$ „pontjai" — $\mathbb{P}$ egyenesei,

$\mathbb{P}^d$ „egyenesei" — $\mathbb{P}$ sugársorai, … ;

$\mathbb{P}$ sugársorai azonban természetes módon azonosíthatók $\mathbb{P}$ pontjaival, az a leképezés ugyanis, amely minden sugársornak megfelelteti a tartópontját, bijekció a sugársorok $\mathcal{P}^*$ halmaza és $\mathcal{P}$ között.

Ily módon $\mathcal{T}^d$ tétele $\mathbb{P}$-nek, s mivel $\mathbb{P}$ tetszőleges volt, következik a tétel megállapítása. □

<u>5.5. Állítás és definíció.</u> Legyen $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ affin sík, és nevezzük a sík egymással párhuzamos egyenesei által alkotott ekvivalenciaosztályokat <u>ideális pontoknak</u>. Ha $\ell \in \mathcal{L}$, az általa reprezentált ideális pontot jelölje P_ℓ, azaz legyen

$$P_\ell := \{ m \in \mathcal{L} \mid \ell \parallel m \} \subset \mathcal{L}.$$

Ha $k \in P_\ell$ (és így $k \parallel \ell$), akkor azt mondjuk, hogy <u>a P_ℓ ideális pont illeszkedik a k (affin) egyenesre.</u>

Az összes ideális pont által alkotott

$$\ell_\infty := \{ P_\ell \subset \mathcal{L} \mid \ell \in \mathcal{L} \}$$

halmazt <u>ideális egyenesnek</u> hívjuk; erre <u>illeszkedők</u>-az ideális pontokat és csakis ezeket nevezzük. Ha

$$\overline{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \cup \ell_\infty, \quad \overline{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \cup \{\ell_\infty\},$$

akkor $\overline{\mathbb{A}} := (\overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{L}})$ projektív sík, amelyet az $\mathbb{A}$ affin sík <u>projektív lezártjának</u> nevezünk.

<u>Bizonyítás.</u> Rendre ellenőrizzük, hogy $\overline{\mathbb{A}}$ eleget tesz a (P1)–(P3) axiómáknak.

$\boxed{\text{(P1)}}$ (1) Ha $P, Q \in \mathcal{P}$, $P \neq Q$, akkor P-re és Q-ra az (A1) axióma értelmében illeszkedik egyetlenegy affin egyenes. Az ideális egyenes nem illeszkedhet a tekintett pontokra, hiszen ℓ_∞-nek csak ideális pontjai vannak.

(2) Tekintsünk egy P_ℓ ideális pontot és egy $Q \in \mathcal{P}$ affin pontot. Az (A2) axióma alapján létezik egyetlenegy olyan $m \in \mathcal{L}$ egyenes, amely átmegy a Q ponton és párhuzamos ℓ-lel, amelyre tehát $Q \in m$ és $m \in P_\ell$ egyaránt teljesül. Így módon m P_ℓ-re és Q-ra is illeszkedik, és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú egyenes.

(3) Legyenek végül P_ℓ és P_m különböző ideális pontok. Ekkor $\ell \nparallel m$. P_ℓ-re és P_m-re illeszkedik

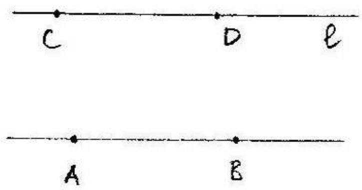
az l_∞ ideális egyenes, de hamis ez, mert ha egy $a \in \mathcal{L}$ egyenes is illeszkedne P_l-re és P_m-re, akkor $a \parallel l$ és $a \parallel m$ adódna, amiből $l \parallel m$ következik, s így ellentmondásra jutunk.

$\boxed{(P2)}$ (1) Legyen $l, m \in \mathcal{L}$; $l \neq m$. Ha $l \nparallel m$, akkor l és m egyetlen affin pontban metszi egymást. Közös ideális pontjuk ilyenkor nem lehet, mert ha egy P_a ideális pont $(a \in \mathcal{L})$ l-re és m-re is illeszkedne, akkor az imént látott módon $l \parallel m$ következne, amit kizártunk.

(2) Amennyiben $l, m \in \mathcal{L}$ és $l \cap m = \emptyset$, úgy l-nek és m-nek egyetlen $\overline{\mathcal{P}}$-beli közös pontja van, a $P_l = P_m$ ideális pont.

(3) Egy $l \in \mathcal{L}$ affin egyenesnek és az l_∞ ideális egyenesnek szintén egyetlenegy közös pontja van, a $P_l \in \overline{\mathcal{P}}$ ideális pont.

$\boxed{(P3)}$ A $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ affin síkban az (A3) axióma értelmében léteznek A, B, C nemkollineáris pontok. (A2) alapján van (egy és csak egy) olyan l egyenes, amely illeszkedik a C pontra és párhuzamos az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenessel. A <u>2.3.</u> állítás biztosítja, hogy az l egyenesnek van C-től különböző D pontja. Ekkor A, B, C, D általános helyzetű pontjai $\mathcal{P}$-nek, s így egyben $\overline{\mathcal{P}}$-nak is. □



5.6. Állítás és definíció. Legyen adva egy $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ projektív sík, és jelöljünk ki ebben egy „r" egyenest.

(1) Ha $\mathcal{P}_r := \mathcal{P} \setminus r$ és $\mathcal{L}_r := \{ l \cap \mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}_r \mid l \in \mathcal{L} \}$, akkor $A_r := (\mathcal{P}_r, \mathcal{L}_r)$ affin sík. Ebben az affin síkban két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha olyan

projektív egyenesekből származnak, amelyek egymást az r egyenes egy pontjában metszik.

(2) Az $\mathbb{A}_r$ affin sík $\overline{\mathbb{A}}_r = (\overline{\mathcal{P}}_r, \overline{\mathcal{L}}_r)$ projektív lezárója természetes módon izomorf a kiinduló $\mathbb{P}$ projektív síkkal, ilyen izomorfizmust ad meg a

$$\overline{P} \in \overline{\mathcal{P}}_r \longmapsto \begin{cases} \overline{P} \in \mathcal{P}, & \text{ha } \overline{P} \in \mathcal{P}_r = \mathcal{P} \setminus r; \\ \ell \cap r \in r, & \text{ha } \overline{P} = P_\ell \in \ell_\infty \quad (\ell \in \mathcal{L}_r) \end{cases}$$

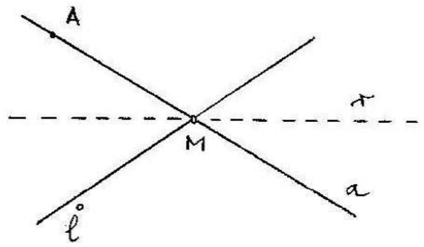
leképezés. Ennél az izomorfizmusnál $\overline{\mathbb{A}}_r$ ideális egyenesének a kijelölt „r" egyenes felel meg.

Ha $\mathbb{P}$-t az $\overline{\mathbb{A}}_r$ projektív lezárásként interpretáljuk, akkor rá a $\mathbb{P}_{(r)}$ jelölést és az *r ideális egyenesű projektív sík* elnevezést használjuk.

Bizonyítás. (1) Megmutatjuk, hogy $\mathbb{A}_r$ eleget tesz az (A1) – (A3) axiómáknak.

$\boxed{\text{(A1)}}$ Legyenek $A \neq B$ $\mathcal{P}$ tetszőleges pontjai. Ezekre (P1) értelmében illeszkedik egyetlenegy $\ell \in \mathcal{L}$ egyenes. Ha A és B r eltávolítás után $\mathcal{P}_r$-ben marad, akkor rájuk továbbra is illeszkedik egyetlenegy egyenes, az $\ell \setminus \{M\}$ egyenes, ahol M ℓ és r (P2) és (P1) értelmében egyértelműen létező metszéspontja.

$\boxed{\text{(A2)}}$ Legyen adva egy $\mathring{\ell} \in \mathcal{L}_r$ egyenes és egy $\mathring{\ell}$-re nem illeszkedő $A \in \mathcal{P}_r$ pont. Miként az előbb is, $\mathring{\ell} = \ell \setminus \{M\}$, ahol $\ell \in \mathcal{L}$, $\{M\} = \ell \cap r$.



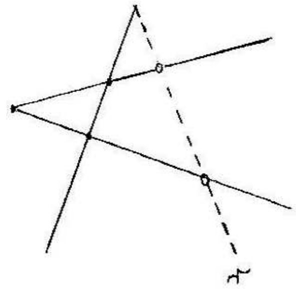
(P1) értelmében egyértelműen létezik az

$$a := \overleftrightarrow{AM} \in \mathcal{L}$$

egyenes. Ha $\mathring{a} := a \setminus \{M\}$, akkor $\mathring{a} \in \mathcal{L}_r$, és ez az egyenes *az A pontra illeszkedő, az $\mathring{\ell}$ egyenessel párhuzamos egyenes.*

További ilyen tulajdonságú egyenes nem létezik, mert (P2)-ből következően minden más A-n átmenő $\mathcal{L}_r$-beli egyenesnek metszenie kell $\mathring{l}$-t.

$\boxed{\text{(A3)}}$ $\mathbb{P}$-ben 5.1. értelmében létezik négy általános helyzetű egyenes. Ha r-nek ezek valamelyikét



választottuk (ami most a „legrosszabb" eset), akkor a megmaradó három egyenes metszéspontjai még mindig három nemkollineáris pontot eredményeznek $\mathcal{P}_r$-ben.

Beláttuk így, hogy A_r valóban affin sík. Világos a konstrukcióból, hogy A_r két egyenese pontosan akkor párhuzamos, ha egymást az „r" egyenes egy pontjában metsző projektív egyenesekből származnak.

(2) A

$$\underline{\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A_r := (\mathcal{P}_r, \mathcal{L}_r)}$$

$(\mathcal{P}_r := \mathcal{P} \setminus r,\ \mathcal{L}_r := \mathcal{L} \setminus \{r\};\ r \in \mathcal{L}$ tetszőlegesen rögzített$)$

$$\underline{\overline{A}_r := (\overline{\mathcal{P}}_r, \overline{\mathcal{L}}_r)}\ ;\ \overline{\mathcal{P}}_r := \mathcal{P}_r \cup l_\infty,$$

$$\overline{\mathcal{L}}_r := \mathcal{L}_r \cup \{l_\infty\},\quad P_l \in l_\infty \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$P_l = \{k \in \mathcal{L}_r \mid k \parallel l\} \quad (l \in \mathcal{L}_r)$$

konstrukciók alapján közvetlenül adódik, hogy a megadott lekérpezési izomorfizmus (azaz egyenestartó bijekció) $\overline{A}_r$ és $\mathbb{P}$ között, amelynél $l_\infty \in \overline{\mathcal{L}}_r$ képe az $r \in \mathcal{L}$ egyenes. $\square$

5.7. Állítás. Minden $\mathbb{A}$ affin síkhoz van olyan projektív sík és abban olyan „r" egyenes, hogy $\mathbb{A} = \mathbb{A}_r$.

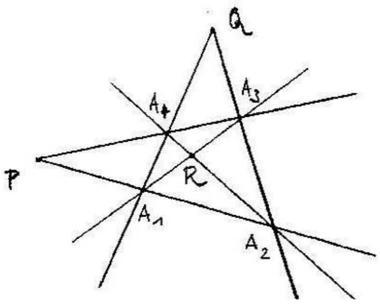
Bizonyítás. Legyen $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, és konstruáljuk meg ennek $\bar{\mathbb{A}} = (\bar{\mathcal{P}}, \bar{\mathcal{L}})$ projektív lezárását. Ha $r := l_\infty = \bar{\mathbb{A}}$ ideális egyenese, akkor $\mathbb{A} = \mathbb{A}_r$. □

Definíció. Vegyünk alapul egy $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ projektív síkot.

(1) Ha A_1, A_2, A_3, A_4 általános helyzetű pontjai $\mathbb{P}$-nek, akkor az

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \cup \{\overleftrightarrow{A_iA_j} \in \mathcal{L} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$$

konfigurációt <u>teljes négyszögnek</u> nevezzük, amelynek a megadott pontok a <u>csúcsai</u>, a kijelölt egyenesek az <u>oldalai</u>, a



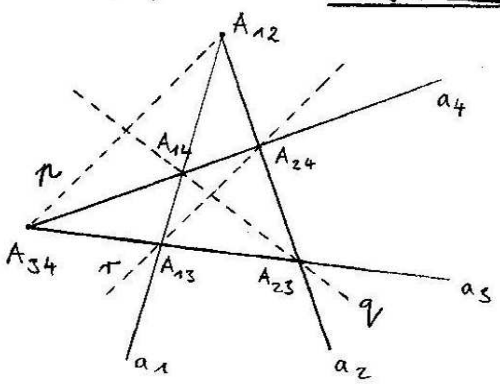
$$P := \overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_3A_4}, \quad Q = \overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{A_1A_4},$$
$$R := \overleftrightarrow{A_1A_3} \cap \overleftrightarrow{A_2A_4}$$

pontok az <u>átlóspontjai</u>.

(2) Egy teljes négyszög duális alakzatát <u>teljes négyoldalnak</u> hívjuk. Részletezve: ha a_1, a_2, a_3, a_4 általános helyzetű egyenesei $\mathbb{P}$-nek, akkor az

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{a_i \cap a_j \in \mathcal{P} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$$

konfiguráció <u>teljes négyoldal</u>, amelynek az adott egyenesek az <u>oldalai</u>, az



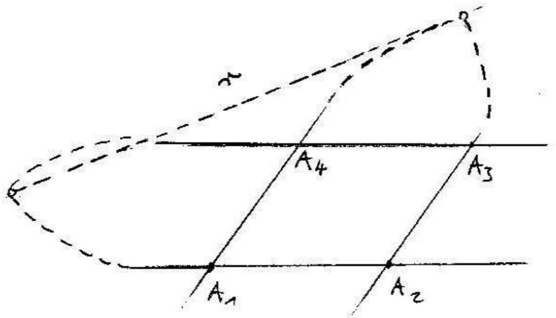
$$A_{ij} := a_i \cap a_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

pontok a <u>csúcsai</u> vagy <u>szögpontjai</u>. Két csúcs <u>átellenes</u>, ha nem ugyanarra az oldalra illeszkedik. Az átellenes csúcsokat összekötő $p := \overleftrightarrow{A_{12}A_{34}}$, $q := \overleftrightarrow{A_{23}A_{14}}$, $r := \overleftrightarrow{A_{13}A_{24}}$ egyenesek a teljes négyoldal <u>átlói</u>, az átlók metszéspontjai az átlóspontok.

(3) Azt mondjuk, hogy egy projektív sík eleget tesz a Fano-axiómának, ha teljes négyszögeinek átlóspontjai sohasem kollineárisak.

Megjegyzések. (1) Gino FANO olasz matematikus, aki 1892-ben elsőként építette fel axiomatikusan a projektív geometriát. Röviden mutatunk példát olyan projektív síkra, amely nem tesz eleget a Fano-axiómának.

(2) Tekintsünk egy „r" ideális egyenesű $\mathbb{P}_{(r)}$ projektív síkot, és ebben olyan teljes négyszöget, amelynek két átlóspontja az r ideális egyenesen van. Ha



$\overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_3A_4} \in r$ és

$\overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{A_1A_4} \in r$,

akkor (A_1, A_2, A_3, A_4) paralelogramma, és a Fano-axióma azt a követelményt támasztja, hogy a paralelogramma átlói metszők. Ez a Fano-axióma affin változata, amely - értelemszerűen - affin síkon is megfogalmazható.

5.8. Állítás. A Fano-axiómának eleget tevő projektív síkok osztályában érvényes a dualitás elve.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ tetszőleges olyan projektív sík, amelyben teljesül a Fano-axióma. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbb{P}$-ben

egyetlen teljes négyoldal átlói sem konkurrensek.

Legyenek ebből a célból a_1, a_2, a_3, a_4 $\mathbb{P}$ általános helyzetű egyenesei, és tekintsük az általuk meghatározott

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34}\}$$

teljes négyoldalt, ahol $A_{ij} := a_i \cap a_j$; $1 \leq i < j \leq 4$.

Azt kell belátnunk, hogy a

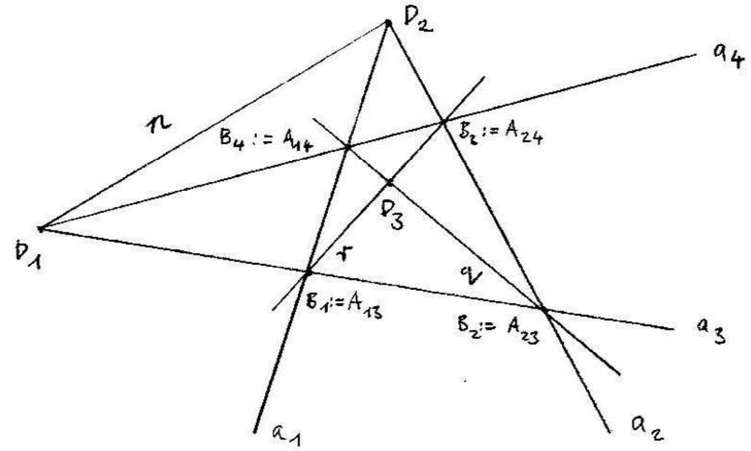
$$p := \overleftrightarrow{A_{12} A_{34}}, \quad q := \overleftrightarrow{A_{23} A_{14}}, \quad r := \overleftrightarrow{A_{13} A_{24}}$$

<u>átlók nem konkurrensek.</u>

Mivel az a_1, a_2, a_3, a_4 egyenesek között nincs három konkurrens, a

$$B_1 := A_{13}, \quad B_2 := A_{23}, \quad B_3 := A_{24}, \quad B_4 := A_{14}$$

pontok között nincs három kollineáris.



B_1, B_2, B_3 és B_4 ily módon meghatároz egy teljes négyszöget, amelynek átlóspontjai

$$D_1 := \overleftrightarrow{B_1 B_2} \cap \overleftrightarrow{B_3 B_4} = a_3 \cap a_4, \quad D_2 := \overleftrightarrow{B_2 B_3} \cap \overleftrightarrow{B_1 B_4} = a_2 \cap a_1,$$

$$D_3 := \overleftrightarrow{B_1 B_3} \cap \overleftrightarrow{B_2 B_4} = r \cap q.$$

A $\mathbb{P}$-ben érvényes Fano-axióma miatt a D_1, D_2, D_3 pontok nem kollineárisak, így a $D_3 = r \cap q$ pont nincs rajta a $\overleftrightarrow{D_1 D_2} = \overleftrightarrow{A_{34} A_{12}} = p$ egyenesen – tehát a p, q, r egyenesek nem konkurrensek. □

<u>Definíció.</u> Legyen $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ a Fano-axiómának eleget tevő projektív sík.

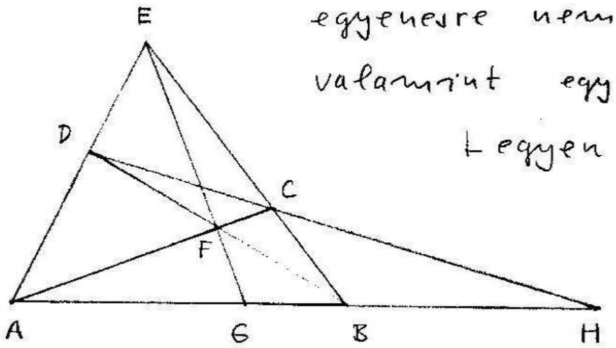
(1) A sík egy különböző, kollineáris pontok alkotta (A, B, C, H) rendezett pontnégyesét <u>harmonikus négyesnek</u> nevezzük, ha van olyan teljes

négyszög, amelynek A és B csúcsai, H átlós-pontja, G pedig a két további átlóspontra illeszkedő egyenes és az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes metszéspontja.

(2) A sík egy különböző, konkurrens egyenesek által alkotott (a, b, g, h) rendezett négyesét <u>harmonikus sugárnégyesnek</u> mondjuk, ha van olyan teljes négyoldal, amelynek „a" és b oldalai, h átlója, g pedig a másik két átló metszéspontjára, valamint az $a \cap b$ pontra illeszkedő egyenes.

<u>5.9. Állítás.</u> Ha A, B, G különböző kollineáris pontjai egy, a Fano-axiómának eleget tevő projektív síknak, akkor <u>létezik</u> olyan H pont, hogy az (A, B, G, H) pontnégyes harmonikus.

<u>Bizonyítás.</u> Jelöljünk ki tetszőlegesen egy, az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre nem illeszkedő E pontot, valamint egy $F \in \overleftrightarrow{EG} \setminus \{E, G\}$ pontot. Legyen $C := \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{BE}$, $D := \overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{AE}$.



Ekkor az A, B, C, D pontok általános helyzetűek (átgondolandó!), így egy teljes négyszöget határoznak meg, amelynek átlóspontjai

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} =: H$;

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ - ez a konstrukció szerint a F pont,

$\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ - ez a konstrukció szerint az E pont.

Mivel $G = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{AB}$, a megszerkesztett H pontra teljesül, hogy az (A, B, G, H) pontnégyes harmonikus. □

<u>Megjegyzés.</u> A harmonikus pontnégyesek tárgyalásánál lényeges a Fano-axióma előírása. Ha ez nem teljesülne, akkor az iménti konstrukcióban az E, F, H pontok kollineárisak is lehetnének, és ekkor $H = G$ adódna, amit a definíció kizár.

Másrészt jelen pillanatban semmi biztosítékunk nincs arra, hogy a szerkesztett H pont független a szerkesztési során alkalmazott E és F pont megválasztásától. Ahhoz, hogy ez teljesüljön, további axióma előírására van szükség.

<u>Definíció.</u> Egy projektív síkot <u>Desargues-félének</u> nevezünk, ha teljesül benne a következő

<u>AXIÓMA (a Desargues-féle záródási tulajdonság)</u>:

(D) $\begin{cases} \text{A SÍK BÁRMELY KÉT CENTRÁLISAN PERSPEKTÍV} \\ \text{HÁROMSZÖGE TENGELYESEN IS PERSPEKTÍV.} \end{cases}$

<u>5.10. Állítás.</u> Desargues-féle projektív síkban bármely két tengelyesen perspektív háromszög centrálisan is perspektív, következésképpen <u>a Desargues-féle projektív síkok osztályában érvényes a dualitás elve.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Desargues-féle projektív sík, és tegyük fel, hogy ebben a $\{P, Q, R\}$ és a $\{P', Q', R'\}$ háromszög az

$$X \in \{P, Q, R\} \longmapsto X' \in \{P', Q', R'\}$$

megfeleltetésnél <u>tengelyesen perspektív</u>: ha

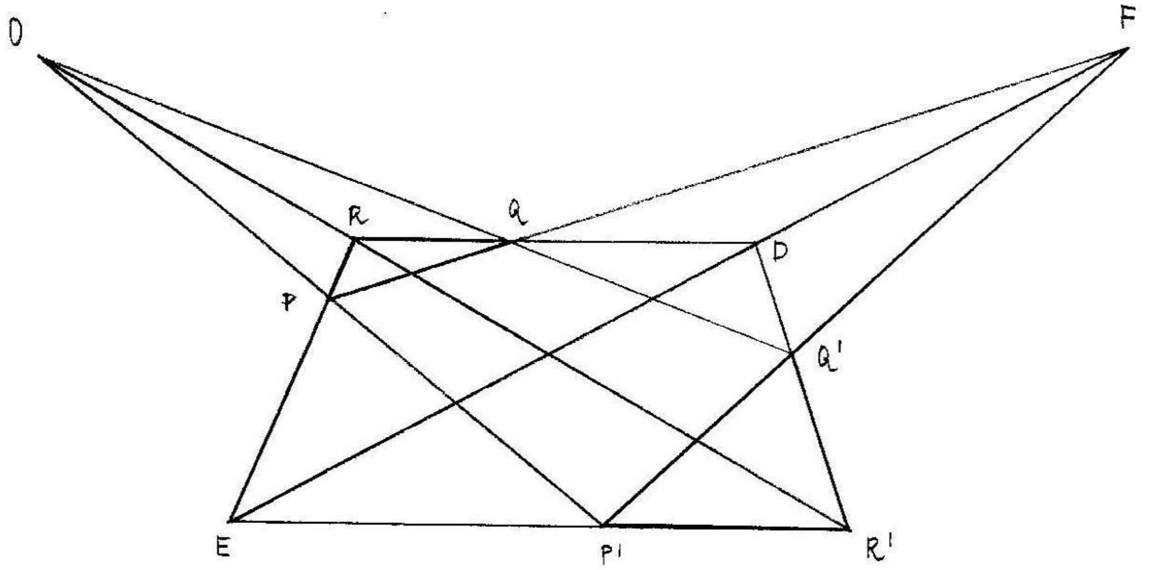
$$\{F\} := \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P'Q'}, \quad \{E\} := \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{P'R'}, \quad \{D\} := \overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q'R'},$$

akkor <u>a D, E és F pont kollineáris.</u> Feladatunk annak a megmutatása, hogy a tekintett megfeleltetésnél az egymásnak megfelelő csúcsok összekötő egyenesei, $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{QQ'}$ és $\overleftrightarrow{RR'}$ konkurrensek.

Tekintsük ebből a célból a

$$\{P, P', E\} \text{ és a } \{Q, Q', D\}$$

háromszöget! A feltétel értelmében a $\overleftrightarrow{PQ}$ és a $\overleftrightarrow{P'Q'}$ egyenes F metszéspontja illeszkedik az $\overleftrightarrow{ED}$ egyenesre, így ez a két háromszög az F pontra nézve centrálisan perspektív. A (D) axióma alapján így arra következtethetünk, hogy a három-



szögek a

$$P \longmapsto Q, \quad P' \longmapsto Q', \quad E \longmapsto D$$

megfeleltetéseinél tengelyesen is perspektívek: ha

$$\{O\} := \overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{QQ'},$$

akkor az O pont illeszkedik a

$\overleftrightarrow{PE} = \overleftrightarrow{PR}$ és a $\overleftrightarrow{QD} = \overleftrightarrow{QR}$ egyenes R metszéspontja

valamint a

$\overleftrightarrow{P'E} = \overleftrightarrow{P'R'}$ és a $\overleftrightarrow{Q'D} = \overleftrightarrow{Q'R'}$ egyenes R' metszéspontja

által meghatározott $\overleftrightarrow{RR'}$ egyenesre. Ez azt jelenti, hogy a $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{QQ'}$, $\overleftrightarrow{RR'}$ egyenesek konkurrensek. □

5.11. Állítás és definíció. Ha egy projektív síkban teljesül a Fano-axióma és a Desargues-féle záródási tulajdonság, akkor abban bármely három kollineáris A, B, G ponthoz egyértelműen létezik olyan H pont, hogy az (A, B, G, H) pontnégyes harmonikus. Ilyenkor azt írjuk, hogy $h(A, B; G, H)$, és azt mondjuk, hogy a H pont a G pont harmonikus társa vagy harmonikus konjugáltja az (A, B) pontpárra vonatkozóan. A $h(A, B; G, H)$

reláció ekvivalens a $h(G, H; A, B)$ relációval. Δ

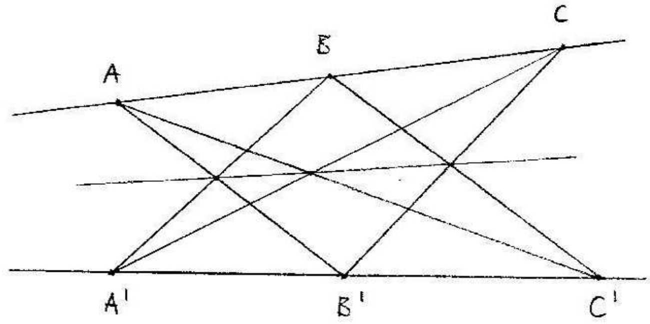
<u>Definíció.</u> Egy projektív síkot <u>Pappos-félének</u> nevezünk, ha teljesül benne a következő

<u>AXIÓMA</u> (<u>a Pappos-féle záródási tulajdonság</u>):

(P) Ha l és l' a sík különböző egyenesei; A, B, C az l egyenesre; A', B', C' az l' egyenesre illeszkedő különböző pontok, amelyek l és l' metszéspontjától is különböznek, akkor az

$$\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}, \quad \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}, \quad \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$$

metszéspontok kollineárisak.



<u>Megjegyzések és feladatok.</u>

(1) <u>A Pappos-féle projektív síkok osztályában érvényes a dualitás elve.</u> – Fogalmazzuk meg részletesen a duális állítást és bizonyítsuk be!

(2) Az adott projektív síkot interpretáljuk az <u>5.6.</u>-mondottak szerint, „r" ideális egyenesű $\mathbb{P}_{(r)}$ projektív síkként. Ha a (P) axiómában

$$\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} \in r \quad \text{és} \quad \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} \in r,$$

s ilyen értelemben $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{AC'} \parallel \overleftrightarrow{A'C}$, akkor az axióma <u>követelménye</u> az, hogy $\overleftrightarrow{BC'}$ és $\overleftrightarrow{B'C}$ is párhuzamos. Így visszakapjuk a Pappos-féle záródási tulajdonság affin alakját. – Hasonló módon kapható vissza a projektív síkokra megfogalmazott (D) axiómából az affin Desargues-féle záródási tulajdonság nagy és kis alakja. Írjuk le, hogyan jutunk ezekhez az affin átfogalmazásokhoz!

(3) Nem minden projektív sík Desargues-féle. A klasszikus példa nem Desargues-féle projektív síkra a korábban tárgyalt Moulton-féle affin sík projektív lezárása.

(4) Minden Pappos-féle projektív sík Desargues-féle. Ez Hessenberg tétele, amelyre affin keretek között már számtalan utaltunk (ld. a 4.6. utáni megjegyzéseket).

6. Véges projektív síkok

Definíció. Legyen n 2-nél nagyobb vagy egyenlő egész szám. Egy projektív síkot n-edrendű véges projektív síknak nevezünk, ha van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik.

Megjegyzés. Mivel egy projektív sík minden egyenesére legalább három pont illeszkedik az 5.2. lemma értelmében, elsőrendű véges projektív síkról nem lett volna értelme szólni.

6.1. Állítás. Egy n-edrendű véges projektív síkban

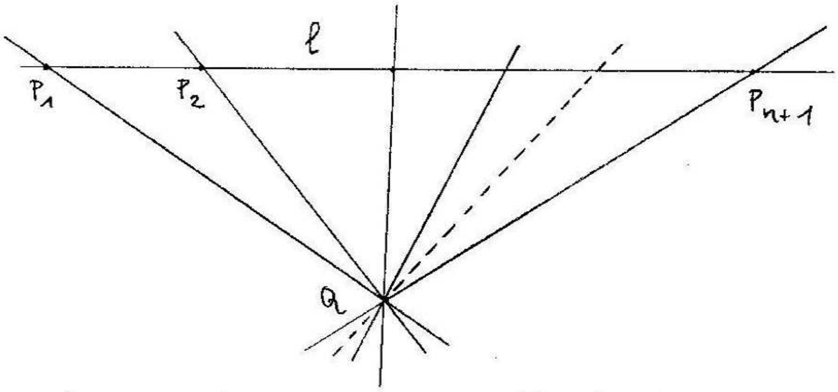
(1) minden egyenesre $n+1$ pont illeszkedik,

(2) minden ponton $n+1$ egyenes halad át,

(3) a pontok és az egyenesek száma egyaránt n^2+n+1.

Bizonyítás. (1) Legyen l a vizsgált projektív sík egy olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik; jelölje ezeket a pontokat $P_1, \dots, P_{n+1}$.

Jelöljünk ki egy l-re nem illeszkedő Q pontot; ez (P3) alapján lehetséges. (P1) értelmében léteznek a $\overleftrightarrow{QP_i}$, $i \in \{1, \dots, n+1\}$ egyenesek. Ezek különbözők, ellenkező esetben ugyanis $Q \in l$ adódna, amit kizártunk.



(P2) miatt a Q pontra illeszkedő egyenesek mindegyike metszi az l egyenest, és a metszéspont a $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ pontok valamelyike, de csakis egyike. Ily módon a Q pontra illeszkedő egyenesek száma $n+1$. Ezzel igazoltuk a következőt:

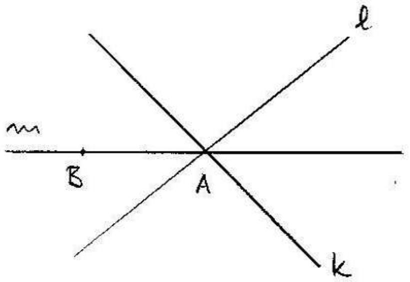
(J) Ha egy projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor minden, az egyenesre nem illeszkedő ponton $n+1$ egyenes halad át.

A dualitási elv alapján ennek az állításnak a duálisa is igaz, vagyis teljesül:

(J^d) Ha egy projektív síkban van olyan pont, amelyen $n+1$ egyenes halad át, akkor minden, a ponton át nem menő egyenesre $n+1$ pont illeszkedik.

Rátérünk ezek után annak megmutatására, hogy <u>a sík minden egyenesére $n+1$ pont illeszkedik.</u>

Tekintsünk egy $k \neq l$ egyenest. (P2) értelmében ez metszi az l egyenest egyetlenegy A pontban.



Az 5.2. lemmából a dualitás elve alapján következik, hogy az A ponton átmegy egy k-tól és l-től különböző m egyenes is. Az m egyenesre – szintén 5.2. miatt – illeszkedik A-tól különböző B pont is. $B \notin l$, ezért a (J') megállapítás értelmében a B ponton legalább $n+1$ egyenes halad át. A B pont azonban a k egyenesre nem illeszkedik (különben $k = m$ adódna), így (J^d) alapján következik, hogy a k egyenesre $n+1$ pont illeszkedik.

(2) A második megállapítás az első duálisa, így igaz.

(3) A harmadik részállítás igazolása céljából tekintsük a vizsgált projektív sík egy P pontját és egy P-re nem illeszkedő l egyenesét. A (P2) és a (P1) axióma alapján következik, hogy a sík minden P-től különböző pontja rajta van a P pontot az l egyenes $n+1$ pontjával összekötő egyenesek egyikén, de csakis egyikén. A már bizonyítottak szerint ezen $n+1$ számú egyenes mindegyikére n P-től különböző pont illeszkedik. Így a sík összes pontjainak száma

$$n(n+1)+1 = n^2+n+1$$

– és a dualitás elve értelmében ugyanennyi az egyenesek száma is. □

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Egy affin síkot <u>n-edrendű véges affin síknak</u> nevezünk, ha van olyan egyenese, amelyre n pont illeszkedik.

Példák. Az affin síkok minimális modellje másodrendű, a 9 pont - 12 egyenes affin sík harmadrendű véges affin sík.

6. 2. Következmény. Egy n-edrendű véges affin sík minden egyenesére n pont illeszkedik, minden pontján $n+1$ egyenes halad át, a pontok száma n^2, az egyenesek száma n^2+n.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A n-edrendű véges affin sík, és tekintsük ennek $\bar{A}$ projektív lezárását. A projektív lezárás során minden affin egyenes egyetlen további ponttal, az általa reprezentált ideális ponttal bővül, így a feltétel és a 6.1. állítás értelmében $\bar{A}$ minden egyenesére $n+1$ pont, és ezért A egyenesére n pont illeszkedik. $\bar{A}$-ban n^2+n+1 egyenes és ugyanennyi pont van, így A-ban n^2+n az egyenesek száma (mert a projektív lezárás egyetlen „új egyenest" eredményez, az ideális egyenest) és n^2 a pontok száma (mert A $n+1$ ideális ponttal lett bővítve). Az egy ponton átmenő egyenesek száma $\bar{A}$-ban és A-ban ugyanaz: $n+1$. $\square$

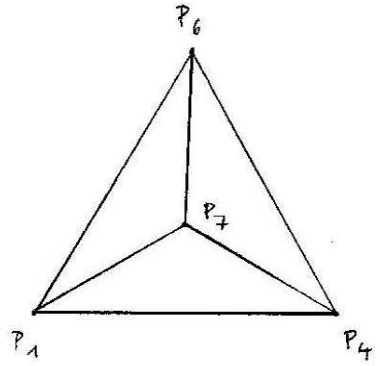
6.3. Állítás. Ha $\mathcal{P} := \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ és

$$\mathcal{L} := \left\{ \begin{array}{c} \{P_1,P_2,P_4\}, \{P_2,P_3,P_5\}, \{P_3,P_4,P_6\}, \{P_4,P_5,P_7\}, \\ \{P_5,P_6,P_1\}, \{P_6,P_7,P_2\}, \{P_7,P_1,P_3\} \end{array} \right\},$$

akkor $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ másodrendű projektív sík, és így a projektív síkok minimális modellje. Ebben az egy egyenesre illeszkedő pontok és az egy ponton átmenő egyenesek száma 3, az összes pontok és egyenesek közös száma 7. Ez a projektív sík megkapható az affin síkok minimális modelljének projektív lezártjaként.

<u>Bizonyítás.</u> Induljunk ki az $\mathbb{A}_0 = (\mathcal{P}_0, \mathcal{L}_0)$ affin síkból, ahol

$$\mathcal{P}_0 := \{P_1, P_4, P_6, P_7\}\,;\quad \mathcal{L}_0 := \left\{\begin{matrix} \{P_1,P_4\}, \{P_1,P_6\}, \{P_1,P_7\}, \\ \{P_4,P_6\}, \{P_4,P_7\}, \{P_6,P_7\} \end{matrix}\right\}.$$



Elkészítjük $\mathbb{A}_0$ projektív lezártját. $\overline{\mathbb{A}}_0$ ideális pontjai $\mathbb{A}_0$ párhuzamos egyeneseinek ekvivalenciaosztályai:

$$\{\{P_1,P_4\}, \{P_6,P_7\}\} =: P_2\,,$$
$$\{\{P_1,P_6\}, \{P_4,P_7\}\} =: P_5\,,$$
$$\{\{P_1,P_7\}, \{P_4,P_6\}\} =: P_3\,;$$

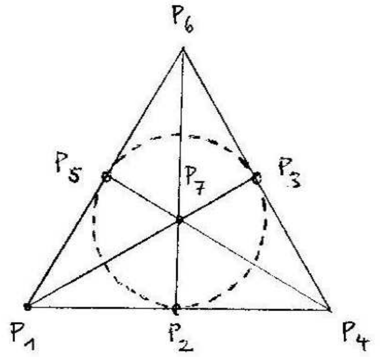
így $\overline{\mathbb{A}}_0$ ideális egyenese $\{P_2, P_3, P_5\}$. A projektív lezárt pontjainak halmaza tehát

$$\overline{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 \cup \{P_2, P_3, P_5\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\} = \mathcal{P}\,,$$

az egyeneseihez pedig úgy jutunk, hogy minden affin egyenest bővítünk az általa reprezentált ideális ponttal, és további egyenesként hozzájuk vesszük az ideális egyenest. Ily módon

$$\overline{\mathcal{L}}_0 = \left\{\begin{matrix} \{P_1,P_2,P_4\}, \{P_2,P_6,P_7\}, \{P_1,P_5,P_6\}, \{P_4,P_5,P_7\}, \\ \{P_1,P_3,P_7\}, \{P_3,P_4,P_6\}, \{P_2,P_3,P_5\} \end{matrix}\right\}$$

$= \mathcal{L}$, és ezek szerint a $\mathbb{A}_0$ projektív lezártja a megadott $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ illeszkedési struktúra, amely így másodrendű véges projektív sík. □



<u>Megjegyzések.</u> (1) A megkonstruált másodrendű, véges projektív síkot <u>7 pont - 7 egyenes projektív sík</u>ként, vagy a felfedezőjéről <u>Fano-sík</u>ként említ-

jük. Megmutatható, hogy bármely két másodrendű véges projektív sík izomorf egymással, így izomorfiától eltekintve ezeknek a projektív síkoknak az egyetlen példánya a 7 pont - 7 egyenes projektív sík.

(2) A 7 pont - 7 egyenes projektív sík nem tesz eleget a Fano-axiómának. Tekintsük ennek igazolása céljából a sík P_1, P_4, P_6, P_7 pontjait. Ezek általános helyzetűek, így meghatároznak egy teljes négyszöget, amelynek átlóspontjai

$$\overleftrightarrow{P_1P_4} \cap \overleftrightarrow{P_6P_7} = P_2\,, \quad \overleftrightarrow{P_1P_6} \cap \overleftrightarrow{P_4P_7} = P_5\,, \quad \overleftrightarrow{P_4P_6} \cap \overleftrightarrow{P_1P_7} = P_3\,.$$

Ezek az átlóspontok kollineárisak: éppen a projektív lezárt ideális egyenesét alkotják.

7. Vektorterek projektív geometriája

Algebrai előzmények

(1) Emlékeztetünk rá, hogy egy $(\mathbb{F};+,\cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrát ferdetestnek nevezünk, ha teljesíti a következő axiómákat:

(F1) $(\mathbb{F},+)$ kommutatív csoport;

(F2) $(\mathbb{F}^*,\cdot)$ csoport $(\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \setminus \{0\})$;

(F3) érvényes a disztributív szabály: tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ esetén

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{és} \quad (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha.$$

A $+$ műveletet összeadásnak, a $\cdot$ műveletet szorzásnak hívjuk; ez utóbbi jelét általában elhagyjuk. Az összeadás és a szorzás neutrális elemét a 0, ill. az 1 szimbólum jelöli; (F2)-ből következően $1 \neq 0$. Ha egy ferdetestben a szorzás is kommutatív művelet, akkor <u>testről</u> beszélünk. $(\mathbb{F};+,\cdot)$ ferdetest helyett a továbbiakban egyszerűen $\mathbb{F}$ ferdetestről szólunk.

(2) Azt mondjuk, hogy egy ferdetest <u>karakterisztikája</u> $n \in \mathbb{N}^*$, ha n az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre

$$n\cdot 1 := \underbrace{1+\dots+1}_{n} = 0.$$

Amennyiben nincs ilyen pozitív egész szám, úgy <u>nullkarakterisztikájú ferdetestről</u> beszélünk. <u>Véges ferdetest nem lehet nullkarakterisztikájú</u>, és <u>a véges ferdetestek karakterisztikája prímszám.</u>

(3) A ferdetestek és a testek kapcsolatát illetően a geometria szempontjából legfontosabb eredmény

<u>Wedderburn tétele</u> (1905): <u>Minden véges ferdetest test.</u>

(4) Legyen $p \in \mathbb{N}$ <u>prímszám</u>, és tekintsük az egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjében az

$$\alpha \equiv \beta \pmod p \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} p \mid \alpha-\beta$$

ekvivalenciareláció szerinti ekvivalenciaosztályok $\mathbb{Z}_p$ halmazát (szokásos a $\mathbb{Z}/(p)$ és a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jelölés is). Ekkor $\mathbb{Z}_p$ elemei

$$\bar{0} := \{ p\varepsilon \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon \in \mathbb{Z} \},\ \bar{1} := \{ p\varepsilon+1 \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon \in \mathbb{Z} \},$$
$$\dots,\ \overline{p-1} := \{ p\varepsilon+(p-1) \in \mathbb{Z} \mid \varepsilon \in \mathbb{Z} \}.$$

$\mathbb{Z}_p$ az

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta} := \overline{\alpha+\beta},\quad \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta} := \overline{\alpha\beta}$$

előírásokkal definiált összeadásra és szorzásra nézve <u>p elemű véges test.</u> Ez a test közvetlenül láthatóan p karakterisztikájú.

(5) Wedderburn tételéből következően minden olyan ferdetest, amely nem test, szükségképpen végtelen. A nem kommutatív ferdetestekre az egyik legfontosabb

példa a kvaterniók alkotta ferdetest, amelyet a következőkben H-val jelölünk, utalva ezzel felfedezőjére, William Rowan HAMILTON (1805-1865) ír matematikus, csillagász és fizikus nevére. A kvaterniókat ahhoz hasonló módon konstruálhatjuk meg a komplex számtestből, ahogyan a komplex számtestet építjük fel a valós számtestből. Ez utóbbira két eljárás is használatos:

(a) Komplex számon $\alpha+i\beta$ alakú formális lineáris kombinációt értünk, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, i pedig pusztán egy szimbólum. Két komplex szám összegét, ill. szorzatát ekkor az

$$(\alpha+i\beta)+(\alpha'+i\beta') := (\alpha+\alpha')+i(\beta+\beta'),$$

ill. az

$$(\alpha+i\beta)(\alpha'+i\beta') := (\alpha\alpha'-\beta\beta')+i(\alpha\beta'+\alpha'\beta)$$

előírással értelmezzük ($\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}$).

(b) A komplex számok halmaza a 2×2-es valós mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ gyűrűjének az

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\}$$

részgyűrűje - ebben az esetben a komplex számok összege és szorzata mint mátrixok összege és szorzata eleve értelmezve van.

A két definíció ekvivalens: egyszerű számolással megmutatható, hogy az

$$\alpha+i\beta \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

leképezés művelettartó bijekció.

A kvaterniók bevezetésénél a második utat követjük.

<u>Lemma és definíció.</u> A 2×2-es komplex mátrixok $M_2(\mathbb{C})$ gyűrűjének

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

részhalmaza a mátrixok összeadásának és szorzásának műveletére nézve ferdetest. Ennek a ferdetestnek az elemeit <u>kvaternióknak</u> nevezzük.

<u>Bizonyítás.</u> Legyenek $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tetszőleges komplex számok. Ekkor

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' & \beta+\beta' \\ -(\overline{\beta+\beta'}) & \overline{\alpha+\alpha'} \end{pmatrix} \in \mathbb{H},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\overline{\beta'} & \overline{\alpha'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\overline{\beta'} & \alpha\beta' + \beta\overline{\alpha'} \\ -(\overline{\alpha\beta' + \beta\overline{\alpha'}}) & \overline{\alpha\alpha' - \beta\overline{\beta'}} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

(mivel például $-\alpha'\overline{\beta} - \overline{\alpha}\overline{\beta'} = -(\overline{\alpha\beta' + \beta\overline{\alpha'}})$); következésképpen $\mathbb{H}$ <u>részgyűrűje</u> $M_2(\mathbb{C})$-nek. $\mathbb{H}$ tartalmazza az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ egységmátrixot, így az összeadásra és a szorzásra nézve egységelemes gyűrű. Ha $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathbb{H}$, akkor

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0,$$

s ezért a nemzérus kvaterniók a szorzásra nézve invertálhatók. Beláttuk így módon, hogy $\mathbb{H}$ ferdetest. $\square$

Jegyezzük meg, hogy a diagonális, azaz az $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ alakú kvaterniók $\mathbb{H}$-nak részgyűrűjét alkotják, amely az

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \longmapsto \alpha \in \mathbb{C}$$

leképezés révén izomorf $\mathbb{C}$-vel, mint gyűrűvel. Föltehetjük így módon, hogy $\mathbb{H}$ tartalmazza mind a komplex, mind a valós számtestet: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Lemma. Egy kvaternió akkor és csak akkor kommutál minden kvaternióval a szorzásnál, ha valós szám.

Bizonyítás. Legyen adva egy $q := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ kvaternió, és tekintsünk egy tetszőleges

$$q' := \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\bar\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

kvaterniót. Ekkor

$$qq' - q'q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\bar\gamma & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\bar\gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\beta\bar\gamma & \alpha\gamma \\ -\bar\alpha\bar\gamma & -\bar\beta\gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\bar\beta\gamma & \bar\alpha\gamma \\ -\alpha\bar\gamma & -\beta\bar\gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar\beta\gamma - \beta\bar\gamma & (\alpha - \bar\alpha)\gamma \\ (\alpha - \bar\alpha)\bar\gamma & \beta\bar\gamma - \bar\beta\gamma \end{pmatrix},$$

így

$$qq' = q'q \iff \forall \gamma \in \mathbb{C}: \begin{cases} \beta\bar\gamma = \bar\beta\gamma \\ (\alpha - \bar\alpha)\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \forall \gamma \in \mathbb{C}: \quad \bar\beta\gamma \in \mathbb{R} \text{ és } (\alpha - \bar\alpha)\gamma = 0$$

$$\iff \beta = 0 \text{ és } \alpha \in \mathbb{R} \iff q \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Következmény. $\mathbb{H}$-ban a szorzás nem kommutatív. $\square$

$\mathbb{H}$ a valós számtest fölött 4-dimenziós vektortér, amelynek bázisát képezik az

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

kvaterniók. Így módon minden $q \in \mathbb{H}$ kvaternió egyértelműen előállítható $q = \lambda\mathbf{1} + \mu\mathbf{i} + \nu\mathbf{j} + \eta\mathbf{k}$ alakú lineáris kombinációként, ahol $\lambda, \mu, \nu, \eta \in \mathbb{R}$. Könnyen ellenőrizhető végül (feladat!), hogy

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j;$$
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j;$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$

e szorzótábla ismeretében az $(1, i, j, k)$ bázisban előállított bármely két kvaternió szorzata egyszerűen kiszámítható.

(6) A test fölötti vektortér fogalmának szó szerinti analógiájára értelmezhetjük a ferdetest fölötti ún. bal oldali vektortereket.

Legyen V egy kommutatív csoport, amelyben a műveletet a $+$ szimbólummal jelöljük és <u>összeadásnak</u> hívjuk. Azt mondjuk, hogy V az <u>$\mathbb{F}$ ferdetest fölötti bal oldali vektortér</u>, ha adva van egy <u>skalárral való szorzásnak</u> nevezett

$$\mathbb{F} \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, v) \longmapsto \alpha v$$

leképezés (ún. <u>külső művelet</u>), eleget téve a következő axiómáknak:

(VS 1) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$; $\alpha \in \mathbb{F}$; $u, v \in V$;

(VS 2) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$; $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; $v \in V$;

(VS 3) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; $v \in V$;

(VS 4) $1v = v$; $v \in V$.

Az <u>$\mathbb{F}$ fölötti jobb oldali vektortér</u> fogalma analóg: ekkor a skalárral való szorzás olyan

$$V \times \mathbb{F} \longrightarrow V, \quad (v, \alpha) \longmapsto v\alpha$$

leképezés, amely az értelemszerűen módosított (VS1) - (VS4) axiómáknak tesz eleget. Az $\mathbb{F}$ fölötti bal és jobb oldali vektortér fogalma akkor és csak akkor esik egybe, ha $\mathbb{F}$ test. Megállapodunk abban, hogy a következőkben ferdetest fölött csak bal oldali vektorteret tekintünk, és a „bal oldali" jelzőt elhagyjuk.

Ferdetest fölötti vektorterekben a lineáris algebra alapvető fogalmai (lineáris függőség – függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió, alterek, lineáris sokaságok, lineáris leképezések, lineáris izomorfizmus, ...) ugyanúgy értelmezhetők és tárgyalhatók, mint test fölötti vektorterekben.

Példa. Legyen $\mathbb{F}$ ferdetest, n pedig pozitív egész szám. Jelentse $\mathbb{F}^n$ az $\mathbb{F}$ elemeiből képzett összes rendezett n-esek halmazát, és ha

$$a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{F}^n,\quad b=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{F}^n,\quad \lambda\in\mathbb{F},$$

akkor legyen

$$a+b:=(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n);\quad \lambda a:=(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n).$$

Ekkor $\mathbb{F}^n$ vektortér az $\mathbb{F}$ ferdetest fölött, amelyet az $\mathbb{F}$ elemeiből képzett skalár n-esek vektorterének hívunk. $\mathbb{F}^n$-nek bázisát képezi az az $(e_i)_{i=1}^n$ vektorrendszer, ahol $e_i=(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)$, így $\dim\mathbb{F}^n=n$. Az $(e_i)_{i=1}^n$ bázist $\mathbb{F}^n$ kanonikus bázisaként említjük.

~o~

7.1. Lemma és definíció. Legyen V az $\mathbb{F}$ ferdetest fölötti $(n+1)$-dimenziós vektortér, ahol $n\in\mathbb{N}^*$.

(1) A V vektortér nemzérus vektorainak halmazában az

$$u\sim v \overset{\text{def.}}{\iff} \exists\,\lambda\in\mathbb{F}:\ v=\lambda u$$

reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályokat projektív pontoknak (gyakran egyszerűen csak pontoknak) hívjuk, és egy $a\in V\setminus\{0\}$ reprezentáns vektorral rendelkező projektív pontra az $[a]$, $A(a)$ vagy A jelöléseket használjuk. Az összes projektív pontok halmazát a V vektortérhez csatolt projektív térnek nevezzük és $P(V)$-vel jelöljük. $P(V)$ dimenzióján a V vektortér 1-gyel csökkentett dimenzióját értjük:

$$\dim P(V) := \dim V - 1 = n.$$

(2) Ha a V vektortérnek az $\mathbb{F}$ ferdetest elemeiből képzett skalár $(n+1)$-esek $\mathbb{F}^{n+1}$ vektorterét választjuk, akkor a $P(V) := P(\mathbb{F}^{n+1})$ projektív teret az $\mathbb{F}$ ferdetest fölötti standard n-dimenziós projektív térnek hívjuk, és rendszerint $\mathbb{F}P^n$-nel jelöljük. Speciálisan $\mathbb{R}P^n$, ill. $\mathbb{C}P^n$ az n-dimenziós valós, ill. komplex projektív tér.

(3) A $P(V)$ projektív tér egy ponthalmazát a projektív tér egy egyenesének vagy projektív egyenesnek nevezzük, ha pontjainak reprezentáns vektorai a zérusvektor hozzávételével kétdimenziós alteret alkotnak a V vektortérben.

Bizonyítás. Csupán azt kell ellenőriznünk, hogy a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció a $V \setminus \{\underline{0}\}$ halmazon.

Reflexivitás. Tetszőleges $v \in V \setminus \{\underline{0}\}$ esetén $v = 1.v$, tehát $v \sim v$.

Szimmetria. $u \sim v \overset{\text{def.}}{\iff} v = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Itt $\lambda \neq 0$ (mert $v \neq \underline{0}$), így $u = \frac{1}{\lambda} v$ is teljesül, tehát $v \sim u$.

Tranzitivitás. Tegyük fel, hogy $u \sim v$ és $v \sim w$. Ekkor $v = \lambda u$ és $w = \mu v$ írható, ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Így $w = (\mu\lambda)u$, következésképpen $u \sim w$. □

Megjegyzések. (1) A $P(V)$ jelölés mellett használjuk a dimenzióra, ill. a dimenzióra és a ferdetestre utaló $P^n(V)$, ill. $P^n_{\mathbb{F}}(V)$ jelöléseket is. A definíció röviden a

$P(V) = {}^{V\setminus\{\underline{0}\}}/\!\sim$ alakban írható fel, ami a szokásos kifejezése annak, hogy $P(V)$ a $V\setminus\{\underline{0}\}$ halmazon megadott $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályainak halmaza („faktorhalmaza"). Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy ha $[a] \in P(V)$ és $\lambda \in \mathbb{F}^{*}$ $(:= \mathbb{F}\setminus\{0\})$, akkor $[\lambda a] = [a]$. Az

$$[a] \in P(V) \longmapsto \operatorname{span}(a) \subset V$$

leképezés bijekció a $P(V)$ projektív tér és a V vektortér vektoregyeneseinek halmaza között; erre tekintettel lehetséges és szokásos $P(V)$-t V vektoregyenesei halmazaként is definiálni.

(2) Kijelölve a V vektortér egy $\mathcal{B} = (b_i)_{i=1}^{n+1}$ bázisát, tetszőleges $A = [a]$ projektív pont $a \in V\setminus\{\underline{0}\}$ reprezentáns vektora egyértelműen előállítható

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

alakban. Azt mondjuk ekkor, hogy az

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}$$

skalár $(n+1)$-est az A pont $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó <u>homogén koordinátái</u> alkotják. A $\mathcal{B}$ bázis rögzítése után a V vektortér azonosítható az $\mathbb{F}^{n+1}$ koordinátatérrel, a $P(V)$ projektív tér pedig az

$$A \in P(V) \longmapsto [(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})] \in \mathbb{F}P^{n}$$

bijekció révén az $\mathbb{F}$ fölötti standard n-dimenziós projektív térrel. Így

$$a \underset{(\mathcal{B})}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}), \text{ ill. } A \underset{(\mathcal{B})}{=} [(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})]$$

írható.

Világos, hogy nincsen olyan $P(V)$-beli pont, amelynek homogén koordinátái a $(0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^{n+1}$ skalár $(n+1)$-est alkotnák, viszont (bázis rögzítése után) minden $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{F}^{n+1}\setminus\{0\}$ sorozat

fellép egy egyértelműen meghatározott $P(V)$-beli pont homogén koordinátáinak sorozataként.
Az is nyilvánvaló másrészt, hogy egy projektív pont nem határozza meg egyértelműen a homogén koordinátáit: egy nemzérus skalárszorzó fölött szabadon rendelkezhetünk. (Ez a „homogén" jelző magyarázata.) Nincs értelme tehát egy projektív pont valamelyik homogén koordinátájának konkrét értékéről beszélni. Értelmesen szólhatunk viszont arról, hogy egy projektív pont i-edik ($i \in \{1, \dots, n+1\}$) homogén koordinátája 0 vagy nem 0, ez a tulajdonság ugyanis érvénnyel bír a pont valamennyi reprezentáns vektorára.

7.2. Lemma. Tegyük fel, hogy V háromdimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ ferdetest fölött.
(1) A $P^2(V)$ projektív tér négy pontja akkor és csak akkor általános helyzetű, ha reprezentáns vektoraik közül bármely három lineárisan független.
(2) Ha A, B, C, D általános helyzetű pontjai $P^2(V)$-nek akkor a V vektortérnek van olyan (a, b, c) bázisa, hogy
$$A = [a],\ B = [b],\ C = [c],\ D = [a+b+c].$$

Bizonyítás. (1) Korábbi definíciónk értelmében négy pont általános helyzetű volta azt jelenti, hogy a pontok között nincs három kollineáris. A projektív egyenesek értelmezése szerint három kollineáris pont reprezentáns vektorai egy kétdimenziós vektor-altérben vannak, és így lineárisan függők. Megfordítva, tegyük fel, hogy három pontnak – legyenek ezek A, B és C – vannak lineárisan függő a, b, c reprezentáns vektorai. Ekkor a vektorok valamelyike, például „c", lineáris kombinációja a másik kettőnek, esetünkben a-nak és b-nek. „a" és b azonban lineárisan független (különben $A = B$ adódna), így

$$\overleftrightarrow{AB} = \{[u] \in P(V) \mid u \in \operatorname{span}(a,b)\}.$$

$c \in \operatorname{span}(a,b)$ miatt $C \in \overleftrightarrow{AB}$; beláttuk ily módon, hogy <u>ha három projektív pont rendelkezik lineárisan függő reprezentáns vektorokkal, akkor a pontok kollineárisak.</u>

Következik a mondottakból, hogy $P^2(V)$ négy pontja között akkor és csak akkor nincs három kollineáris, ha közülük bármely három lineárisan független vektorokkal reprezentálható.

(2) Legyenek v_1, v_2, v_3 és v tetszőleges reprezentáns vektorai az adott A, B, C, D általános helyzetű pontoknak:

$$A = [v_1], \quad B = [v_2], \quad C = [v_3], \quad D = [v].$$

Az (1)-ben mondottak szerint (v_1, v_2, v_3) lineárisan független vektorrendszere, és így bázisa a V háromdimenziós vektortérnek. Egyértelműen léteznek ezért olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$ skalárok, hogy $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. Itt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ egyike sem lehet zérus, ugyanis például $\lambda_1 = 0$ esetén v_2, v_3 és v lineárisan függő lenne, ami B, C és D nemkollineáris volta miatt – ismét (1) alapján – lehetetlen. Így azonban $a := \lambda_1 v_1$, $b := \lambda_2 v_2$, $c := \lambda_3 v_3$ és $d := v = a + b + c$ szintén reprezentáns vektorai az A, B, C és D pontoknak, és

(a, b, c) bázisa V-nek. □

7.3. Állítás. Ha V az $\mathbb{F}$ ferdetest fölötti háromdimenziós vektortér, $\mathcal{L}_P$ a $P^2(V)$ kétdimenziós projektív tér egyeneseinek halmaza, akkor a $(P^2(V), \mathcal{L}_P)$ illeszkedési struktúra projektív sík.

Bizonyítás. Rendre ellenőrizzük, hogy $(P^2(V), \mathcal{L}_P)$ eleget tesz a (P1) - (P3) axiómáknak.

$\boxed{(P1)}$ Legyenek A és B $P^2(V)$ különböző pontjai. Ha $A = [a]$, $B = [b]$, akkor $A \neq B$ miatt a és b egyike sem lehet skalárszorosa a másiknak, következésképpen (mint azt már 7.2./(1) igazolása során is jeleztük) a és b lineárisan független. Így $\mathrm{span}(a, b)$ kétdimenziós altere V-nek, és

$$l := \{[u] \in P^2(V) \mid u \in \mathrm{span}(a, b)\}$$

projektív egyenes, amelyre A és B egyaránt illeszkedik.

Belátjuk, hogy további A-ra és B-re illeszkedő egyenes nem létezik. Tegyük föl, hogy

$$m := \{[z] \in P^2(V) \mid z \in \mathrm{span}(v, w)\}$$

szintén A-ra és B-re illeszkedő egyenes. Ekkor $\{a, b\} \subset \mathrm{span}(v, w)$, és így $\mathrm{span}(a, b) \subset \mathrm{span}(v, w)$, ami csak úgy lehetséges, hogy $\mathrm{span}(a, b) = \mathrm{span}(v, w)$ (hiszen mindkét altér kétdimenziós); tehát $l = m$.

$\boxed{(P2)}$ Ha l és m különböző egyenesek, akkor ezek

$$l = \{[u] \in P^2(V) \mid u \in \mathrm{span}(a, b)\}, \text{ ill. } m = \{[z] \in P^2(V) \mid z \in \mathrm{span}(v, w)\}$$

alakban adhatók meg, ahol

$$\mathrm{span}(a, b) =: L \quad \text{és} \quad \mathrm{span}(v, w) =: M$$

a V vektortér különböző, kétdimenziós alterei. Így

$$\dim L + \dim M = 4, \quad \dim(L + M) = 3,$$

következésképpen; alkalmazva a vektor-alterek dimenziótételét,

$$\dim(L\cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L+M) = 1.$$

Mivel $L\cap M$ nemzérus vektorai éppen $l\cap m$ reprezentáns vektorai, a kapott eredmény azt jelenti, hogy l-nek és m-nek létezik egyetlenegy közös pontja.

$\boxed{(P3)}$ A V vektortérnek létezik (a_1, a_2, a_3) háromtagú bázisa, hiszen feltevésünk értelmében $\dim V = 3$. Legyen $e := a_1 + a_2 + a_3$. Ekkor az <u>a_1, a_2, a_3, e vektorok közül bármely három lineárisan független.</u> (Ez az első három tagra nem szigorúan indoklást. Tekintsük például az a_1, a_2, e vektorokat, ha $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 e = \underline{0}$, és így $(\lambda_1+\lambda_3)a_1 + (\lambda_2+\lambda_3)a_2 + \lambda_3 a_3 = \underline{0}$, akkor innen (a_1, a_2, a_3) lineáris függetlensége miatt $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$ következik; (a_1, a_2, e) tehát független.) A tett észrevételből <u>7.2.(1)</u> alapján közvetlenül adódik, hogy az $[a_1], [a_2], [a_3], [e]$ pontok általános helyzetűek. □

<u>Példa</u>: <u>a 7 pont – 7 egyenes projektív sík algebrai konstrukciója</u>

Tekintsük a $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ kételemű véges testet, melynek művelettáblái

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\quad , \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\ .$$

Legyen $V := (\mathbb{Z}_2)^3$ a $\mathbb{Z}_2$ test elemeiből képzett skalárhármasok vektortere. Mivel a $\{0, 2\}$ halmaz elemeiből képezhető háromtagú sorozatok száma $2^3 = 8$, a V vektortérnek 8 eleme van, és ezek közül 7 különbözik a zérusvektortól. A $V\setminus\{\underline{0}\}$ halmazon bevezetett

$$u \sim v \overset{\text{def.}}{\iff} v = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_2$$

ekvivalenciarelációnál minden vektor egyedül ön-magával ekvivalens, hiszen egyetlen nemzérus skalárszorzónk van, az 1. Így $V \setminus \{\underline{0}\}/_\sim$ természetes módon azonosítható $V \setminus \{\underline{0}\}$ -val, tehát $P^2(V) = V \setminus \{\underline{0}\}$. $P^2(V)$ pontjai:

$$P_1 := (1,0,0),\quad P_2 := (0,1,0),\quad P_3 := (0,0,1),$$
$$P_4 := (1,1,0),\quad P_5 := (0,1,1),\quad P_6 := (1,1,1),\quad P_7 := (1,0,1).$$

A $V = (\mathbb{Z}_2)^3$ vektortér bármely két lineárisan független u és v vektorából három nemtriviális lineáris kombináció képezhető:

$$1.u + 0.v = u,\quad 0.u + 1.v = v,\quad 1.u + 1.v = u+v.$$

Mivel

$$[z] \in \overleftrightarrow{[u][v]} \iff z \in \operatorname{span}(u,v) \setminus \{\underline{0}\},$$

következik ily módon, hogy minden $P^2(V)$ -beli egyenesre három pont illeszkedik, és ezek bármelyike a másik kettő összege:

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$ további pontja $P_1 + P_2 = (1,1,0) = P_4$,
$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ további pontja $P_2 + P_3 = (0,1,1) = P_5$,
$\overleftrightarrow{P_3P_4}$ további pontja $P_3 + P_4 = (1,1,1) = P_6$,
$\overleftrightarrow{P_4P_5}$ további pontja $P_4 + P_5 = (1,0,1) = P_7$,
$\overleftrightarrow{P_5P_6}$ további pontja $P_5 + P_6 = (1,0,0) = P_1$,
$\overleftrightarrow{P_6P_7}$ további pontja $P_6 + P_7 = (0,1,0) = P_2$,
$\overleftrightarrow{P_7P_1}$ további pontja $P_7 + P_1 = (0,0,1) = P_3$.

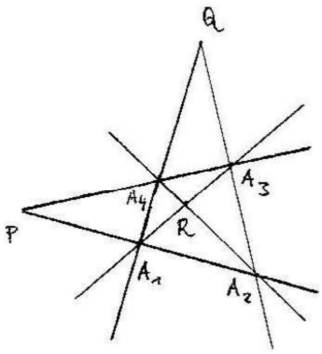
Eljutottunk így a <u>6.3.</u> állításban bevezetett 7 pont - 7 egyenes projektív síkhoz.

<u>Megállapodás</u>. Ha $\mathbb{F}$ ferdetest és V $\mathbb{F}$ fölötti háromdimenziós vektortér, akkor a $(P^2(V), \mathcal{L}_P)$ projektív síkot az <u>$\mathbb{F}$ ferdetest fölötti projektív sík</u>ként említjük és egyszerűen $P^2_{\mathbb{F}}(V)$ -vel jelöljük. Ez V egy bázisának rögzítése után, a korábban látott

azonosítható az $\mathbb{F}P^2$ projektív síkkal; speciálisan szólhatunk az $\mathbb{R}P^2$ valós, ill. a $\mathbb{C}P^2$ komplex projektív síkról.

<u>7.4. Tétel.</u> <u>Egy ferdetest fölötti projektív sík akkor és csak akkor tesz eleget a Fano-axiómának, ha a ferdetest nem 2 karakterisztikájú, azaz ha a ferdetestben $1+1 \neq 0$.</u>

<u>Bizonyítás.</u> Tekintsünk a $P^2_{\mathbb{F}}(V)$ projektív síkban egy $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \cup \{\overleftrightarrow{A_iA_j} \in \mathcal{L}_p \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ teljes négyszöget. Ennek átlóspontjai



$P := \overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_3A_4}$, $Q := \overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{A_1A_4}$,

$R := \overleftrightarrow{A_1A_3} \cap \overleftrightarrow{A_2A_4}$;

legyenek ezek reprezentáns vektorai rendre

$$p, q \text{ és } r.$$

(1) A <u>7.2.</u>(2) lemma értelmében megadható a V vektortérnek olyan (a_1, a_2, a_3) bázisa, hogy

$$[a_1] = A_1, \ [a_2] = A_2, \ [a_3] = A_3, \ [e] = A_4; \ e := a_1 + a_2 + a_3.$$

Előállítjuk az átlóspontok reprezentáns vektorait az (a_1, a_2, a_3) bázisban.

$$P \in \overleftrightarrow{A_1A_2} \implies p = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \ ; \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \ (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0);$$

$$P \in \overleftrightarrow{A_3A_4} \implies p = \alpha_3 a_3 + \alpha e = \alpha a_1 + \alpha a_2 + (\alpha + \alpha_3) a_3 \ ;$$

$$\alpha, \alpha_3 \in \mathbb{F}, \ (\alpha, \alpha_3) \neq (0,0).$$

Így $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \alpha a_1 + \alpha a_2 + (\alpha + \alpha_3) a_3$, amiből (a_1, a_2, a_3) lineáris függetlensége miatt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_3 = -\alpha$$

következik. Tehát $p = \alpha(a_1 + a_2)$, $\alpha \neq 0$. Mivel a a reprezentáns vektorok kijelöléseinél egy nemzérus skalárszorzó fölött szabadon rendelkezünk, $\alpha := 1$

választással élhetünk; akkor

$$p = a_1 + a_2 .$$

Teljesen hasonló meggondolással kapjuk, hogy

$$q = a_2 + a_3 , \quad r = a_1 + a_3 .$$

(2) Szükséges és elegendő feltételt adunk a P, Q, R átlóspontok kollinearitására.

$\{P, Q, R\}$ kollineáris $\iff R \in \overleftrightarrow{PQ}$

$\iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{F};\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0):\ r = \alpha p + \beta q$

Ez utóbbi reláció a következő ekvivalens formába írható:

$$a_1 + a_3 = \alpha (a_1 + a_2) + \beta (a_2 + a_3) ,$$

$$(\alpha - 1) a_1 + (\alpha + \beta) a_2 + (\beta - 1) a_3 = \underline{0} ,$$

$$\alpha = 1 , \quad \alpha + \beta = 0 , \quad \beta = 1 ,$$

tekintettel (a_1, a_2, a_3) lineáris függetlenségére.

Megállapíthatjuk tehát, hogy <u>$P^2_{\mathbb{F}}(V)$-ben akkor és csak akkor van olyan teljes négyszög, amelynek átlópontjai kollineárisak, ha $\mathbb{F}$-ben $1 + 1 = 0$</u>.

Ekvivalens módon: <u>$P^2_{\mathbb{F}}(V)$ akkor és csak akkor tesz eleget a Fano-axiómának, ha $\mathbb{F}$-ben $1 + 1 \neq 0$.</u> □

7.5. Tétel (<u>a Desargues- és a Pappos-féle záródási tulajdonság algebrai jellemzése</u>).

(1) Ha $\mathbb{F}$ ferdetest és V $\mathbb{F}$ fölötti háromdimenziós vektortér, akkor a $P^2_{\mathbb{F}}(V)$ projektív sík Desargues-féle.

(2) Minden Desargues-féle projektív sík izomorf egy ferdetest fölötti projektív síkkal.

(3) Egy ferdetest fölötti projektív sík akkor és csak akkor Pappos-féle, ha a ferdetest test.

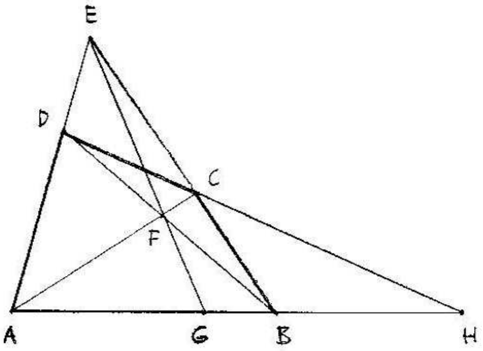
(4) Minden Papposz-féle projektív sík izomorf egy test fölötti projektív síkkal.

A bizonyítással kapcsolatban csak néhány megjegyzést teszünk. Az első megállapítás a Geometria 2. kurzuson az $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ esetben igazolást nyert, a mostani általánosabb esetben a bizonyításhoz nincs szükség új gondolatokra. Ugyancsak bizonyítva lett az említett kurzuson a Pappos-tétel az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkon, annak említése mellett, hogy az $\mathbb{R}$-beli szorzás kommutativitása perdöntő: ferdetest fölötti projektív síkon a tétel érvényét vesztené. (Ilyen észrevétel az affin esetben korábban nálunk is szerepelt.) A (2) megállapítás bizonyítása nehéz és hosszadalmas, ezt mellőznünk kell. Végül a (4) megállapítás Hessenberg tétele alapján következik a másodikból és a harmadikból.

7.6. Állítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{F}$ ferdetestben $1+1\neq 0$, és tekintsük az $\mathbb{F}$ fölötti $P^2_{\mathbb{F}}(V)$ projektív síkot. Legyenek A, B, G $P^2_{\mathbb{F}}(V)$ különböző, kollineáris pontjai. Ha $A=[a]$, $B=[b]$; $G=[g]$, $g=\alpha a+\beta b$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{F}^*)$, akkor a $H:=[\alpha a-\beta b]$ pont az egyetlen olyan pont, amely az (A,B) pontpárra vonatkozóan harmonikusan konjugált a G ponthoz, vagyis amelyre $h(A,B;G,H)$ teljesül.

Bizonyítás. Mivel $G\in\overleftrightarrow{AB}=\{[u]\in P^2_{\mathbb{F}}(V)\mid u\in\operatorname{span}(a,b)\}$, G reprezentáns vektorai valóban megadhatók az állításban szereplő $g=\alpha a+\beta b$; $\alpha,\beta\in\mathbb{F}^*$ alakban. A harmonikus pontnégyes definíciójában szereplő konstrukciót követve, jelöljünk ki egy $\overleftrightarrow{AB}$-re nem illeszkedő $E=[e]$ pontot, valamint egy $F\in\overleftrightarrow{EG}\setminus\{E,G\}$

pontot. Ha $F=[f]$, akkor $f \in \mathrm{span}(e,g) \setminus \{0\}$ miatt



$f = \lambda e + \gamma g$; $\lambda, \gamma \in \mathbb{F}$

írható, ahol $F \in \{E, G\}$ miatt $\lambda \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Mivel nemzérus skalárszorzó fölött szabadon rendelkezünk, föltehetjük, hogy $\gamma = 1$. Ekkor

$$f = \lambda e + g = \alpha a + \beta b + \lambda e .$$

Ha

$$c := \beta b + \lambda e = f - \alpha a, \quad d := \alpha a + \lambda e = f - \beta b, \quad h := d - c = \alpha a - \beta b,$$

akkor

$$c \in \mathrm{span}(b,e) \cap \mathrm{span}(a,f) \implies [c] = \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{BE} =: C,$$

$$d \in \mathrm{span}(a,e) \cap \mathrm{span}(b,f) \implies [d] = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BF} =: D,$$

$$h \in \mathrm{span}(c,d) \cap \mathrm{span}(a,b) \implies [h] = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} =: H.$$

Következik ily módon, hogy az (A,B,G,H) pontnégyes harmonikus, s mivel $H = [\alpha a - \beta b]$, $G = [\alpha a + \beta b]$, az is adódik, hogy a H harmonikus konjugált A, B és G által egyértelműen meghatározott. □

Megjegyzés. 7.6. igazolásával (7.4. és 7.5. (2) figyelembevételével) algebrai bizonyítást adtunk arra az 5.11.-ben megfogalmazott állításra, miszerint az (F) és a (D) axiómának eleget tevő projektív síkokban bármely három kollineáris A, B, G ponthoz egyetlen olyan H pont létezik, amelyre $h(A,B;G,H)$ teljesül. A (D) axiómát akkor használtuk ki, amikor projektív sík gyanánt ferdetest fölötti projektív síkot választottunk.

7.7. Állítás és definíció. Tegyük fel, hogy $\mathbb{F}$ test, és tekintsük az $\mathbb{F}P^n$ ($\mathbb{F}$ fölötti standard n-dimenziós) projektív teret. Ha A, B, C, D $\mathbb{F}P^n$ különböző, kollineáris pontjai, a, b, c, d tetszőleges reprezentáns vektorai ezeknek a pontoknak, és

$$c = \gamma_1 a + \gamma_2 b \ , \quad d = \delta_1 a + \delta_2 b \ ,$$

akkor a

$$\boxed{cr(A,B,C,D) := \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1}}$$

skalár független a pontok reprezentáns vektorainak választásától. Ezt a skalárt az (A,B,C,D) rendezett pontnégyes <u>kettősviszonyának</u> nevezzük. A kettősviszony rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) Négy kollineáris pont kettősviszonya 0 vagy 1 nem lehet.

(2) Ha A, B, C $\mathbb{F}P^n$ különböző kollineáris pontjai és $\tau \in \mathbb{F} \setminus \{0,1\}$ tetszőleges, akkor létezik egy és csak egy olyan D pont, hogy $cr(A,B,C,D) = \tau$.

(3) $$cr(A,B,C,D) = \frac{1}{cr(B,A,C,D)} = \frac{1}{cr(A,B,D,C)} =$$

$$= 1 - cr(A,C,B,D) = cr(C,D,A,B).$$

<u>Bizonyítás.</u> Azt mutatjuk meg először, hogy a $cr(A,B,C,D)$ skalár jól definiált. Tegyük fel, hogy a', b', c', d' további reprezentáns vektorai a tekintett pontoknak. Ekkor

$$a' = \alpha a, \quad b' = \beta b, \quad c' = \gamma c, \quad d' = \delta d \ ; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}^*$$

írható, és így

$$c' = \gamma(\gamma_1 a + \gamma_2 b) = \frac{\gamma}{\alpha}\gamma_1 a' + \frac{\gamma}{\beta}\gamma_2 b' \ ,$$

$$d' = \delta(\delta_1 a + \delta_2 b) = \frac{\delta}{\alpha}\delta_1 a' + \frac{\delta}{\beta}\delta_2 b' \ .$$

Az új reprezentáns vektorok segítségével adódó kettősviszony

$$\frac{\frac{\gamma}{\beta}\gamma_2}{\frac{\gamma}{\alpha}\gamma_1} : \frac{\frac{\delta}{\beta}\delta_2}{\frac{\delta}{\alpha}\delta_1} = \frac{\alpha\gamma_2}{\beta\gamma_1} : \frac{\alpha\delta_2}{\beta\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad ;$$

ez éppen a definíció szerinti érték.

Rátérünk ezek után az (1) - (3) megállapítások igazolására.

(1) Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy

$$cr(A,B,C,D) := \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\gamma_2\delta_1}{\gamma_1\delta_2} \in \{0,1\}.$$

A 0 értékhez akkor jutunk, ha $\gamma_2 = 0$ vagy $\delta_1 = 0$, ekkor azonban $A = C$ vagy $B = D$ következik, amit a pontok különbözősége kizár. $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1$ esetén $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, amiből $C = D$ adódik, de ez szintén lehetetlen.

(2) Amennyiben $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c] = [\gamma_1 a + \gamma_2 b]$, úgy tekintsük a $D := [\varepsilon\gamma_1 a + \gamma_2 b]$ pontot. Ekkor $cr(A,B,C,D) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\gamma_2}{\varepsilon\gamma_1} = \varepsilon$, D tehát megfelel a kívánalomnak. A feltételnek eleget tevő további pont nincs, mivel a keresett pont reprezentáns vektorainak az a-ból és b-ből való lineáris kombinálásakor föllépő együtthatók aránya csak is $\frac{\gamma_2}{\varepsilon\gamma_1}$ lehet.

(3) A felírt relációk helyessége egyszerű számolással adódik. Megtartva a definíció jelöléseit,

$$c = \gamma_1 a + \gamma_2 b = \gamma_2 b + \gamma_1 a \quad \text{és} \quad d = \delta_1 a + \delta_2 b = \delta_2 b + \delta_1 a$$

miatt

$$\frac{1}{cr(B,A,C,D)} = \frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} : \frac{\delta_1}{\delta_2}} = \frac{\delta_1}{\delta_2} : \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1} =: cr(A,B,C,D).$$

Hasonló számolás vezet célhoz a második és a harmadik reláció esetén is. A negyedik reláció az első háromnak már következménye, ugyanis

$$\begin{aligned} cr(C,D,A,B) &= 1 - cr(C,A,D,B) = 1 - \frac{1}{cr(A,C,D,B)} = \\ &\quad 1 - cr(A,C,B,D) = 1 - (1 - cr(A,B,C,D)) \\ &= cr(A,B,C,D). \end{aligned}$$

□

7.8. Következmény. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{F}$ testben $1+1 \neq 0$. Ha A, B, C az $\mathbb{F}$ fölötti projektív sík különböző, kollineáris pontjai, akkor létezik egy és csak egy olyan H pont, hogy $cr(A, B, C, H) = -1$, és ez a H pont éppen a C pont (A, B) pontpárra vonatkozó harmonikus konjugáltja.

Bizonyítás. A $cr(A, B, C, H) = -1$ feltételnek eleget tevő H pont egyértelmű létezését az előző állítás biztosítja. Ha $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [\alpha a + \beta b]$, akkor – mint láttuk – a $H := [-\alpha a + \beta b] = [\alpha a - \beta b]$ ponttal, és csakis ezzel teljesül, hogy $cr(A, B, C, H) = -1$. Másrészt a 7.6. állítás értelmében C (A, B)-re vonatkozó harmonikus konjugáltja éppen az $\alpha a - \beta b$ reprezentáns vektorú H pont. □

7.9. Lemma. Legyen $\mathbb{F}$ egy ferdetest. Az $\mathbb{F}P^2$ projektív sík minden egyenesének egyenlete megadható

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

alakban, ahol $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{F}^3 \setminus \{\underline{0}\}$. Azt mondjuk, hogy az egyenletben szereplő $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ együtthatók az egyenes vonalkoordinátái. Két ilyen alakú egyenlet akkor és csak akkor egyenlete ugyanannak az egyenesnek, ha a vonalkoordinátáik alkotta rendezett skalárhármasok egymás nemzérus skalárszorosai.

Bizonyítás. Egy $\mathbb{F}P^2$-beli egyenes pontjainak reprezentáns vektorai a zérusvektor hozzávételével kétdimenziós vektor-alteret alkotnak $\mathbb{F}^3$-ban. Ismert a lineáris algebrából, hogy minden ilyen vektoraltér egy $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ alakú homogén lineáris egyenlet megoldó altere, ahol $\mathrm{rang}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = 1 \iff (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \underline{0}$. Két ilyen alakú egyenlet megoldó altere akkor és csak akkor közös, ha együttható-mátrixaik csupán nemzérus skalárszorzóban térnek el. □

<u>**Példa**</u> Adott az $\mathbb{R}P^2$ projektív síkban az

$$A = [(2,3,-4)] \quad \text{és a} \quad B = [(5,6,0)]$$

pont. Háromféleképpen is meghatározzuk az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egyenletét.

(1) A lemma értelmében a keresett egyenlet

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R} \setminus \{\underline{0}\}$$

alakú. Mivel A és B illeszkedik az egyenesre,

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0,$$
$$5\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0.$$

Ha $\alpha_2 := -5$, akkor $\alpha_1 = 6$,

$$12 - 15 - 4\alpha_3 = 0 \Rightarrow 4\alpha_3 = -3, \quad \alpha_3 = -\frac{3}{4}.$$

Nemzérus skalárszorzó erejéig szabadon rendelkezünk, ezért vonalkoordinátáknak $\alpha_1 := 24$, $\alpha_2 := -20$, $\alpha_3 := -3$ választható. Tehát $\overleftrightarrow{AB}$ egyenlete:

$$\underline{24x_1 - 20x_2 - 3x_3 = 0.}$$

(2) $[x] = [(x_1, x_2, x_3)] \in \overleftrightarrow{AB} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x \in \operatorname{span}(a, b) \setminus \{\underline{0}\}$

$\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}: \quad x = \lambda a + \mu b$

$$\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}: \quad \begin{cases} x_1 = 2\lambda + 5\mu \\ x_2 = 3\lambda + 6\mu \\ x_3 = -4\lambda \end{cases}.$$

A felírt relációkból kiküszöböljük a λ és a μ paramétert:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 &= 12\lambda + 30\mu \\ 5x_2 &= 15\lambda + 30\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x_1 - 5x_2 &= -3\lambda \\ x_3 &= -4\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 24x_1 - 20x_2 &= -12\lambda \\ 3x_3 &= -12\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{24x_1 - 20x_2 - 3x_3 = 0}$$

(3) Levezetünk egy általános formulát a különböző $A = [a] = [(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)]$ és $B = [b] = [(\beta_1, \beta_2, \beta_3)]$ pontra illeszkedő egyenes egyenletére.

$A \neq B$ miatt „a" és b lineárisan független.

$$[x] = [(x_1, x_2, x_3)] \in \overleftrightarrow{AB} \overset{\text{def.}}{\iff} x \in \operatorname{span}(a,b) \setminus \{\underline{0}\}$$

$$\overset{(*)}{\iff} (a, b, x) \text{ lineárisan függő vektorrendszer}$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} a \\ b \\ x \end{pmatrix} = 0 \iff \det\begin{pmatrix} x \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0 \ ;$$

a (*)-gal jelölt lépésben azt a lineáris algebrából jól ismert tényt használva fel, miszerint egy vektortér <u>nemzérus</u> vektorainak egy legalább kéttagú, véges sorozata akkor és csak akkor lineárisan függő, ha valamelyik tagja előállítható a <u>megelőző</u> tagok lineáris kombinációjaként. Azt kaptuk így, hogy

> az $[(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)] \neq [(\beta_1, \beta_2, \beta_3)] \in \mathbb{R}P^2$ pontokra illeszkedő projektív egyenes egyenlete
>
> $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

.

Esetünkben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \underline{24x_1 - 20x_2 - 3x_3 = 0 .}$$

<u>7.10. Állítás.</u> Az $\mathbb{R}A^2 = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E)$ valós affin sík $\overline{\mathbb{R}A^2} = (\overline{\mathbb{R}^2}, \overline{\mathcal{L}}_E)$ projektív lezárása izomorf az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkkal, izomorfizmust ad meg közöttük az a leképezés, amelynél

(i) egy $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ affin pont képe az $(\alpha_1, \alpha_2, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ reprezentáns vektorú projektív pont;

(ii) ha $l = a + \mathrm{span}((v_1, v_2)) \in \mathcal{L}_E$, akkor a P_l ideális pont képe a $(v_1, v_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ reprezentáns vektorú projektív pont.

<u>Bizonyítás.</u> (1) Az (i)-(ii) előírásaival értelmezett leképezés <u>jól definiált</u>: egy $P_l \in \overline{\mathbb{R}^2}$ ideális pont képpontja független az l egyenes irányvektorának megválasztásától.

(2) Közvetlenül látható, hogy a leképezés <u>injektív</u>: különböző pontokat különböző pontokba visz át. Teljesül a <u>szürjektivitás</u> is:

- egy $[(v_1, v_2, v_3)]$ projektív pont a $\left(\frac{v_1}{v_3}, \frac{v_2}{v_3}\right) \in \mathbb{R}^2$ affin pont képe, ha $v_3 \neq 0$;
- egy $[(v_1, v_2, 0)]$ projektív pont annak az ideális pontnak a képe, amelyet a $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ irányvektorú egyenesek alkotnak.

Beláttuk ezzel, hogy az (i)-(ii) előírás <u>bijekciót</u> definiál $\overline{\mathbb{R}^2}$ és $P(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}/\sim$ között.

(3) Ellenőriznünk kell még, hogy a vizsgált leképezés <u>egyenestartó</u>. Az $\overline{\mathbb{R}A^2}$ projektív lezárt l_∞ ideális egyenesének képe

$$\{[(v_1, v_2, 0)] \in P\mathbb{R}^3 \mid (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}\};$$

ez éppen az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív sík $x_3 = 0$ egyenletű egyenese. Tekintsünk ezután egy

$$l = (\alpha_1, \alpha_2) + \mathrm{span}((\vartheta_1, \vartheta_2)) \quad ((\vartheta_1, \vartheta_2) \neq \underline{0})$$

affin egyenest. (α_1, α_2) és $(\alpha_1+\vartheta_1, \alpha_2+\vartheta_2)$ különböző pontjai l-nek, ezek képei

$$[(\alpha_1, \alpha_2, 1)] \;, \text{ ill. } [(\alpha_1+\vartheta_1, \alpha_2+\vartheta_2, 1)] .$$

A képpontokra illeszkedő egyenes egyenlete az előző példa (3) pontja szerint

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1+\vartheta_1 & \alpha_2+\vartheta_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vartheta_2 x_1 + \vartheta_1 x_2 + (\alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1) x_3 \quad ,$$

azaz

$$(*) \qquad \vartheta_2 x_1 - \vartheta_1 x_2 - (\alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1) x_3 = 0 .$$

Erre az egyenesre az l egyenes tetszőleges

$(\alpha_1, \alpha_2) + t(\vartheta_1, \vartheta_2) = (\alpha_1 + t\vartheta_1, \alpha_2 + t\vartheta_2)$ $(t \in \mathbb{R})$ pontjának $[(\alpha_1+t\vartheta_1, \alpha_2+t\vartheta_2, 1)]$ képe illeszkedik, ugyanis

$$\vartheta_2(\alpha_1 + t\vartheta_1) - \vartheta_1(\alpha_2 + t\vartheta_2) - (\alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1) =$$

$$= (\alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1) - (\alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1) + t\vartheta_1\vartheta_2 - t\vartheta_1\vartheta_2 = 0 .$$

l képe tehát egyenes, mégpedig a $(*)$ egyenletű projektív egyenes.

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}A^2 = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E)$ valós affin sík $\overline{\mathbb{R}A^2}$ projektív lezártját szokás a klasszikus projektív síkként is említeni; ez a most igazolt állítás szerint azonosítható az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkkal. Tekintettel arra, hogy a leírt $\overline{\mathbb{R}A^2} \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ izomorfizmusnál $\overline{\mathbb{R}A^2}$ ideális pontjainak a $[(\vartheta_1, \vartheta_2, 0)]$ alakú projektív pontok felelnek meg, ez utóbbiakat az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív sík ideális pontjaiként is említjük, és $\mathbb{R}P^2$ $x_3 = 0$ egyenletű egyenesére szintén használjuk az ideális egyenes elnevezést. Ezzel összhangban, az $[(\alpha_1,\alpha_2,1)]$ alakú $\mathbb{R}P^2$-beli pontokat <u>valódi</u> vagy <u>közönséges pontokként</u> említjük.

<u>Definíció.</u> Tekintsük az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív sík $A=[a]$, $B=[b]$ különböző <u>valódi</u> pontjait, és legyen $P=[\lambda a+\mu b]$ az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes B-től különböző, egyébként tetszőleges (valódi vagy ideális) pontja. A P pont <u>A és B alappontokra vonatkozó osztóviszonyán</u> az $(ABP):=\frac{\mu}{\lambda}$ skalárt értjük.

<u>7.11. Lemma.</u> (1) Ha A és B különböző valódi pontjai a valós projektív síknak, P pedig az az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes ideális pontja, akkor $(ABP)=-1$.

(2) Ha A,B,C,D a valós projektív sík különböző, valódi kollineáris pontjai, akkor

$$cr(A,B,C,D)=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Ha a D pont ideális pont, akkor

$$cr(A,B,C,D)=-(ABC).$$

<u>Bizonyítás.</u> Legyen $A=[a]=[(\alpha_1,\alpha_2,1)]$, $B=[b]=[(\beta_1,\beta_2,1)]$.

(1) Ha $P=[\lambda a+\mu b]=[(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1,\lambda\alpha_2+\mu\beta_2,\lambda+\mu)]$ az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes ideális pontja, akkor $\lambda+\mu=0$, és így $(ABP):=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{-\lambda}{\lambda}=-1$.

(2) Ha $C=[\gamma_1 a+\gamma_2 b]$, $D=[\delta_1 a+\delta_2 b]$, akkor $(ABC)=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, $(ABD)=\frac{\delta_2}{\delta_1}$, következésképpen

$$cr(A,B,C,D):=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}:\frac{\delta_2}{\delta_1}=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Amennyiben D az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes ideális pontja, úgy az imént látottak szerint $(ABD)=-1$, és azt kapjuk, hogy $cr(A,B,C,D)=-(ABC)$. □

<u>Megjegyzés.</u> Megmutatjuk, hogy az osztóviszonyra most adott projektív értelmezés $\mathbb{R}P^2$ valódi pontjaira visszaadja a korábbi, affin értelmezést (ld. <u>3.6.</u>). Tekintsük ebből a célból $\mathbb{R}P^2$ egy

egy $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesét, ahol $A = [a] = [(\alpha_1, \alpha_2, 1)]$ és $B = [b] = [(\beta_1, \beta_2, 1)]$ különböző valódi pontok. Legyen

$$P = [\lambda a + \mu b] = [(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \lambda + \mu)]$$

az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egy B-től különböző valódi pontja. Ekkor $\lambda + \mu \neq 0$, így a P pont egy reprezentáns vektora megadható a

$$p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} a + \frac{\mu}{\lambda+\mu} b$$

alakban. Ekkor p affin kombinációja a-nak és b-nek, így a 3.6.-ban mondottak alapján

$$(a\, b\, p) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} : \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda} =: (A B P).$$

Ezzel igazoltuk észrevételünket. Felhívjuk még a figyelmet arra, hogy – mint láttuk – a projektív esetben a -1 felléphet osztóviszonyként, szemben az affin esettel, amelyben ez sohasem következhet be (ld. 3.6. (2)).

8. Abszolút síkok

A korábbi geometriai tanulmányokban már bevezetést nyertek és bizonyos mélységig tárgyalásra kerültek az ún. abszolút síkok. A tárgyalás alapjául az a didaktikus axiómarendszer szolgált, amelyet D. BIRKHOFF amerikai matematikus javasolt az 1930-as években; ld.

G. D. Birkhoff: A set of postulates for plane geometry (based on scale and protractor), Annals of Math. 33 (1932) 329-345.

Ez a felépítés a kezdetektől támaszkodik a valós számok halmazára; két jellegzetes axiómája a vonalzó-axióma és a szögmérő-axióma.

Ebben a szakaszban az abszolút sík fogalmát sokkal elemibb relációkra és axiómákra alapozzuk, és lényegében azt a klasszikus felépítést vázoljuk, amely David HILBERT német matematikusnak köszönhető (Grundlagen der Geometrie, 1899). A részletek bemutatásától el kell tekintenünk, ez nagyon aprólékos és főleg hosszadalmas munkát igényelne.

A tárgyalás kiindulópontja egy Hilbert-féle illeszkedési struktúra, amelyben adottnak tekintünk két relációt. Ezek egyike egy ternér reláció a ponthármasok halmazában, amelyet geometriai rendezésnek vagy „között van" relációnak hívunk. Ennek birtokában – egyebek mellett – értelmezhetők a szakaszok és a szögek. A másik reláció egy kongruenciának vagy egybevágóságnak nevezett reláció a szakaszok, ill. a szögek halmazában. Mindkét relációra axiómákat írunk elő: négyet a rendezésre és hármat-hármat az egybevágóságra. Ezek után egy további axióma, a Dedekind-féle folytonossági axióma megkövetelésével megérkezünk az abszolút sík ismert fogalmához. (Ez a nem teljesen szerencsés terminológia BOLYAI JÁNOSra vezethető vissza; több érv is szól a W. Prenowitz és M. Jordan által 1965-ben javasolt neutrális sík elnevezés mellett.)

Definíció. Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra, s tegyük fel, hogy adva van egy $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (ternér) reláció. Ha $(A, B, C) \in \mathcal{R}$, azt írjuk, hogy $A - B - C$ és azt mondjuk, hogy a B pont az A és C pont között van. Az $\mathcal{R}$ relációt

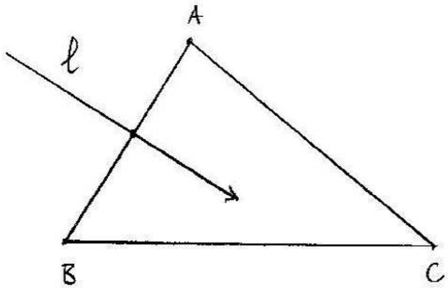
(geometriai) rendezésének nevezzük, ha eleget tesz a következő axiómáknak:

(R1) Ha A–B–C, akkor A, B, C különböző, kollineáris pontok, és C–B–A is teljesül.

(R2) Megadva három kollineáris pontot, ezek közül egy és csak egy van a másik kettő között.

(R3) Ha A és B különböző pontok, akkor van olyan C pont, amelyre A–B–C teljesül.

(R4) (A Pasch-féle axióma) Legyenek A, B, C nem kollineáris pontok, legyen továbbá l olyan egyenes, amely nem illeszkedik a pontok egyikére sem. Ha az l egyenesnek van olyan pontja, amely A és B között van, akkor l-nek van olyan pontja is, amely A és C vagy B és C között van, de nem mindkettő között.



Egy geometriai rendezéssel ellátott Hilbert-féle illeszkedési struktúrát **rendezett illeszkedési síknak** nevezünk.

Megjegyzés. Az (R2) és az (R4) axióma gyengébb formában is megfogalmazható, (R2)-ben „egy és csak egy" helyett a „legfeljebb egy" követelést támasztva, (R4)-ben pedig elhagyva a „de nem mindkettő között" megszorítást. Nem célunk azonban sem most, sem a későbbiekben az axiómákat a legélesebb formájukban megadni.

~o~

Bevezetünk néhány olyan ismerős fogalmat, ill. megfogalmazunk néhány olyan szintén jól ismert tényt, amelyek értelemmel bírnak, ill. igazolhatók rendezett illeszkedési síkok általánosságában.

Definíció. Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R})$ rendezett illeszkedési sík. Ha $A, B \in \mathcal{P}$ különböző pontok, akkor az

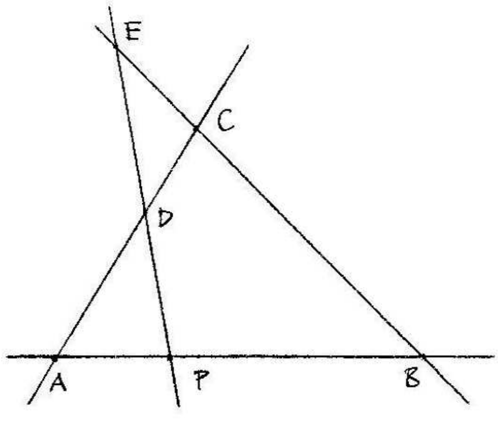
$$\overline{AB} := \{ P \in \mathcal{P} \mid A-P-B \} \cup \{A, B\}$$

ponthalmazt *szakasznak* nevezzük, amelynek A és B a *végpontjai*. $\mathcal{P}$ egy részhalmazát *konvexnek* mondjuk, ha bármely két pontjával együtt a pontokkal mint végpontokkal rendelkező szakaszt is tartalmazza.

Megjegyzés. Az (R1) axiómából következik, hogy az $\overline{AB}$ és a $\overline{BA}$ szakasz ugyanaz a halmaz.

8.1. Állítás. Rendezett illeszkedési síkban minden szakasznak van a végpontjaitól különböző pontja.

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\overline{AB}$ szakaszt. (I3) értelmében van olyan D pont, amely nem illeszkedik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre. (R3) biztosítja olyan C pont létezését, amelyre $A-D-C$ teljesül. Ugyanezen októl létezik olyan E pont is, amelyre $B-C-E$ érvényes. Ekkor az $\overleftrightarrow{ED}$ egyenes nem illeszkedik az A, B, C pontok egyikére sem, de illeszkedik arra a D pontra, amely A és C között van. Az (R4) axióma alapján így van olyan $P \in \overleftrightarrow{ED}$ pont, amelyre $A-P-B$ vagy $B-P-C$ teljesül. Azonban az $\overleftrightarrow{ED}$ egyenesnek $\overleftrightarrow{BC}$-vel egyetlen közös pontja van, az E pont, amely nincs B és C között. Így P A és B között van, és ez



igazolja az állítást. □

8.2. Tétel (a síkfelbontás tétele) és definíció. Tegyük fel, hogy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R})$ rendezett illeszkedési sík. Minden $\ell \in \mathcal{L}$ egyeneshez léteznek $\mathcal{P}$-nek olyan nemüres, diszjunkt H_1 és H_2 részhalmazai, hogy

(i) $\mathcal{P} \setminus \ell = H_1 \cup H_2$;

(ii) H_1 és H_2 konvex ;

(iii) ha $A \in H_1$ és $B \in H_2$, akkor $\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset$.

Ekkor a H_1 és a H_2 halmazt az ℓ egyenes által meghatározott félsíkoknak, magát az ℓ egyenest ezek határegyenesének hívjuk. Azt mondjuk, hogy két pont az ℓ egyenes ugyanazon oldalán van, ha mindkettőjük H_1-be, vagy mindkettőjük H_2-be tartozik. Amennyiben a két pont egyike a H_1, másika a H_2 félsíkban van, úgy az ℓ egyenes különböző oldalaira illeszkedő pontokról beszélünk, és azt is mondjuk, hogy az ℓ egyenes elválasztja a két pontot.

A bizonyítás vázlata:

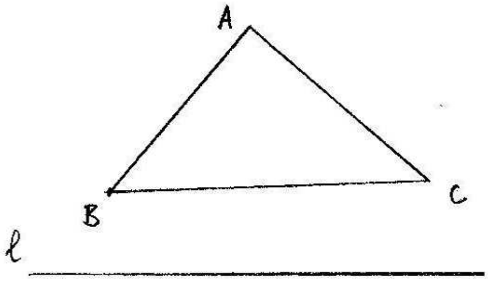
A $\mathcal{P} \setminus \ell$ halmazon bevezetünk egy $\sim$ relációt a következő előírással:

$$A \sim B \ :\Longleftrightarrow\ A = B \ \text{ vagy } \ \overline{AB} \cap \ell = \emptyset .$$

Az első lépés annak megmutatása, hogy a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció. A reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló. Annak igazolása, hogy a reláció tranzitív, vagyis hogy

$$(A \sim B \text{ és } B \sim C) \Longrightarrow A \sim C ,$$

már munkaigényesebb feladat. Ha itt a pontok nem kollineárisak, akkor az okoskodás egyszerű.



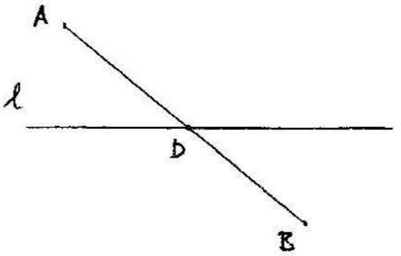
$A \sim B \Rightarrow \overline{AB} \cap l = \emptyset$,

$B \sim C \Rightarrow \overline{BC} \cap l = \emptyset$;

így a Pasch-axióma alapján $\overline{AC} \cap l = \emptyset$ következik, tehát $A \sim C$.

Hosszadalmasabb az érvelés, ha A, B és C kollineáris, ezt az esetet itt nem tárgyaljuk.

A második lépés annak az igazolása, hogy a $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályainak száma kettő. Az, hogy van legalább két ekvivalenciaosztály, könnyen adódik. Az (I3) axióma



értelmében létezik l-re nem illeszkedő A pont. Kiválasztva egy tetszőleges $D \in l$ pontot, (R3) miatt van olyan B pont, amelyre $A-D-B$ teljesül. Ekkor $A \not\sim B$. Azt kell végül igazolni, hogy az ekvivalenciaosztályok száma legfeljebb kettő: ha $A \not\sim C$ és $B \not\sim C$, akkor $A \sim B$. Itt ismét két esetet kell vizsgálni: amikor A, B és C kollineáris, ill. nem kollineáris. Δ

Megjegyzés. A korábbi tanulmányokban a síkfelbontás tételének teljesülése axiómaként lett megkövetelve, ez volt az ún. félsík-axióma, ebből (R4) egyszerűen levezethető („Pasch-tétel"). Megállapíthatjuk tehát, hogy ha $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra, amelyben adva egy, az (R1)-(R3) axiómáknak eleget tevő $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ reláció, akkor a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R})$ struktúrában a Pasch-axióma és a síkfelbontás tétele ekvivalens állítások.

8.3. Állítás (az egyenes-felbontás tétele) és definíció.
Legyen $(\mathcal{P},\mathcal{L};\mathcal{R})$ rendezett illeszkedési sík, $l\in\mathcal{L}$, $A\in l$. Egyértelműen léteznek l-nek olyan nemüres, diszjunkt l_1 és l_2 részhalmazai, hogy

(i) $l\setminus\{A\} = l_1\cup l_2$,

(ii) l_1 és l_2 konvex,

(iii) ha $B\in l_1$ és $C\in l_2$, akkor $B-A-C$.

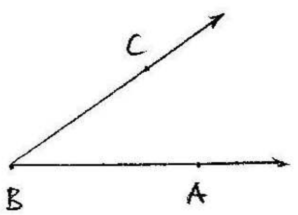
Az l_1 és az l_2 halmazt az l egyenes A kezdőpontú, egymással ellentétes nyílt félegyeneseinek hívjuk.

Bizonyítás. (I3) miatt létezik az l egyenesre nem illeszkedő P pont, (I1) alapján pedig tekinthetjük az $m := \overleftrightarrow{AP}$ egyenest. Legyenek H_1 és H_2 az m határegyenesű félsíkok, melyeknek létezését 8.2. biztosítja. Ha $l_1 := H_1\cap m$, $l_2 := H_2\cap m$, akkor – könnyen ellenőrizhető módon – l_1 és l_2 l kívánt részhalmazai. □

Definíció. (1) Egy A kezdőpontú nyílt félegyenes és $\{A\}$ unióját A kezdőpontú félegyenesnek nevezzük. Ha $B\neq A$ egy pontja egy ilyen félegyenesnek, akkor rá az $\overrightarrow{AB}$ jelölést használjuk.

(2) Ha A, B, C nem kollineáris pontok, akkor az

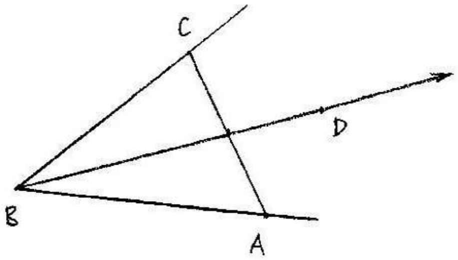
$$ABC\sphericalangle := \overrightarrow{BA}\cup\overrightarrow{BC}$$



ponthalmazt szögnek nevezzük, amelynek B a csúcsa, $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ a szárai. Az $ABC\sphericalangle$ belsején az $\overleftrightarrow{AB}$ határegyenesű, C-t tartalmazó félsík és a $\overleftrightarrow{BC}$ határegyenesű, A-t tartalmazó félsík metszetét értjük, az ehhez tartozó pontok a szög belső pontjai.

Megjegyzés. Definíciónk kizárja az ún. „nullszögeket" és „egyenes szögeket" (amelyek fából vaskarikák...).

8.4. Állítás (a crossbar / keresztszakasz tétel). Legyen



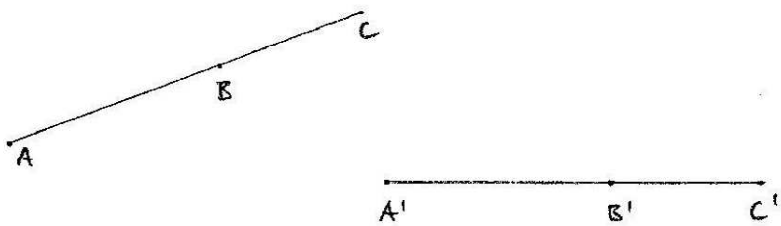
adva egy $ABC\sphericalangle$ és a belsejében egy D pont. Ekkor a $\overrightarrow{BD}$ félegyenes metszi az $\overline{AC}$ szakaszt (úgy értve ezt, hogy $\overrightarrow{BD} \cap (\overline{AC} \setminus \{A, C\}) \neq \emptyset$). Δ

Definíció. Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R})$ rendezett illeszkedési sík. Tegyük fel, hogy a sík szakaszainak és szögeinek halmazában adva van egy egybevágóságnak vagy kongruenciának nevezett és a $\cong$ szimbólummal jelölt reláció, eleget téve a következő axiómáknak:

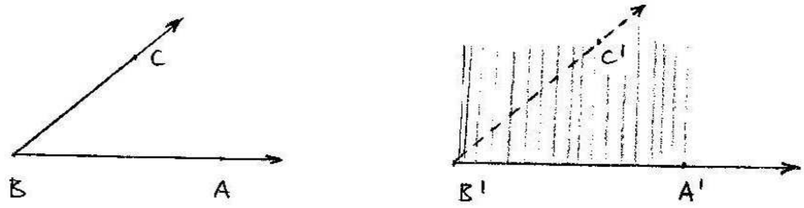
(C1) Megadva egy $\overline{AB}$ szakaszt és egy $\overrightarrow{OQ}$ félegyenest, egyértelműen létezik olyan $P \in \overrightarrow{OQ}$ pont, hogy $\overline{AB} \cong \overline{OP}$.

(C2) Minden szakasz egybevágó önmagával. Ha $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ és $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, akkor $\overline{CD} \cong \overline{EF}$.

(C3) (A szakaszösszeadás axiómája) Ha $A - B - C$, $A' - B' - C'$; teljesül továbbá, hogy $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ és $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, akkor $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

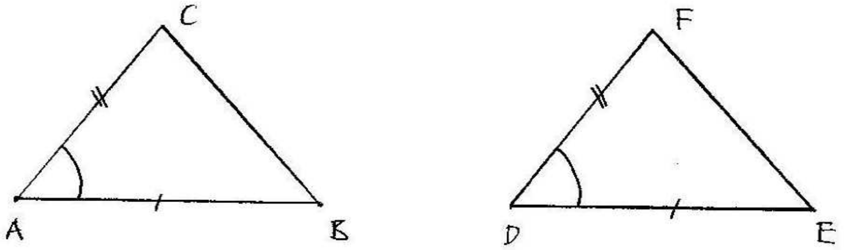


(C4) Megadva egy $ABC\sphericalangle$-et, kijelölve egy félsíkot, és a félsík határegyenesén egy $\overrightarrow{B'A'}$ félegyenest, egyértelműen létezik a kijelölt félsíkban olyan $\overrightarrow{B'C'}$ félegyenes, hogy $ABC\sphericalangle \cong A'B'C'\sphericalangle$.



(C5) Minden szög egybevágó önmagával. Ha α, β, γ tetszőleges szögek, amelyekre $\alpha \cong \beta$ és $\alpha \cong \gamma$ teljesül, akkor $\alpha \cong \gamma$.

(C6) (SAS) Legyen adva egy $\{A, B, C\}$ és egy $\{D, E, F\}$ háromszög. Ha $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $BAC\sphericalangle \cong EDF\sphericalangle$ és $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, akkor $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $ABC\sphericalangle \cong DEF\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle \cong DFE\sphericalangle$.



Ekkor a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R}, \cong)$ négyest Hilbert-síknak nevezzük.

8.5. Következmény. A szakaszok, ill. a szögek egybevágósága minden Hilbert-síkban ekvivalencia-reláció.

Bizonyítás. Csak a szakaszokra vonatkozó állítást igazoljuk, szögek esetén az okoskodás teljesen analóg.

(1) Reflexivitás. Ennek teljesülését (C2)-ben megkívántuk.

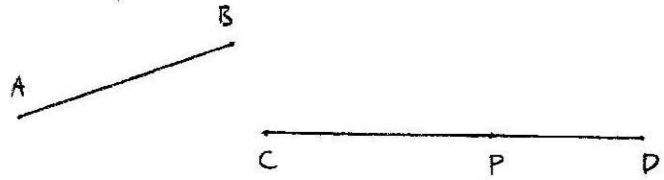
(2) Szimmetria. Tegyük fel, hogy $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Mivel a reflexivitás miatt $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ is fennáll, (C2)-ből következik, hogy $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

(3) Tranzitivitás. Ha $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ és $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, akkor a szimmetria miatt $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ és $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ is teljesül, amiből (C2) alapján $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ adódik. □

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a – Hilberttől származó – (C2) (ill. (C5)) axióma szellemes módon egyetlen állításba foglalja a szimmetria és a tranzitivitás követelményét.

Definíció. Vegyünk alapul egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}; \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert-síkot.

(1) Azt mondjuk, hogy egy $\overline{AB}$ szakasz kisebb, mint egy $\overline{CD}$ szakasz (vagy hogy $\overline{CD}$ nagyobb, mint $\overline{AB}$), ha van olyan P pont, hogy $C-P-D$ és $\overline{AB} \cong \overline{CP}$.



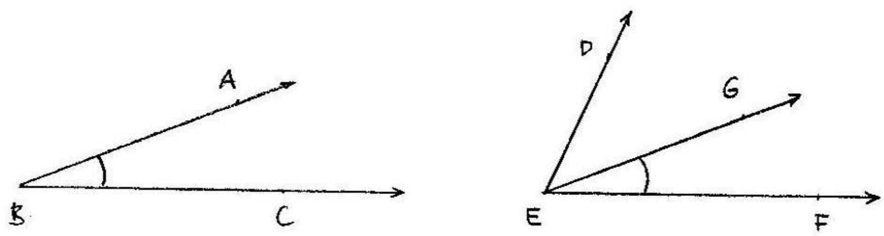
Ilyenkor az $\overline{AB} < \overline{CD}$ vagy $\overline{CD} > \overline{AB}$ jelölést használjuk.

(2) Legyen adva egy O pont és egy ettől különböző A pont. A

$$\{ P \in \mathcal{P} \mid \overline{OA} \cong \overline{OP} \}$$

ponthalmazt O középpontú, $\overline{OA}$ sugarú körnek nevezzük. Egy B pontot a kör belső, ill. külső pontjának mondunk aszerint, amint $\overline{OB} < \overline{OA}$, ill. $\overline{OB} > \overline{OA}$.

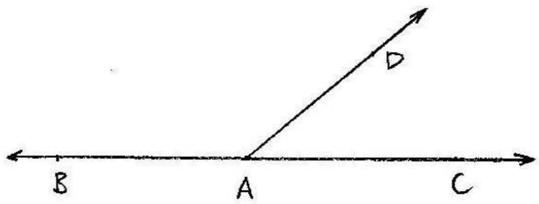
(3) Azt mondjuk, hogy az $ABC\sphericalangle$ kisebb, mint a $DEF\sphericalangle$ (vagy hogy a $DEF\sphericalangle$ nagyobb, mint az $ABC\sphericalangle$), ha van olyan $\overrightarrow{EG}$ félegyenes a $DEF\sphericalangle$ belsejében, hogy $ABC\sphericalangle \cong GEF\sphericalangle$.



Ilyenkor azt írjuk, hogy $ABC\sphericalangle < DEF\sphericalangle$, vagy $DEF\sphericalangle > ABC\sphericalangle$.

(4) A közös kezdőpontú $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ félegyeneseket ellentétes (vagy kiegészítő) félegyeneseknek hívjuk,

ha különbözők, de ugyanarra az egyenesre illeszkednek. A közös $\overrightarrow{AD}$ szárral rendelkező $DAB\sphericalangle$-et és $DAC\sphericalangle$-et <u>kiegészítő szögeknek</u> nevezzük, ha másik két száruk, $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ két ellentétes félegyenes.



(5) Egy szöget <u>derékszögnek</u> mondunk, ha van olyan kiegészítő szöge, amellyel egybevágó. Két egyenest <u>merőlegesnek</u> nevezzük, ha uniójuk tartalmaz derékszöget.

(6) Egy $\{A, B, C\}$ háromszögre használjuk a szokásos $ABC\Delta$ jelölést, és az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ szakaszokat is említjük a háromszög <u>oldalaiként</u>. Az ABC háromszög <u>szögei</u> $A\sphericalangle := CAB\sphericalangle$, $B\sphericalangle := ABC\sphericalangle$, $C\sphericalangle := BCA\sphericalangle$; azt mondjuk, hogy ezek rendre a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ oldallal <u>szemköztiek</u>. A szögek kiegészítő szögeit a háromszög <u>külső szögeinek</u> hívjuk.

<u>8.6. Állítás.</u> Minden Hilbert-síkban érvényesek a következők:

(1) (<u>Az egyenlő szárú háromszögek tétele – vagy „pons asinorum"</u>) Ha egy háromszög két oldala egybevágó, akkor a velük szemközti szögek is egybevágók.

(2) (<u>Az (ASA) egybevágósági tétel</u>) Ha egy $\{A, B, C\}$ és egy $\{A', B', C'\}$ háromszögre teljesül, hogy az $X \in \{A, B, C\} \longmapsto X' \in \{A', B', C'\}$ megfeleltetésnél

$$A\sphericalangle \cong A'\sphericalangle, \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \quad \text{és} \quad B\sphericalangle \cong B'\sphericalangle,$$

akkor $C\sphericalangle \cong C'$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ és $\overline{CA} \cong \overline{C'A'}$.

(3) (<u>Az (SSS) egybevágósági tétel</u>) Ha két, nem feltétlenül különböző háromszög között van olyan megfeleltetés, amelynél a megfelelő oldalak egybevágók, akkor a megfelelő szögek is egybevágók.

(4) <u>Létezik derékszög.</u>

(5) <u>Bármely két derékszög egybevágó.</u>

(6) Megadva a síkban egy egyenest és rá nem illeszkedő pontot, létezik egy és csak egy olyan egyenes, amely áthalad a ponton és merőleges az adott egyenesre.

(7) Ha a sík két egyenesének van közös merőlegese, akkor a két egyenes párhuzamos.

(8) Megadva a síkban egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot, LÉTEZIK olyan egyenes, amely áthalad a ponton és PÁRHUZAMOS az adott egyenessel.

(9) Minden szakasznak egyértelműen létezik felezőpontja: ha A és B különböző pontok, akkor létezik egy és csak egy olyan $F \in \overline{AB}$ pont, hogy $\overline{AF} \cong \overline{FB}$.

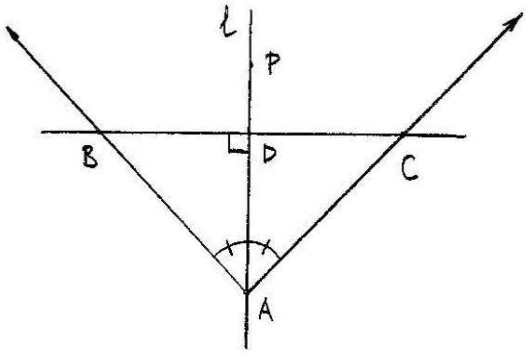
(10) (<u>Külső szög egyenlőtlenség</u>) Egy háromszög bármely külső szöge nagyobb a háromszög bármely nem mellette fekvő szögénél.

A <u>bizonyításaival</u> kapcsolatban csupán néhány megjegyzést teszünk.

<u>(1)</u> A „pons asinorum" a Geometria 1.-ből ismert módon adódik a (C6) /SAS/ egybevágósági axióma alapján.

<u>(4)</u> Válasszunk egy l egyenest, és ezen jelöljünk ki egy A pontot. Tekintsük azt az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ félegyenest, ahol B és C l különböző oldalain

és $BAP\sphericalangle \cong CAP\sphericalangle$, ahol $P \in l \setminus \{A\}$ tetszőleges. E felegyenesek egyértelmű létezését a (C4) egybevágósági axióma biztosítja. (C1) miatt a B és a C pont megadható úgy, hogy $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ teljesüljön. Mivel B és C az l egyenes különböző oldalán van, l metszi a $\overline{BC}$ szakaszt egy D pontban.



Tekintve az $ABD\Delta$-et és az $ACD\Delta$-et, megállapíthatjuk a konstrukció alapján, hogy

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $BAD\sphericalangle \cong CAD\sphericalangle$, $\overline{AD} \cong \overline{AD}$; így a (C6) axióma alapján $BDA\sphericalangle \cong CDA\sphericalangle$ következik. Mivel ezek a szögek egymás kiegészítő szögei, mindkettőjük derékszög.

<u>(6)</u> A merőleges <u>létezését</u> az iménti gondolatmenet igazolja.

<u>(7)</u> Az adott pontból adott egyenesre bocsátható merőleges unicitásából következik, hogy ha két egyenes ugyanarra az egyenesre merőleges, akkor nem lehet közös pontjuk.

<u>(8)</u> A kérdéses párhuzamos egyenes létezése (7) figyelembe vételével a korábbi tanulmányokból ismert kétszeri merőleges szerkesztéssel adódik. Δ

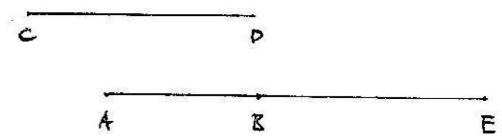
~o~

<u>Történeti kitekintés</u> EUKLEIDÉSZ <u>Elemek</u> c. művében, melynek keletkezése Kr.e. 300 körülre tehető, öt <u>posztulátumot</u> („követelményt") írt elő, ezek játszották az axiómák szerepét az általa felépített geometriai rendszerben. (Explicite megfogalmazott „axiómákkal" is találkozunk

Eukleidésznél, ezek azonban egy kivétellel nem geometriai jellegűek. A kivétel: „Két egyenes vonal nem fog közre területet." Ezen azt érthetjük, hogy két pontra egynél több egyenes nem illeszkedhet.) A mai matematika nyelvén és a mi fogalmi kereteink között Eukleidész posztulátumai a következőképpen fogalmazhatók meg:

I. Bármely két pontra illeszkedik egyetlenegy egyenes.

II. Megadva egy $\overline{AB}$ és egy $\overline{CD}$ szakaszt, létezik egy és csak egy olyan E pont az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesen, amelyre $A - B - E$ és $\overline{CD} \cong \overline{BE}$ teljesül.

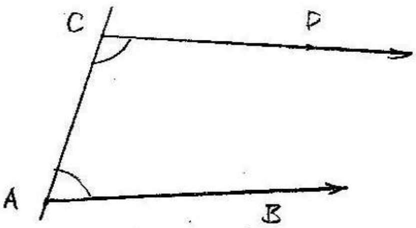


III. Tetszőlegesen adott O és tőle különböző A ponthoz létezik olyan kör, amelynek O a középpontja és $\overline{OA}$ a sugara.

IV. Bármely két derékszög kongruens.

V. Bármely egyeneshez és rá nem illeszkedő ponthoz létezik *egyetlen* olyan egyenes, amely átmegy a ponton és párhuzamos az adott egyenessel.

Vegyük észre, hogy *Hilbert-síkon Eukleidész IV. posztulátuma tétel*, és hogy az V. posztulátumban szereplő *párhuzamos létezése* szintén *bizonyítható*. Így az V. posztulátum valódi követelése az *unicitás*. Jegyezzük meg, hogy az V. posztulátum általunk adott megfogalmazása lényegesen különbözik Eukleidész eredeti verziójától, de természetesen ekvivalens azzal. A közölt megfogalmazást Proklosz görög matematikus találta az 5. században. Angol nyelvterületen ezt rendszerint Playfair axiómájaként említik John Playfair angol matematikus tiszteletére, aki egy 1795-ben megjelent művében szintén ezt a megfogalmazást alkalmazta. A teljesség kedvéért idézzük Eukleidész verzióját is, de szintén a mi matematikai nyelvezetünkön:



Ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ különböző kezdőpontú, nem kollineáris félegyenesek az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes ugyanazon oldalán, s a $BAC\sphericalangle$ és a $DCA\sphericalangle$ összege kisebb, mint két derékszög összege, akkor az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CD}$ félegyenes metsző.

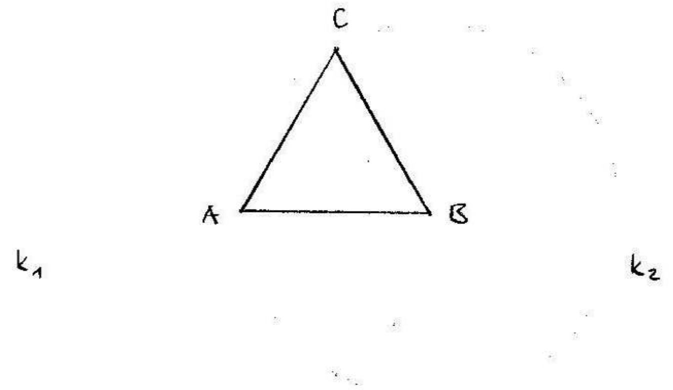
Az 1. állítás az Elemekben a következő: tetszőleges szakaszhoz létezik olyan egyenlő oldalú háromszög, amelynek az illető szakasz az egyik oldala. (Egy $ABC\triangle$ egyenlő oldalú, ha az $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ szakaszok kongruensek.)

Eukleidész bizonyítása

(1) Legyen $\overline{AB}$ az adott szakasz. A III. posztulátum alapján létezik az A középpontú, $\overline{AB}$ sugarú kör, jelölje ezt k_1.

(2) Szintén a III. posztulátum alkalmazásával, tekintsük azt a k_2 kört, amelynek középpontja B, sugara $\overline{BA}$.

(3) Jelölje C a k_1 és a k_2 kör metszéspontját, és tekintsük – hivatkozással az I. posztulátumra – a $\overleftrightarrow{CA}$ és a $\overleftrightarrow{CB}$ egyenest.



(4) Mivel A a k_1 kör középpontja és $C \in k_1$, a körök definíciója értelmében $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

(5) Mivel B a k_2 kör középpontja és $C \in k_2$, $\overline{BA} \cong \overline{BC}$.

(6) Mivel $\overline{AC} = \overline{CA}$ és $\overline{BA} = \overline{AB}$, (4) és (5) alapján a $\cong$ reláció tranzitivitása miatt következik, hogy $\overline{CA} \cong \overline{CB}$.

(7) Az elmondottak alapján megállapíthatjuk, hogy az $ABC\triangle$ háromszög egyenlő oldalú, és egyik oldala az adott $\overline{AB}$ szakasz.

Ez az első pillantásra meggyőző érvelés súlyos hézagot tartalmaz, mégpedig a harmadik lépésében: MI A BIZTOSÍTÉK A „C" PONT LÉTEZÉSÉRE? (Az ábra alapján ez nyilvánvalónak tűnik – nincs azonban megengedve, hogy ábrát használjunk a bizonyításra!)

A hézag kitöltésére a legegyszerűbb megoldás egy olyan axióma előírása, amely <u>közvetlenül</u> biztosítja a szóban forgó körök metszéspontjainak létezését.

~o~

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-síkban érvényes a kör-kör metszési axióma, ha teljesül a következő:

(KK) Ha egy k körnek van két olyan pontja, amelyek egyike belső pontja, másika külső pontja egy k' körnek, akkor k és k' két pontban metszi egymást.

8.7. Állítás. Ha egy Hilbert-síkban érvényes a (KK) axióma, akkor teljesül benne

(1) az egyenes-kör metszési tulajdonság: ha egy egyenes átmegy egy kör belső pontján, akkor két pontban metszi a kört;

(2) a szakasz-kör metszési tulajdonság: ha egy szakasz végpontjainak egyike belső pontja, másika külső pontja egy körnek, akkor a szakasz metszi a kört. Δ

Definíció. Egy Hilbert-síkot abszolút síknak nevezünk, ha érvényes benne a következő, Dedekind-féle folytonossági axióma:

(Cont) Ha egy l egyenes előáll két nemüres, diszjunkt l_1 és l_2 részhalmazának uniójaként úgy, hogy egyetlen l_1-beli pont sincs két l_2-beli pont között, és egyetlen l_2-beli pont sincs két l_1-beli pont között, akkor létezik egy és csak egy olyan $P \in l$ pont, hogy bármely $A \in l_1$ és $B \in l_2$ pont esetén $A = P$ vagy $B = P$ vagy $A - P - B$.

8.8. Állítás. Minden abszolút síkban teljesül a kör-kör metszési axióma. Δ

~o~

Algebrai kitérő

(1) Rendezett testen olyan (K, P) párt értünk, ahol K (a „+" összeadás és „·" szorzás művelettel)

test, P K-nak egy részhalmaza, melynek elemeit pozitívaknak mondjuk, és teljesülnek a következő feltételek:

(i) Tetszőleges $\alpha \in K$ esetén az
$$\alpha \in P, \quad \alpha = 0 \quad \text{és} \quad -\alpha \in P$$
lehetőségek közül egy és csak egy teljesül.

(ii) Ha $\alpha \in P$ és $\beta \in P$, akkor $\alpha+\beta$ és $\alpha\beta$ is P-be tartozik.

Ha a pozitív elemek mibenléte világos, (K, P) rendezett test helyett egyszerűen rendezett testről beszélünk.

(2) Megemlítjük a rendezett testek néhány elemi tulajdonságát. Ha (K, P) rendezett test, akkor

(a) $1 \in P$, azaz az 1 pozitív elem;

(b) K nullkarakterisztikájú;

(c) K-nak az a legszűkebb részteste, amely tartalmazza az 1-et, izomorf a $\mathbb{Q}$ racionális számtesttel;

(d) bármely $\alpha \in K^*$ esetén $\alpha^2 \in P$.

Valamennyi észrevétel egyszerűen adódik a definícióbeli feltételek alkalmazásával.

(a) Mivel $1 \neq 0$ minden testben teljesül, (i) miatt $1 \in P$ vagy $-1 \in P$. Ha $1 \in P$, készen vagyunk. $-1 \in P$ esetén (ii) alapján $(-1)(-1) = 1 \in P$, ami ellentmond (i)-nek. Beláttuk így, hogy $1 \in P$.

(b) Mivel $1 \in P$, (ii) alapján bármely pozitív egész n-re $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 \in P$; speciálisan $n \cdot 1 \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy K nullkarakterisztikájú.

(d) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha \in P$ vagy $-\alpha \in P$. (ii) alapján az első esetben $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \in P$, a második esetben $(-\alpha)(-\alpha) = \alpha^2 \in P$.

(3) Legyen (K, P) rendezett test. Ha

$$\alpha < \beta \overset{\text{def.}}{\iff} \beta - \alpha \in P,$$

akkor az így értelmezett <u>egyenlőtlenség</u> reláció rendelkezik a szokásos tulajdonságokkal:

(i) Ha $\alpha < \beta$ és $\beta < \gamma$, akkor $\alpha < \gamma$.

(ii) Ha $\alpha < \beta$, akkor bármely $\gamma \in K$ esetén $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

(iii) Ha $\alpha < \beta$ és $0 < \lambda$, akkor $\alpha\lambda < \beta\lambda$.

(4) A $\mathbb{Q}$ racionális számtest és az $\mathbb{R}$ valós számtest rendezett test a korábbi tanulmányokból ismert módon. <u>A $\mathbb{C}$ komplex számtest nem tehető rendezett testté</u>, ugyanis $i^2 = -1 < 0$, ami ellentmond (2)/(d)-nek.

(5) Azt mondjuk, hogy egy K rendezett test <u>Dedekind-rendezett</u> (vagy <u>Dedekind-teljes</u>), ha eleget tesz a következő axiómának:

> Ha K előáll két nemüres, diszjunkt A és B részhalmazának uniójaként úgy, hogy bármely $\alpha \in A$ és $\beta \in B$ esetén $\alpha < \beta$, akkor létezik egy és csak egy olyan $\xi \in K$, hogy
> $$\forall \alpha \in A,\ \forall \beta \in B: \ \alpha \leqq \xi \leqq \beta.$$

Alapvető tény, hogy <u>minden Dedekind-rendezett test izomorf az $\mathbb{R}$ valós számtesttel</u>.

(6) Egy (K, P) rendezett testet <u>euklideszi testnek</u> mondunk, ha minden pozitív elemének van pozitív négyzetgyöke, azaz ha $\alpha \in P$, akkor van olyan $\sqrt{\alpha} \in P$, hogy $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Az $\mathbb{R}$ valós számtest összes euklideszi résztestének metszetét <u>szerkeszthetőnek</u> nevezzük. Ez a résztest a 0 és az 1 elemtől generálható az összeadás, kivonás, szorzás, osztás,

valamint a pozitív elemekből történő négyzetgyök-vonás véges sokszori alkalmazásaival.

(7) Egy K rendezett testet pythagorasinak mondunk, ha minden $\alpha \in K$ esetén az $1+\alpha^2$ elemnek létezik négyzetgyöke K-ban, azaz van olyan $\beta \in K$, hogy $\beta^2 = 1+\alpha^2$, $\beta > 0$.

~~

A 2.6. állításban láttuk, hogy ha V egy K test fölötti kétdimenziós vektortér és $\mathcal{L}_V$ a V vektortér egyeneseinek – azaz egydimenziós lineáris sokaságainak – halmaza, akkor $(V, \mathcal{L}_V)$ Hilbert-féle illeszkedési struktúra, amelyben érvényes az (A2) affin párhuzamossági axióma – $(V, \mathcal{L}_V)$ tehát az affin síkok egy modellje. Tekinthetjük speciálisan a $KA^2 := (K^2, \mathcal{L}_{K^2})$ affin síkot, ezt a K test fölötti (standard) affin síknak hívjuk. A K test rendezettsége speciális geometriai tulajdonságokat von maga után a KA^2 affin síkban; a következőkben ilyen jellegű eredményeket említünk.

8.9. Állítás. Ha K rendezett test, akkor a K fölötti affin síkban bevezethető egy, az (R1)–(R4) axiómáknak eleget tevő $R \subset \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ rendezés, azaz egy geometriai rendezés. Megfordítva, ha egy K test fölötti affin sík el van látva egy geometriai rendezéssel, akkor a K test rendezett. Δ

8.10. Állítás. Egy rendezett test fölötti affin sík geometriai rendezésére akkor és csak akkor teljesül a Dedekind-féle folytonossági axióma, ha a test Dedekind-rendezett, és így izomorf a valós számtesttel. Δ

9. Euklideszi és nemeuklideszi síkok

Definíció. Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-sík **klasszikus euklideszi sík**, ha teljesül benne a kör-kör metszési axióma és a következő, **euklideszi párhuzamossági axióma:**

(EP) Megadva egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot, LEGFELJEBB EGY olyan egyenes létezik, amely átmegy a ponton és párhuzamos az adott egyenessel.

Valós euklideszi síkon, röviden **euklideszi síkon** olyan Hilbert-síkot értünk, amely eleget tesz a Dedekind-féle folytonossági axiómának és az euklideszi párhuzamossági axiómának.

Megjegyzés. A „klasszikus euklideszi sík" most bevezetett fogalma általánosabb, mint a Geometria 1,2 kurzusokon tárgyalt „euklideszi sík". Ez utóbbinak a „valós euklideszi sík" fogalma felel meg, ezért is hagyhatjuk itt el a „valós" jelzőt. Ténylegesen a valós euklideszi síkra előírt Dedekind-féle folytonossági axióma túl erős és idegen Eukleidész szellemétől. A kör-kör metszési axióma elegendő az elemi geometria céljaihoz, és a klasszikus euklideszi síkok axiómarendszere lehetővé teszi, hogy az Elemek első négy könyvében szereplő tételek legtöbbjét teljes szigorúsággal bebizonyíthassuk.

Modellek

Induljunk ki egy K euklideszi testből, és tekintsük a K fölötti $KA^2 = (K^2, \mathcal{L}_{K^2})$ affin síkot. Ez eleget tesz az (I1)-(I3) illeszkedési axiómáknak és az (A2) párhuzamossági axiómának, s így a csupán unicitást megkövetelő (EP) axiómának is. <u>8.2.</u> értelmében KA^2 ellátható egy $\mathcal{R} \subset K^2 \times K^2 \times K^2$ geometriai rendezéssel.

Tetszőleges $A = (\alpha_1, \alpha_2)$, $B = (\beta_1, \beta_2)$ pontok esetén legyen

$$d(A,B) := 0, \quad \text{ha } A = B;$$

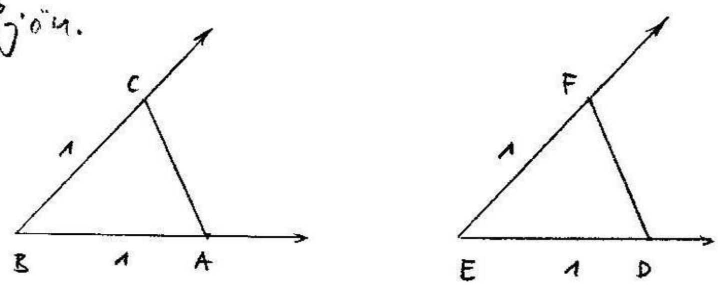
$$d(A,B) := \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + (\alpha_2-\beta_2)^2}, \quad \text{ha } A \neq B.$$

Értelmezzük a szakaszok körében a $\cong$ relációt az

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \overset{\text{def.}}{\iff} d(A,B) = d(C,D)$$

előírással. A szögek halmazában a $\cong$ relációt a következőképpen vezetjük be:

Tekintünk egy $ABC\sphericalangle$-et és egy $DEF\sphericalangle$-et, az $A \in \overrightarrow{BA}$, $C \in \overrightarrow{BC}$, $D \in \overrightarrow{ED}$, $F \in \overrightarrow{EF}$ pontokat úgy választva meg, hogy $d(A,B) = d(B,C) = d(E,D) = d(E,F) = 1$ teljesüljön.



Legyen ezek után

$$ABC\sphericalangle \cong DEF\sphericalangle \overset{\text{def.}}{\iff} \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$

Megmutatható, hogy a $\cong$ reláció eleget tesz a (C1) – (C6) egybevágósági axiómáknak (a bizonyítás nem nehéz, de hosszadalmas). Közvetlen számolással igazolható végül, hogy az így kapott $(K^2, \mathcal{L}_{K^2}, \mathcal{R}, \cong)$ Hilbert sík kör-kör metszési axiómának is eleget tesz, tehát <u>klasszikus euklideszi sík</u>. A K test euklideszi volta a $d : K^2 \times K^2 \longrightarrow K$ függvény értelmezésénél, valamint a kör-kör metszési tulajdonság igazolásánál játszik szerepet. Ha speciálisan K Dedekind-rendezett, akkor $K \cong \mathbb{R}$, és a valós euklideszi sík modelljéhez jutunk.

<u>Definíció.</u> Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \cong)$ és egy $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{R}', \cong')$ Hilbert-síkot <u>izomorfnak</u> nevezünk, ha van olyan $\varphi: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$, $P \longmapsto \varphi(P) =: P'$ bijekció, amely

(1) <u>egyenestartó</u>, azaz $\ell \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \varphi(\ell) \in \mathcal{L}'$;

(2) megtartja a között van relációt:

$$A - B - C \Longleftrightarrow \varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C) \quad ; \quad A, B, C \in \mathcal{P} ;$$

(3) megtartja a szakaszok egybevágóságát:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Longleftrightarrow \overline{\varphi(A)\varphi(B)} \cong \overline{\varphi(C)\varphi(D)} \quad ; \quad A, B, C, D \in \mathcal{P} ;$$

(4) megtartja a szögek egybevágóságát:

$$ABC\sphericalangle \cong DEF\sphericalangle \Longleftrightarrow A'B'C'\sphericalangle \cong D'E'F'\sphericalangle \quad ; \quad A, B, C, D, E, F \in \mathcal{P} .$$

<u>Megjegyzés.</u> Mellőzve a fogalmak pontos kifejtését, egy axiómarendszert <u>kategorikusnak</u> mondunk, ha bármely két modellje izomorf. Érvényes ezzel kapcsolatban a következő

<u>Metatétel.</u> <u>A klasszikus euklideszi sík axiómarendszere nem kategorikus, a VALÓS EUKLIDESZI SÍK AXIÓMARENDSZERE KATEGORIKUS.</u> Δ

<u>Definíció.</u> Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-sík <u>nemeuklideszi</u>, ha az euklideszi párhuzamossági axióma <u>tagadása</u> teljesül benne:

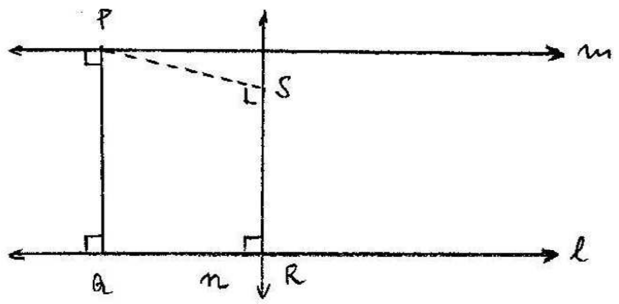
$\neg$(EP) ‖ Létezik olyan egyenes és rá nem illeszkedő pont, hogy a ponton LEGALÁBB KÉT olyan egyenes halad át, amely párhuzamos az adott egyenessel.

<u>Megjegyzés.</u> Egy nemeuklideszi síkban semmi garancia nincs arra, hogy a $\neg$(EP)-ben megfogalmazott tulajdonság <u>minden</u> egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén teljesüljön. Alkalmas további

feltétel előírásával azonban biztosítható a ¬(EP) tulajdonság univerzalitása. Bemutatunk egy ilyen feltételt. Ennek megfogalmazásához szükség van a téglalap fogalmára. Hilbert-síkban téglalapon olyan általános helyzetű pontok alkotta (A, B, C, D) rendezett pontnégyest értünk, amelyre teljesül, hogy az $ABC\sphericalangle$, $BCD\sphericalangle$, $CDA\sphericalangle$ és $DAB\sphericalangle$ mindegyike derékszög. (Természetesen egy Hilbert-síkban téglalapok létezéséről vagy nem létezéséről sem tudunk semmit!)

9.1. Állítás (¬(EP) univerzalitása). Ha egy Hilbert-síkban NEM LÉTEZIK téglalap, akkor bármely pontra illeszkedik legalább két olyan egyenes, amelyek párhuzamosak egy, a ponton át nem menő adott egyenessel.

Bizonyítás. Tekintsünk a Hilbert-síkban egy l egyenest és egy $P \notin l$ pontot. 8.6.(6) értelmében egyértelműen létezik olyan $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes egyenes, hogy $Q \in l$ és $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$, a továbbá olyan P-n átmenő m egyenes, amely



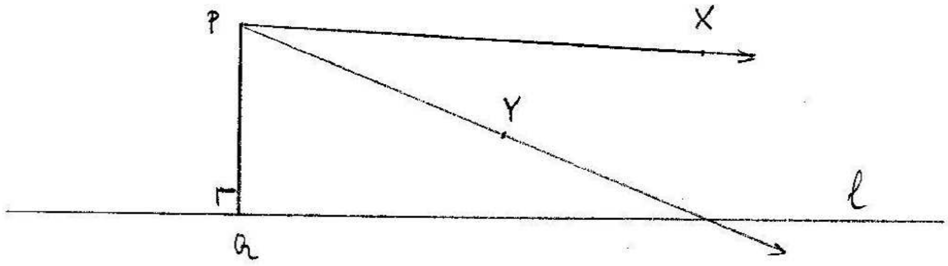
merőleges $\overleftrightarrow{PQ}$-ra. Ekkor 8.6.(7) miatt $m \parallel l$. Válasszunk egy $R \in l \setminus \{Q\}$ pontot, és legyen n az R pontra illeszkedő, l-re merőleges egyenes. Bocsássunk merőlegest P-ből n-re; ennek talppontját jelölje S. Ekkor n közös merőlegese $\overleftrightarrow{PS}$-nek és l-nek, s így $\overleftrightarrow{PS} \parallel l$. $\overleftrightarrow{PS} \neq m$, ellenkező esetben mi. $S \in m$ adódna és (P, Q, R, S) téglalap lenne, amit a feltétel kizár. P-re tehát legalább két l-lel párhuzamos egyenes illeszkedik. $\square$

9.2. Következmény. Ha egy Hilbert-síkban nem létezik téglalap, akkor bármely ponton át végtelen sok olyan olyan egyenes halad, amely párhuzamos egy, a pontra nem illeszkedő adott egyenessel.

Bizonyítás. Ha változtatjuk az előző konstrukcióban szereplő R pontot, akkor további P-n átmenő párhuzamosokhoz jutunk. A téglalapok nem létezése biztosítja, hogy ezek a párhuzamosok mind különbözők. □

Definíció. Vegyünk alapul egy Hilbert-síkot. Legyen adva ebben egy l egyenes és egy l-re nem illeszkedő P pont. A P-ből l-re bocsátott merőleges talppontját jelölje Q.

(1) Azt mondjuk, hogy egy $\overrightarrow{PX}$ félegyenes P-ből induló, l-lel kritikusan párhuzamos vagy határpárhuzamos félegyenes, ha $\overrightarrow{PX}$ nem metszi l-et, de minden olyan $\overrightarrow{PY}$ félegyenes, ahol Y belső pontja az $XPQ\sphericalangle$-nek, metszi l-et.



(2) Egy Hilbert-síkot hiperbolikus síknak nevezünk, ha teljesül benne a következő, Hilbert-féle hiperbolikus párhuzamossági axióma:

(HHP) Bármely l egyeneshez és bármely $P \notin l$ ponthoz létezik $\overrightarrow{PX}$ határpárhuzamos félegyenes, és a $QPX\sphericalangle$ nem derékszög.

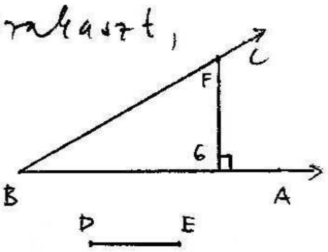
Megjegyzés. Közvetlenül adódik, hogy minden hiperbolikus sík nemeuklideszi sík. Az is egyszerűen átgondolható, hogy – a definíció jelöléseivel – a $QPX\sphericalangle$ **hegyesszög**, azaz derékszögnél kisebb. Létezik egy további, P-ből induló $\overrightarrow{PX'}$ határpárhuzamos félegyenes is, ahol X' a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes X-et nem tartalmazó oldalán van, és teljesül, hogy $QPX'\sphericalangle \cong QPX\sphericalangle$. $\overrightarrow{PX}$ és $\overrightarrow{PX'}$ az egyedüli P kezdőpontú határpárhuzamos félegyenesek. Bármely, az $XPX'\sphericalangle$-gel egybevágó szöget a $\overline{PQ}$ szakaszra vonatkozó **párhuzamossági szögnek** nevezünk; LOBACSEVSZKIJ erre a $\Pi(PQ)$ jelölést használta.

Definíció. Vegyünk alapul egy Hilbert-síkot.

(1) **Lambert-négyszögön** olyan általános helyzetű pontok alkotta (A,B,C,D) rendezett pontnégyest értünk, amelynek szögei ($ABC\sphericalangle$, $BCD\sphericalangle$, $CDA\sphericalangle$, $DAB\sphericalangle$) közül legalább három derékszög. Egy Hilbert-síkot **szemieuklideszinek** nevezünk, ha valamennyi Lambert-négyszöge téglalap. Azt mondjuk, hogy egy Hilbert-síkban a **hegyesszög-hipotézis** teljesül, ha minden Lambert-négyszögének van hegyesszöge.

(2) A következő feltételt **ARISZTOTELÉSZ axiómájaként** említjük:

Megadva egy ABC hegyesszöget és egy $\overline{DE}$ szakaszt,



létezik olyan $F \in \overrightarrow{BC}$ pont, hogy ha G az F-ből $\overrightarrow{BA}$-ra bocsátott merőleges talppontja, akkor $\overline{FG} > \overline{DE}$.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha egy nemeuklideszi síkban teljesül Arisztotelész axiómája, akkor abban érvényes a hegyesszög-hipotézis.

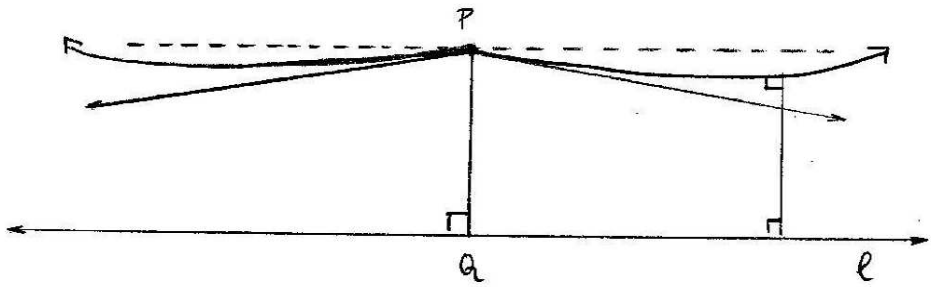
Definíció. Egy nemeuklideszi síkot valós hiperbolikus síknak nevezünk, ha érvényes benne a Dedekind-féle folytonossági axióma.

9.3. Tétel. (1) Ha egy Hilbert-sík eleget tesz a Dedekind-féle folytonossági axiómának, akkor csakis a valós euklideszi sík vagy a valós hiperbolikus sík lehet.

(2) Általánosabban, ha egy Hilbert-síkban teljesül Arisztotelész axiómája és az egyenes-kör metszési tulajdonság, akkor a Hilbert-sík a valós euklideszi sík, vagy a valós hiperbolikus sík. Δ

Metatétel. A hiperbolikus sík axiómarendszerének vannak nemizomorf modelljei, a VALÓS HIPERBOLIKUS SÍK AXIÓMARENDSZERE KATEGORIKUS. Δ

9.4. Tétel (a párhuzamosok osztályozása hiperbolikus síkon) Legyen adva egy hiperbolikus síkon egy l egyenes és egy $P \notin l$ pont; jelölje Q a P-ből l-re bocsátott merőleges talppontját.



(1) Létezik pontosan két P-ből induló, l-lel határpárhuzamos félegyenes, a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes különböző oldalain. Egy egyenest l-lel aszimptotikusan párhuzamosnak mondunk, ha tartalmaz l-lel határ-

párhuzamos félegyenest.

(2) Végtelen sok olyan P-n átmenő egyenes van, amely nem lép be az l egyenes és a határpárhuzamos félegyenesek közötti tartományba. Minden ilyen egyenesnek van egy és csak egy közös merőlegese l-lel. Ezeket az egyeneseket az l egyenessel <u>divergensen</u> / <u>széttartóan párhuzamos</u> egyeneseknek hívjuk. Δ

10. A Beltrami - Cayley - Klein modell

10.1. Eugenio BELTRAMI (1835-1899) olasz matematikus volt az első, akinek sikerült modellt konstruálnia a valós hiperbolikus síkra egy 1868-ban megjelent munkájában. Beltrami két modellt is bemutatott. Megadta a valós hiperbolikus sík egy <u>korlátos tartományának</u> a modelljét egy $\mathbb{R}^3$-beli felületen, az ún. <u>pszeudoszférán</u> (ez a <u>traktrix</u> nevű görbéből származó forgásfelület). Adott azonban modellt a teljes valós hiperbolikus síkra is. Ebben a modellben a „sík" szerepét az euklideszi sík egy körlemezének belseje játssza, az „egyenesek" a kör húrjai (végpontok nélkül). A modellben két pont távolsága természetesen nem lehet a szokásos euklideszi távolság, hiszen akkor az „egyenesek" véges hosszúságúaknak bizonyulnának. Felix KLEIN (1849-1925) német matematikus 1871-ben a Beltrami-féle körmodellt a projektív geometria keretei között és annak eszközeivel írta le, így egy jóval egyszerűbb és általánosabb megfogalmazáshoz jutott. A projektív eszközök alkalmazását

Arthur CAYLEY (1821–1895) angol matematikus egy 1859-ben publikált munkája inspirálta, aki általános távolság- és szögmérték-formulát talált. Mindezek indokolják a modell elnevezéseiben a három név szerepeltetését, az irodalomban azonban rendszerint a Beltrami–Klein modell vagy a Cayley–Klein modell elnevezésekkel találkozunk. Tekintettel a modell jellegére, a projektív modell elnevezés is használatos; a következőkben ezzel a semleges megoldással élünk.

10.2. Induljunk ki az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérből, ellátva ezt az

$$\langle a, b\rangle := \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \quad \text{ha } a = (\alpha_1, \alpha_2),\ b = (\beta_1, \beta_2)$$

előírással értelmezett kanonikus skaláris szorzattal. Ebből a

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{1/2}, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

definíció szerint norma (az ún. euklideszi norma) származik, amelynek segítségével bevezethető a

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \longmapsto d(a, b) := \|a - b\|$$

(euklideszi) távolságfüggvény. Ha $a \in \mathbb{R}^2$ adott pont és ϱ egy pozitív valós szám, akkor a

$$\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, p) = \|a - p\| = \varrho\} \subset \mathbb{R}^2$$

ponthalmazt a középpontú, ϱ sugarú (euklideszi) körnek hívjuk, amelynek

belseje: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, p) < \varrho\}$, külseje: $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, p) > \varrho\}$.

Jelölje a korábbiaknak megfelelően $\mathcal{L}_E$ $\mathbb{R}^2$ egyeneseinek (azaz egydimenziós lineáris sokaságainak) halmazát. Tudjuk, hogy ekkor $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E)$ affin sík. Értelmezzük az $\mathcal{R}_E \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ relációt az

$$(A, B, C) \in \mathcal{R}_E \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A, B, C \text{ különbözők és } d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$$

előírással. Megmutatható, hogy ekkor R_E geometriai rendezés $\mathbb{R}^2$-n. A szakaszok és szögek egybevágóságának értelmezése úgy történhet, mint az előző fejezetben (118–119. old.). A $\cong_E$ szimbólummal jelölve most ezt a relációt, a valós euklideszi sík jól ismert

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E; R_E, \cong_E)$$

Descartes-féle modelljéhez jutunk. Itt – speciálisan – $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E) =: \mathbb{R}A^2$ a valós affin sík.

10.3. Korábban megmutattuk (ld. 7.10.), hogy $\mathbb{R}A^2$ projektív lezárása izomorf az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkkal, és ennek kapcsán $\mathbb{R}P^2$ $(\alpha_1, \alpha_2, 1)$ reprezentáns vektorú pontjait valódi pontokként, $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ $(\neq \underline{0})$ reprezentáns vektorú pontjait ideális pontokként említettük. Az imént leírt $\mathbb{R}^2$ euklideszi sík az

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto [(\alpha_1, \alpha_2, 1)]$$

leképezés révén – $\mathbb{R}^2$ pontjait tehát $\mathbb{R}P^2$ valódi pontjaival azonosítva – beágyazható $\mathbb{R}P^2$-be, erre tekintettel a következőkben az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkot $\mathbb{R}P^2$ egy részhalmazaként tekintjük. Az $\mathbb{R}^2$-beli, origó középpontú, egységsugarú

$$S := \{ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 = 1 \}$$

körnek megfelelő $\mathbb{R}P^2$-beli ponthalmaz

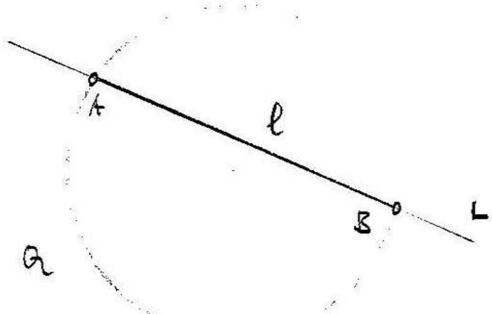
$$Q := \{ [(\alpha_1, \alpha_2, 1)] \in \mathbb{R}P^2 \mid \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \},$$

ennek egyenlete (homogén koordinátákban)

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$$

(Q tehát kúpszelet $\mathbb{R}P^2$-ben). Az S belső pontjainak megfelelő projektív pontok halmazát $\mathbb{B}$-vel jelöljük; $\mathbb{B}$-t a továbbiakban Klein-síkként,

$\mathbb{B}$ pontjait *K-pontokként* is említjük. Ha $L \subset \mathbb{R}P^2$ egy egyenes és $L \cap \mathbb{B} \neq \emptyset$, akkor az $l := L \cap \mathbb{B}$ ponthalmazt *K-egyenesnek* hívjuk. Amennyiben $L \cap Q = \{A, B\}$, úgy l-re az $\overleftrightarrow{AB}$ jelölést is használjuk. „A" és B természetesen nem pontjai a K-egyenesnek; ezeket a $\mathbb{B}$-be nem tartozó pontokat a K-egyenes *végeinek* hívjuk.



10.4. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris automorfizmus. Ismert a Geometria 2. kurzusból, hogy a

$$[\varphi] : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2, \quad [u] \longmapsto [\varphi]([u]) := [\varphi(u)]$$

transzformáció jól definiált bijekciója $\mathbb{R}P^2$-nek ($[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$), amely a φ *által indukált projektivitásnak*, röviden *projektivitásnak* nevezünk. $\mathbb{R}P^2$ összes projektivitási csoportot alkotnak a kompozíció művelettel, a $PGL(\mathbb{R}^3)$-mal jelölt *projektív általános lineáris csoportot*. Az is tudott, hogy a projektivitások egyenestartók, sőt megőrzik a kettősviszonyt: ha A, B, C, D különböző, kollineáris pontok és $\Phi \in PGL(\mathbb{R}^3)$, akkor

$$cr(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)) = cr(A, B, C, D).$$

Tekintsük most az imént bevezetett, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ egyenletű $Q \subset \mathbb{R}P^2$ kúpszeletet, és a $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}P^2$ Klein-síkot. Közvetlenül adódik, hogy azok a $\Phi \in PGL(\mathbb{R}^3)$ projektivitások, amelyek Q-t invariánsan hagyják, vagyis amelyekre $\Phi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ teljesül, részcsoportját képezik a projektivitási-csoportnak; ezt a részcsoportot $Aut(\mathcal{Q})$-val jelöljük, elemeit $\mathcal{Q}$ *automorfizmusainak* hívjuk. Az is egyszerűen látható, hogy ha $\Phi \in Aut(\mathcal{Q})$, akkor $\Phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$; $\mathcal{Q}$ automorfizmusai tehát a Klein-síkot is invariánsan hagyják. $\mathcal{Q}$ automorfizmusainak a Klein-síkra való leszűkítéseit *K-egybevágóságoknak* nevezzük.

10.5. A bevezetett fogalmak segítségével, felhasználva az eddigi jelöléseket, megfogalmazható a következő

TÉTEL. Tekintsük a $\mathbb{B}$ Klein-síkot, és jelölje $\mathcal{L}_K$ az összes K-egyenesek halmazát. Értelmezzük az $\mathcal{R}_K \subset \mathbb{B}\times\mathbb{B}\times\mathbb{B}$ relációt az

$$(A,B,C) \in \mathcal{R}_K \iff (A,B,C) \in \mathcal{R}_E$$

előírással. Ezek után szólhatunk $\mathbb{B}$-ben (K-)szakaszokról és (K-)szögekről, amelyeket a szokásos módon jelölünk. Ha $A,B,C,D \in \mathbb{B}$, $A \neq B$, $C \neq D$, akkor legyen

$$\overline{AB} \cong_K \overline{CD} \overset{def.}{\iff} \exists\, \Phi \in Aut(\mathcal{Q}): \ \Phi(A) = C \text{ és } \Phi(B) = D.$$

Tekintve $\mathbb{B}$-ben egy $ABC\sphericalangle$-et és egy $A'B'C'\sphericalangle$-et, legyen továbbá

$$ABC\sphericalangle \cong_K A'B'C'\sphericalangle \overset{def.}{\iff} \left.\begin{array}{l} \exists\, P \in \overrightarrow{BA},\ Q \in \overrightarrow{BC} \\ \exists\, P' \in \overrightarrow{B'A'},\ Q' \in \overrightarrow{B'C'} \end{array}\right\} : \begin{array}{l} \overline{BP} \cong_K \overline{B'P'}, \\ \overline{BQ} \cong_K \overline{B'Q'},\ \overline{PQ} \cong \overline{P'Q'} \end{array}$$

Ekkor $(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K; \mathcal{R}_K, \cong_K)$ valós hiperbolikus sík.

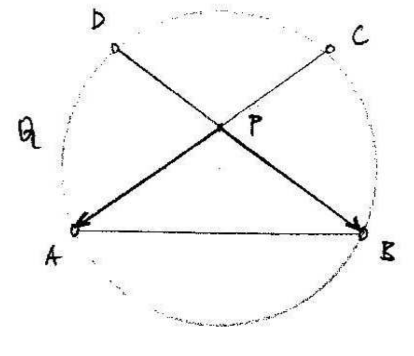
Bizonyítás. A részletek kidolgozása igen hosszadalmas munkát igényel; csak egy-két egyszerűbb részállítást igazolunk.

Legyen $A, B \in \mathbb{B}$; $A \neq B$. Ekkor egyértelműen létezik az $L = \overleftrightarrow{AB} \in \mathcal{L}_P$ projektív egyenes, és $l := L \cap \mathbb{B}$ az egyetlen A-ra és B-re illeszkedő K-egyenes.

l megadható $l = \overleftrightarrow{CD}$; $C, D \in Q$ alakban, ugyanis az L-nek megfelelő affin egyenes átmegy az $S \subset \mathbb{R}^2$ két belső pontján, így az euklideszi síkon érvényes egyenes-kör metszési tulajdonság alapján metszi S-et két pontban; C és D az ezeknek megfelelő projektív pontok. $(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K)$ tehát az (I1) illeszkedési axiómának eleget tesz; a másik két illeszkedési axióma igazolása hasonlóan könnyű.

Az, hogy $\mathcal{R}_K$ geometriai rendezés, egyszerűen adódik annak alapján, hogy az értelmezés szerint a „között van" reláció három K-pont esetén ugyanazt jelenti, mint az $\mathbb{R}^2$-beli „között van" a megfelelő affin pontok esetén.

Megmutatjuk, hogy <u>a Klein-síkon $\neg$(EP) teljesül.</u>



Legyen adva egy $\overleftrightarrow{AB}$ K-egyenes, ahol $A, B \in Q$ és egy $P \notin \overleftrightarrow{AB}$ K-pont. Az A-ra és P-re, valamint B-re és P-re illeszkedő projektív egyenesek az előző érvelés alapján metszik Q-t egy C, ill. D pontban. Ekkor az $\overleftrightarrow{AC}$ és a $\overleftrightarrow{BD}$ K-egyenesek P-n átmenő, különböző, $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos egyenesek (kívülről, aszimptotikusan párhuzamosak $\overleftrightarrow{AB}$-vel).

A munka hosszabb és nehezebb részét az egybevágósági axiómák ellenőrzése adja, ezt mellőzzük. Δ

<u>10.6. Tétel.</u> Tekintsük a $(\mathbb{B}, \mathcal{L}_K; \mathcal{R}_K, \cong_K)$ valós hiperbolikus síkot.

(1) Létezik olyan $d_K : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ távolságfüggvény, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(ii) Tetszőleges A, B K-pont és $\Phi : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ K-egybevágóság esetén

$$d_K(\Phi(A), \Phi(B)) = d_K(A, B),$$

azaz a hiperbolikus egybevágóságok távolságtartók a d_K távolságfüggvényre nézve.

(iii) d_K eleget tesz a vonalzó-axiómának: minden l K-egyeneshez van olyan $f : l \longrightarrow \mathbb{R}$ bijekció, hogy

$$\forall A, B \in l: \quad d_K(A, B) = |f(A) - f(B)|.$$

A mondott tulajdonságokkal rendelkező távolság-függvény ad meg a

$$d_K(A, B) := \begin{cases} \frac{1}{2} \left| \ln(\operatorname{cr}(A, B, X, Y)) \right|, & \text{ha } A \neq B; \\ 0, & \text{ha } A = B \end{cases}$$

ún. Cayley-féle távolságformula, ahol X és Y az $\overrightarrow{AB}$ K-egyenes végei. Minden, az (i), (ii) feltételeknek eleget tevő távolságfüggvény a most megadottnak pozitív skalárszorosa.

(2) A $(\mathbb{B}, d_K)$ metrikus tér izometriacsoportja (távolságtartó szürjekcióinak csoportja) egybeesik a Q készlet automorfizmuscsoportjával, és izomorf a $PGL(\mathbb{R}^2)$ projektív általános lineáris csoporttal (azaz a valós projektív egyenes projektivitásainak csoportjával). △

Megjegyzés. d_K definíciója értelmes: mivel valódi pontokról van szó, $\operatorname{cr}(A, B, X, Y) \overset{7.11(1)}{=} \frac{(ABX)}{(ABY)} > 0$, (ugyanis $(ABX) < 0$ és $(ABY) < 0$, mert X és Y külső pontjai az $\overline{AB}$ szakasznak); 7.7.(3) alapján továbbá $d_K(A, B)$ független az X, Y végek sorrendjétől.