GEOMETRIÁK ÉS MODELLJEIK

- feladatok -

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi illeszkedési struktúrák az (A1) - (A3) axiómák közül melyeknek tesznek eleget, és döntsük el ennek alapján, hogy melyikük affin sík, ill. melyikük nem az.

(1) $\mathcal{P} := \{A, B, C\}$; $\mathcal{L} := \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$.

(2) $\mathcal{P} := \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{L} := \{\{A, D\}, \{B, C\}\}$.

(3) $\mathcal{P} := \{A, B\}$, $\mathcal{L} := \{\{A, B\}\}$.

(4) $\mathcal{P} := \mathbb{Z}^2$,

$l \in \mathcal{L} \overset{\text{def.}}{\iff}$ l az $ax + by = c$ egyenlet megoldáshalmaza, ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$.

(5) $\mathcal{P} := \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \subset \mathbb{Z}^3$,
$\mathcal{L}$ $\mathcal{P}$ azon részhalmazainak halmaza, amelyek a következő egyenleteknek tesznek eleget:

$x = y$; $x = z$; $y = z$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

(6) $\mathcal{P} := \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$,
$\mathcal{L}$ $\mathcal{P}$ azon részhalmazainak halmaza, amelyek a következő egyenleteknek tesznek eleget:

$x = 0$; $x = 1$; $y = 0$; $y = 1$; $x = y$.

2. Tekintsük azt az $(\mathbb{F}_4 ; +, \cdot)$ testet, amelynek művelettáblái a következők:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Ellenőrizzük néhány konkrét esetben a testaxiómák teljesülését!

Legyen V az $\mathbb{F}_4$ elemeiből képzett rendezett párok $\mathbb{F}_4$ fölötti vektortere. Határozzuk meg a V vektortér összes egyenesét és írjuk fel az egyenletüket! Szemléltessük a $(V, \mathcal{L}_V)$ affin síkot!

3. Tekintve egy affin síkban két egyenest, adjunk meg bijektív leképezést az egyikükről a másikra (igazolva, hogy valóban bijekcióról van szó).

4. (a) Mutassuk meg, hogy egy V vektortér $L_1 = a + U_1$ és $L_2 = b + U_2$ lineáris sokaságának akkor és csak akkor van közös pontja, ha $b - a \in U_1 + U_2$.

(b) Döntsük el az állítás alkalmazásával, hogy az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér $l_1 = (1,1,5) + \text{span}(1,-1,2)$ és $l_2 = (0,2,3) + \text{span}(2,3,-1)$ egyenese metsző-e, és ha igen, akkor határozzuk meg a metszéspontjukat.

5. Legyen S lineáris sokasága egy K test fölötti V vektortérnek. Igazoljuk, hogy S bármely véges sok pontjával együtt azok összes affin kombinációját is tartalmazza.

6. Bizonyítsuk be: egy vektortér vektorainak egy véges sorozata akkor és csak akkor affin független, ha a vektortér bármely vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő affin kombinációjaként.

7. Tegyük fel, hogy a K testben $1+1 \neq 0$, és legyen $\frac{1}{2} := (1+1)^{-1}$. Tekintsünk egy ilyen K test fölötti V vektorteret. Ha A és B különböző pontjai V-nek, akkor azt mondjuk, hogy az $\frac{1}{2}(A+B)$ pont középpontja A-nak és B-nek.

(1) Legyen adva V-ben egy $\{A, B, C\}$ háromszög; jelölje A és B középpontját C_1, A és C középpontját B_1. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{B_1C_1} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

(2) Ha $\{A, B, C\}$ háromszöge V-nek, és az A_1, B_1, C_1 pontok rendre B és C, C és A, ill. A és B középpontjai, akkor az $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ egyeneseket a háromszög súlyvonalainak hívjuk. Mutassuk meg, hogy a súlyvonalak konkurrensek, ha K-ban $1+1+1 \neq 0$; párhuzamosak, ha K-ban $1+1+1 = 0$.

8. Legyen V a K test fölötti kétdimenziós vektortér, és tegyük fel, hogy K-ban $1+1 \neq 0$. Egy általános helyzetű pontok alkotta (A, B, C, D) rendezett pontnégyest (affin) paralelogrammának nevezünk, ha $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ és $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. A megadott pontok a paralelogramma csúcsai, az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DA}$ egyenesek az oldalai, az $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{BD}$ egyenesek az átlói.

(1) Bizonyítsuk be, hogy ha (A, B, C, D) paralelogramma, akkor átlói metszik egymást, és metszéspontjuk középpontja A-nak és D-nek, valamint B-nek és C-nek is.

Ezt a tényt az euklideszi geometria ($K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^2$) szóhasználatával előre úgy fejezzük ki, hogy a „paralelogramma átlói felezik egymást".

(2) Egy (A, B, C, D) rendezett pontnégyest (affin) négyszögnek mondunk, ha általános helyzetű pontok alkotják. Ennek oldalait és átlóit ugyanúgy értelmezzük, mint a paralelogramma esetén. Mutassuk meg: egy affin négyszög paralelogramma, ha átlói felezik egymást (az (1)-ben mondott értelemben).

(3) Igazoljuk, hogy ha egy egyenes átmegy egy paralelogramma párhuzamos oldalakra illeszkedő csúcsainak középpontjain, akkor átmegy az átlók metszéspontján is.

(4) Tegyük fel, hogy K-ban $1+1+1 \neq 0$, és legyen $\frac{1}{3} := (1+1+1)^{-1}$. Tekintsünk egy (A, B, C, D) paralelogrammát. Legyen E A és B felezőpontja, F $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{DE}$ metszéspontja. Igazoljuk, hogy

$$F = \frac{2}{3} A + \frac{1}{3} C = \frac{1}{3} C + \frac{2}{3} E .$$

Egyszerű számolási feladatok az $\mathbb{R}P^2$ valós projektív síkon

1. Kiszámítandó a $cr(A,B,C,D)$ kettősviszony, ha

(1) $A = [(4,-1,2)]$, $B = [(1,-2,3)]$, $C = [(4,6,-8)]$, $D = [(3,1,-1)]$;

(2) $A = [(2,-3,1)]$, $B = [(1,2,1)]$, $C = [(7,0,5)]$, $D = [(1,-5,0)]$.

2. Adottak az $A = [(1,4,0)]$, $B = [(-7,7,1)]$, $C = [(9,1,-1)]$ pontok. Meghatározandó az a D pont, amelyre $cr(A,B,C,D) = \frac{1}{4}$ teljesül.

3. Írjuk fel az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egyenletét, ha

(1) $A = [(-5,-5,2)]$, $B = [(1,3,4)]$;

(2) $A = [(2,3,-4)]$, $B = [(5,6,0)]$.

4. Döntsük el, hogy az $A_1 = [(3,-1,0)]$, $A_2 = [(1,0,-2)]$, $A_3 = [(11,-3,4)]$, $A_4 = [(6,-1,-6)]$, $A_5 = [(4,-1,-2)]$, $A_6 = [(0,1,-6)]$ pontok kollineárisak-e.

5. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy az $A = [(2,1,0)]$, $B = [(3,4,2)]$ és $C = [(5,-6,\lambda)]$ pont kollineáris legyen.

6. Határozzuk meg az l és az m egyenes metszéspontját, ha egyenletük:

(1) $l: \ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$; $m: \ x_3 = 0$;

(2) $l: \ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$; $m: \ 3x_2 + 4x_3 = 0$.

7. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy a $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0$ egyenletű egyenesek konkurrensek legyenek.