Együttes eloszlás

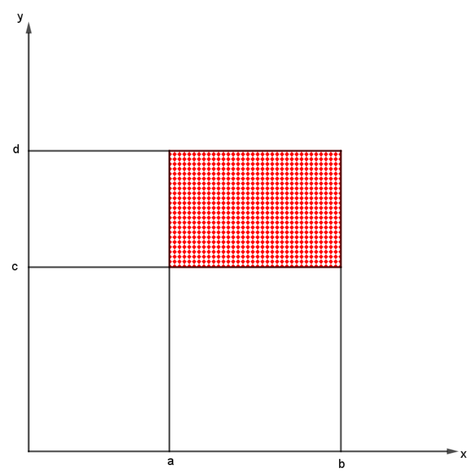
Legyenek ξ és η valószínűségi változók. **Együttes eloszlásfüggvény**ük:

$$F(x,y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Ekkor ξ F_1 eloszlásfüggvényét és η F_2 eloszlásfüggvényét *peremeloszlásfüggvények*nek mondjuk.

Tulajdonságok:

- F mindkét változó szerint monoton növekvő, balról folytonos;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = 0;$
- $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = 1;$
- $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x);$
- $\lim\limits_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y);$
- $P(a \le \xi \le b, c \le \eta \le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$



Diszkrét valószínűségi változó esetén:
$\xi : P(\xi = x_k) = p_k$
$\eta : P(\eta = x_l) = p_l$
valószínűségeloszlásokat *peremeloszlások*nak mondjuk, az együttes eloszlás:
$P(\xi = x_k, \eta = x_l) = p_{kl}$.
Ekkor $\sum p_{kl} = 1$.
Példa:

ξ \ η	0	2	4	ξ peremeloszlása
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
η peremeloszlása	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	

A peremeloszlásfüggvények:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 3 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0 \\ \frac{3}{8} & \text{ha } 0 < y \leq 2 \\ \frac{5}{8} & \text{ha } 2 < y \leq 4 \\ 1 & \text{ha } y > 4 \end{cases}$$

Az együttes eloszlásfüggvény

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 3 \text{ vagy } y \leq 0 \\ \frac{1}{8} & \text{ha } 3 < x \leq 6 \text{ és } 0 < y \leq 2 \\ \frac{3}{8} & \text{ha } x > 6 \text{ és } 0 < y \leq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{ha } 3 < x \leq 6 \text{ és } 2 < y \leq 4 \\ \frac{5}{8} & \text{ha } x > 6 \text{ és } 2 < y \leq 4 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } 3 < x \leq 6 \text{ és } y > 4 \\ 1 & \text{ha } x > 6 \text{ és } y > 4 \end{cases}$$

Folytonos valószínűségi változó esetén:
Ha ξ és η együttes eloszlásfüggvénye F, és létezik olyan nemnegatív kétváltozós f, amelyre

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) dv du,$$

akkor azt mondjuk, hogy (ξ, η) folytonos eloszlású és *együttes sűrűségfüggvény*ük f.

Tulajdonságok:

- $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$
- $P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$
- ξ illetve η sűrűségfüggvényei f_1 illetve f_2, amelyeket *peremsűrűségfüggvényeknek* nevezünk és az alábbi módon számíthatóak ki:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx.$$

- Ha ξ és η együttes sűrűségfüggvénye f, akkor egy további g függvényt tekintve

$$E(g(\xi,\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f(x,y) dx dy.$$

  Speciálisan

$$E(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) \cdot f(x,y) dx dy,$$

$$E(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y) dx dy.$$

Példa:

Vizsgáljuk meg azokat a valószínűségi változókat, amelyek együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 0 < y \le 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ellenőrizzük, hogy vannak ilyen valószínűségi változók.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y)dy\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (2x+2)dx = \frac{1}{3}\left[x^2+2x\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

- Meghatározzuk a peremsűrűségfüggvényeket.
  - f_1 meghatározása:
    - Tegyük fel, hogy $0 < x < 1$. Ekkor

      $$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 (x+y)dy = \frac{1}{3}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{3}(2x+2) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

    - Minden egyéb esetben f értéke 0, így ekkor $f_1(x) = 0$.

    Összefoglalva:

    $$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

  - f_2 meghatározása:
    - Tegyük fel, hogy $0 < y < 2$. Ekkor

      $$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x+y)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + y\right) = \frac{y}{3} + \frac{1}{6}.$$

    - Minden egyéb esetben f értéke 0, így ekkor $f_2(y) = 0$.

    Összefoglalva:

    $$f_2(y) = \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{1}{6} & \text{ha } 0 < y \le 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Meghatározzuk az együttes eloszlásfüggvényt.
  - Ha $x < 0$ vagy $y < 0$, akkor
  $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = 0,$$
  mivel a vizsgált tartomány minden pontjában a sűrűségfüggvény értéke 0.
  - Tegyük fel, hogy $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$. Ekkor
  $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \frac{1}{3}\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{y}(u+v)dv\right)du = \frac{1}{3}\int_{0}^{x}\left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=y} du =$$
  $$= \frac{1}{3}\int_{0}^{x}\left(yu + \frac{y^2}{2}\right)du = \frac{1}{3}\left[\frac{yu^2}{2} + \frac{y^2u}{2}\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^2x}{2}\right) = \frac{x^2y + y^2x}{6}.$$
  - Tegyük fel, hogy $x > 1$ és $0 < y < 2$. Ekkor az $u < x$ tulajdonságú pontokban pontosan $u \in [0,1]$ esetén nem vesz fel f 0-t, így
  $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{y}(u+v)dv\right)du = \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=y} du =$$
  $$= \frac{1}{3}\int_{0}^{1}\left(yu + \frac{y^2}{2}\right)du = \frac{1}{3}\left[\frac{yu^2}{2} + \frac{y^2u}{2}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right) = \frac{y^2 + y}{6}.$$
  - Tegyük fel, hogy $0 < x < 1$ és $y > 2$. Ekkor a $v < y$ tulajdonságú pontokban pontosan $v \in [0,2]$ esetén nem vesz fel f 0-t, így
  $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \frac{1}{3}\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{2}(u+v)dv\right)du = \frac{1}{3}\int_{0}^{x}\left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=2} du =$$
  $$= \frac{1}{3}\int_{0}^{x}(2u+2)\,du = \frac{1}{3}\left[u^2 + 2u\right]_{0}^{x} = \frac{x^2+2x}{3}.$$

Összefoglalva:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \text{ vagy } y \le 0, \\ \frac{x^2y+y^2x}{6} & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } 0 < y \le 2, \\ \frac{y^2+y}{6} & \text{ha } x > 1 \text{ és } 0 < y \le 2, \\ \frac{x^2+2x}{3} & \text{ha } 0 < x \le 1 \text{ és } y > 2, \\ 1 & \text{ha } x > 1 \text{ és } y > 2. \end{cases}$$

A meghatározott eloszlásfüggvény helyességét ellenőrizhetjük azzal, hogy másodrendű vegyes parciális deriváltjaként meg kell kapnunk az együttes sűrűségfüggvényt. Valóban, látható, hogy ez a vegyes parciális derivált csak $0 < x < 1$ és $0 < y < 2$ esetén nem vesz fel 0-t, ekkor

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2(x^2y + y^2x)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{6}\frac{\partial(2xy + y^2)}{\partial y} = \frac{1}{6}(2x+2y) = \frac{1}{3}(x+y).$$

- Meghatározzuk a peremeloszlás-függvényeket.

  –
$$F_1(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0, \\ \lim\limits_{y\to\infty} \frac{x^2+2x}{3} = \frac{x^2+2x}{3} & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$
  Ellenőrizhetjük, hogy ennek x szerinti deriváltjaként visszakapjuk a ξ-hez tartozó peremsűrűségfüggvényt: ez a parciális derivált csak a $0 < x \le 1$ esetben nem 0, ekkor pedig
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$
  –
$$F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \le 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y^2+y}{6} = \frac{y^2+y}{6} & \text{ha } 0 < y \le 2, \\ 1 & \text{ha } y > 2. \end{cases}$$
  Ellenőrizhetjük, hogy ennek y szerinti deriváltjaként visszakapjuk az η-hoz tartozó peremsűrűségfüggvényt: ez a parciális derivált csak az $0 < y \le 2$ esetben nem 0, ekkor pedig
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{y}{3} + \frac{1}{6}.$$

- Meghatározzuk ξ és η kovarianciáját és korrelációját. Emlékeztetünk arra, hogy
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$
  Itt
$$E(\xi) = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(x^2 + x\right) dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9},$$
$$E(\eta) = \frac{1}{6}\int_0^2 \left(2y^2 + y\right) dy = \frac{1}{6}\left[\frac{2y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{3} + 2\right) = \frac{11}{9},$$
$$E(\xi\eta) = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^2 xy(x+y)dy\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2y + xy^2)dy\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2} dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3}x\right) dx = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$
  Így
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{2}{3} - \frac{5}{9}\cdot\frac{11}{9} = -\frac{1}{81}.$$
  A korreláció meghatározásához még szükség van ξ és η szórásnégyzetére is. Ezek - a részletszámításokat mellőzve $D^2(\xi) = \frac{13}{162}$ és $D^2(\eta) = \frac{23}{81}$, így $\operatorname{corr}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)\cdot D(\eta)} = -\sqrt{\frac{2}{299}}$.