Független valószínűségi változók, összegük eloszlása

Emlékeztetünk arra, hogy a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük *független*nek, ha bármely x, y valós számok esetén $\{\xi < x\}$ és $\{\eta < y\}$ független események.

Ez ξ és η együttes eloszlásfüggvénynek segítségével is jellemezhető: ξ és η akkor és csak akkor függetlenek, ha együttes eloszásfüggvényük egyenlő a peremeloszlásfüggvények szorzatával:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Ekkor:

- Bármely a, b, c, d valós számok esetén

$$P(a \le \xi < b, c \le \eta < d) = P(a \le \xi < b) \cdot P(c \le \eta < d).$$

-
  - diszkrét valószínűségi változók esetén

$$P(\xi = x_i, \eta = y_i) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_i).$$

  - folytonos valószínűségi változók esetén

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Fontos megjegyezni, hogy bár a független valószínűségi változók korrelálatlanok, hiszen ekkor $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ miatt

$$\mathrm{corr}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0,$$

ennek a megfordítása nem igaz - tehát a korrelálatlanság és a függetlenség nem ekvivalens tulajdonságok. Ennek illusztrálására példát adunk olyan valószínűségi változókra, amelyek korrelálatlanok, de nem függetlenek.

ξ és η együttes eloszlása legyen az alábbi:

ξ \ η	-1	0	1	
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Ekkor $E(\xi) = E(\eta) = E(\xi\eta) = 0$, így ξ és η korrelálatlanok. Azonban például

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{1}{4},$$

míg

$$P(\xi = 1)P(\eta = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

így ξ és η nem függetlenek.

Tegyük fel, hogy ξ és η *független* valószínűségi változók. Ekkor meghatározzuk $\xi + \eta$ eloszlását.

- Tegyük fel először, hogy ξ és η *diszkrét* valószínűségi változók. Ekkor legyenek valószínűségeloszlásaik:
  $\xi : P(\xi = x_i) = p_i$
  $\eta : P(\eta = y_j) = q_j$.

  Ha $\xi + \eta$ valószínűségeloszlása
  $P(\xi + \eta = n) = r_n$,
  akkor az r_n értékeket kell meghatároznunk. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a változók lehetséges x_i, y_j felvett értékei egész számok. Ekkor

  $$r_n = P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = n - k, \eta = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k}q_k.$$

  Ezt a két valószínűségeloszlás *kompozíció*jának nevezzük.

- Tegyük fel most, hogy ξ és η folytonos valószínűségi változók, melyek sűrűségfüggvényei rendre f és g. Ekkor az előző eset analógiájára, a valószínűségeloszlások szerepét a sűrűségfüggvények veszik át. Így $\xi + \eta$ h sűrűségfüggvénye az alábbi módon fejezhető ki:

  $$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)g(x)dx.$$

  Ezt a két sűrűségfüggvény *konvolúció*jának nevezzük. Megjegyezzük, hogy amennyiben ξ és η nem függetlenek, összegük sűrűségfüggvényét az együttes sűrűségfüggvény segítségével az alábbi módon határozhatjuk meg:

  $$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)dx.$$

*Példa*ként meghatározzuk két, $[0,1]$-ből választott, független véletlen szám összegének sűrűségfüggvényét.

Ekkor ξ és η sűrűségfüggvénye:

$f(x) = g(y) = 1$, ha $x, y \in [0,1]$; egyébként 0-t vesz fel mindkét sűrűségfüggvény.

A keresett h sűrűségfüggvény f és g konvolúciója, azaz

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)g(x)dx.$$

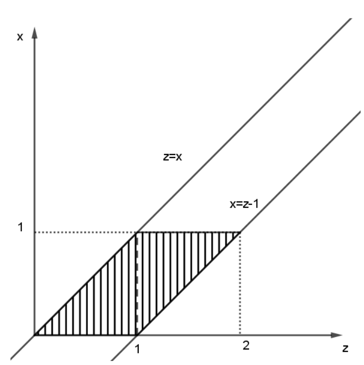
Azt kell meghatároznunk, hogy az integrandus milyen esetekben nem 0. Egyrészt $g(x)$ pontosan akkor nem 0, ha $x \in [0,1]$. Másrészt, $f(z-x)$ pontosan akkor nem 0, ha

$$0 \leq z - x \leq 1.$$

z függvényében meghatározzuk, hogy ez milyen x-ekre teljesül. Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$x \leq z \leq 1 + x.$$

Tehát azon (z,x) párok esetén esik $z - x$ 0 és 1 közé, amelyek a $z = x$ és a $z = x + 1$ egyenes közé esnek. Ezeket a koordinátarendszerben ábrázoljuk. Az



ábráról leolvasható, hogy ha $z \in [0,1]$, akkor $x \in [0,z]$; illetve ha $z \in [1,2]$, akkor $x \in [z-1,1]$. Tehát a keresett együttes sűrűségfüggvény

- $0 < z \leq 1$ esetén

$$h(z) = \int_0^z f(z-x)g(x)dx = \int_0^z 1dx = z;$$

- $1 < z \leq 2$ esetén

$$h(z) = \int_{z-1}^1 f(z-x)g(x)dx = \int_{z-1}^1 1dx = 1-(z-1) = 2-z.$$

Összefoglalva,

$$h(z) = \begin{cases} z & \text{ha } 0 < z \leq 1, \\ 2-z & \text{ha } 1 < z \leq 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$