Geometriák és modelljeik
Feladatok (2016/17)

1. Homogén koordináták

1. Határozzuk meg a $P = [2, -3, -5]$ pont Descartes-féle koordinátáit!
2. Adjuk meg $k \in \mathbb{R}$-et úgy, hogy $[2, 4, 1 - 3k]$ és $[3, 6, -4k]$ ugyanazon pont homogén koordinátái legyenek!
3. Határozzuk meg a $2x - 3y + 1 = 0$ egyenes végtelen távoli pontját!
4. Határozzuk meg a $2x - 4y + 5 = 0$ egyenes végtelen távoli pontját! Hogyan válasszuk meg p_3-at, hogy $[1, 2, p_3]$ illeszkedjen erre az egyenesre?
5. Adjuk meg a $(-2, 1)$ és $(1, 4)$ pontokra illeszkedő egyenes végtelen távoli pontját!
6. Írjuk fel az $A(2, -1)$ és $B(1, 2)$ pontokra illeszkedő egyenes tetszőleges pontjának és végtelen távoli pontjának koordinátáit!
7. Határozzuk meg a valós projektív sík A és B pontjaira illeszkedő egyenes egyenletét, ha
   a. $A = [-5, -5, 2]$, $B = [1, 3, 4]$;
   b. $A = [2, -3, 4]$, $B = [5, 6, 8]$;
   c. $A = [2, 3, -4]$, $B = [5, 6, 0]$;
   d. $A = [3, -1, 2]$, $B = [2, 1, 0]$;
   e. $A = [1, -1, 0]$, $B = [1, 1, 0]$.
8. Határozzuk meg az alábbi egyenesek metszéspontjait!
   a. $5x - 6y + 3 = 0$, $x - 4y + 5 = 0$;
   b. $x + 2y - 3 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$;
   c. $5x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$, $x_3 = 0$.
9. Pontsort alkotnak-e az alábbi pontok?
   a. $A = [2, -1, 3]$, $B = [4, 3, -2]$, $C = [8, 11, -12]$;
   b. $A = [2, 3, 0]$, $B = [4, 3, 0]$, $C = [1, -1, 0]$;
   c. $A_1 = [3, -1, 0]$, $A_2 = [1, 0, -2]$, $A_3 = [11, -3, -4]$, $A_4 = [6, -1, -6]$, $A_5 = [4, -1, -2]$, $A_6 = [0, 1, -6]$;
   d. $A = (2, 1)$, $B = (3, 4)$, $C = (5, 6)$.
10. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy az alábbi pontok kollineárisak legyenek!
    a. $A = [2, 1, 0]$, $B = [3, 4, 2]$, $C = [5, -6, \lambda]$;
    b. $A = [-2, 1, 1]$, $B = [4, 5, 1]$, $C = [22, 17, \lambda]$.
11. Sugársort alkotnak-e az alábbi egyenesek?
    a. $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $7x + 9y + 1 = 0$;
    b. $5x + 4y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x + y = 0$;
    c. $3x - 2y + 13 = 0$, $9x - 6y + 1 = 0$, $6x - 4y - 12 = 0$.

12. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy a $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$, $x_3 = 0$ és $x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0$ egyenesek konkurrensek legyenek!

13. Határozzuk meg az $\overleftrightarrow{AB}$ és l egyenesek metszéspontját, ha $A = [-4, -4, 3]$, $B = [1, 0, 0]$, l egyenlete $7x_1 - 18x_2 - 10x_3 = 0$.

14. Legyen $A = [1, 2, -1]$, $B = [0, 2, 3]$, $C = [4, 1, 1]$ és $D = [-1, 0, 1]$. Határozzuk meg az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ pontot!

15. Írjuk fel a $4x + 2y - 11 = 0$ és $x + y - 1 = 0$ egyenesek által meghatározott sugársor egy tetszőleges további elemét, és az origóra illeszkedő elemét!

16. Írjuk fel az $x + y - 3 = 0$ és a $3x + 4y = 0$ egyenesek által meghatározott sugársor azon elemét, amely párhuzamos a $4x + 2y - 1 = 0$ egyenessel!

17. Határozzuk meg annak a háromszögnek a csúcsait, amelynek oldalai az $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$ egyenesek!

2. Kettősviszony

18. Számítsuk ki az $(ABCD)$ kettősviszonyt, ha

    a. $A = (2, -3)$, $B = (4, -1)$, $C = (-2, -7)$, $D = (5, 0)$;

    b. $A = [4, -1, 2]$, $B = [1, -2, 3]$, $C = [4, 6, -8]$, $D = [3, 1, -1]$;

    c. $A = [2, -3, 1]$, $B = [1, 2, 1]$, $C = [7, 0, 5]$, $D = [1, -5, 0]$;

    d. $A = [4, 2, 0]$, $B = [3, -1, 0]$, $C = [1, 3, 0]$, $D = [-8, 6, 0]$.

19. Az $A = [2, 3, -2]$, $B = [1, -1, 2]$ és $C = [7, 3, 2]$ pontokhoz határozzuk meg a D pontot úgy, hogy $(ABCD) = \frac{9}{8}$ teljesüljön!

20. Az $A = [2, -3, 4]$, $B = [1, -2, 1]$ és $C = [x_1, -7, 6]$ pontokhoz határozzuk meg az x_1 koordinátát és a D pontot úgy, hogy $(ABCD) = \frac{2}{3}$ teljesüljön!

21. Határozzuk meg az $(abcd)$ kettősviszonyt, ha

    a. $a : x + y = 0$, $b : x - y = 0$, $c : x = 0$, $d : 2x - y = 0$;

    b. $a : 2x + 4y - 1 = 0$, $b : x + 2y + 3 = 0$, $c : x + 2y - 1 = 0$, $d : x + 2y = 0$;

    c. $a : x - 2y + 1 = 0$, $b : x - 2y - 1 = 0$, $c : x - 2y = 0$, d a végtelen távoli egyenes.

22. Az $a : 3x + y - 4 = 0$, $b : x - 2y + 1 = 0$, $c : x + 5y - 6 = 0$ egyenesekhez határozzuk meg azt a d egyenest, amelyre $(abcd) = \frac{2}{3}$!

23. Az $a : 2x + 3y + 7 = 0$, $b : x + 2y + 5 = 0$, $c : 3x + \lambda y - 6 = 0$ egyenesekhez határozzuk meg a λ paramétert és a d egyenest úgy, hogy $(abcd) = -\frac{44}{49}$ teljesüljön!

24. Igazoljuk, hogy ha A, B, C, D, E különböző kollineáris pontok, akkor $(ABCD)(ABDE) = (ABCE)$.

25. Tegyük fel, hogy a valós projektív sík különböző, kollineáris A, B, C, D pontjai esetén $(ABCD) = \lambda$. Fejezzük ki λ segítségével a pontok összes lehetséges permutációihoz tartozó kettősviszonyokat!

3. Kollineációk

26. Határozzuk meg a $P = [2, 3, 7]$ pont képét és a $Q = [11, 32, -25]$ pont ősképét az $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix által reprezentált kollineációnál!

27. Határozzuk meg azon kollineáció mátrixát, amely a $P = [1, 0, 0]$, $Q = [0, 1, 0]$, $R = [0, 0, 1]$, $S = [1, 1, 1]$ pontokhoz rendre a P', Q', R', S' pontokat rendeli, ahol

a. $P' = [-3, 3, -4]$, $Q' = [-1, 5, -2]$, $R' = [-3, 6, 7]$, $S' = [-18, 3, 13]$;

b. $P' = [1, 2, 1]$, $Q' = [-1, 1, 1]$, $R' = [2, -1, 0]$, $S' = [1, 1, 0]$.

28. Határozzuk meg azon kollineáció mátrixát, amely a $P = [1, 1, 0]$, $Q = [0, 1, 2]$, $R = [1, 0, 1]$, $S = [1, 1, -1]$ pontokhoz rendre a $P' = [0, 1, -1]$, $Q' = [3, 2, 0]$, $R' = [2, 2, 1]$, $S' = [1, -1, 0]$ pontokat rendeli!

29. Határozzuk meg azon kollineáció mátrixát, amely a $P = [0, 1, 0]$, $Q = [0, 1, -1]$, $R = [1, -1, 0]$, $S = [1, 1, -1]$ pontokhoz rendre a $P' = [-1, 1, 1]$, $Q' = [1, -1, 1]$, $R' = [2, 0, -1]$, $S' = [1, 1, -1]$ pontokat rendeli!

30. Igazoljuk, hogy az A mátrix által reprezentált kollineációnál az $e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$ egyenes képének homogén koordinátái az $(A^{-1})^T[e_1, e_2, e_3]^T$ vektor koordinátái!

31. Határozzuk meg a $4x_1 + 33x_2 - 10x_3 = 0$ egyenes képét az $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix által reprezentált kollineációnál!

32. Határozzuk meg az alábbi mátrixok által reprezentált kollineációk fixpontjait és invariáns egyeneseit!

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

d. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e. $E = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Másodrendű görbékkel kapcsolatos számítási feladatok

33. Döntsük el, milyen másodrendű görbék egyenletei az alábbiak.

a. $5x^2 + 6xy + y^2 - 12x - 12y + 1 = 0$;

b. $6x^2 - 4xy + y^2 + x + 2y + 12 = 0$;

c. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 2y = 0$.

34. Egy másodrendű görbe egyenlete $x^2 - 8xy + 4\lambda y^2 + 2\mu x + 2y + 2 = 0$. Határozzuk meg λ és μ értékét úgy, hogy a görbe elfajuló parabolikus másodrendű görbe legyen!

35. Határozzuk meg az alábbi másodrendű görbék végtelen távoli pontjait!

a. $3x^2 + 4xy - 2x - 5 = 0$;

b. $5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = 0$;

c. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

36. Határozzuk meg a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes és az M másodrendű görbe közös pontjait, ha

a. $P = (1, 1)$, $Q = (2, -1)$, M egyenlete $2x^2 + 6xy + 4y^2 - 12x + 6y - 1 = 0$;

b. $P = [5, 2, 1]$, $Q = [3, 0, 1]$, M egyenlete $2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 7x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$.

37. Konjugáltak-e egymáshoz a $P = (1, -2)$ és a $Q = (3, 1)$ pontok az $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ egyenletű másodrendű görbére vonatkozóan?

38. Egy l egyenes egy másodrendű görbét az $A = [2, -1, 1]$ és $B = [1, 4, 1]$ pontokban metsz. Határozzuk meg az l egyenesen azt a D pontot, amely konjugált a $C = [3, -6, 1]$ ponthoz!

39. Határozzuk meg az M másodrendű görbére vonatkozóan a P pont polárisát illetve az l egyenes pólusát, ha

    a. M egyenlete $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 8 = 0$, $P = (3, 1)$, l egyenlete $2x - 3y - 2 = 0$;
    b. M egyenlete $x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$, $P = [2, 3, 0]$, l egyenlete $9x_1 - 2x_2 - 12x_3 = 0$;
    c. M egyenlete $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $P = [2, 3, 1]$, l egyenlete $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0$;
    d. M egyenlete $x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3 = 0$, $P = [2, -1, 0]$;
    e. M egyenlete $8x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$, $P = [2, -1, -1]$.

40. Határozzuk meg az M másodrendű görbét érintő, P pontra illeszkedő egyeneseket, ahol

    a. M egyenlete $5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = 0$, $P = (0, 0)$;
    b. M egyenlete $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$, $P = (2, 1)$;
    c. M egyenlete $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, $P = (4, -2)$;
    d. M egyenlete $3x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 7x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$, $P = [2, 1, 1]$;
    e. M egyenlete $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$, $P = [4, -2, 1]$;
    f. M egyenlete $3x_1^2 - 8x_2^2 + x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$, $P = [0, -1, 2]$;
    g. M egyenlete $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$, $P = [-2, 1, 0]$;
    h. M egyenlete $5x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6x_2x_3 = 0$, $P = [-1, 0, -1]$;
    i. M egyenlete $x_1^2 + 8x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$, $P = [-6, 2, -1]$.

41. Határozzuk meg az $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ egyenletű másodrendű görbe $2x + 2y - 1 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!

42. Írjuk fel az alábbi hiperbolák aszimptotáinak az egyenletét!

    a. $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;
    b. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;
    c. $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;
    d. $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$.

43. Döntsük el, hogy a P pont külső vagy belső pontja az M másodrendű görbének, ahol

    a. M egyenlete $4x^2 + 6xy - 3y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, $P = (1, 1)$;
    b. M egyenlete $2xy - 2x + 4y + 5 = 0$, $P = (1, 1)$;
    c. M egyenlete $x^2 + 4xy + 8y^2 - 10x - 4y + 1 = 0$, $P = (9, 0)$.

44. Határozzuk meg az alábbi másodrendű görbék centrumát!

    a. $x^2 + 6xy + y^2 + 8x + 24y + 39 = 0$;
    b. $x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$;
    c. $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
    d. $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

45. Határozzuk meg az alábbi másodrendű görbék kanonikus egyenletét!

    a. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
    b. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
    c. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$;
    d. $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;

e. $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 3y + 1 = 0$.

46. Határozzuk meg annak a másodrendű görbének az egyenletét, amelyre illeszkednek az $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 3)$, $D = (2, 7)$, $E = (4, 1)$ pontok!

47. Határozzuk meg annak a másodrendű görbének az egyenletét, amelyre illeszkednek az $A = [0, 0, 1]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [0, 3, 1]$, $D = [2, 7, 1]$, $E = [4, 1, 1]$ pontok!

48. Határozzuk meg annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely illeszkedik az $A = [0, 0, 1]$, $B = [1, -2, 1]$ és $C = [0, -1, 1]$ pontokra, a B pontra illeszkedő érintőjének egyenlete $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$, a C pontra illeszkedő érintőjének egyenlete $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

49. Tegyük fel, hogy egy másodrendű görbét érinti az $x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$, $7x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0$, $5x_1 + 3x_2 - 55x_3 = 0$ és $5x_1 - 3x_2 - 25x_3 = 0$ egyenletű egyenesek mindegyike, továbbá az első egyenesre illeszkedő érintési pontja $[4, 1, 1]$. Határozzuk meg a második egyenesre illeszkedő érintési pontot!

5. Pont körre vonatkozó hatványa

50. Legyen adott egy k kör és egy rá nem illeszkedő P pont. A P pontra illeszkedő valamely szelő és a k kör metszéspontjai legyenek A és B. Igazoljuk, hogy a $\overline{PA}$ és $\overline{PB}$ szakaszok hosszának szorzata nem függ a szelő megválasztásától! (Ezt a szorzatot a P *pont k körre vonatkozó hatványá*nak nevezzük.)

51. Igazoljuk, hogy ha P egy k kör külső pontja, akkor P k-ra vonatkozó hatványa a P-ből k-hoz húzható érintőszakasz hosszának négyzetével egyenlő!

52. Bizonyítsuk be, hogy ha egy szög szárain két-két pontra teljesül, hogy a pontoknak a szög csúcsától való távolságaik szorzata egyenlő, akkor a négy pont egy körre illeszkedik!

53. Igazoljuk, hogy azon pontok mértani helye a síkban, amelyeknek két adott körre vonatkozó hatványa megegyezik, egyenes! (Ezt az egyenest a két kör *hatványvonal*ának mondjuk.)

54. Mutassuk meg, hogy ha három kör középpontja nincs egy egyenesen, akkor pontosan egy olyan pont létezik, amelynek mindhárom körre vonatkozó hatványa megegyezik. (Ez a pont a három kör *hatványpont*ja.)

55. Számítsuk ki a P pont k körre vonatkozó hatványát!

    a. $P(2, -3)$, $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 12 = 0$;
    b. $P(1, -2)$, $k : x^2 + y^2 - 2x - 8y + 2 = 0$;
    c. $P(3, -4)$, $k : 2x^2 + 2y^2 - 4x + 10y + 5 = 0$;
    d. $P(-2, 1)$, $k : 3x^2 + 3y^2 + 5x + 4y - 9 = 0$.

56. Számítsuk ki a $P(7, 8)$ pontból az $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$ körhöz húzható érintőszakasz hosszát!

57. Írjuk fel azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyeknek az $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$ körre vonatkozó hatványa 5!

58. Írjuk fel az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$ és $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ körök hatványvonalának egyenletét!

59. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ és $x^2 + y^2 - 15x - 2y + 2 = 0$ körök hatványvonalának egyenletét! Határozzuk meg a koordinátatengelyek azon pontjait, amelyekből a két körhöz egyenlő hosszú érintőszakasz húzható!

60. Íruk fel azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyekből az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ és $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$ körökhöz egyenlő hosszú érintőszakaszok húzhatók!

61. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 36 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 5y - 5 = 0$ és $x^2 + y^2 + 6x + 11y - 125 = 0$ körök hatványpontját!

62. Hogyan kell az r sugarat megválasztani, hogy az $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ és $x^2 + (y - 1)^2 = r^2$ körök hatványpontja rajta legyen az $x = 2x + 1$ egyenesen?

63. Szerkesszük meg két adott, nem metsző kör hatványvonalát!

64. Adott két pont és egy egyenes. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyekre az adott két pont illeszkedik, és az adott egyenest érintik!

65. Adott két pont és egy kör. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyekre az adott két pont illeszkedik, és az adott kört érintik!

66. Adott egy pont, egy egyenes és egy kör. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyekre az adott pont illeszkedik, valamint érintik az adott egyenest és az adott kört!

67. Fejezzük ki egy tetszőleges háromszög súlypontjának a háromszög köré írható körre vonatkozó hatványát a háromszög oldalai segítségével!

68. Fejezzük ki egy tetszőleges háromszög magasságpontjának a háromszög köré írható körre vonatkozó hatványát a háromszög oldalai segítségével!

69. Tekintsünk egy tetszőleges egyenesre illeszkedő A, B, C, D pontokat, ahol az (A, C) és (B, D) pontpárok elválasztják egymást. Tekintsük az AC és BD szakaszok fölé írt Thalesz-köröket, ezek metszéspontjai legyenek X és Y. Legyen P az XY egyenes tetszőleges pontja; a PB egyenes és a BD fölé írt kör másik metszéspontja M; a PC egyenes és az AC fölé írt kör másik metszéspontja N. Bizonyítsuk be, hogy az AN és DM egyenesek metszéspontja illeszkedik az XY egyenesre!

6. Inverzió

70. Rögzítve a síkon egy O középpontú, r sugarú k kört, O pólusú, k alapkörrel rendelkező *inverzió*nak mondjuk azt a leképezést, amely a sík tetszőleges O-tól különböző P pontjához az $\overrightarrow{OP}$ félegyenes azon P' pontját rendeli, amire $OP \cdot OP' = r^2$ teljesül. Igazoljuk az inverzió alábbi tulajdonságait!

    - Az inverzió pólusára illeszkedő egyenesek invariánsak.
    - Az inverzió pólusára nem illeszkedő egyenes inverze a pólusra illeszkedő kör. E kör pólusra illeszkedő átmérője merőleges az eredeti egyenesre.
    - Az inverzió pólusára illeszekdő kör inverze a pólusra nem illeszkedő egyenes, amely merőleges az eredeti kör pólusra illeszkedő átmérőjére.
    - Az inverzió pólusára nem illeszkedő kör inverze a pólusra nem illeszkedő kör.
    - Az inverzió invariáns körei pontosan az alapkört merőlegesen metsző körök.
    - Az inverzió illeszkedéstartó, azaz érintkező egyenesek/körök képei ugyanilyen tulajdonságúak.
    - Az inverzió szögtartó.
    - Ha az A, B, C, D pontok képei valamely inverziónál A', B', C', D', akkor

    $$\frac{d(A,C)}{d(C,B)} \cdot \frac{d(D,C)}{d(A,D)} = \frac{d(A',C')}{d(C',B')} \cdot \frac{d(D',C')}{d(A',D')},$$

    azaz az inverzió kettősviszonytartó leképezés.

71. Írjuk fel a következő alakzatok inverzét az $x^2 + y^2 = 1$ körre vonatkozóan!

    a. $2x - 3y + 1 = 0$;
    b. $x^2 + y^2 = 5$;
    c. $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$;
    d. $(x + 1)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$;
    e. $y^2 = x$;
    f. $x^2 - y^2 = 1$.

72. Mekkora szöget zárnak be az $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ és $x^2 + y^2 + 3x - 4y = 0$ körök?

73. Számítsuk ki a $P(1, 3)$ és $Q(2, -3)$ pontok inverzeinek koordinátát az $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ körre vonatkozóan!

74. Határozzuk meg a $P(2,-3)$ pont inverzét az $x^2+y^2=5$ körre vonatkozóan!

75. Legyen az inverzió alapköre $x^2+y^2-4x+6y+12=0$. Határozzuk meg az alábbi alakzatok inverzeit!

    a. $2x+3y-1=0$;
    b. $2x-y-1=0$;
    c. $x^2+y^2+6x+2y+7=0$;
    d. $x^2+y^2+2x-8y+7=0$;
    e. $x^2+y^2+8x-2y+17=0$.

76. Legyen az inverzió alapköre $x^2+y^2=4$. Határozzuk meg az alábbi alakzatok inverzeit!

    a. $x-2y+3=0$;
    b. $x^2+y^2=1$;
    c. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

77. Adott az inverzió alapköre. Szerkesszük meg egy adott egyenes és egy adott kör inverzét!

78. Legyen adott egy k kör és egy rá nem illeszkedő P pont. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi szerkesztés a P pont k-ra vonatkozó P' inverzét adja.

    1. Legyen k középpontja O, k $\overleftrightarrow{OP}$-re merőleges átmérőjének végpontjai legyenek A és B.
    2. Legyen $\overleftrightarrow{PA}$ és k A-tól különböző közös pontja X.
    3. Ekkor P' $\overleftrightarrow{BX}$ és $\overleftrightarrow{OP}$ közös pontja.

79. Bizonyítsuk be, hogy minden inverzió előállítható két sztereografikus projekció kompozíciójaként.

80. Adott két pont és egy egyenes. Szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik a megadott pontokra és érinti az adott egyenest!

81. Adott két kör és egy pont. Szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik az adott pontra és érinti az adott köröket!

82. Adott egy kör és két pont. Szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik az adott pontokra és érinti az adott kört!

83. Adott egy pont, egy egyenes és egy kör. Szerkesszünk olyan kört, amely illeszkedik az adott pontra, érinti az adott egyenest és az adott kört!

84. Adott három kör. Szerkesszünk olyan kört, amely mindhárom adott kört érinti!

85. Szerkesszük meg egy pont inverzét csak körzővel!

86. Négy kör közül bármelyik kívülről érint másik kettőt. Igazoljuk, hogy az érintési pontok egy körön vannak!

87. Tegyük fel, hogy a k_1, k_2 és k_3 körök mindegyikére illeszkedik az O pont, és bármely két körnek van egy-egy további metszéspontja: A, B és C. A k_2 kör AB ívének egy pontja legyen D. Legyen k_4 az A és D pontokra illeszkedő; k_5 pedig a B és D pontokra illeszkedő tetszőleges kör. A k_4 és k_5 körök D-től különböző közös pontja legyen E, a k_1 és k_4 körök A-tól különböző közös pontja F, végül a k_3 és k_5 körök B-től különböző közös pontja G. Igazoljuk, hogy a C, G, E, F pontok egy körön vannak!

88. Tegyük fel, hogy a k_1, k_2, k_3 és k_4 körök közül bármely két „szomszédosnak” (azaz a (k_1,k_2), (k_2,k_3), (k_3,k_4), (k_4,k_1) körpároknak) pontosan két közös pontja van, és semelyik három körnek nincs közös pontja. Igazoljuk, hogy a k_1 és k_2 valamint k_3 és k_4 körök közös pontjai pontosan akkor vannak egy körön, ha a k_1 és k_4 valamint k_2 és k_3 körök közös pontjai egy körön vannak! *(körlánc-tétel)*

89. Tegyük fel, hogy a k_1, k_2, k_3 és k_4 körök közül bármely két „szomszédosnak” (azaz a (k_1,k_2), (k_2,k_3), (k_3,k_4), (k_4,k_1) körpároknak) pontosan két közös pontja van, és semelyik három körnek nincs közös pontja. Jelölje a k_i és k_j körök közös pontjait A_{ij} és B_{ij}. Igazoljuk, hogy az A_{12}, A_{23}, A_{34} és A_{41} pontok akkor és csak akkor vannak egy körön, ha a B_{12}, B_{23}, B_{34} és B_{41} pontok egy körön vannak! *(Miquel-tétel)*

90. Legyenek A, B, C, P egy kör pontjai. Legyenek k_1, k_2 illetve k_3 a $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ illetve $\overline{PC}$ átmérőjű körök. Igazoljuk, hogy a k_1, k_2, k_3 körök P-től különböző metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek!

91. Legyen a k_1 és k_2 körök metszéspontja X és Y, egy közös e érintőjük k_1-re eső érintési pontja P és k_2-re eső érintési pontja Q. Tegyük fel, hogy a k_3 kör mindkét kört érinti, rendre az A és B pontokban. Legyen $\overleftrightarrow{XY}$ metszéspontja e-vel T, a k_3 körrel pedig W és Z. Igazoljuk, hogy a P, A és Z pontok egy egyenesre; a P, T, W és A pontok pedig egy körre esnek!

7. Körsorok

Körök egy olyan maximális halmazát, amelyek közül bármely kettőnek hatványvonala egy rögzített h egyenes, *körsor*nak hívjuk. Azt mondjuk, hogy h a körsor elfajuló eleme. Egy körsor *elliptikus*, *parabolikus* vagy *hiperbolikus* aszerint, hogy tetszőlegesen kiválasztott két elemének 0, 1 vagy 2 közös pontja van. Egy hiperbolikus körsor tehát két rögzített pontra (az ún. *alapponto*kra) illeszkedő körök halmaza, egy parabolikus körsor egy adott egyenest adott pontjában érintő körök halmaza.

92. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges körsor elemeinek középpontjai egy, a körsor hatványvonalára merőleges egyenesre illeszkednek (a körsor *centrális*a)!

93. Mutassuk meg, hogy egy elliptikus körsor centrálisára két olyan pont illeszkedik, amelyeket a körsor egyetlen eleme sem tartalmaz (a körsor *nullkör*ei). Ellenőrizzük, hogy a nullkörök által meghatározott szakasz felezőmerőlegese a körsor hatványvonala!

94. Bizonyítsuk be, hogy egy elliptikus körsor tetszőleges elemének a körsor centrálisával alkotott metszéspontjai harmonikusan választják el a nullköröket!

95. Igazoljuk, hogy ha egy kör merőlegesen metszi egy körsor két elemét, akkor merőlegesen metszi a körsor összes elemét!

96. Igazoljuk, hogy egy körsor elemeit merőlegesen metsző körök a körsor centrálisával együtt körsort alkotnak! (Ezt a körsort az eredeti körsor *konjugált*jának hívjuk.)

97. Igazoljuk, hogy konjugált körsorok egyikének alappontjai a másik pontkörei, és az egyik pontkörei a másik alappontjai!

98. Adott egy körsor két eleme és egy P pont. Szerkesszük meg a körsornak azt az elemét, amely tartalmazza az adott pontot!

99. Adott egy elliptikus körsor egy köre és hatványvonala. Szerkesszük meg a pontköröket!

100. Adott egy körsor két eleme és egy e egyenes. Szerkesszük meg a körsor azon elemét, amely érinti a megadott egyenest!

101. Adott egy körsor két eleme és egy pont. Szerkesszük meg a konjugált körsor azon elemét, amely áthalad a megadott ponton!

102. Szerkesszünk olyan kört, amely érint egy adott egyenest és merőlegesen metsz két adott kört!

103. Adott egy körsor két eleme, és egy, a körsorhoz nem tartozó kör. Szerkesszük meg a körsor azon elemét, amely a körsorhoz nem tartozó megadott kört érinti!

104. Bizonyítsuk be, hogy ha egy k kör középpontja illeszkedik a k_1 és k_2 körök hatványvonalára, és a k kör k_1-et merőlegesen metszi, akkor k_2-t is merőlegesen metszi!

105. Adott három kör. Szerkesszünk olyan kört, amely mindhárom adott kört merőlegesen metszi!