Bevezetés a projektív geometriába

Szilasi Zoltán

1. Az euklideszi sík affin transzformációi

1.1. Az euklideszi sík

Az euklideszi sík

- *pont*jai a valós számpárok ((x, y), ahol $x, y \in \mathbb{R}$);
- *egyenes*ei az $ax + by + c = 0$ alakú egyenleteknek eleget tevő pontok halmazai, ahol a, b, c olyan rögzített valós számok, amelyekre $a^2 + b^2 > 0$;
- két pontjának *távolság*án a $d(A, B) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ számot értjük, ahol $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$.

Az A és B pontokra illeszkedő egyenest $\overleftrightarrow{AB}$, a két pont által meghatározott szakaszt $\overline{AB}$, az A pontból B-be mutató vektort $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Pontok egy halmazát *kollineáris*nak mondjuk, ha elemi egy egyenesre illeszkednek. Egyenesek egy halmazát *konkurens*nek nevezzük, ha elemeinak van közös pontja.

1.2. Affinitások

1.1. Definíció. *Az euklideszi sík pontjainak halmazát önmagára képező olyan bijektív leképezéseket, amelyeknél kollineáris pontok képei kollineárisak,* affinitás*oknak nevezzük.*

Mutatunk néhány példát affinitásra a korábbi tanulmányokból.

- *Tengelyes tükrözések.* Az x-tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés:

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

- *Eltolások.* A $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ vektorral történő eltolás:

$$(x, y) \mapsto (x + v_1, y + v_2).$$

- *Középpontos nyújtások.* Az origó középpontú, λ arányú középpontos nyújtás:
$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y).$$

- *Merőleges affinitások.* Az x-tengelyre vonatkozó, λ arányú merőleges affinitás:
$$(x, y) \mapsto (x, \lambda y).$$

Egyszerűen látható, hogy a fent megadott leképezések mind affinitások. A következő tétel leírja, hogy az euklideszi sík egy *tetszőleges* affinitása „hogyan működik". A tételt később bizonyítjuk.

1.2. Tétel. *(Az affin geometria alaptétele) Az euklideszi sík minden affinitása esetén vannak olyan a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 valós számok, hogy az affinitásnál tetszőleges (x, y) pont képe*
$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2).$$

Egy affinitásnál tetszőleges e egyenes pontjainak képei is kollineárisak, ezek közös egyenesét az *e egyenes képé*nek nevezzük. Ha e' az e egyenes képe, az affinitás bijektivitása miatt e' tetszőleges pontja e valamely pontjának a képe.

1.3. Definíció. *Egy pont egy affinitás* fixpont*ja, ha képe önmaga; egy e egyenes az affinitásnál* invariáns egyenes*, ha $e' = e$.*

Egyszerűen látható, hogy invariáns egyenesek metszéspontja fixpont és fixpontokra illeszkedő egyenes invariáns.

1.4. Állítás. *Az affinitások párhuzamosságtartó leképezések, azaz párhuzamos egyenesek képei is párhuzamosak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az e és f párhuzamos egyenesek képei rendre e' és f'. Indirekt módon feltéve, hogy e' és f' metsző egyenesek, legyen ezek közös pontja M'. Ekkor M' ősképe az e és f egyenesekre egyaránt illeszkedik, amely ellentmond e és f párhuzamosságának. ∎

1.3. Az osztóviszony

Tegyük fel, hogy az A pont helyvektora $\mathbf{a}$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}$. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes tetszőleges további C pontjának pontjának helyvektora $\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ alakú, ahol $t \in \mathbb{R}$.

Valóban, van olyan t szám, amelyre $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{AB}$. Ekkor
$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$
ahonnan átrendezés után a fenti összefüggést kapjuk. Ekkor a
$$\lambda := \frac{t}{1-t}$$

számot a C pont A és B alappontokra vonatkozó *osztóviszony*ának nevezzük, és (ABC) módon jelöljük.

Az alábbi állítás rámutat az osztóviszony geometriai jelentésére.

1.5. Állítás. *Különböző kollineáris A, B, C pontok esetén (ABC) az a λ szám, amelyre $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$.*

Bizonyítás: A $\mathbf{c} - \mathbf{a} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ egyenlőségből következően

$$\overrightarrow{AC} = t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

és

$$\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Így valóban,

$$\overrightarrow{AC} = \frac{t}{1-t}\overrightarrow{CB}.$$

■

Az előző tényt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy (ABC) az $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ szakaszok hosszainak *előjeles hányados*a; vagyis az a szám, amelynek abszolút értéke $\frac{d(A,C)}{d(C,B)}$, és előjele pozitív vagy negatív attól függően, hogy az $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ szakaszok megegyező vagy ellentétes irányúak. Ezt az előjeles hányadost a továbbiakban egyszerűen $\frac{AC}{CB}$ módon jelöljük.

1.6. Állítás. *Ha $(ABC) = \lambda$, akkor*

$$(BAC) = \frac{1}{\lambda},$$
$$(ACB) = -(\lambda + 1),$$
$$(CAB) = -\frac{1}{\lambda + 1},$$
$$(BCA) = -\frac{\lambda + 1}{\lambda},$$
$$(CBA) = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

Bizonyítás: A definíció alapján

$$(BAC) = \frac{BC}{CA} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = \frac{1}{\lambda}$$

és

$$(ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{CB - CA}{BC} = -1 - \frac{AC}{CB} = -(\lambda + 1).$$

Innen

$$(CAB) = \frac{1}{(ACB)} = -\frac{1}{\lambda+1},$$

$$(BCA) = -(BAC) + 1 = -\frac{1}{\lambda} - 1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

és

$$(CBA) = \frac{1}{(BCA)} = -\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

■

1.7. Állítás. *Adott A, B pontokhoz és $\lambda \neq -1$ számhoz egy és csak egy olyan C pont van, amelyre $(ABC) = \lambda$.*

Bizonyítás: Ha A helyvektora $\mathbf{a}$, B helyvektora $\mathbf{b}$, akkor C helyvektora $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ alakú. $(ABC) = \lambda$ miatt $\lambda = \frac{t}{1-t}$. Innen átalakítás után

$$\lambda - t\lambda = t,$$

azaz

$$t = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

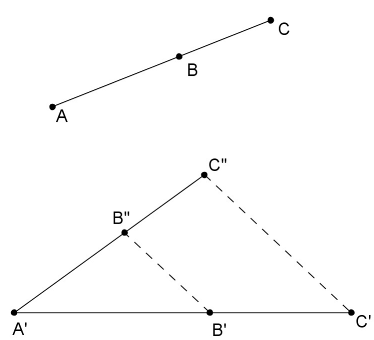
adódik. Tehát az egyetlen lehetséges C pont a

$$\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{b}$$

helyvektorú pont. ■

1.8. Állítás. *Ha A, B, C valamint A', B', C' kollineáris ponthármasok, és $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, akkor $(ABC) = (A'B'C')$, azaz* az osztóviszony párhuzamos vetítéssel szemben invariáns.

A fenti állítás a párhuzamos szelők tételének közvetlen átfogalmazása.



Osztóviszony átmásolása.

A tétel alapján adott kollineáris A, B, C pontok és adott A', B' pontok esetén szerkeszthető olyan C', amelyre $(ABC) = (A'B'C')$.

- Legyen $A'' := A'$, és legyen s az A' pontra illeszkedő tetszőleges egyenes.
- Mérjük fel az s egyenesre az A' pontból az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ szakaszokat: legyenek tehát B'' és C'' az s egyenes azon pontjai, amelyekre $d(A'', B'') = d(A, B)$, $d(A'', C'') = d(A, C)$, és a megfelelő szakaszok irányításai is megegyeznek.
- Legyen c a C'' pontra illeszkedő, $\overleftrightarrow{B'B''}$-vel párhuzamos egyenes.
- Ekkor c és $\overleftrightarrow{A'B'}$ közös pontja a keresett pont.

Valóban, az előző állítás miatt $(A'B'C') = (A''B''C'')$, a megfelelő szakaszok egybevágóságai miatt pedig $(A''B''C'') = (ABC)$.

1.9. Tétel. *Az affinitások osztóviszonytartó leképezések, azaz ha valamely A, B, C kollineáris pontok képei egy affinitásnál rendre A', B', C', akkor $(ABC) = (A'B'C')$.*

Bizonyítás: Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy az A, B, C pontok egyenese az x-tengely legyen, és koordinátáik legyenek rendre $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 0)$. Az affin geometria alaptétele miatt vannak olyan a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 valós számok, hogy az affinitásnál tetszőleges (x, y) pont képe $(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$. Ekkor az adott pontok képei rendre

$$A'(a_1x_1 + c_1, a_2x_1 + c_2),$$

$$B'(a_1x_2 + c_1, a_2x_2 + c_2),$$

és

$$C'(a_1x_3 + c_1, a_2x_3 + c_2).$$

Legyenek az A', B', és C' pontok x-tengelyre eső merőleges vetületei A'', B'' és C''. E pontok koordinátái tehát

$$A''(a_1x_1 + c_1, 0),$$

$$B''(a_1x_2 + c_1, 0),$$

és

$$C''(a_1x_3 + c_1, 0).$$

A párhuzamos vetítés osztóviszonytartása miatt $(A''B''C'') = (A'B'C')$, így elegendő azt megmutatnunk, hogy $(ABC) = (A''B''C'')$. Mivel az osztóviszony a megfelelő távolságok előjeles hányadosa, most

$$(ABC) = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

Hasonlóan,

$$(A''B''C'') = \frac{(a_1x_3 + c_1) - (a_1x_1 + c_1)}{(a_1x_2 + c_1) - (a_1x_3 + c_1)} = \frac{a_1(x_3 - x_1)}{a_1(x_2 - x_3)} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}.$$

Így valóban, $(A''B''C'') = (ABC)$. ∎

1.10. Tétel. *(Az affinitások alaptétele) Megadva az A, B, C és A', B', C' nem kollineáris ponthármasokat, létezik egy és csak egy olyan affinitás, amelynél A képe A', B képe B' és C képe C'.*

Bizonyítás: Legyenek a megadott pontok koordinátái $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $A'(x'_1, y'_1)$, $B'(x'_2, y'_2)$ és $C'(x'_3, y'_3)$. Az affin geometria alaptétele miatt azt kell megmutatnunk, hogy egy és csak egy olyan $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$ valós számokból álló rendezett elemhatos van, amelyre

$$x'_1 = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1,$$

$$x'_2 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1,$$

$$x'_3 = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1,$$

$$y'_1 = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2,$$

$$y'_2 = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2,$$

$$y'_3 = a_2x_3 + b_2y_3 + c_2.$$

Megmutatjuk, hogy mind az első három, mind a második három egyenletből álló egyenletrendszer egyértelműen oldható meg (ahol az x_i, x_i, x'_i, y'_i $(i = 1, 2, 3)$ számok adottak, az ismeretlenek az a_i, b_i, c_i számok $(i = 1, 2)$). Elegendő a bizonyítást az első három egyenletből álló egyenletrendszerre elvégezni, az állítás másik része teljesen hasonlóan mutatható meg.

Az első egyenletből a másodikat illetve a harmadikat kivonva kapjuk az

$$x'_1 - x'_2 = a_1(x_1 - x_2) + b_1(y_1 - y_2),$$

$$x'_1 - x'_3 = a_1(x_1 - x_3) + b_1(y_1 - y_3)$$

egyenleteket. Az első egyenletet $(x_1 - x_3)$-al a második egyenletet $(x_1 - x_2)$-vel szorozva, majd a két egyenlet különbségét képezve adódik, hogy

$$(x'_1 - x'_2)(x_1 - x_3) - (x'_1 - x'_3)(x_1 - x_2) = b_1[(y_1 - y_2)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_1 - x_2)].$$

Ez az egyenlet b_1-re akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha b_1 együtthatója nem 0. Mivel feltételünk szerint A, B, C nem kollineáris, C nem illeszkedik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre. Az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egyenlete

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1),$$

ezt a C pont koordinátái nem elégítik ki, tehát valóban,

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) \neq (y_2 - y_1)(x_3 - x_1).$$

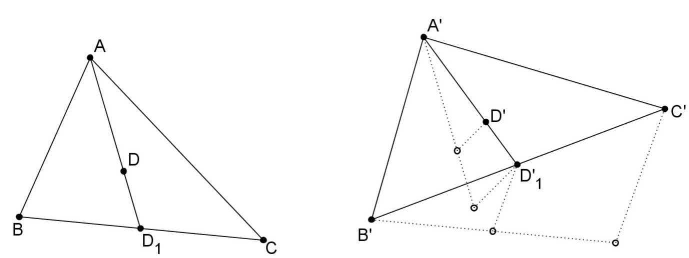
Így az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, tehát létezik egy és csak egy, a feltételeknek megfelelő affinitás. ∎

1.11. Következmény. *Ha egy affinitásnak van három nem kollineáris fixpontja, akkor identitás.*

Bizonyítás: Ha a három, nem kollineáris fixpont A, B és C, akkor az előző tételt $A = A'$, $B = B'$ és $C = C'$ választással alkalmazva adódik az állítás. ■

A három nem kollineáris pont és képe által meghatározott affinitás egyértelműsége szerkesztéssel is igazolható: megadva az A, B, C és A', B', C' pontokat, megszerkesztjük egy további adott D pont képét.

- Amennyiben D_1 rajta van az ABC háromszög valamelyik - mondjuk az $\overleftrightarrow{AB}$ - oldalegyenesén, D_1 képe az osztóviszonytartás miatt megszerkeszthető, mint az a D_1' pont, amelyre $(A'B'D_1') = (ABD_1)$.
- Ha D nem illeszkedik a háromszög egyik oldalegyenesére sem, legyen D_1 az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek metszéspontja. Ekkor az előző pont alapján szerkeszthető a D_1 pont D_1' képe. Így D' az a pont, amelyre $(C'D_1'D') = (CD_1D)$.



1.4. Tengelyes affinitások

1.12. Definíció. *Egy affinitást* tengelyes affinitás*nak mondunk, ha van pontonként fix egyenese. Ezt az egyenest az affinitás* tengely*ének nevezzük.*

1.13. Lemma. *Tengelyes affinitásnál minden, nem invariáns egyenes a képét a tengelyen metszi, vagy párhuzamos a képével.*

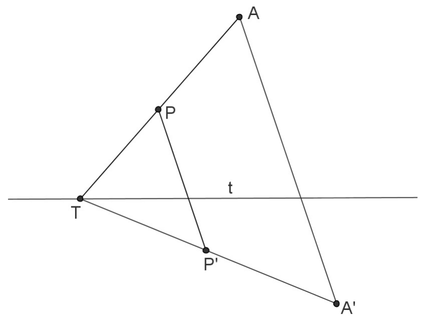
Bizonyítás: Tekintsünk egy e egyenest. Tegyük fel először, hogy e nem párhuzamos a tengellyel, és legyen az e egyenes metszéspontja a tengellyel P. Mivel P fixpont, illeszkedik az e' egyenesre is. Mivel e nem invariáns, az egyetlen közös pontja e'-vel P.

Ha e nem metszi a tengelyt, akkor az előző meggondolással a képe sem metszheti, így mind e, mind e' párhuzamos a tengellyel. ■

1.14. Állítás. *Tengelyes affinitásnál valamely pontot a képével összekötő egyenes iránya nem függ a pont választásától. Ezt az irányt az* affinitás irány*ának hívjuk.*

Bizonyítás: Legyenek az A és B pontok képei rendre A' és B'. Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AB}$ nem invariáns egyenes. Ekkor $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ a tengelyen metszik egymást, legyen közös pontjuk T. Az affinitások osztóviszonytartása miatt $(TAB) = (TA'B')$, amiből a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt valóban $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ következik. ■

1.15. Következmény. *Egy tengelyes affinitást egyértelműen meghatároz tengelye és a sík valamely további pontjának képe.*



Amennyiben adott egy affinitás t tengelye, és egy A pont A' képe, valamely további P pont képe az alábbi módon szerkeszthető.

- Legyen $\overleftrightarrow{AP}$ és t közös pontja T.
- Ekkor az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes képére illeszkedik A' és T, így az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes képe $\overleftrightarrow{TA'}$.
- A P pont képe így illeszkedik $\overleftrightarrow{TA'}$-re, valamint az affinitás $\overleftrightarrow{AA'}$ irányával párhuzamos P-re illeszkedő egyenesre egyaránt, így P' e két egyenes metszéspontja.

1.16. Definíció. *Egy affinitást* merőleges affinitás*nak hívunk, ha iránya merőleges a tengelyére. Azt mondjuk, hogy egy affinitás* eláció*, ha iránya és tengelye párhuzamosak.*

Megállapíthatjuk, hogy tengelyes affinitás esetén az invariáns egyenesek

- az affinitás irányával párhuzamos egyenesek,
- és a tengely.

Annak a ténynek, hogy a tengelyes affinitásoknak van iránya, lényegében a megfordítása is igaz: tehát egy affinitásnak *pontosan akkor van iránya, ha van tengelye.*

1.17. Állítás. *Ha egy affinitásnál valamely pontot a képével összekötő egyenes iránya nem függ a pont választásától, akkor tengelyes affinitás vagy párhuzamos eltolás.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy affinitásnak „van iránya”. Ekkor tetszőleges, nem invariáns egyenesnek és képének metszéspontja fixpont. Valóban, tekintsünk egy e egyenest. Legyen e képe e', és e két egyenes metszéspontja M. Legyen A az e egyenes egy további pontja, amelynek képe A'. Mivel M rajta van e-n, M képe (M') rajta van e'-n. Azonban a feltétel alapján $\overleftrightarrow{MM'} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$. Ha $M \neq M'$, akkor $\overleftrightarrow{MM'} = e'$, amely csak úgy lehet párhuzamos $\overleftrightarrow{AA'}$-vel, ha egybeesnek. Ekkor $e = e'$ adódna. Feltételünk szerint azonban e nem invariáns, így ez ellentmondás: csak $M = M'$ lehetséges.

Az affinitások alaptétele értelmében az affinitást meghatározza egy ABC háromszög és annak $A'B'C'$ képe. Tegyük fel először, hogy a két háromszögnek van két olyan megfelelő oldalegyenes-párja, amelyek nem párhuzamosak: legyen $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ metszéspontja T_1, $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{A'C'}$ metszéspontja T_2. Ekkor az előzőek alapján T_1 és T_2 fixpontok. Az affinitások osztóviszonytartása miatt ekkor $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ összes többi pontja is fixpont, tehát $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ az affinitás tengelye. (Megjegyezzük, hogy ekkor $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ metszéspontja is illeszkedik az affinitás tengelyére, tehát kollineáris a T_1 és T_2 pontokkal. Ez a tény *Desargues* későbbiekben megfogalmazásra kerülő tételének egy speciális esete.)

Tegyük fel végül, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek két megfelelő oldalegyenespárja is párhuzamos: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ és $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$. Ekkor $AA'BB'$ paralelogramma, így $d(B,B') = d(A,A')$. Továbbá $AA'CC'$ is paralelogramma, így $d(C,C') = d(A,A')$. Így $d(B,B') = d(C,C')$. Azonban feltételünkből adódóan $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, így $BB'CC'$ is paralelogramma, tehát $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{BC'}$. Ez azt jelenti, hogy az ABC háromszöget párhuzamos eltolás viszi az $A'B'C'$ háromszögbe, az affinitások alaptétele miatt ez az egyetlen megfelelő affinitás. ■

1.18. Állítás. *Tetszőleges affinitás tengelyes affinitás és hasonlóság kompozíciója.*

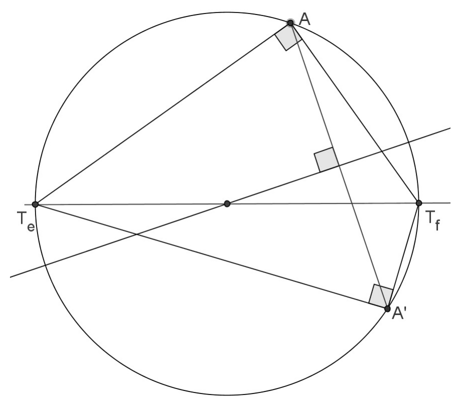
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a tekintett affinitás az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe viszi. Mérjük fel az $A'B'C'$ háromszög $\overleftrightarrow{B'C'}$ oldalegyenesére B' pontból a $\overline{BC}$ szakaszt, végpontja legyen $\overline{C}$. Alkalmazzunk olyan B' *középpontú nyújtást*, amely a C' pontot $\overline{C}$-ba viszi: legyen az A' pont képe $\overline{A}$.

Alkalmazzunk olyan *mozgást*, amelynél a $\overline{\overline{C}}$ szakasz képe $\overline{BC}$. Mivel feltételünk szerint e két szakasz egybevágó, létezik ilyen egybevágósági transzformáció. Legyen ennél a mozgásnál $\overline{A}$ képe $\overline{\overline{A}}$. Ekkor az $A'B'C'$ háromszöget egy nyújtás és egy egybevágósági transzformáció kompozíciójával, vagyis egy hasonlósággal vittük át az $\overline{\overline{A}}BC$ háromszögbe. Ezt a háromszöget az a *tengelyes affinitás*, amelynek tengelye $\overleftrightarrow{BC}$, és $\overline{\overline{A}}$-hoz A-t rendeli, ABC-be viszi. Így valóban, egy tengelyes affinitás és egy hasonlóság kompozíciója ABC-t $A'B'C'$-be viszi. ■

1.19. Állítás. *Legyen adott egy t tengelyű affinitás és egy, t-re nem illeszkedő A pont. Ekkor van az A ponton keresztül egy és csak egy olyan merőleges egyenespár, amelyek képei is merőlegesek. (Ezt az egyenespárt* invariáns derékszögpár*nak hívjuk.*

Bizonyítás: Legyen A képe A'. Tegyük fel, hogy e és f a feltételeknek megfelelő egyenesek, tengelypontjaik legyenek rendre T_e és T_f. Ekkor a $\overline{T_eT_f}$ szakasz A-ból és A'-ből egyaránt derékszögben látszik, így A és A' illeszkedik a $\overline{T_eT_f}$ átmérőjű körre. Ennek a körnek a középpontja illeszkedik t-re és $\overline{AA'}$ felezőmerőlegesére egyaránt, így egyértelműen szerkeszthető.

Merőleges affinitás esetén $\overline{AA'}$ felezőmerőlegese párhuzamos a tengellyel. Ekkor azonban $\overleftrightarrow{AA'}$ invariáns egyenes, az A-ra illeszkedő, tengellyel párhuzamos egyenes képe pedig az A'-re illeszkedő tengellyel párhuzamos egyenes. Így ebben az esetben $\overleftrightarrow{AA'}$ és a tengellyel párhuzamos egyenes határozzák meg az egyetlen lehetséges invariáns derékszögpárt. ■



1.20. Tétel. *Tetszőleges affinitás felírható egy hasonlóság és egy olyan affinitás kompozíciójaként, amelynek van két merőleges invariáns egyenese.*

Bizonyítás: Tekintve egy tengelyes affinitást, és egy, a tengelyére nem illeszkedő A pontban az invariáns derékszögpárat, alkalmazzuk azt a mozgást, amely az A pontot az affin képébe, az invariáns derékszögpárat a képébe viszi. Ekkor a tengelyes affinitást egy mozgás és egy olyan affinitás kompozíciójaként írtuk fel, amelynek van két merőleges invariáns egyenese.

Tetszőleges affinitás tengelyes affinitás és hasonlóság kompozíciója, és az előbb megadott kompozícióban szereplő mozgás is hasonlósági transzformáció. Így egy tetszőleges affinitás a következő kompozícióként állítható elő:

- olyan hasonlóság, amely az affinitást *tengelyes affinitássá alakítja*;

- olyan mozgás, amely a tengelyes affinitás egy invariáns derékszögpárját a képébe viszi: ez a tengelyes affinitást olyan affinitássá alakítja, amelynek van két merőleges invariáns egyenese (a szóban forgó invariáns derékszögpár képe).

■

A következőkben leírjuk egy megfelelően választott koordinátarendszerben azokat az affinitásokat, amelyeknek van két merőleges invariáns egyenese.

A két invariáns egyenes metszéspontja fixpont, legyen ez $(0, 0)$, a merőleges invariáns egyenesek pedig az x-tengely és az y-tengely. (Ezt a koordinátarendszert az affinitás *kanonikus koordinátarendszer*ének hívjuk.)

Az affin geometria alaptétele alapján vannak olyan valós számok, amelyekre tetszőleges (x, y) pont képe $(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$. Meghatározzuk ezeket a számokat.

- Mivel $(0, 0)$ képe $(0, 0)$, adódik, hogy $c_1 = c_2 = 0$.
- Mivel az x-tengely invariáns egyenes, $(1, 0)$ képe $(\lambda, 0)$ valamely λ valós szám esetén. Ebből következik, hogy $a_1 = \lambda$ és $a_2 = 0$.
- Mivel az y-tengely invariáns egyenes, $(0, 1)$ képe $(0, \mu)$ valamely μ valós szám esetén. Így $b_1 = 0$ és $b_2 = \mu$.

Így ebben a koordinátarendszerben az affinitás tetszőleges (x, y) ponthoz a $(\lambda x, \mu y)$ pontot rendeli.

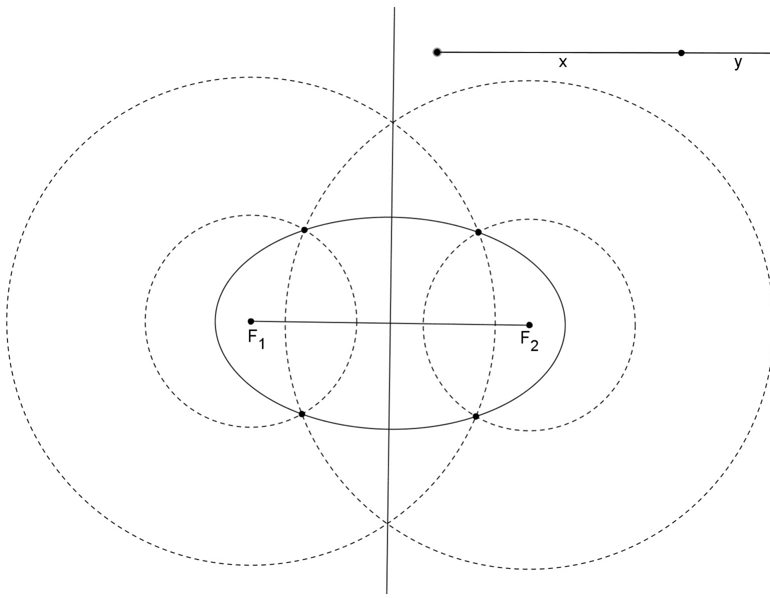
Mivel tetszőleges affinitás egy hasonlóság és egy ilyen alakú affinitás kompozíciója, az alakzatok affin képének vizsgálatához elegendő az ilyen alakú affinitásoknál megvizsgáni az alakzatok képeit.

1.5. Affinitások alkalmazása ellipszisekkel kapcsolatos feladatok megoldására

1.21. Definíció. *Legyenek adottak a sík F_1 és F_2 pontjai és egy $2a$ valós szám úgy, hogy $2a > d(F_1, F_2)$ teljesüljön. Azon pontok mértani helyét a síkban, amelyeknek az F_1 és F_2 pontoktól vett távolságainak összege $2a$,* ellipszis*nek hívjuk. Az F_1 és F_2 pontok az ellipszis* fókusz*ai.*

Bemutatjuk, hogy F_1, F_2 és egy $2a$ hosszúságú szakasz ismeretében hogyan szerkeszthetőek pontok az ellipszisből.

- A $2a$ hosszúságú szakasz egy tetszőleges pontját kiválasztva azt egy x és egy y hosszúságú szakasz uniójára bontjuk, amelyre $x + y = 2a$ teljesül.
- Az F_1 pont körül x sugárral, F_2 körül y sugárral körözve, a két kör metszéspontjai illeszkednek az ellipszisre.



Vegyük észre, hogy az ellipszis minden pontja ilyen módon megkapható, és minden ponttal együtt az $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ egyenesre való tükörképe is illeszkedik az ellipszisre. Így *a fókuszok egyenese az ellipszis egy szimmetriatengelye*, amelyet a *nagytengely egyenesé*nek hívunk.

Észrevehető az is, hogy a fenti szerkesztésben az F_1 és F_2 pontok felcserélésével a szerkesztett ellipszispont $\overline{F_1F_2}$ felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképét is megkapjuk, így *a fókuszok által meghatározott szakasz felezőmerőlegese is szimmetriatengelye az ellipszisnek*, amelyet a *kistengely egyenesé*nek mondunk.

Mivel két szimmetriatengely metszépontja az ellipszisnek szimmetriaközéppontja, az ellipszis *középpontosan szimmetrikus a fókuszok által alkotott szakasz felezőpontjára.* Ezt a pontot az ellipszis *középpontjá*nak nevezzük.

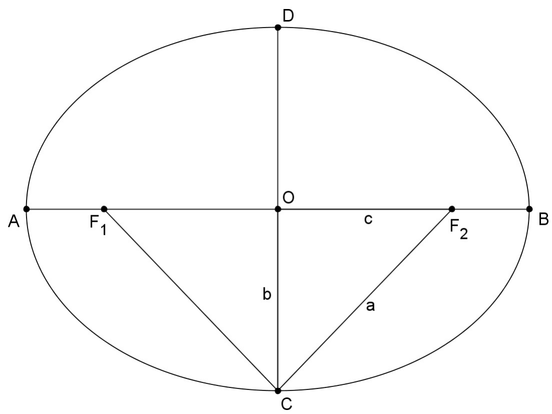
Legyenek A és B az ellipszis középpontjáról a távolságra lévő, a nagytengely egyenesére illeszkedő pontok. Ekkor $d(A, F_1)+d(A, F_2) = d(B, F_2)+d(A, F_2) = d(A, B) = 2a$, így A és B illeszkednek az ellipszisre. Azt mondjuk, hogy A és B a *nagytengely végpontjai*, $\overline{AB}$ pedig a *nagytengely.*

Legyen a fókuszok távolsága $2c$, és legyen b az a pozitív szám, amelyre

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Legyenek C és D a kistengely egyenesének az ellipszis középpontjától b távolságra levő pontjai. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $d(F_1, C) = d(F_2, C) = a$, így $d(F_1, C) + d(F_2, C) = 2a$. Ez azt jelenti, hogy C - és hasonlóan, D is - illeszkedik az ellipszisre. Ezek a pontok a *kistengely végpontjai*, $\overline{CD}$ pedig a *kistengely.*

Tekintsük azt a koordinátarendszert, amelynek origója az ellipszis



középpontja, x-tengelye az ellipszis nagytengelye, y-tengelye az ellipszis kistengelye. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ebben a koordinátarendszerben az ellipszis egyenlete
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Ezt az ellipszis *kanonikus egyenlet*ének hívjuk.

1.22. Állítás. *Egy ellipszis vagy kör képe tetszőleges affinitásnál ellipszis vagy kör.*

Bizonyítás: Tekintsük az
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
egyenletű alakzatot. Minden ellipszis (vagy $a = b$ esetben kör) egyenlete ilyen alakú egy megfelelően választott koordinátarendszerben. Tegyük fel, hogy a szóban forgó affinitásnál tetszőleges (x, y) képe $(\lambda x, \mu y)$. (Egy hasonlóság alkalmazásával elérhető, hogy ilyen alakú legyen az affinitás.)

Egy pont akkor és csak akkor van rajta egy alakzat képén, ha a pont ősképe rajta van az alakzaton. Az (x, y) pont ősképe $\left(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\mu}y\right)$, ez akkor és csak akkor illeszkedik az ellipszisre, ha
$$\frac{\left(\frac{1}{\lambda}x\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{1}{\mu}y\right)^2}{b^2} = 1.$$
Átalakítás után az egyenlet az
$$\frac{x^2}{(\lambda a)^2} + \frac{y^2}{(\mu b)^2} = 1$$
alakot ölti, ami valóban ellipszis vagy kör egyenlete. ∎

A bizonyításból kiderül, hogy (például $\lambda = b$, $\mu = a$ választással) *tetszőleges ellipszis esetén elérhető, hogy affin képe kör legyen.*

1.23. Definíció. *Egy ellipszis* érintőjén *olyan egyenest értünk, amelynek egy és csak egy közös pontja van az ellipszissel.*

Az affinitások értelmezése alapján világos, hogy egy *ellipszis érintőjének affin képe az ellipszis képének érintője.*

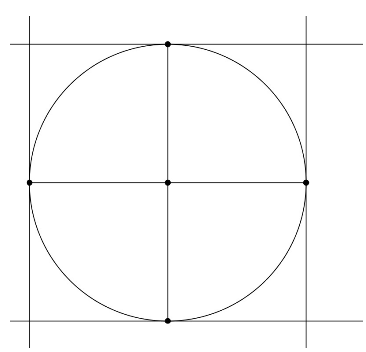
1.24. Definíció. *Egy ellipszis* átmérőjén *az ellipszis középpontjára illeszkedő egyenest értünk. Ezen egyenes és az ellipszis közös pontjait az átmérő* végpont*jainak mondjuk.*

1.25. Lemma. *Tetszőleges ellipszis átmérőjének affin képe az ellipszis képének átmérője.*

Bizonyítás: Mivel az ellipszis középpontja az ellipszis szimmetriacentruma, az átmérő végpontjai által meghatározott szakasz felezőpontja az ellipszis középpontja. Mivel az affinitások osztóviszonytartó leképezések, az átmérő felezőpontjának képe az átmérő képének felezőpontja.

Mivel az átmérők egy pontra illeszkednek, képeik is egy pontra illeszkednek, mégpedig - az előző érvelésből adódóan - egy olyan pontra, amelyik minden, a képellipszis rá illeszkedő húrját felezi. Ez a pont a képellipszis középpontja, így az átmérők képei a képellipszis átmérői. ■

1.26. Állítás. *Egy ellipszis tetszőleges átmérőjének végpontjaira illeszkedő érintők párhuzamosak. Az érintőkkel párhuzamos átmérő végpontjaiba húzott érintők párhuzamosak az eredeti átmérővel. Egy átmérőt, és a végpontjaiban húzott érintőkkel párhuzamos átmérőt együttesen az ellipszis egy* konjugált átmérőpár*jának mondjuk.*



Bizonyítás: Alkalmazzunk olyan affinitást, amelynél az ellipszis képe kör. Ennél az affinitásnál az előző lemma miatt az ellipszis egy tetszőleges átmérőjének képe a kör egy átmérője. A kör átmérőjének végpontjaira illeszkedő érintők merőlegesek az eredeti átmérőre - így egymással valóban párhuzamosak.

Tekintve a tekintett átmérőre merőleges irányú átmérőt, annak végpontjaiban húzott érintők erre merőlegesek, azaz az eredeti átmérővel párhuzamosak lesznek.

Mivel az affinitás párhuzamosságtartó leképezés, ezzel igazoltuk az állítást.

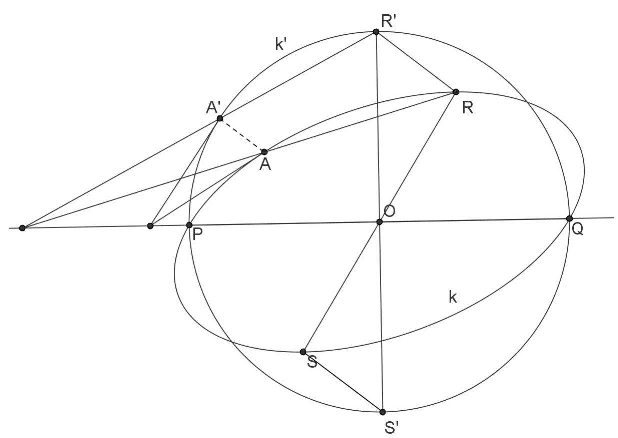
■

Vegyük észre, hogy tetszőleges ellipszis *nagytengelye és kistengelye konjugált átmérőpárt alkot*. Világos, hogy tetszőleges affinitásnál konjugált átmérőpár képe konjugált átmérőpár.

Legyen adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja. *Meghatározunk olyan tengelyes affinitást, amelynél az ellipszis képe kör.*

Legyenek az adott átmérők - amelyek egymást felezik - $\overline{PQ}$ és $\overline{RS}$.

- Legyen $\overleftrightarrow{PQ}$ az affinitás tengelye.
- Legyen a tekintett k ellipszis képe a $\overline{PQ}$ átmérőjű k' kör.
- Mivel konjugált átmérőpár képe az affinitásnál konjugált átmérőpár, és $\overline{PQ}$ képe önmaga, az $\overline{RS}$ szakasz képe $\overline{PQ}$ felezőmerőlegesén van.
- Mivel az R és S képe illeszkedik k'-re, R' és S' az előző felezőmerőleges és k' közös pontjai (tetszőleges sorrendben).
- Az az affinitás, amelynek tengelye $\overline{PQ}$ és amelynél R képe R', a k ellipszist a k' körbe viszi.
- A kör egy tetszőleges A' pontját kiválasztva annak őslképe illeszkedik az ellipszisre, az A' pontbeli körérintő ősképe az ellipszis érintője.

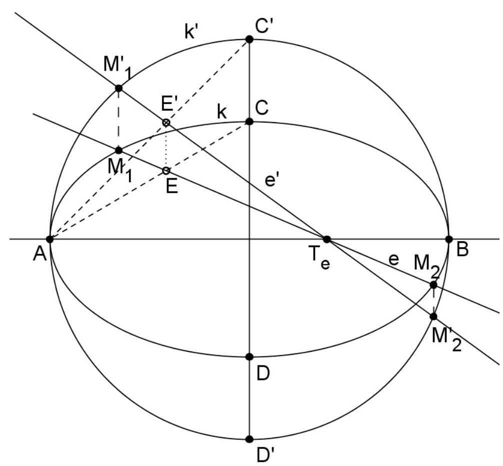


Abban a speciális esetben, ha $\overline{PQ}$ és $\overline{RS}$ merőlegesek, *az ellipszis tengelyei vannak adva*. Vegyük észre, hogy ekkor - de csak ebben a speciális esetben - R' és S' illeszkedik az $\overleftrightarrow{RS}$ egyenesre, és az ellipszist *merőleges affinitás* viszi át körbe.

Ilyen affinitást alkalmazva egyszerűen kezelhetőek a tengelyekkel, vagy konjugált átmérőpárral adott ellipszisekre vonatkozó illeszkedési feladatok. Illusztrációként bemutatjuk egy tengelyeivel adott ellipszis és egy egyenes közös pontjainak szerkesztését.

Legyen az adott k ellipszis nagytengelye $\overline{AB}$, kistengelye $\overline{CD}$; az adott egyenes e.

- Meghatározunk - az előző módszerrel - olyan affinitást, amelynél a k ellipszis képe az $\overline{AB}$ (vagy $\overline{CD}$) átmérőjű k' kör.
- Meghatározzuk az e egyenes e' képét az affinitásnál.
- Meghatározzuk e' és k' közös pontjait, legyenek ezek M_1' és M_2'.
- e' és k' közös pontjainak őseképei e és k közös pontjai, így M_1' és M_2' őseképei a keresett M_1 és M_2 pontok.



1.6. Feladatok

1. Legyenek adottak az A és B pontok. Szerkesszük meg azt a C pontot, amelyre
   a. $(ABC) = 1$;
   b. $(ABC) = \frac{3}{2}$;
   c. $(ABC) = -\frac{7}{3}$.
2. Egy tengelyes affinitásnál az a egyenes képe a', a b egyenes képe b'. Szerkesszük meg az affinitás tengelyét és irányát!
3. Adott egy affinitás t tengelye, valamint egy P pont képe, P'. Szerkesszük meg egy t-vel párhuzamos egyenes képét!

4. Adott egy affinitás t tengelye, valamint egy P pont képe, P'. Szerkesszük meg egy $\overleftrightarrow{PP'}$-re illeszkedő pont képét!

5. Adott egy eláció tengelye és egy P pont képe. Szerkesszük meg a sík valamely további pontjának képét!

6. Adott egy affinitás t tengelye, valamint az e és f egyenesek. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél e és f képei merőlegesek!

7. Adott a t egyenes és egy $ABCD$ paralelogramma. Határozzunk meg olyan, t tengelyű merőleges affinitást, amelynél $ABCD$ képe téglalap!

8. Adott a t egyenes és egy $ABCD$ paralelogramma. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél $ABCD$ képe rombusz!

9. Adott a t egyenes és egy $ABCD$ paralelogramma. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél $ABCD$ képe négyzet!

10. Adott a t egyenes és egy $ABCD$ trapéz. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél $ABCD$ képe olyan derékszögű trapéz, amelynek derékszöge az A csúcs képénél van!

11. Adott a t egyenes és egy ABC háromszög. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél a háromszög képe olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ szakaszok képei!

12. Adott a t egyenes és egy ABC háromszög. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél a háromszög képe olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek szárai az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ szakaszok képei!

13. Adott a t egyenes és egy ABC háromszög. Határozzunk meg olyan, t tengelyű affinitást, amelynél a háromszög képe szabályos háromszög!

14. Adott egy ellipszis két tengelye és egy külső pont. Szerkesszük meg a pontból az ellipszishez húzható érintőket!

15. Adott egy ellipszis két tengelye és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis adott egyenessel párhuzamos érintőit!

16. Adott egy ellipszis két tengelye és egy átmérője. Szerkesszük meg az ellipszis adott átmérőhöz konjugált átmérőjét!

17. Adott egy ellipszis nagytengelye és egy pontja. Szerkesszük meg a kistengelyt!

18. Adott egy ellipszis kistengelye és egy érintője. Szerkesszük meg a nagytengelyt!

19. Adottak egy ellipszis tengelyeinek egyenesei és két pontja. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!

20. Adottak egy ellipszis tengelyeinek egyenesei és egy pontja a rá illeszkedő érintővel. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
21. Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis adott egyenessel közös pontjait!
22. Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja és egy külső pont. Szerkesszük meg a pontból az ellipszishez húzható érintőket!
23. Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis adott egyenessel párhuzamos érintőit!
24. Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja és egy további átmérője. Szerkesszük meg az ellipszis adott átmérőhöz konjugált átmérőjét!
25. Adott egy ellipszis egy konjugált átmérőpárja. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!

2. A valós projektív sík

2.1. A valós projektív sík pontjai és egyenesei

Az euklideszi sík összes egyenesét bővítsük ki egy további ponttal úgy, hogy két egyenest akkor és csak akkor bővítünk ugyanazzal a ponttal, ha párhuzamosak. Ezeket az „új” pontokat *végtelen távoli pont*oknak hívjuk. Az egyenesek halmazát egyetlen új elemmel bővítjük, egy olyan egyenessel, amelyre a végtelen távoli pontok illeszkednek és csakis azok. Ezt az egyenest a *vételen távoli egyenes*nek nevezzük.

A *valós projektív sík*

- *pont*jai az euklideszi sík pontjai (azaz a *véges helyzetű* pontok) és a végtelen távoli pontok,
- *egyenes*ei az euklideszi sík egyenesei (azaz a *véges helyzetű* egyenesek) és a végtelen távoli egyenes.

2.1. Állítás. *A valós projektív sík bármely két pontjára illeszkedik egy és csak egy egyenes.*

Bizonyítás:

- Ha mindkét pont véges helyzetű, akkor pontosan az általuk meghatározott euklideszi egyenes illeszkedik mindkét pontra.
- Ha az egyik pont véges helyzetű, a másik pont végtelen távoli, akkor az adott véges helyzetű pontra illeszkedő adott irányú euklideszi egyenest határozzák meg.
- Ha mindkét pont végtelen távoli, akkor nem illeszkedhet rájuk véges helyzetű egyenes (hiszen egy euklideszi egyenest csak egy végtelen távoli ponttal bővítettünk), azonban a végtelen távoli egyenes tartalmazza mindkét pontot.

∎

2.2. Állítás. *A valós projektív sík bármely két egyenesére illeszkedik egy és csak egy pont.*

Bizonyítás:

- Ha metsző, véges helyzetű egyenesekről van szó, akkor közös pontjuk a véges helyzetű metszéspontjuk.
- Ha párhuzamos, véges helyzetű egyenesekről van szó, akkor nincsen véges helyzetű közös pontjuk, azonban ugyanazzal a végtelen távoli ponttal lettek bővítve.
- Egy véges helyzetű egyenes és a végtelen távoli egyenes egyetlen közös pontja a tekintett véges helyzetű egyenes végtelen távoli pontja.

■

Egy fogalom vagy állítás *duálisán* a „pont” és „egyenes” szerepének felcserélésével kapott új fogalmat vagy állítást értjük. A valós projektív síkon a *dualitás elve* azt jelenti, hogy *egy állítás pontosan akkor teljesül, ha a duálisa.*

Ennek bizonyítását később végezzük el. A bizonyításnál megadunk a valós projektív sík pontjainak és egyeneseinek halmaza között egy illeszkedéstartó bijekciót, azaz olyan bijekciót, amelyre teljesül, hogy egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy egyenesre, ha a pont képegyenese illeszkedik az egyenes képpontjára. Ilyen bijekció létezéséből valóban következik a dualitás elve: a duális állítás bizonyítása a fenti bijekció alkalmazása után pontosan az eredeti állítás bizonyítására redukálódik.

2.3. Definíció. *A valós projektív sík egy egyenesére illeszkedő pontok halmazát* pontsor*nak, egy pontjára illeszkedő egyenesek halmazát* sugársor*nak hívjuk. Egy pontsor elemeinek közös egyenesét a pontsor* tartóegyenes*ének, a sugársor elemeinek közös pontját a sugársor* tartópont*jának mondjuk.*

A definícióból látható, hogy a pontsor és a sugársor duális fogalmak.

2.2. A kettősviszony

2.4. Definíció. *Legyenek A, B, C, D különböző kollineáris, véges helyzetű pontok. Az*

$$(ABCD) := \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}$$

számot a négy pont kettősviszony*ának hívjuk.*

2.5. Állítás. *Legyenek A, B, C, D különböző kollineáris, véges helyzetű pontok. Ekkor*

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

$$(ACBD) = 1 - (ABCD).$$

Bizonyítás:

$$(BADC) = \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CA}{BC} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = (ABCD),$$

$$(CDAB) = \frac{CA}{AD} \cdot \frac{BD}{CB} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = (ABCD),$$

az előző azonosság alapján pedig

$$(DCBA) = (BADC).$$

$$(BACD) = \frac{BC}{CA} \cdot \frac{DA}{BD} = \frac{DB}{AD} \cdot \frac{AC}{CB} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Az utolsó összefüggés igazolásához tegyük fel, hogy a pontok közös egyenese az x-tengely, és így koordinátáik rendre $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$ és $D(d,0)$. Ekkor

$$(ABCD) = \frac{c-a}{b-c} \cdot \frac{b-d}{d-a},$$

$$(ACBD) = \frac{b-a}{c-b} \cdot \frac{c-d}{d-a}.$$

Így azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{b-a}{c-b} \cdot \frac{c-d}{d-a} = 1 - \frac{c-a}{b-c} \cdot \frac{b-d}{d-a}.$$

Átszorzás után innen

$$(b-a)(c-d) = (c-b)(d-a) + (c-a)(b-d),$$

majd elvégezve a műveleteket, a $0 = 0$ azonosságot kapjuk, ami állításunk igazságát jelenti. ∎

A következőkben értelmezzük a végtelen távoli pontot tartalmazó kettősviszonyokat is. Négy kollineáris pont közül 0, 1 vagy 4 lehet végtelen távoli.

Amennyiben pontosan egy végtelen távoli pont van a tekintett négy pont között, a fenti azonosságok alkalmazásával elérhető, hogy ez az utolsó pont legyen. Amennyiben D_∞ a pontnégyes egyetlen végtelen távoli eleme,

$$(ABCD_\infty) := -(ABC).$$

A fenti definíciót indokolja, hogy ha egy egyenes A és B pontjait rögzítjük, D pedig „tart” a végtelen távoli ponthoz, akkor az (ABD) osztóviszony -1-hez tart. Valóban, ha A az $\mathbf{a}$ helyvektorú pont, B a $\mathbf{b}$ helyvektorú pont, és D helyvektora $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$, akkor $(ABD) = \frac{t}{1-t}$, és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{1-t} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{1-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t}-1} = -1.$$

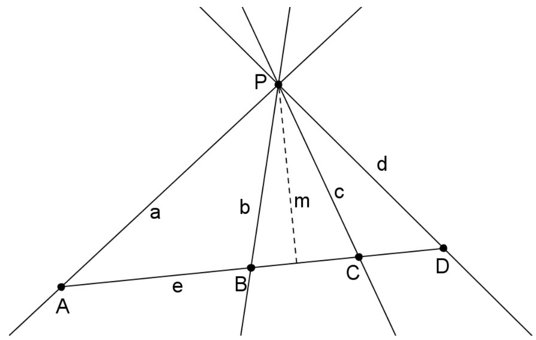
2.6. Tétel. *Legyenek A, B, C, D véges helyzetű kollineáris pontok, és P a közös egyenesükre nem illeszkedő véges helyzetű pont. Jelölje a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ és $\overleftrightarrow{PD}$ egyeneseket rendre a, b, c és d. Ekkor*

$$(ABCD) = \frac{\sin(ac\angle)}{\sin(cb\angle)} \cdot \frac{\sin(db\angle)}{\sin(ad\angle)},$$

ahol a szereplő szögeket egy rögzített forgásirány mellett előjellel látjuk el.

Bizonyítás: Legyen m az A, B, C, D pontok közös egyenesének P ponttól való távolsága. Ekkor az ACP háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

$$AC \cdot m = AP \cdot CP \cdot \sin(ac\angle).$$



Innen

$$AC = \frac{AP \cdot CP \cdot \sin(ac\angle)}{m}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$CB = \frac{CP \cdot BP \cdot \sin(cb\angle)}{m},$$

$$DB = \frac{DP \cdot BP \cdot \sin(db\angle)}{m},$$

$$AD = \frac{AP \cdot DP \cdot \sin(ad\angle)}{m}.$$

Így

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = \frac{\frac{AP \cdot CP \cdot \sin(ac\angle)}{m}}{\frac{CP \cdot BP \cdot \sin(cb\angle)}{m}} \cdot \frac{\frac{DP \cdot BP \cdot \sin(db\angle)}{m}}{\frac{AP \cdot DP \cdot \sin(ad\angle)}{m}} =$$

$$= \frac{\sin(ac\angle)}{\sin(cb\angle)} \cdot \frac{\sin(db\angle)}{\sin(ad\angle)},$$

és ezt kellett belátnunk. ■

2.7. Definíció. *Legyenek a, b, c, d egy sugársor elemei. Ekkor az*

$$(abcd) := \frac{\sin(ac\angle)}{\sin(cb\angle)} \cdot \frac{\sin(db\angle)}{\sin(ad\angle)}$$

számot a négy egyenes kettősviszonyá*nak hívjuk.*

A P pontot az A, B, C, D pontokkal összekötő egyenesek kettősviszonyát szokás egyszerűen $P(ABCD)$ módon jelölni.

A definícióból közvetlenül nem látható, de később igazolni fogjuk, hogy a *pontnégyes kettősviszonya és sugárnégyes kettősviszonya duális fogalmak.* Az előző tétel azonban azt fejezi ki, hogy *pontnégyes kettősviszonya megegyezik a pontokat tetszőleges külső pontból vetítő sugárnégyes kettősviszonyával*, illetve, duálisan, *sugárnégyes kettősviszonya megegyezik az egyeneseket tetszőleges további egyenessel elmetszve kapott pontnégyes kettősviszonyával.*

Rendeljük hozzá egy e egyenes pontjaihoz a tőle különböző e' egyenes pontjait oly módon, hogy egy külső P pont rögzítése után tetszőleges $E \in e$ pont képe legyen $\overleftrightarrow{PE}$ és e' metszéspontja. Ezt a leképezést a két egyenes közötti P középpontú *perspektivitás*nak mondjuk, és úgy is fogalmazunk, hogy az e pontjait *P-ből e'-re vetítjük.* Fontos megjegyezni, hogy a valós projektív síkon az egyenesek közötti perspektivitások bijektív leképezések - míg az euklideszi síkon a párhuzamosok létezése miatt nem is értelmezhetőek minden pontra.

2.8. Következmény. *(Pappos-Steiner) A perspektivitások kettősviszonytartó leképezések, azaz ha az A, B, C, D kollineáris pontokat egy P pontból vetítve az A', B', C', D' pontokat kapjuk, akkor $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Bizonyítás: Az előző tétel alapján a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{PD}$ egyenesek kettősviszonya mind az $(ABCD)$, mind az $(A'B'C'D')$ kettősviszonnyal megegyezik. ∎

A sugárnégyes kettősviszonyának fogalmát felhasználva értelmezhetjük *négy végtelen távoli pont kettősviszonyá*t is. Rögzítsünk egy tetszőleges P pontot a síkban, és ezt az A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ pontokkal összekötő egyenesek legyenek rendre a, b, c, d. Ekkor $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) := (abcd)$. Ez az érték független a P pont megválasztásától, ugyanis a P pont egy további megválasztása esetén kapott sugárnégyes eltolással átvihető az eredeti sugárnégyese, így a kettősviszony definíciójában szereplő szögek változatlanok.

2.9. Állítás. *Legyenek adottak az A, B, C kollineáris pontok, és a $\lambda \neq 0, 1$ valós szám. Ekkor egy és csak egy olyan D pont létezik, amelyre $(ABCD) = \lambda$.*

Bizonyítás: Az $(ABCD) = \lambda$ feltételből adódóan

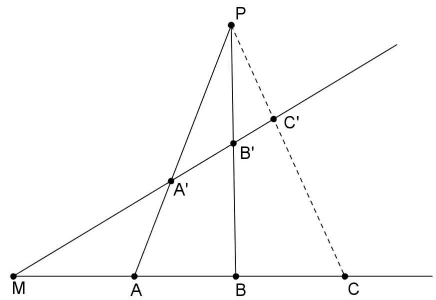
$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \lambda,$$

azaz

$$(ABD) = \frac{(ABC)}{\lambda}.$$

Itt az egyenlőség jobb oldalán egy megadott valós szám szerepel, így ha ez nem -1, akkor az osztóviszonyra vonatkozó megfelelő tételből következik állításunk. Amennyiben a jobb oldalon szereplő valós szám -1, D a tekintett pontok egyenesének végtelen távoli pontja. $\lambda = 1$ esetén $C = D$ adódna, azonban a kettősviszony definíciójában feltettük, hogy a négy tekintett pont különböző. ∎

2.10. Tétel. *(A fundamentális tulajdonság) Legyenek A, B, C valamint A', B', C' külöböző egyenesekre illeszkedő kollineáris ponthármasok, egyeneseik metszéspontja legyen M. Ha $(ABCM) = (A'B'C'M)$, akkor $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ konkurrensek.*



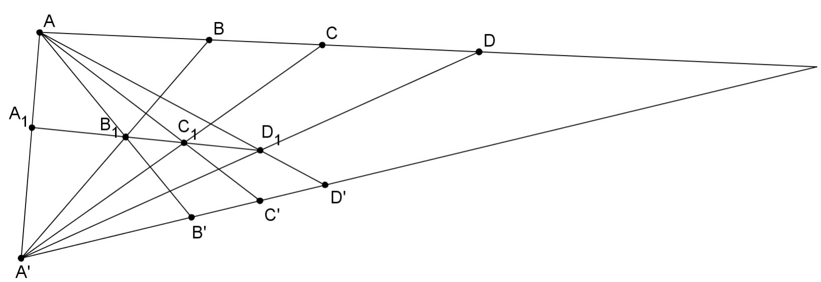
Bizonyítás: Legyen P az $\overleftrightarrow{AA'}$ és $\overleftrightarrow{BB'}$ egyenesek közös pontja, valamint C'' a $\overleftrightarrow{PC}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesek metszéspontja. Azt kell megmutatnunk, hogy $C'' = C'$.

A Pappos-Steiner tétel miatt $(ABCM) = (A'B'C''M)$. Feltételünket figyelembe véve így $(A'B'C'M) = (A'B'C''M)$, azaz $(A'B'MC') = (A'B'MC'')$. Mivel adott A', B', M és λ esetén egy és csak egy olyan C' létezik, amelyre $(A'B'MC') = \lambda$, így $C'' = C'$ adódik, amit bizonyítani akartunk. ∎

Megfogalmazzuk a fundamentális tulajdonság duálisát is.

2.11. Következmény. *Legyenek a, b, c valamint a', b', c' különböző pontokra illeszkedő sugársorok elemei, a sugársorok tartópontjainak egyenese legyen m. Ha $(abcm) = (a'b'c'm)$, akkor $a \cap a'$, $b \cap b'$ és $c \cap c'$ kollineárisak.*

Megadva egy e egyenes A, B, C, D pontjait valamint az e' egyenesen az A', B', C' pontokat, akkor megszerkesztjük azt a D' pontot, amelyre $(ABCD) = (A'B'C'D')$.



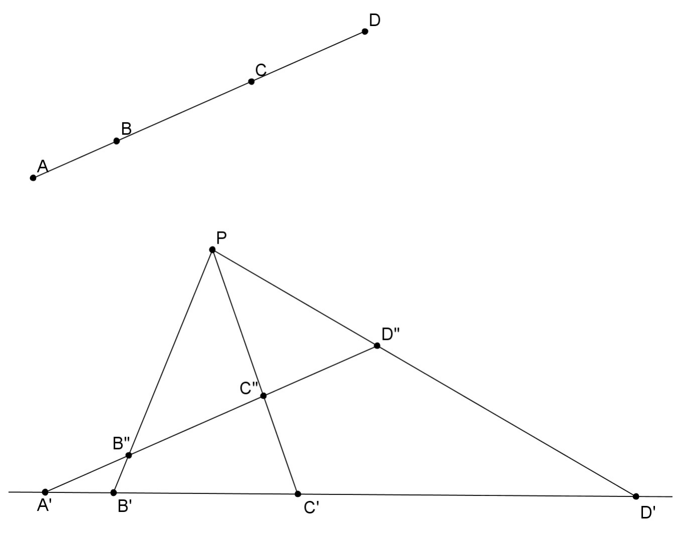
Kettősviszony átmásolása - első módszer.

- Legyen az $\overleftrightarrow{AB'}$ és $\overleftrightarrow{A'B}$ egyenesek metszéspontja B_1, az $\overleftrightarrow{AC'}$ és $\overleftrightarrow{A'C}$ egyenesek metszéspontja C_1.
- Legyen a $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ és $\overleftrightarrow{A'D}$ egyenesek metszéspontja D_1.
- A keresett D' pont $\overleftrightarrow{AD_1}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ metszéspontja.

Ugyanis ekkor - $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ és $\overleftrightarrow{AA'}$ metszéspontját $\overleftrightarrow{A_1}$-el jelölve - a Pappos-Steiner tétel alapján $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (A'B'C'D')$; hiszen az első pontnégyesből A' középpontú vetítéssel kapható a második pontnégyes, majd A középpontú vetítést alkalmazva jutunk a harmadik pontnégyeshez.

Ugyanezen szerkesztési probléma egy másik lehetséges megoldása az osztóviszony átmásolásához hasonló eljárás.

- Legyen $A'' := A'$, és legyen s az A' pontra illeszkedő tetszőleges egyenes.
- Mérjük fel az s egyenesre az A' pontból az $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ és $\overline{AD}$ szakaszokat: legyenek tehát B'', C'' és D'' az s egyenes azon pontjai, amelyekre $d(A'', B'') = d(A, B)$, $d(A'', C'') = d(A, C)$, $d(A'', D'') = d(A, D)$ és a megfelelő szakaszok irányításai is megegyeznek.
- Legyen P a $\overleftrightarrow{B'B''}$ és $\overleftrightarrow{C'C''}$ egyenesek metszéspontja.
- Ekkor $\overleftrightarrow{PD''}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ közös pontja a keresett pont.



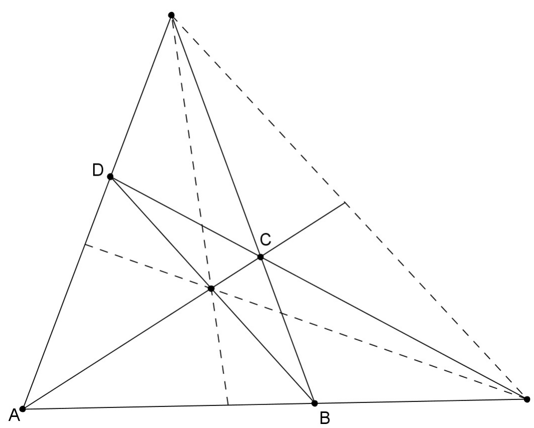
Kettősviszony átmásolása - második módszer.

Ekkor ugyanis a megfelelő szakaszok egybevágóságából adódóan $(ABCD) = (A''B''C''D'')$, a Pappos-Steiner tétel miatt pedig $(A''B''C''D'') = (ABCD)$.

2.3. Harmonikus pontnégyesek

2.12. Definíció. *Legyen adott egy projektív síkon négy pont, A, B, C és D, melyek között nincsen három kollineáris. Az $ABCD$* teljes négyszög*ön a négy pont, valamint az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ és $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek unióját értjük.*

A pontokat négyszög csúcs*ainak, a szóban forgó egyeneseket a négyszög* oldal*ainek hívjuk. Az* $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ *és* $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ *pontokat a teljes négyszög* átlóspontjainak *nevezzük. A három átlóspont által meghatározott háromszög oldalegyeneseit a teljes négyszög* átló*inak mondjuk. Egy átlósponttal* szemköztes *átlón a teljes négyszög azon átlóját értjük, amelyre az adott pont nem illeszkedik.*



2.13. Definíció. *Egy projektív síkon az A, B, C, D kollineáris pontokról azt mondjuk, hogy* harmonikus pontnégyes*t alkotnak, ha van olyan teljes négyszög, melynek A és B csúcsai, C átlóspontja, és D a két további átlóspontra illeszkedő egyenes és az $\overleftrightarrow{AB}$ oldal metszéspontja.*

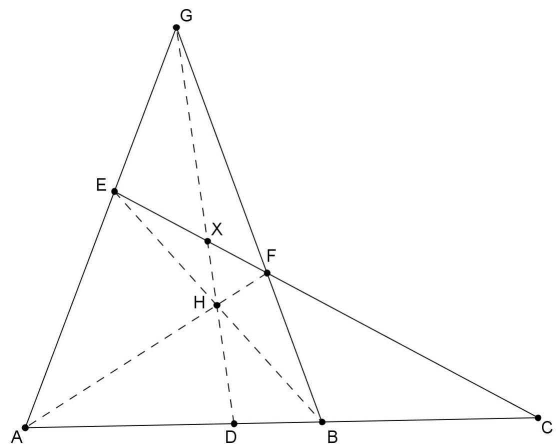
2.14. Állítás. *A valós projektív sík négy pontja akkor és csak akkor alkot harmonikus pontnégyest, ha kettősviszonyuk -1.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes. Legyenek a harmonikus pontnégyes definíciójában szereplő teljes négyszög csúcsai A, B, E, F; az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EF}$ átlóspont C, a további átlóspontok G és H, melyek egyenese $\overleftrightarrow{AB}$-t D-ben metszi. Ekkor a Pappos-Steiner tétel miatt $(ABCD) = (EFCX)$, ahol X az $\overleftrightarrow{EF}$ és $\overleftrightarrow{GH}$ egyenesek metszéspontja, hiszen az első pontnégyesből a másodikat G középpontú vetítéssel kaptuk. H középpontú vetítést alkalmazva $(EFCX) = (BACD)$. A kettősviszony tulajdonságaiból adódik, hogy $(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}$. Így azt kaptuk, hogy

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Ebből következik, hogy $(ABCD) = 1$ vagy $(ABCD) = -1$. Azonban $(ABCD) = 1$ azt vonná maga után, hogy $C = D$ teljesül. Később azonban megmutatjuk, hogy egy teljes négyszög átlóspontjai nem lehetnek kollineárisak (ezt a tényt *Fano-tulajdonság*ként is említjük), így ez lehetetlen. Tehát beláttuk, hogy harmonikus pontnégyes kettősviszonya -1.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(ABCD) = -1$. Tekintsünk az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesen egy olyan D_1 pontot, amelyre $(ABCD_1)$ harmonikus pontnégyes. (Ilyen D_1 létezik, hiszen a harmonikus pontnégyes definíciójában szereplő teljes négyszög egyszerűen megkonstruálható tetszőleges A, B, C pontokból kiindulva.) Ekkor a bizonyítás első része miatt $(ABCD_1) = -1$. Azonban ismert, hogy adott A, B, C és λ esetén egy és csak egy olyan D létezik, amelyre $(ABCD) = \lambda$, így $D_1 = D$. ■



2.15. Következmény. *Adott, kollineáris A, B, C pontokhoz egy és csak egy olyan D pont létezik, amelyre $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes. Ezt a pontot a C pont (AB)-re vonatkozó* harmonikus társ*ának vagy* harmonikus konjugált*jának hívjuk.*

Ha $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes, szokás úgy fogalmazni, hogy az (AB) pontpár *harmonikusan választja el* a (CD) pontpárt. Az elnevezést az indokolja, hogy a kettősviszony tulajdonságai miatt $(ABCD)$ pontosan akkor harmonikus pontnégyes, ha a $(BACD)$, $(ABDC)$, $(CDAB)$ pontnégyesek harmonikusak.

A harmonikus konjugált szerkesztésére a harmonikus pontnégyes definíciója alapján az alábbi módszer adható.

- Legyenek adottak az A, B, C kollineáris pontok.
- Legyen E tetszőleges, az adott pontok egyenesére nem illeszkedő pont.
- Legyen F tetszőleges, $\overleftrightarrow{CE}$-re illeszkedő pont.
- Legyen $\overleftrightarrow{AE}$ és $\overleftrightarrow{BF}$ metszéspontja G.

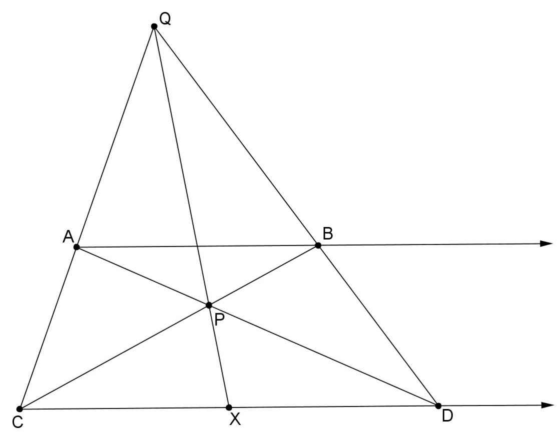
- Legyen $\overleftrightarrow{BE}$ és $\overleftrightarrow{AF}$ metszéspontja H.
- A keresett D pont $\overleftrightarrow{GH}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ metszéspontja.

Előző állításaink alapján az így kapott D pont független az E és F pontok megválasztásától.

2.16. Állítás. *Tetszőleges szakasz végpontjai harmonikusan választják el a szakasz felezőpontját és végtelen távoli pontját.*

Bizonyítás: Legyen az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja F, $\overleftrightarrow{AB}$ végtelen távoli pontja V_∞. Mivel F felezőpont, $(ABF) = 1$. Így $(ABFV_\infty) = -(ABF) = -1$. ■

2.17. Állítás. *Tetszőleges trapéz szárainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait.*



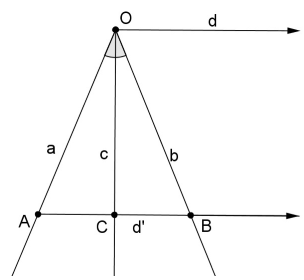
Bizonyítás: Legyenek az $ABCD$ trapéz alapjai $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, átlóinek metszéspontja P, a szárak egyeneseinek metszéspontja Q. Legyen továbbá a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes és $\overleftrightarrow{CD}$ metszéspontja X. Azt kell megmutatnunk, hogy X felezi $\overline{CD}$-t.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, így metszéspontjuk végtelen távoli pont, legyen ez V_∞. Ekkor az $ABCD$ teljes négyszög egy átlóspontja V_∞, a másik két átlóspont (P és Q) egyenese a négyszög $\overleftrightarrow{CD}$ oldalegyenesét X-ben metszi, így $(CDXV_\infty)$ harmonikus pontnégyes. A végtelen távoli pont szakaszvégpontokra vonatkozó harmonikus társa azonban a szakasz felezőpontja, így X valóban $\overleftrightarrow{CD}$ felezőpontja. ■

Az előző állítás abban a speciális esetben, ha $ABCD$ paralelogramma és így Q végtelen távoli pont, azt a jól ismert tényt adja vissza, hogy *tetszőleges paralelogramma átlóinak metszéspontján át az oldalakkal húzott párhuzamosok középvonalak, azaz illeszkednek a megfelelő oldalak felezőpontjaira.* Ebben a speciális esetben, mivel Q végtelen távoli pont, a párhuzamos vetítés osztóviszonytartásának figyelembevételével $(APD) = (CXD)$ is fennáll, azaz az előbb nyert állításból következően X a $\overline{CD}$ átló felezőpontja. Tehát *tetszőleges paralelogramma átlói felezik egymást.*

A *harmonikus sugárnégyes* fogalma a harmonikus pontnégyes fogalmának duálisa. Így négy, egy pontra illeszkedő egyenes akkor és csak akkor alkot harmonikus sugárnégyest, ha kettősviszonyuk -1.

2.18. Állítás. *Tetszőleges szög szárait harmonikusan választja el a belső és külső szögfelező.*



Bizonyítás: Legyenek a szög szárainak egyenesei a és b, a belső szögfelező egyenese c, a külső szögfelező egyenese d, a szög csúcsa O. Legyen továbbá d' d-vel párhuzamos tetszőleges egyenes, amelyet a szög szárai az A és B pontokban, a belső szögfelező C-ben, a külső szögfelező a D_∞ végtelen távoli pontban metsz. Ekkor $d' \perp c$ miatt AOB egyenlő szárú háromszög, mert a $\overline{CO}$ magasságvonal és szögfelező egybeesik. Így C az $\overline{AB}$ oldal felezőpontja. Ebből következik, hogy $(ABCD_\infty) = -1$. Azonban $(ABCD_\infty) = (abcd)$, így $(abcd) = -1$, ami állításunk igazságát jelenti. ■

2.4. Desargues, Pappos, Ceva és Menelaosz tételei

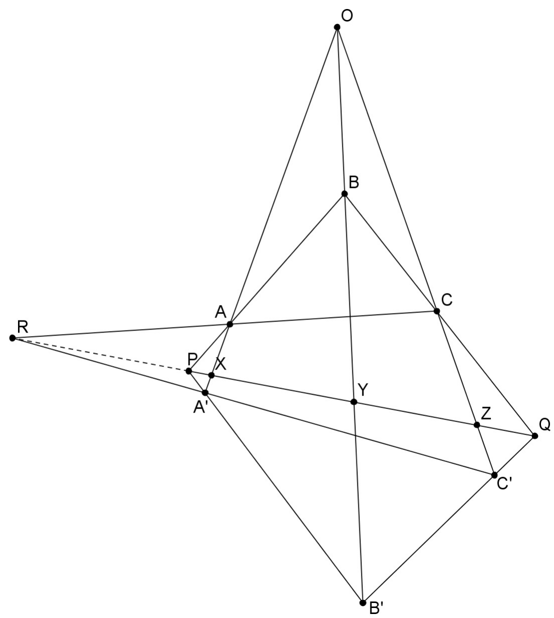
2.19. Tétel. *(Desargues) Tegyük fel, hogy két háromszög megfelelő csúcsait összekötő egyenesek egy pontra illeszkednek. Ekkor a két háromszög megfelelő oldalegyeneseinek metszéspontjai kollineárisak.*

Ha két háromszög megfelelő csúcsait összekötő egyenesek mindegyike illeszkedik az O pontra, szokás úgy fogalmazni, hogy a két háromszög az *O pontra nézve perspektív.*

Ha két háromszög megfelelő oldalegyeneseinek metszéspontjai illeszkednek a t egyenesre, azt mondjuk, hogy a két háromszög a *t tengelyre nézve perspektív.*

A most bevezetett fogalmakat használva a Desargues-tétel azt állítja, hogy *ha két háromszög pontra nézve perspektív, akkor tengelyre nézve is perspektívek.*

Vegyük észre, hogy a pontra illetve tengelyre nézve perspektív háromszögpárok fogalma duális fogalmak. Ez azt jelenti, hogy a Desargues-tétel duálisa éppen a megfordítása. Ezért a Desargues-tételt és duálisát összefoglalva úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *két háromszög akkor és csak akkor perspektív pontra nézve, ha tengelyre nézve perspektívek.*



Bizonyítás: Tekintsük az O pontra nézve perspektív ABC és $A'B'C'$ háromszögeket. Legyen $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = P$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = P$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = R$; feladatunk annak bizonyítása, hogy P, Q és R kollineáris.

Legyen továbbá az $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes $\overleftrightarrow{AA'}$-vel közös pontja X, $\overleftrightarrow{BB'}$-vel közös pontja Y, és $\overleftrightarrow{CC'}$-vel közös pontja Z. Ekkor az $(AA'XO)$ pontnégyest P-ből a $\overleftrightarrow{BB'}$ egyenesre vetítve a $(BB'YO)$ pontnégyest kapjuk, így a Pappos-Steiner tétel miatt

$$(AA'XO) = (BB'YO).$$

A $(BB'YO)$ pontnégyest Q-ból a $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesre vetítve a $(CC'ZO)$ pontnégyest kapjuk, így

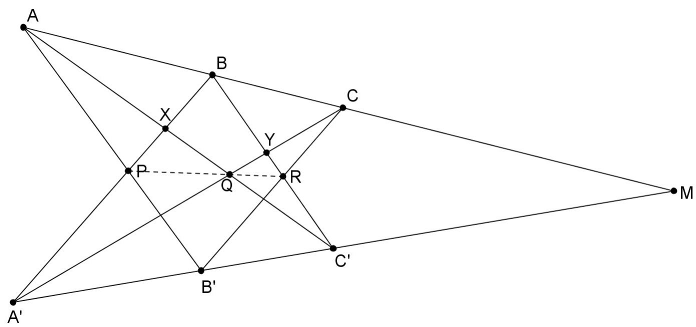
$$(BB'YO) = (CC'ZO).$$

Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$(AA'XO) = (CC'ZO).$$

A fundamentális tulajdonság miatt ekkor $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{A'C'}$ és $\overleftrightarrow{XZ}$ konkurrensek. Mivel $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{A'C'}$ metszéspontja R, ez azt jelenti, hogy az $\overleftrightarrow{XZ} = \overleftrightarrow{PQ}$ egyenesre illeszkedik az R pont, és ezt kellett megmutatnunk. ∎

2.20. Tétel. *(Pappos) Legyenek A, B, C és A', B', C' különböző egyenesekre illeszkedő kollineáris ponthármasok, és tegyük fel, hogy mindegyik pont különbözik közös egyeneseik metszéspontjától. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ és $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$ pontok kollineárisak.*



Bizonyítás: Legyen $P := \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $Q := \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ és $R := \overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$. Legyen továbbá $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} =: M$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'B} =: X$ és $\overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{BC'} =: Y$. Ekkor az $(A'PXB)$ pontnégyest A-ból $\overleftrightarrow{A'B'}$-re vetítve az $(A'B'C'M)$ pontnégyest kapjuk, így a Pappos-Steiner tétel miatt

$$(A'PXB) = (A'B'C'M).$$

Az $(A'B'C'M)$ pontnégyest C-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re vetítve az $(YRC'B)$ pontnégyest kapjuk, így

$$(A'B'C'M) = (YRC'B).$$

Összegezve,

$$(A'PXB) = (YRC'B),$$

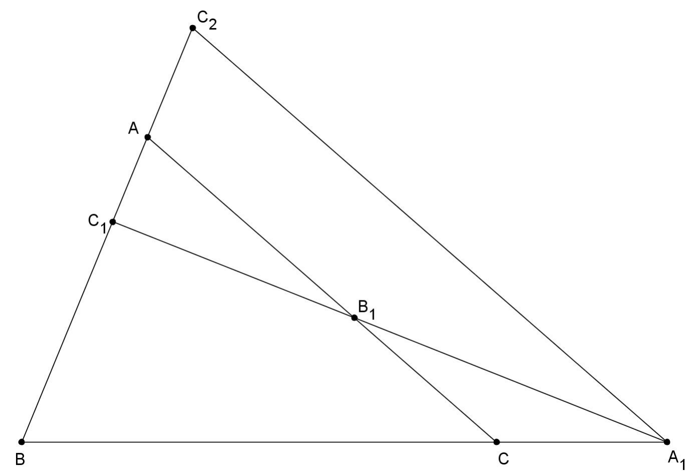
ahonnan a fundamentális tulajdonság miatt következik, hogy $\overleftrightarrow{A'Y}$, $\overleftrightarrow{PR}$ és $\overleftrightarrow{XC'}$ konkurrensek. Azonban $\overleftrightarrow{A'Y} = \overleftrightarrow{A'C}$ és $\overleftrightarrow{XC'} = \overleftrightarrow{AC'}$, így ezek metszéspontja $\overleftrightarrow{Q}$. Tehát Q valóban illeszkedik $\overleftrightarrow{PR}$-re. ■

2.21. Tétel. *Tekintsünk egy ABC háromszöget, és legyenek $A_1 \in \overleftrightarrow{BC}$, $B_1 \in \overleftrightarrow{CA}$, $C_1 \in \overleftrightarrow{AB}$ a csúcsoktól különböző pontok.*

a. *A_1, B_1 és C_1 akkor és csak akkor kollineáris, ha* $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$. (Menelaosz tétele)

b. *$\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ akkor és csak akkor konkurrensek, ha* $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. (Ceva tétele)

Bizonyítás:



1. Megmutatjuk először, hogy ha A_1, B_1 és C_1 kollineáris, akkor $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$.

   Jelölje az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes végtelen távoli pontját V_∞, az A_1 pontra illeszkedő, V_∞ irányú egyenes $\overleftrightarrow{AB}$-vel közös pontját C_2. Ekkor a (CAB_1V_∞) pontnégyest A_1-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re vetítve a (BAC_1C_2) pontnégyest kapjuk, így a Pappos-Steiner tétel miatt
   $$(CAB_1V_\infty) = (BAC_1C_2).$$
   A kettősviszony tulajdonságai miatt ez azt jelenti, hogy
   $$-(CAB_1) = \frac{(BAC_1)}{(BAC_2)}.$$
   Itt a párhuzamos szelők tételéből adódóan $(BAC_2) = (BCA_1)$, így $-(CAB_1) = \frac{(BAC_1)}{(BCA_1)}$ adódik, amiből átrendezés után következik az állítás.

2. Megfordítva, tegyük fel, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$. Legyen C_1' az $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesek közös pontja. Azt kell belátnunk, hogy $C_1' = C_1$. Az előző pontból adódóan $(ABC_1')(BCA_1)(CAB_1) = -1$, amit feltételünkkel összevetve $(ABC_1) = (ABC_1')$ következik. Az osztóviszony tulajdonságai miatt ez valóban azt jelenti, hogy $C_1' = C_1$.

3. Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ konkurrensek, közös pontjuk legyen P. Legyen az $\overleftrightarrow{AA_1}$-el párhuzamos, B-re illeszkedő egyenes $\overleftrightarrow{AC}$-vel közös pontja B_2; az $\overleftrightarrow{AA_1}$-el párhuzamos, C-re illeszkedő egyenes $\overleftrightarrow{AB}$-vel közös pontja C_2; utóbbi egyenesek közös végtelen távoli pontja V_∞. Ekkor a (CAB_1B_2) pontnégyest B-ből $\overleftrightarrow{AP}$-re vetítve az (A_1APV_∞) pontnégyest kapjuk, így
   $$(CAB_1B_2) = (A_1APV_\infty).$$

Az (A_1APV_∞) pontnégyest C-ből $\overleftrightarrow{AB}$-re vetítve a (BAC_1C_2) pontnégyest kapjuk, így ismét a Pappos-Steiner tételt alkalmazva

$$(A_1APV_\infty) = (BAC_1C_2)$$

adódik. Összegezve,

$$(CAB_1B_2) = (BAC_1C_2).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{(CAB_1)}{(CAB_2)} = \frac{(BAC_1)}{(BAC_2)}.$$

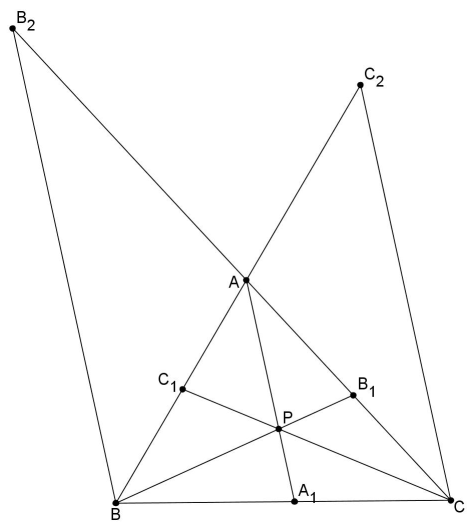
Átrendezés után az osztóviszony tulajdonságainak felhasználásával innen

$$(CAB_1) \cdot (ABC_1) = \frac{(CAB_2)}{(BAC_2)}.$$

A párhuzamos szelők tétele miatt $(CAB_2) = (CA_1B)$ és $(BAC_2) = (BA_1C)$, tehát az előző egyenlőségből következően

$$(CAB_1) \cdot (ABC_1) = \frac{(CA_1B)}{(BA_1C)} = \frac{CB}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{BC} = \frac{A_1C}{BA_1} = \frac{1}{(BCA_1)}.$$

Ez - átrendezés után - állításunk igazságát jelenti.



4. Tegyük fel végül, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$. Jelöljük $\overleftrightarrow{AA_1}$ és $\overleftrightarrow{BB_1}$ metszéspontját P-vel, legyen a $\overleftrightarrow{CP}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesek metszéspontja C_2. Ekkor az állítás előző része alapján $(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = 1$ teljesül. Ezt feltételünkkel összevetve következik, hogy $(ABC_1) = (ABC_2)$, ahonnan valóban, $C_1 = C_2$ adódik.

■

2.5. Elemi geometriai alkalmazások

2.22. Állítás. *Ha két háromszög megfelelő oldalegyenesei párhuzamosak, akkor a két háromszög egybevágó vagy középpontosan hasonló.*

Bizonyítás: A megfelelő oldalegyenesek párhuzamossága azt jelenti, hogy a két háromszög a végtelen távoli egyenesre, mint tengelyre nézve perspektív. A Desargues-tétel megfordítása miatt ekkor pontra nézve perspektívek. Amennyiben a perspektivitás középpontja végtelen távoli pont, az egyik háromszöget párhuzamos eltolás viszi a másikba, és így egybevágóak. Ha a perspektivitás középpontja véges helyzetű pont, akkor a két háromszög középpontosan hasonló. (Az a tény, hogy a két háromszög hasonló, a megfelelő szögeik egybevágósága miatt nyilvánvaló.) ■

2.23. Állítás. *Tetszőleges háromszög súlyvonalai egy pontra illeszkednek. A súlyvonalak közös pontját a háromszög* súlypont*jának mondjuk.*

Bizonyítás: Ha A_1, B_1 és C_1 a háromszög megfelelő oldalainak felezőpontjai, az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalegyenesei párhuzamosak, hiszen a háromszög középvonalai párhuzamosak az oldalakkal. Így a két háromszög a végtelen távoli egyenesre, mint tengelyre nézve perspektívek, ezért a Desargues-tétel megfordítása miatt pontra nézve is perspektívek. Ez pedig állításunk igazságát jelenti. ■

Megjegyezzük, hogy állításunk a Ceva-tétel alkalmazásával is igen egyszerűen látható be. A bizonyítás jelöléseit alkalmazva ugyanis $(ABC_1) = (BCA_1) = (CAB_1) = 1$, hiszen A_1, B_1 és C_1 felezőpontok. Ebből következően $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$ valóban fennáll.

2.24. Állítás. *Tetszőleges háromszög magasságvonalai egy pontra illeszkednek. A magasságvonalak közös pontját a háromszög* magasságpont*jának mondjuk.*

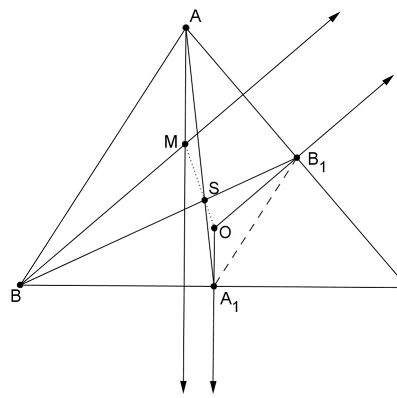
Bizonyítás: Legyen az ABC háromszög A-ra illeszkedő magasságának talppontja A_1, legyen $d(A, A_1) = m$, $d(B, A_1) = x$, $d(A_1, C) = y$, és legyenek az ABC háromszög szögei rendre α, β, γ nagyságúak. Tegyük fel először, hogy β és γ hegyesszög. Ekkor az AA_1B derékszögű háromszögből leolvasható, hogy $\tan\beta = \frac{m}{x}$; az AA_1C derékszögű háromszögből leolvashatóan pedig $\tan\gamma = \frac{m}{y}$. Így

$$(BCA_1) = \frac{x}{y} = \frac{m}{y} \cdot \frac{x}{m} = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}.$$

Abban az esetben, ha β vagy γ tompaszög, $(BCA_1) = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ hasonlóan ellenőrizhető. A további magasságok talppontjait rendre B_1-el illetve C_1-el jelölve, a fenti gondolatmenetet megismételve látható, hogy $(CAB_1) = \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma}$ és $(ABC_1) = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$, így

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} \cdot \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = 1.$$

Ez a Ceva-tétel alapján állításunk igazságát jelenti. ■



2.25. Tétel. *Tetszőleges háromszög magasságpontja, súlypontja, és körülírt körének középpontja kollineárisak. Közös egyenesüket a háromszög* Euler-egyenes*ének hívjuk.*

Bizonyítás: Megtartva jelöléseinket, legyen az ABC háromszög $\overline{BC}$ oldalának felezőpontja A_1, és az $\overline{AC}$ oldal felezőpontja B_1. Legyen továbbá A_∞ a $\overleftrightarrow{BC}$ oldalegyenesre *merőleges irányú* végtelen távoli pont, valamint B_∞ az $\overleftrightarrow{AC}$ oldalegyenesre merőleges irányú végtelen távoli pont.

Ekkor az AA_1A_∞ és BB_1B_∞ háromszögek pontra nézve perspektívek. Valóban, mivel $\overline{A_1B_1}$ középvonal, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1}$, így metszéspontjuk végtelen távoli pont. Ezért ez a metszéspont illeszkedik $\overleftrightarrow{A_\infty B_\infty}$-re, hiszen utóbbi egyenes a végtelen távoli egyenes.

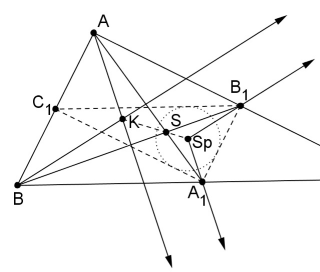
Így a Desargues-tétel miatt az AA_1A_∞ és BB_1B_∞ háromszögek tengelyre nézve is perspektívek. A pespektivitás tengelyére illeszkedik

- $\overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{BB_1}$, a háromszög *súlypont*ja;
- $\overleftrightarrow{AA_\infty} \cap \overleftrightarrow{BB_\infty}$, a háromszög *magasságpont*ja;
- $\overleftrightarrow{A_1A_\infty} \cap \overleftrightarrow{B_1B_\infty}$, a háromszög *körülírt körének középpont*ja.

■

2.26. Tétel. *Tetszőleges háromszög súlypontja, beírt körének középpontja, és a középvonalai által alkotott háromszög beírt körének középpontja (az ún.* Spieker-pont*) kollineárisak. Közös egyenesüket a háromszög* Nagel-egyenes*ének hívjuk.*

Bizonyítás: Megtartva jelöléseinket, legyen az ABC háromszög $\overline{BC}$ oldalának felezőpontja A_1, és az $\overline{AC}$ oldal felezőpontja B_1. Legyen továbbá $A_{2\infty}$ az A csúcsra illeszkedő szögfelező végtelen távoli pontja, $B_{2\infty}$ a B csúcsra illeszkedő szögfelező végtelen távoli pontja.



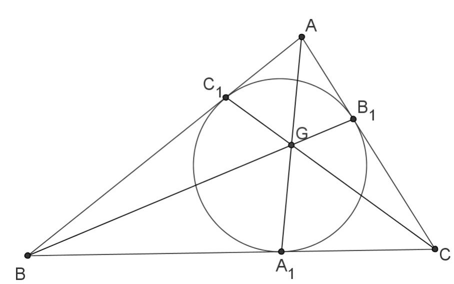
Ekkor az $AA_1A_{2\infty}$ és $BB_1B_{2\infty}$ háromszögek pontra nézve perspektívek. Valóban, mivel $\overline{A_1B_1}$ középvonal, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1}$, így metszéspontjuk végtelen távoli pont. Ezért ez a metszéspont illeszkedik $\overleftrightarrow{A_{2\infty}B_{2\infty}}$-re, hiszen utóbbi egyenes a végtelen távoli egyenes.

Így a Desargues-tétel miatt az $AA_1A_{2\infty}$ és $BB_1B_{2\infty}$ háromszögek tengelyre nézve is perspektívek. A pespektivitás tengelyére illeszkedik

- $\overleftrightarrow{AA_1} \cap \overleftrightarrow{BB_1}$, a háromszög *súlypont*ja;
- $\overleftrightarrow{AA_{2\infty}} \cap \overleftrightarrow{BB_{2\infty}}$, a háromszög szögfelezőinek metszéspontja, azaz a *beírt kör középpont*ja;
- $\overleftrightarrow{A_1A_{2\infty}} \cap \overleftrightarrow{B_1B_{2\infty}}$, a háromszög *Spieker-pont*ja.

■

2.27. Állítás. *Tetszőleges háromszög beírt körének az oldalakra illeszkedő érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötve konkurrens egyeneseket kapunk. Az egyenesek közös pontját a háromszög* Gergonne-pont*jának hívjuk.*

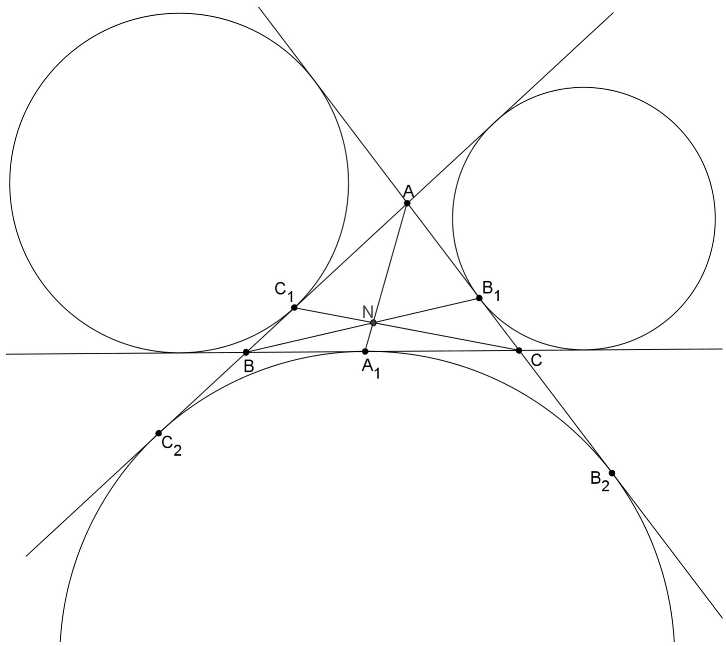


Bizonyítás: Legyenek az ABC háromszög beírt körének a megfelelő oldalegyenesekre illeszkedő érintési pontjai A_1, B_1 és C_1. Mivel tetszőleges körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, $d(A, C_1) = d(A, B_1)$, $d(C_1, B) = d(A_1, B)$ és $d(A_1, C) = d(B_1, C)$. Így

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = \frac{d(A,C_1)}{d(C_1,B)} \cdot \frac{d(B,A_1)}{d(A_1,C)} \cdot \frac{d(C,B_1)}{d(B_1,A)} = \frac{d(A,C_1)}{d(C_1,B)} \cdot \frac{d(B,C_1)}{d(B_1,C)} \cdot \frac{d(C,B_1)}{d(C_1,A)} = 1,$$

ami a Ceva-tétel miatt állításunk igazságát jelenti. ■

2.28. Állítás. *Tetszőleges háromszög hozzáírt köreinek az oldalszakaszokra illeszkedő érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötve konkurrens egyeneseket kapunk. Az egyenesek közös pontját a háromszög* Nagel-pont*jának hívjuk.*



Bizonyítás: Legyenek az ABC háromszög hozzáírt köreinek a megfelelő oldalszakaszokra illeszkedő érintési pontjai A_1, B_1, C_1, valamint a megfelelő oldalak hosszai a, b, c. Tekintsük az a hosszúságú oldalhoz írt kört, és legyen ennek a másik két oldalegyenesre illeszkedő érintési pontja B_2 és C_2. Mivel az A pontból e körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, $d(A, B_2) = d(A, C_2)$. Ebből következik, hogy

$$d(A, C) + d(C, B_2) = d(A, B) + d(B, C_2),$$

azaz

$$b + d(C, B_2) = c + d(B, C_2).$$

Itt - szintén a külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egybevágóságát kihasználva - $d(C, B_2) = d(C, A_1)$ és $d(B, C_2) = d(B, A_1)$. Tehát

$$b + d(C, A_1) = c + d(B, A_1).$$

Az egyenlőség két oldalán szereplő szakaszok összege azonban kiadja a háromszög kerületét, és mindkét oldal egyenlő a háromszög $s := \frac{a+b+c}{2}$ félkerületével. Tehát például

$$d(C, A_1) = s - b.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$d(B, A_1) = s{-}c$, $d(C, B_1) = s{-}a$, $d(B_1, A) = s{-}c$, $d(A, C_1) = s{-}b$, $d(C_1, B) = s{-}a$.

Így

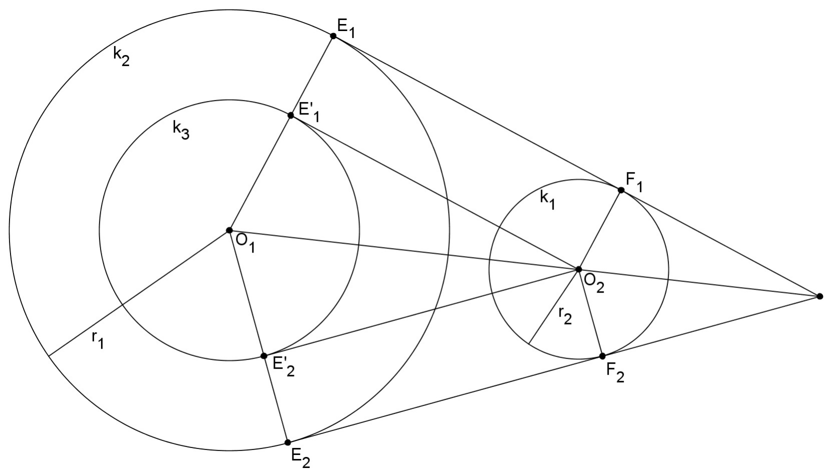
$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1,$$

ami a Ceva-tétel miatt állításunk igazságát jelenti. ∎

2.29. Definíció. *Ha van olyan P középpontú hasonlóság, amely egy k_1 kört egy k_2 körbe visz, azt mondjuk, hogy P a k_1 és k_2 körök* hasonlósági pont*ja.*

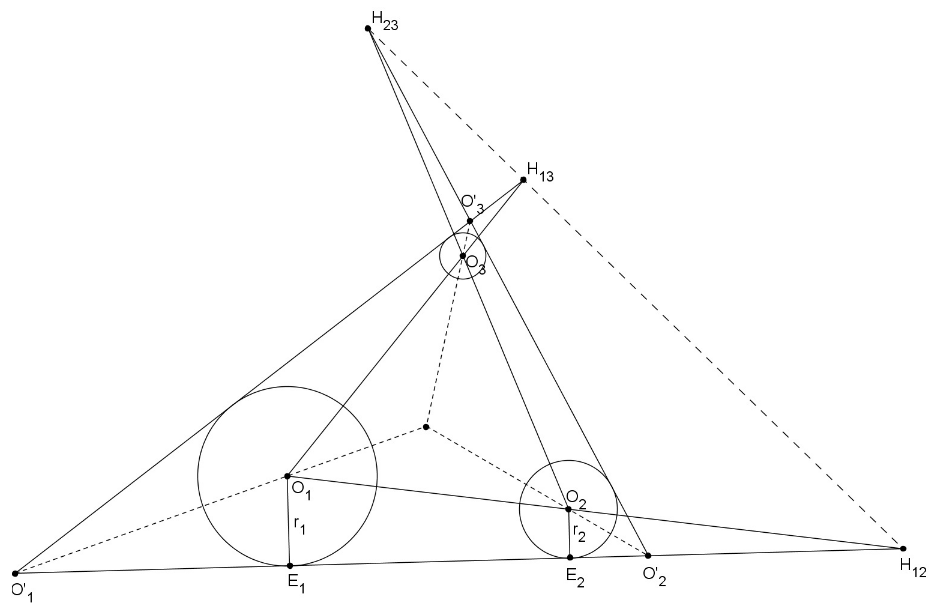
Világos, hogy ha a k_1 és k_2 körök egyike sem tartalmazza a másikat, akkor közös külső érintőik metszéspontja a két kör hasonlósági pontja. Ezt a pontot a két kör *külső hasonlósági pont*jának nevezzük. Szimmetria okokból világos, hogy *két kör hasonlósági pontjai illeszkednek a két kör centrálisára.*

Felidézzük két kör közös külső érintőinek szerkesztését. Legyen k_1 középpontja O_1 és sugara r_1, k_2 középpontja O_2 és sugara r_2. Tegyük fel továbbá, hogy $r_1 > r_2$.



- Tekintsük az O_1 középpontú, $r_1 - r_2$ sugarú k_3 kört.
- Szerkesszük meg az O_2-ből k_3-hoz húzható érintőket, ezek érintési pontjai legyenek E_1' és E_2'.
- A keresett közös érintők az előző érintőkkel párhuzamosak, így k_1-re illeszkedő érintési pontjaik illeszkednek az $\overrightarrow{O_1E_1'}$ és $\overrightarrow{O_1E_2'}$ félegyenesekre.

Valóban, ha például a keresett $\overleftrightarrow{E_1F_1}$ közös érintőt eltoljuk O_2-be, akkor a k_3 kör egy érintőjét kapjuk.



Három kör külső hasonlósági pontjai.

2.30. Tétel. *(Monge) Ha három kör közül bármely kettőnek létezik külső hasonlósági pontja, akkor azok kollineárisak.*

Bizonyítás: Legyenek a tekintett k_1, k_2, k_3 körök középpontjai rendre O_1, O_2, O_3, sugaraik r_1, r_2, r_3, páronként vett külső hasonlósági pontjaik pedig H_{12}, H_{13}, H_{23}.

Korábban tett megjegyzésünk értelmében a H_{12}, H_{13}, H_{23} pontok illeszkednek az $O_1O_2O_3$ háromszög oldalegyeneseire. Meghatározzuk például az $(O_1O_2H_{12})$ osztóviszonyt.

Legyenek a H_{12}-ből k_1-hez és k_2-höz húzott valamely közös érintési pontjai rendre E_1 és E_2. Ekkor az $O_1E_1H_{12}$ és $O_2E_2H_{12}$ háromszögek derékszögűek és egy szögük közös, így hasonlóak. Ebből következik, hogy

$$(O_1O_2H_{12}) = \frac{O_1H_{12}}{H_{12}O_2} = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Hasonlóan, $(O_2O_3H_{23}) = -\frac{r_2}{r_3}$ és $(O_3O_1H_{13}) = -\frac{r_3}{r_1}$. Így

$$(O_1O_2H_{12})(O_2O_3H_{23})(O_3O_1H_{13}) = -\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = -1,$$

így a Menelaosz-tétel alapján következik állításunk. ■

Megjegyezzük, hogy Monge tételére a Desargues-tétel alkalmazásával is egyszerű bizonyítást adhatunk. Jelölje ugyanis O_i' a k_i kör másik két körrel közös külső érintőinek metszéspontját ($i \in \{1, 2, 3\}$). Ekkor az O_i pont illeszkedik az

O_i' pontból a k_i körhöz húzott érintők által meghatározott szög szögfelezőjére. Mivel az $O_1'O_2'O_3'$ háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást, és az $O_1O_2O_3$ háromszög csúcsai egy-egy megfelelő szögfelezőre illeszkednek, ez azt jelenti, hogy az $O_1O_2O_3$ és $O_1'O_2'O_3'$ háromszögek pontra nézve perspektívek. Így a két háromszög tengelyre nézve is perspektív, ami állításunk igazságát jelenti.

2.6. Kollineációk

2.31. Definíció. *A valós projektív sík pontjainak halmazát önmagára képező olyan bijektív leképezéseket, amelyeknél kollineáris pontok képei kollineárisak,* kollineáció*knak nevezzük.*

Kollineációnál tetszőleges e egyenes pontjainak képei is kollineárisak, ezek közös e' egyenesét az *e egyenes kép*ének nevezzük. Egy pont egy kollineáció *fixpont*ja, ha képe önmaga; egy e egyenes egy kollineációnál *invariáns egyenes*, ha $e' = e$. Egyszerűen látható, hogy invariáns egyenesek metszéspontja fixpont és fixpontokra illeszkedő egyenes invariáns.

Vegyük észre, hogy az affinitások és a kollineációk hasonlóan értelmezett leképezések, jelentős különbség azonban, hogy az affinitások értelmezési tartománya az euklideszi sík, míg a kollineációké a valós projektív sík. Ebből következik azonban, hogy *az affinitások pontosan azok a kollineációk, amelyeknél a végtelen távoli pontok képei is végtelen távoli pontok*, azaz amelyeknél a *végtelen távoli egyenes invariáns.*

A következő fontos tételt később fogjuk igazolni.

2.32. Tétel. *Minden kollineáció kettősviszonytartó leképezés, azaz kollineáris pontnégyes kettősviszonya megegyezik kollineációs képeik kettősviszonyával.*

2.33. Tétel. *(A kollineációk alaptétele) Megadva az A, B, C, D és A', B', C', D' általános helyzetű pontnégyeseket (azaz olyan pontnégyeseket, amelyek elemei között nincsen három kollineáris) egy és csak egy olyan kollineáci létezik, amelynél A képe A', B képe B', C képe C' és D képe D'.*

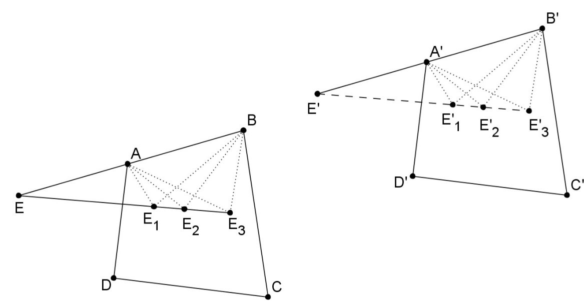
Bizonyítás: Először konstruktív bizonyítást adunk arra, hogy a fenti tulajdonságú kollineáció *egyértelmű*, azaz megmutatjuk, hogyan szerkeszthető négy általános helyzetű pontnak és azok kollineációs képének ismeretében valamely további pont képe.

- Az $M := \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ pont képe $M' := \overleftrightarrow{A'D'} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$. Így amennyiben az X pont illeszkedik az $ABCD$ teljes négyszög valamelyik - például $\overleftrightarrow{AD}$ - oldalegyenesére, akkor a kollineáció kettősviszonytartása folytán X' az a pont, amelyre teljesül, hogy $(M'A'D'X') = (MADX)$.
- Tegyük fel, hogy P nem illeszkedik a négyszög egyik oldalegyenesére sem. Meghatározzuk először a $\overleftrightarrow{PA}$ egyenes kollineációs képét. Mivel - a kollineációk alaptétele és a dualitás elve miatt - a kollineációk megőrzik

a sugárnégyesek kettősviszonyát is, $A(BCDP) = A'(B'C'D'P')$, így az $\overleftrightarrow{A'P'}$ egyenes egyértelműen megszerkeszthető.

- Az előző ponthoz hasonlóan a $\overleftrightarrow{BP}$ egyenes képe a $B(ACDP) = B'(A'C'D'P')$ kettősviszonyok egyenlőségét felhasználva szerkeszthető meg.
- A keresett P' pont így az előzőekben szerkesztett $\overleftrightarrow{A'P'}$ és $\overleftrightarrow{B'P'}$ egyenesek metszéspontja.

Megmutatjuk, hogy amennyiben tetszőleges további P pont képét a fenti szabállyal *értelmezzük*, kollineációt adunk meg, így *létezik* a kívánt tulajdonságú kollineáció.



Legyenek E_1, E_2, E_3 kollineáris pontok, a fent értelmezett leképezés általi képeik pedig E_1', E_2' és E_3'. Meg kell mutatnunk, hogy E_1', E_2' és E_3' kollineáris. Legyen $E := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{E_1E_2}$, ennek képe a fenti leképezésnél E'. A szerkesztés módjából adódóan

$$A'(E_1'E_2'E_3'E') = A(E_1E_2E_3E).$$

Mivel E_1, E_2, E_3 és E kollineárisak, a Pappos-Steiner tétel duálisa miatt

$$A(E_1E_2E_3E) = B(E_1E_2E_3E).$$

A szerkesztésünk módjából adódóan pedig

$$B(E_1E_2E_3E) = B'(E_1'E_2'E_3'E').$$

Így azt kaptuk, hogy

$$A'(E_1'E_2'E_3'E') = B'(E_1'E_2'E_3'E').$$

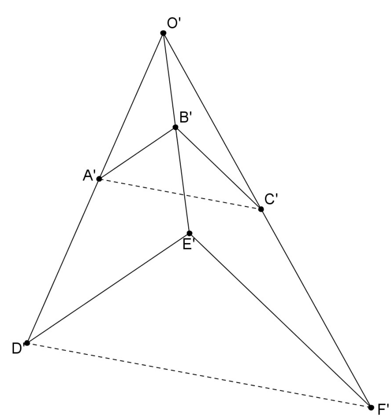
Mivel E' illeszkedik az $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesre, a fundamentális tulajdonság duálisa miatt ebből következik, hogy E_1', E_2' és E_3' kollineárisak, ahogyan azt igazolnunk kellett. ∎

2.34. Következmény. *Ha egy kollineációnak van négy általános helyzetű fixpontja, akkor az identitás, azaz minden további pontot fixen hagy.*

A kollineációk alaptétele miatt bármely két általános helyzetű pontnégyes egyike kollineációval a másikba transzformálható. Ezért, egy illeszkedési tétel igazolásánál tetszőleges általános helyzetű pontnégyesről feltehető valamilyen speciális tulajdonság. Például a Fano-tulajdonság ellenőrzéséhez tekintsünk egy $ABCD$ teljes négyszöget és egy olyan kollineációt, amelynél e négyszög $A'B'C'D'$ képe négyzet. Ekkor $A'B'C'D'$ átlóspontjai közül kettő végtelen távoli pont, a harmadik pedig a négyzet átlóinak metszéspontja. Mivel tetszőleges négyzet átlói metszőek, ez a három pont nem lehet kollineáris. Így $A'B'C'D'$ átlóspontjai nem kollineárisak, ezért a kollineációs ősképeik, azaz $ABCD$ átlóspontjai sem kollineárisak.

A fenti módszer annak figyelembevételével is alkalmazható, hogy mivel bármely két általános helyzetű pontnégyes egyike kollineációval a másikba transzformálható, speciálisan a sík bármely egyenese kollineációval átvihető a végtelen távoli egyenesbe. Ez a tény lehetőséget ad a valós projektív sík illeszkedési tételeinek egy egyszerű módszerrel történő bizonyítására: egy megfelelő kollineáció alkalmazásával elérjük, hogy a konfigurációban szereplő valamely egyenes a végtelen távoli egyenes legyen. A módszert illusztrálandó, újabb bizonyítást adunk a Desargues-tételre és a Pappos-tételre.

Tekintsük először az O pontra nézve perspektív ABC és DEF háromszögeket, megfelelő oldalegyeneseik metszéspontjai legyenek $P := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $Q := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$, $R := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{DF}$. Azt kell megmutatnunk, hogy P, Q és R kollineáris. Alkalmazzunk olyan kollineációt, amelynél P és Q képei végtelen távoli pontok. Azt kell megmutatnunk, hogy ennél a kollineációnál R képe is végtelen távoli pont.



Tegyük fel tehát, hogy - az X pont kollineációs képét X'-vel jelölve - $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{D'E'}$ és $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{E'F'}$. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{D'F'}$. Mivel

$\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{D'E'}$, a párhuzamos szelők tétele miatt

$$\frac{d(O',A')}{d(O',D')} = \frac{d(O',B')}{d(O',E')}.$$

$\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{E'F'}$ folytán, ismét a párhuzamos szelők tételét alkalmazva

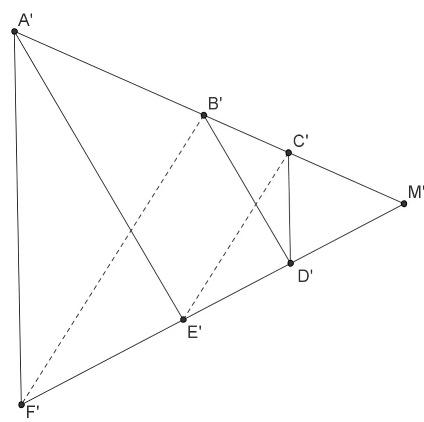
$$\frac{d(O',B')}{d(O',E')} = \frac{d(O',C')}{d(O',F')}.$$

A két egyenlőségből adódóan

$$\frac{d(O',A')}{d(O',D')} = \frac{d(O',C')}{d(O',F')},$$

így a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt valóban $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{D'F'}$.

Tekintsük az A, B, C kollineáris pontokat, és a D, E, F kollineáris pontokat, amelyek mindegyike különbözik közös egyeneseik M metszéspontjától. Legyen $P := \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{DB}$, $Q := \overleftrightarrow{BF} \cap \overleftrightarrow{EC}$, $R := \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{DC}$. Azt kell megmutatnunk, hogy P, Q és R kollineáris. Alkalmazzunk olyan kollineációt, amelynél P és R képei végtelen távoli pontok. Azt kell megmutatnunk, hogy ennél a kollineációnál Q képe is végtelen távoli pont.



Tegyük fel tehát - az X pont kollineációs képét ismét X'-vel jelölve - $\overleftrightarrow{A'E'} \parallel \overleftrightarrow{D'B'}$ és $\overleftrightarrow{A'F'} \parallel \overleftrightarrow{D'C'}$. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor $\overleftrightarrow{B'F'} \parallel \overleftrightarrow{E'C'}$. Mivel $\overleftrightarrow{A'E'} \parallel \overleftrightarrow{D'B'}$, a párhuzamos szelők tétele miatt

$$\frac{d(M',A')}{d(M',B')} = \frac{d(M',E')}{d(M',D')}.$$

$\overleftrightarrow{A'F'} \parallel \overleftrightarrow{D'C'}$ folytán, ismét a párhuzamos szelők tételét alkalmazva

$$\frac{d(M',A')}{d(M',C')} = \frac{d(M',F')}{d(M',D')}.$$

A második egyenletet elosztva az elsővel

$$\frac{d(M', B')}{d(M', C')} = \frac{d(M', F')}{d(M', E')}$$

adódik, amiből, a párhuzamos szelők tételének megfordítását alkalmazva, valóban $\overleftrightarrow{B'F'} \parallel \overleftrightarrow{E'C'}$ következik.

2.7. Centrális kollineációk

2.35. Definíció. *Egy kollineáció* tengely*én a kollineáció egy pontonként fix egyenesét értjük. Azt mondjuk, hogy egy pont egy kollineáció* centruma*, ha a tekintett pontra illeszkedő összes egyenes a kollineáció invariáns egyenese.*

2.36. Lemma. *Ha egy kollineációnak van centruma, akkor tetszőleges, nem fix pontot a képével összekötő egyenes átmegy a centrumon*

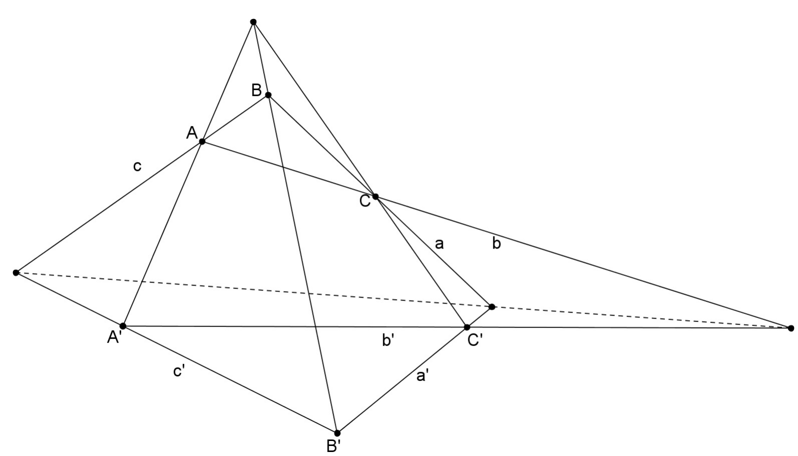
Bizonyítás: Ha A tetszőleges pont és C centrum, akkor a centrum definíciójából adódóan $\overleftrightarrow{CA}$ invariáns egyenes, és így illeszkedik rá A képe. ∎

A dualitás elve alapján automatikusan következik az alábbi állítás.

2.37. Következmény. *Ha egy kollineációnak van tengelye, akkor minden olyan egyenes, ami nem invariáns, a tengelyen metszi a képét.*

2.38. Állítás. *A valós projektív sík egy kollineációjának pontosan akkor van tengelye, ha van centruma.*

Bizonyítás: A dualitás elve alapján elegendő a tétel egyik irányát ellenőrizni.



Tegyük fel, hogy egy kollineációnak van centruma. Megmutatjuk, hogy ekkor a kollineációnak van tengelye. Azt fogjuk ellenőrizni, hogy tetszőleges egyenesnek és képének közös pontja ugyanazon egyenesre illeszkedik. Tegyük fel, hogy sem a, sem b nem invariáns egyenesek. Megmutatjuk, hogy tetszőleges további c egyenes és annak c' képe az $a \cap a'$ és $b \cap b'$ pontok egyenesén metszi egymást. Legyen a és b metszéspontja C, a és c metszéspontja B, b és c metszéspontja A; a' és b' metszéspontja C', a' és c' metszéspontja B', b' és c' metszéspontja A'. Ekkor A képe A', B képe B', C képe C'. Mivel feltételünk szerint a kollineációnak van centruma, az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek mindegyike átmegy a centrumon, így az ABC és $A'B'C'$ háromszögek pontra nézve perspektívek. A Desargues-tételből adódóan ekkor tengelyre nézve is perspektívek, így c és c' valóban $a \cap a'$ és $b \cap b'$ pontok egyenesén metszi egymást. Ez tételünk igazságát jelenti. ■

Megjegyezzük, hogy az affinitásokra vonatkozó, korábban már bizonyított megfelelő állításaink az előző állítás egyszerű következményei. Egy olyan affinitás, amelynek van tengelye, az olyan kollineációt jelent, amelynek van tengelye és egy invariáns egyenese a végtelen távoli egyenes. Mivel azonban a tengellyel rendelkező kollineációknak van centruma, amelyre minden invariáns egyenes illeszkedik; adódik, hogy a tekintett kollineáció centruma végtelen távoli pont. Így bármely pontot a képével összekötő egyenes ugyanolyan irányú. Ez valóban azt jelenti, hogy *a tengelyes affinitásoknak van iránya.* Megfordítva, ha egy affinitásnak van iránya, az azt jelenti, hogy az affinitás olyan kollineáció, amelynek centruma végtelen távoli pont. Ebből következően a kollineációnak van tengelye is. Abban az esetben, ha a tengely véges helyzetű, a szóban forgó affinitás tengelyes affinitás. Abban az esetben pedig, ha a tengely a végtelen távoli egyenes, a tekintett affinitás párhuzamos eltolás.

2.39. Definíció. *Ha egy kollineációnak van centruma (és ebből következően tengelye is), akkor* centrális kollineáció*nak nevezzük. Egy centrális kollineáció* eláció*, ha centruma illeszkedik a tengelyére, ellenkező esetben* homológia*.*

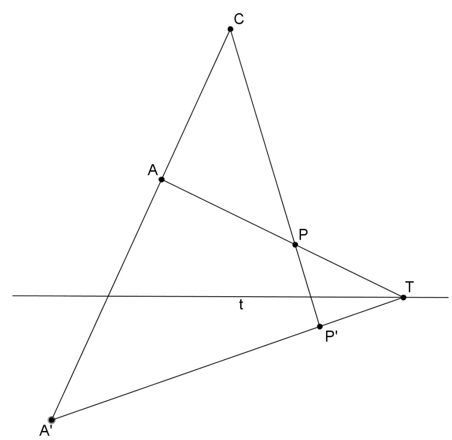
Egy centrális kollineáció fixpontjai tehát pontosan a centrum, valamint a tengelyre illeszkedő összes pont; egy centrális kollineáció invariáns egyenesei a tengely, valamint a centrumra illeszkedő összes egyenes.

Megjegyezzük, hogy speciális centrális kollineációként több fontos geometriai transzformációt is megkaphatunk: abban az esetben, ha a centrum végtelen távoli pont, akkor a leképezés *tengelyes affinitás*; ha a tengely a végtelen távoli egyenes, akkor a leképezés *középpontos hasonlóság*; végül, ha a centrum és a tengely egyaránt végtelen távoli, akkor a leképezés *párhuzamos eltolás*.

2.40. Következmény. *Egy centrális kollineációt egyértelműen meghatároz centruma, tengelye, és a sík egy további pontjának képe.*

Bizonyítás: Állításunk közvetlenül következik a kollineációk alaptételéből, ugyanis a centrum, a tengely két pontja, és a további adott pont négy olyan általános helyzetű pont, amelyek kollineációs képeit ismerjük. ■

Legyen a kollineáció adott centruma C, tengelye t, és tegyük fel, hogy az A pont képe A'. Nyilvánvalóan csak akkor van ilyen centrális kollineáció, ha



C illeszkedik $\overleftrightarrow{AA'}$-re. Eljárást adunk arra, hogyan szerkeszthető a sík valamely további P pontjának képe.

- Legyen $\overleftrightarrow{AP}$ tengelyre illeszkedő pontja T.
- Ekkor $\overleftrightarrow{AP}$ kollineációs képe $\overleftrightarrow{TA'}$, így P' illeszkedik $\overleftrightarrow{TA'}$-re.
- Mivel P' nyilvánvalóan illeszkedik $\overleftrightarrow{CP}$-re is, ezért $P' = \overleftrightarrow{TA'} \cap \overleftrightarrow{CP}$.

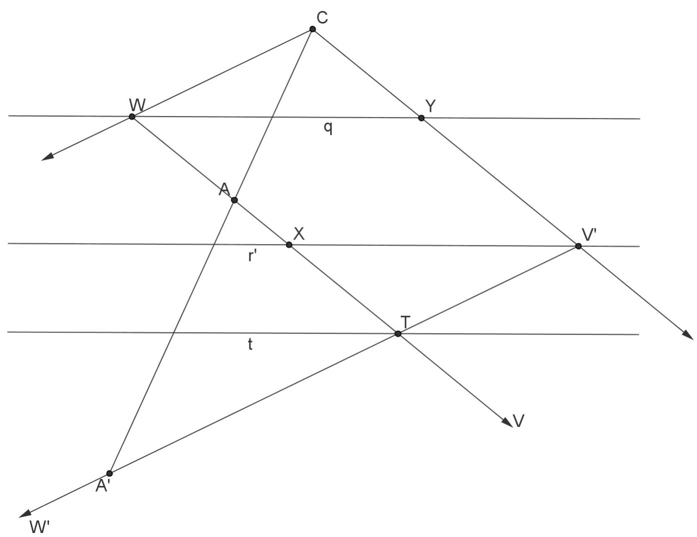
Abban az esetben, ha P illeszkedik $\overleftrightarrow{AA'}$-re, először egy $\overleftrightarrow{AA'}$-re nem illeszkedő Q segédpont képét szerkesztjük meg, majd a Q-nak megfelelő Q' pont ismeretében alkalmazható az előző eljárás.

2.41. Definíció. *Egy kollineációnál a végtelen távoli egyenes képét illetve őségképét* ellentengely*eknek hívjuk. A végtelen távoli egyenes ősképét* eltűnési egyenes*nek is nevezzük, és q-val jelöljük; a végtelen távoli egyenes képét r' jelöli.*

Eljárást adunk egy centrális kollineáció ellentengelyeinek szerkesztésére.

Legyen a kollineáció adott centruma C, tengelye t, és tegyük fel, hogy az A pont képe A'.

- A kollineáció ellentengelyei párhuzamosak a tengellyel. Valóban, a tengely végtelen távoli pontja a kollineáció fixpontja, így illeszkedik mind a tengely képére, mind pedig az ősképére. Így elegendő az ellentengelyek egy-egy pontját megszerkszteni.
- Vegyünk fel az A pontra illeszkedő tetszőleges egyenest, ennek végtelen távoli pontja legyen V_∞. Az egyenes képe illeszkedik a T tengelypontra és A'-re, így V_∞ képe illeszkedik a $\overleftrightarrow{TA'}$ egyenesre.
- Mivel tetszőleges pontot a képével összekötő egyenes átmegy a centrumon, a C-t V_∞-el összekötő egyenes, azaz a centrumon keresztül a tetszőlegesen



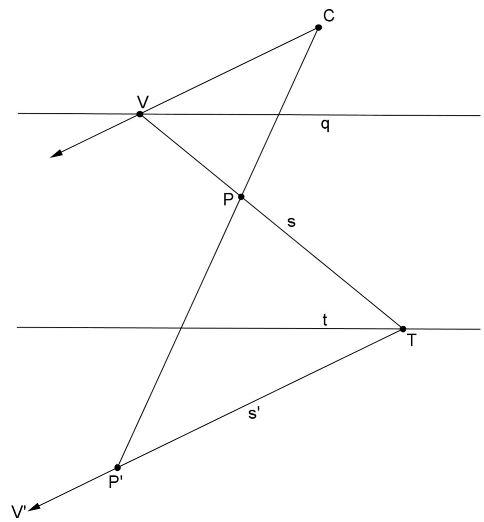
felvett $\overleftrightarrow{TA}$ egyenessel húzott párhuzamos szintén tartalmazza a keresett V' képpontot. Így ezt az egyenest $\overleftrightarrow{TA'}$-vel elmetszve adódik V'.

- A V'-re illeszkedő, t-vel párhuzamos egyenes az r' ellentengely.
- A q ellentengely szerkesztéséhez elegendő egyetlen végtelen távoli pont ősképét megszerkeszteni. Legyen W'_∞ a $\overleftrightarrow{TA'}$ egyenes végtelen távoli pontja.
- Ennek ősképe illeszkedik $\overleftrightarrow{TA}$-ra; valamint a centrumot W'_∞-el összekötő egyenesre, azaz a C-re illeszkedő, $\overleftrightarrow{TA'}$-vel párhuzamos egyenesre.
- A fenti két egyenes metszéspontja W'_∞ ősképe: W. A W-re illeszkedő, t-vel párhuzamos egyenes a q ellentengely.

2.42. Következmény. *Tetszőleges centrális kollineáció egyik ellentengelyének centrumtól vett távolsága megegyezik a másik ellentengely tengelytől vett távolságával.*

Bizonyítás: Az előző szerkesztés jelöléseit megtartva, legyen az r' ellentengely és $\overleftrightarrow{AT}$ metszéspontja X, a q ellentengely és $\overleftrightarrow{CV'}$ metszéspontja Y. Mivel a CWY és $TV'X$ háromszögek megfelelő oldalegyenesei - a szerksztés módjából adódóan - párhuzamosak, a két háromszög hasonló. Mivel $WYV'X$ paralelogramma, $d(W,Y) = d(X,V')$, így továbbá a CWY és $TV'X$ háromszögek egy megfelelő oldalpárja egybevágó, tehát a két háromszög egybevágó. Ekkor azonban magasságaik ugyanolyan hosszúak, a magasságszakaszok hosszai pedig éppen az állításunkban szereplő távolságok. ■

A centrális kollineáció alkalmazásainál sok esetben a centrális kollineáció C centruma, t tengelye, és q eltűnési egyenese ismert. Eljárást adunk arra, hogyan szerkeszthető ebben az esetben tetszőleges további P pont képe.



- Tekintsünk egy P-re illeszkedő tetszőleges s egyenest.
- Legyen s és q közös pontja V.
- Ekkor s képe illeszkedik a tengellyel közös T pontjára, valamint a V pont képére.
- Mivel V illeszkedik q-ra, képe végtelen távoli pont. Tetszőleges pontot a képével összekötő egyenes illeszkedik C-re, ezért V képe a $\overleftrightarrow{CV}$ egyenes V'_∞ végtelen távoli pontja.
- s képe tehát a T és V'_∞ pontokra illeszkedő, azaz a T-re illeszkedő $\overleftrightarrow{CV}$-vel párhuzamos s' egyenes.
- s' és $\overleftrightarrow{CP}$ közös pontja a keresett P' képpont.

2.8. Feladatok

1. Adottak a kollineáris A, B, C pontok. Szerkesszük meg azt a D pontot, amelyre

   a. $(ABCD) = \frac{3}{2}$;

   b. $(ABCD) = -4$.

2. Adottak a P pontra illeszkedő a, b, c, d egyenesek, valamint a P' pontra illeszkedő a', b', c' egyenesek. Szerkesszük meg azt a d' egyenest, amelyre $(abcd) = (a'b'c'd')$!

3. Az $ABCD$ négyszög A csúcsán át a $\overline{BD}$ átlóval és B csúcsán át az $\overline{AC}$ átlóval párhuzamosan húzott egyenesek metszéspontja E. Bizonyítsuk be, hogy az $\overleftrightarrow{EC}$ egyenes ugyanolyan arányban osztja a $\overline{BD}$ átlót, mint az $\overleftrightarrow{ED}$ egyenes az $\overline{AC}$ átlót!

4. Adott egy $\overline{AB}$ szakasz és annak F felezőpontja. Szerkesszünk a sík egy további adott P pontján át $\overline{AB}$-vel párhuzamos egyenest csak vonalzó alkalmazásával!

5. Adott egy $\overline{AB}$ szakasz és egy $\overleftrightarrow{AB}$-vel párhuzamos e egyenes. Szerkesszük meg csak vonalzóval $\overline{AB}$ felezőpontját!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ trapéz szárainak E metszéspontján át az alapokkal párhuzamost húzunk, akkor ezt az egyenest a trapéz két átlója olyan M, N pontokban metszi, hogy $\overline{MN}$ felezőpontja E!

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ trapéz átlóinak G metszéspontján át az alapokkal párhuzamost húzunk, akkor ezen az egyenesen a szárakkal való metszéspontok által alkotott szakaszt az átlók metszéspontja felezi!

8. Adott egy A pont és a b, c, d egyenesek. Szerkesszünk az A pontra illeszkedő olyan egyenest, melynek a megfelelő adott egyenesekkel közös B, C, D pontjaira teljesül, hogy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes!

9. Adott egy P pont, valamint az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontját P-vel összekötő egyenest!

10. Adott az euklideszi síkon egy e egyenes, továbbá az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontjára illeszkedő, e-vel párhuzamos egyenest!

11. Adottak az e és f, valamint az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az e és f egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontját az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontjával összekötő egyenest! (Feltételezzük, hogy az e és m, valamint f és n egyenespárok metszéspontjai hozzáférhetőek.)

12. Adottak az a, b, c konkurrens egyenesek és az egyenesek egyikére sem illeszkedő X, Y, Z pontok. Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek csúcsai az adott egyenesekre illeszkednek, és oldalegyeneseire illeszkednek a megadott pontok!

13. Valaki megrajzolt egy háromszöget úgy, hogy a csúcsai nem fértek rá a téglalap alakú papírlapra, de legalább az oldalaiból egy-egy szakasz látszik. Tudjuk, hogy a háromszög magasságpontja valahol a papírlapon van. Ezen a papírlapon dolgozva szerkesszük meg a háromszög magasságpontját!

14. Legyen adott egy ABC háromszög, valamint az M, N és P pontok! Legyen a $\overleftrightarrow{BP}$ és $\overleftrightarrow{CN}$ egyenesek metszéspontja R, a $\overleftrightarrow{CM}$ és $\overleftrightarrow{AP}$ egyenesek metszéspontja Q, valamint az $\overleftrightarrow{AN}$ és $\overleftrightarrow{BM}$ egyenesek metszéspontja S! Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{AR}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ és $\overleftrightarrow{CS}$ egyenesek pontosan akkor konkurrensek, ha az $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BN}$ és $\overleftrightarrow{CP}$ egyenesek konkurrensek!

15. Legyen az euklideszi síkon $PQRS$ egy paralelogramma, X a paralelogramma tetszőleges belső pontja. Jelölje a $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyenessel X-en keresztül húzott párhuzamos metszéspontját $\overleftrightarrow{PS}$-el M, $\overleftrightarrow{QR}$-el N; a $\overleftrightarrow{QR}$ oldalegyenessel X-en keresztül húzott párhuzamos metszéspontját $\overleftrightarrow{PQ}$-val K, $\overleftrightarrow{RS}$-el L. Bizonyítsuk be, hogy Q, S és $\overleftrightarrow{MK} \cap \overleftrightarrow{NL}$ kollineáris!

16. Tekintsünk az euklideszi síkon egy $ABCD$ paralelogrammát! Legyen P az ABD háromszög belső pontja; $\overleftrightarrow{BP}$ és $\overleftrightarrow{AD}$ metszéspontja Q, $\overleftrightarrow{DP}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ metszéspontja R. A Q-n keresztül $\overleftrightarrow{AB}$-vel húzott párhuzamos és az R-en keresztül $\overleftrightarrow{AD}$-vel húzott párhuzamos metszéspontja legyen S. Bizonyítsuk be, hogy C, P és S kollineáris!

17. Adott egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és a sík egy további A pontjának A' képe. Szerkesszük meg az $\overleftrightarrow{AA'}$ egyenes egy tetszőleges további pontjának képét!

18. Adott egy *eláció* centruma, tengelye, és a sík egy A pontjának A' képe. Szerkesszük meg a sík tetszőleges további pontjának képét, valamint az eláció ellentengelyeit!

19. Adott egy centrális kollineáció centruma, a tengelyének egy pontja, és a sík egy további egyenesének képe. Szerkesszük meg egy további adott pont képét!

20. Adott egy centrális kollineáció tengelyének egy pontja, a sík egy pontjának képe, és a sík egy egyenesének képe. Szerkesszük meg a kollineáció centrumát és tengelyét!

21. Adott egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és az r' ellentengely. Szerkesszük meg a sík egy pontjának képét!

22. Adott egy centrális kollineáció tengelye, q ellentengelye, és a sík egy pontjának képe. Szerkesszük meg a kollineáció centrumát!

23. Adott egy centrális kollineáció két ellentengelye és a sík egy egyenesének képe. Szerkesszük meg a kollineáció tengelyét és centrumát!

24. Adott egy centrális kollineáció centruma és két ellentengelye. Szerkesszük meg a sík egy adott pontjának képét!

25. Adott egy centrális kollineáció centruma, tengelye, q ellentengelye, és egy PQR háromszög. Szerkesszük meg a háromszög kollineációs képét, ha

a. a háromszög egyik oldala sem metszi q-t;

b. a háromszög P csúcsa illeszkedik q-ra, és egyik oldalszakasznak sincs közös belső pontja q-val;

c. a háromszög P csúcsa illeszkedik q-ra, és a $\overline{QR}$ oldal belső pontban metszi q-t;

d. P és Q illeszkedik q-ra;

e. a $\overline{PQ}$ és $\overline{QR}$ oldalszakaszok belső pontban metszik q-t.

26. Adott az euklideszi síkon két egyenes. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelynél az adott egyenesek képei

    a. párhuzamosak;

    b. merőlegesek.

27. Adott az euklideszi síkon egy tetszőleges négyszög. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelynél a tekintett négyszög képe

    a. paralelogramma;

    b. derékszögű trapéz;

    c. rombusz;

    d. téglalap;

    e. négyzet;

    f. előre megadott a oldalhosszúságú négyzet.

28. Adott az euklideszi sík egy négyzetének valamely kollineáció általi képe. Szerkesszük meg a négyzet egy kijelölt oldalán

    a. a felezőpont kollineációs képét;

    b. valamelyik harmadolópont kollineációs képét;

    c. az egyik harmadolópont kollineációs képének ismeretében a másik harmadolópont kollineációs képét!

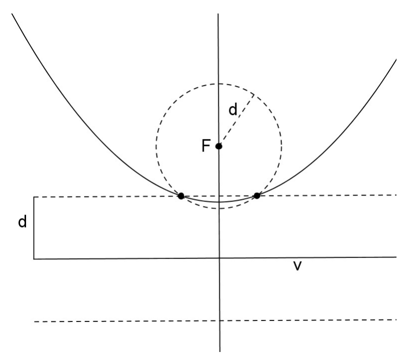
29. Legyen adott az euklideszi síkon egy szakasz és annak az egyik harmadolópontja. Szerkesszük meg csak vonalzó alkalmazásával a másik harmadolópontot!

3. Kúpszeletek

3.1. Parabolák

3.1. Definíció. *Legyen adott az euklideszi sík egy F pontja és v egyenese. Azon pontok mértani helyét, amelyeknek F-től és v-től vett távolságaik megegyeznek,* parabolá*nak nevezzük. Azt mondjuk, hogy F a parabola* fókusz*a, és v a parabola* vezéregyenes*e.*

Legyen adott egy parabola F fókusza és v vezéregyenese. Kiválasztva egy d távolságot, az F-től d távolságra levő pontok az F középpontú d sugarú körre illeszkednek, míg a v től d távolságra levő pontok halmaza egy párhuzamos egyenespár. Ezen párhuzamos egyenespárnak csak az egyik egyenese metszi az F középpontú d sugarú kört, a keletkező metszéspontok illeszkednek a parabolára.

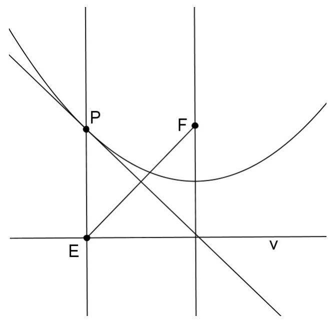


A fenti szerkesztésből látható, hogy az F-ből v-re állított t merőleges a parabola szimmetriatengelye: a kör és egyenes keletkező metszéspontjai ugyanis t-re szimmetrikusan helyezkednek el. Ezért a t egyenest a *parabola tengely*ének mondjuk.

Ha a tengely és a vezéregyenes metszéspontja X, akkor $\overline{FX}$ felezőpontja rajta van a parabolán, ugyanis egyszerűen látható, hogy a fókusztól és a vezéregyenestől egyaránt $\frac{d(F,X)}{2}$ távolságra van. Ez a tengely egyetlen metszéspontja a parabolával, ezért a parabola *tengelypont*jának hívjuk.

Megmutatjuk, hogy *a parabola tengelyével párhuzamos egyenesekre egy és csak egy parabolapont illeszkedik.* Legyen ugyanis e egy ilyen egyenes, e vezéregyenesre illeszkedő pontja legyen E. Ekkor az e egyenes valamely további P pontjának v-től vett távolsága $d(E,P)$, ez akkor és csak akkor egyezik meg a $d(F,P)$ távolsággal, ha P illeszkedik $\overline{EF}$ felezőmerőlegesére. Így az e-re illeszkedő egyetlen parabolapont e metszéspontja $\overline{EF}$ felezőmerőlegesével.

A parabola fókuszának és vezéregyenesének távolságát a parabola *paraméter*ének mondjuk. A p paraméterű parabola egyenlete abban a koor-



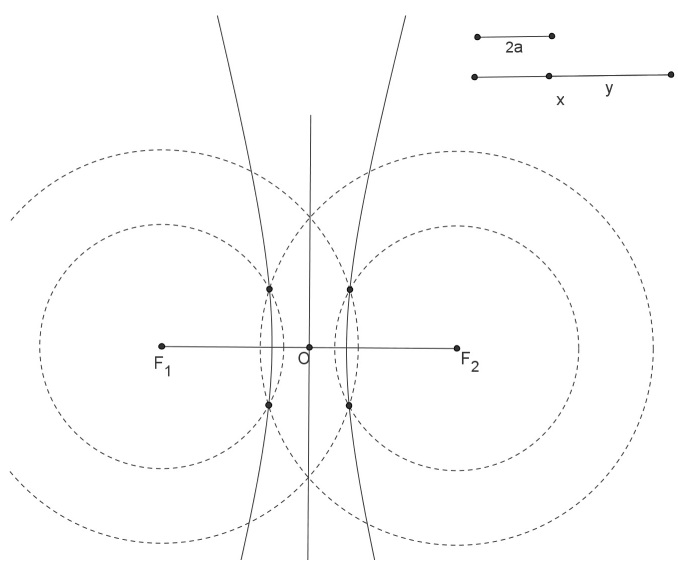
dinátarendszerben, amelynek y-tengelye a parabola tengelye és origója a parabola tengelypontja,

$$y = \frac{1}{2p}x^2.$$

Ezt az egyenletet a *parabola kanonikus egyenletének* mondjuk.

3.2. Hiperbolák

3.2. Definíció. *Legyenek adottak az euklideszi sík F_1 és F_2 pontjai és egy $2a$ valós szám úgy, hogy $2a < d(F_1, F_2)$ teljesüljön. Azon pontok mértani helyét a síkban, amelyeknek az F_1 és F_2 pontoktól vett távolságainak különbségének abszolút értéke $2a$,* hiperbolá*nak hívjuk. Az F_1 és F_2 pontok a hiperbola* fókusz*ai.*



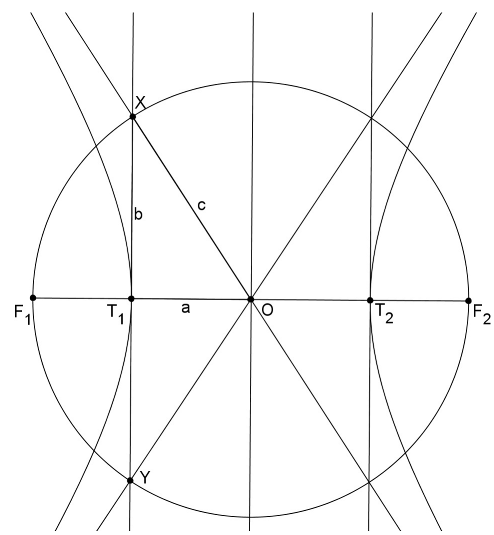
Bemutatjuk, hogy F_1, F_2 és egy $2a$ hosszúságú szakasz ismeretében hogyan szerkeszthetőek pontok a hiperbolából.

- Vegyünk fel egy tetszőleges x hosszúságú szakaszt, majd erre felmérve a $2a$ szakaszt, kapunk egy $y = x - 2a$ hosszúságú szakaszt. Ekkor $x - y = 2a$ teljesül.
- Az F_1 pont körül x sugárral, F_2 körül y sugárral körözve, a két kör metszéspontjai illeszkednek a hiperbolára.

Vegyük észre, hogy a hiperbola minden pontja ilyen módon megkapható, és minden ponttal együtt az $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ egyenesre való tükörképe is illeszkedik a hiperbolára. Így *a fókuszok egyenese a hiperbola egy szimmetriatengelye*, amelyet a *valós tengely egyenesé*nek hívunk.

Észrevehető az is, hogy a fenti szerkesztésben az F_1 és F_2 pontok felcserélésével a szerkesztett hiprbolapont $\overline{F_1F_2}$ felezőmerőlegesére vonatkozó tükörképét is megkapjuk, így *a fókuszok által meghatározott szakasz felezőmerőlegese is szimmetriatengelye a hiperbolának*, amelyet a *képzetes tengely egyenesé*nek mondunk.

Mivel két szimmetriatengely metszépontja a hiperbolának szimmetriaközéppontja, a hiperbola *középpontosan szimmetrikus a fókuszok által alkotott szakasz felezőpontjára*. Ezt a pontot a hiperbola *középpontjá*nak nevezzük.



Legyenek T_1 és T_2 a hipebola középpontjáról a távolságra lévő, a valós tengely egyenesére illeszkedő pontok. Tegyük fel, hogy T_1 az F_1-hez közelebbi pont. Ekkor

$$d(T_1, F_2) - d(T_1, F_1) = d(T_1, F_2) - d(T_2, F_2) = d(T_1, T_2) = 2a,$$

így T_1 és T_2 illeszkednek a hiperbolára. Azt mondjuk, hogy A és B a *valós tengely végpontjai*, $\overline{AB}$ pedig a *valós tengely*.

Legyen a fókuszok távolsága $2c$, és legyen b az a pozitív szám, amelyre

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ekkor a b számot a *képzetes tengely hosszá*nak mondjuk. Megmutatható, hogy a hiperbolának egyetlen pontja sem illeszkedik a képzetes tengelyre.

Tekintsük azt a koordinátarendszert, amelynek origója a hiperbola középpontja, x-tengelye a hiperbola valós tengelye, y-tengelye a hiperbola képzetes tengelye. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ebben a koordinátarendszerben a hiperbola egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ezt a hiperbola *kanonikus egyenleté*nek hívjuk.

Legyen t_1 a hiperbola T_1 tengelypontjára illeszkedő érintője, ez az egyenes merőleges a valós tengelyre. Legyen k az $\overline{F_1F_2}$ átmérőjű kör. Legyenek X és Y a t_1 egyenes és a k kör közös pontjai. Ekkor - a hiperbola középpontját O-val jelölve - az $\overleftrightarrow{OX}$ és $\overleftrightarrow{OY}$ egyeneseket a hiperbola *aszimptotá*inak hívjuk. Vegyük észre, hogy a $\overline{T_1X}$ szakasz hossza ekkor b.

Megmutatható, hogy a hiperbolaágak közötti pontok mindegyikéből két hiperbolaérintő húzható, kivéve az aszimptoták pontjait: az aszimptoták O-tól különböző pontjaiból egy hiperbolaérintő húzható, O-ra nem illeszkedik hiperbolaérintő.

3.3. A kúpszeletek projektív értelmezése

3.3. Definíció. *A valós projektív sík* kúpszelet*ein a körök kollineációs képeit értjük.*

A fenti definíciót az alábbi meggondolás motiválja. A kúpszeletek - szemléletesen - a kúpokból a kúp csúcsára nem illeszkedő síkok által kimetszett alakzatok. Minden kúp körkúpnak tekinthető, a kúp pedig a körmetszet és egy tetszőleges metsző sík közötti olyan középpontos vetítést ad meg, amelynek centruma a kúp csúcsa. A térbeli középpontos vetítések a síkbeli kollineációknak felelnek meg, tehát a síkmetszeteket valóban körök kollineációs képeiként kapjuk.

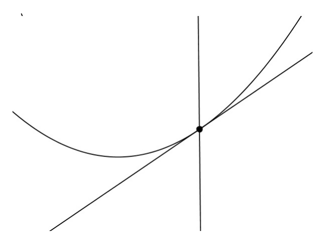
Ez a szemléletes meggondolás azt sejtteti, hogy *a kúpszeletek a körök, ellipszisek, parabolák és hiperbolák.* Ha ugyanis egy kúpot olyan síkkal metszünk el, amely a kúp egyetlen alkotójával sem párhuzamos, kört vagy ellipszist kapunk. Amennyiben a metsző sík egyetlen kúpalkotóval párhuzamos, a síkmetszet parabola; abban az esetben pedig, ha pontosan két kúpalkotóval párhuzamos síkkal metszünk, hiperbolát kapunk.

A fenti meggondolás mindössze a definciónk motiválására szolgál, később pontosan be fogjuk bizonyítani, hogy a parabolák és hiperbolák valóban kúpszeletek. (A körökre ez nyilvánvaló, az ellipszisekről pedig már megmutattuk, hogy a körök affin képeiként - tehát speciális kollineáció általi képként - megkaphatóak.)

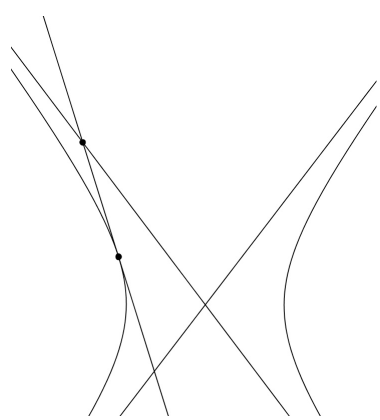
A kúpszeletek definíciójából adódóan ha egy *illeszkedési* tulajdonság körökre igaz, akkor ebből következik, hogy tetszőleges kúpszeletre teljesül. Ilyen módon a következő állítás nyilvánvaló.

3.4. Állítás. *Tetszőleges egyenesnek egy kúpszelettel 0, 1 vagy 2 közös pontja van. A kúpszelet tetszőleges pontjára pontosan egy olyan egyenes illeszkedik, amelynek egyetlen közös pontja van a kúpszelettel; a sík tetszőleges többi pontjára illeszkedő ilyen egyenesek száma 0 vagy 2.*

3.5. Definíció. *Azokat az egyeneseket, amelyeknek egy kúpszelettel pontosan egy közös pontjuk van, a kúpszelet* érintő*inek hívjuk. Azokat a pontokat, amelyekre nem illeszkedik kúpszeletérintő,* belső pont*oknak hívjuk; egy pont* küső pont*, ha abból a kúpszelethez két érintő húzható.*



Vegyük észre, hogy egy parabola tetszőleges pontjára két olyan egyenes illeszkedik, amelynek az *euklideszi síkon* egy és csak egy közös pontja van a parabolával: a parabola - euklideszi értelemben vett - érintője, valamint a parabola adott pontjára illeszkedő tengelyirányú egyenes. Ezért ahhoz, hogy a parabola valóban kúpszelet legyen, egyetlen végtelen távoli ponttal ki kell bővítenünk: a parabola tengelyének végtelen távoli pontjával. Ezzel a ponttal bővítve a parabolát a fenti tulajdonság már valóban teljesülni fog.



Tehát *azok a kúpszeletek, amelyeknek egyetlen végtelen távoli pontjuk van, a parabolák.* A *parabola végtelen távoli pontjára illeszkedő érintője a végtelen* *távoli egyenes*, ugyanis az érintő pontosan olyan egyenes, amelynek egyetlen közös pontja van a kúpszelettel.

Tekintve egy hiperbolát, az aszimptoták pontjaiból *az euklideszi síkon* egyetlen érintő húzható a hiperbolához, holott nem illeszkednek a görbére. Így a hiperbolákat is végtelen távoli pontokkal kell bővítenünk ahhoz, hogy a fenti állítás érvényben maradjon: az aszimptoták végtelen távoli pontjaival. Az aszimptoták így olyan egyenesek, amelyeknek egyetlen közös pontjuk van a hiperbolával: a végtelen távoli pontjuk. Az *aszimptoták* tehát *a hiperbola végtelen távoli pontjaira illeszkedő érintők*. Így *azok a kúpszeletek, amelyeknek pontosan két végtelen távoli pontjuk van, a hiperbolák.*

3.6. Tétel. *(Steiner) Legyenek A, B, C, D egy k kúpszelet rögzített pontjai, valamint P a görbe egy tetszőleges további pontja. Ekkor a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{PD}$ egyenesek $P(ABCD)$ kettősviszonya nem függ a P pont megválasztásától. Ezt a kettősviszonyértéket az A, B, C, D pontok* kúpszeleti kettősviszony*ának nevezzük, és $(ABCD)_k$ módon jelöljük.*

Bizonyítás: A kúpszeletek definíciója és kollineációk kettősviszonytartása miatt elegendő a tételt abban az esetben ellenőrizni, ha k kör. Ekkor a szóban forgó kettősviszony értéke

$$\frac{\sin(APC\angle)}{\sin(CPB\angle)} \cdot \frac{\sin(DPB\angle)}{\sin(APD\angle)}.$$

A kerületi szögek tétele miatt azonban a szereplő szögek mindegyikének mértéke változatlan, ha a P pont a körön végigfut, és ezt kellett igazolnunk. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tétel abban az esetben is érvényes marad, ha a P pont a görbe valamelyik rögzített pontjával - például A-val - esik egybe. Ebben az esetben a $\overleftrightarrow{PA}$ egyenes szerepét a másodrendű görbe A-ra illeszkedő érintője veszi át, a bizonyításban a megfelelő érintőszárú kerületi szöget tekintve. Ennek alapján szokás úgy fogalmazni, hogy „a kúpszeletpontot önmagával összekötő egyenes a kúpszelet érintője”.

3.7. Állítás. *Ha A, B, C, D egy k kör négy pontja, akkor*

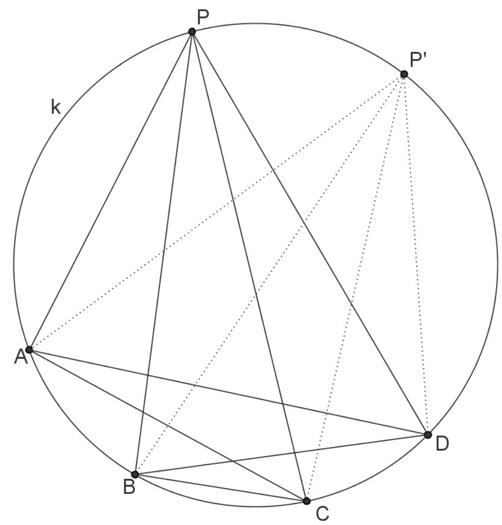
$$(ABCD)_k = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD},$$

a távolságokat a kör irányításától függő megfelelő előjellel ellátva. Ezt a számot a négy pont köri kettősviszony*ának mondjuk.*

Bizonyítás: Az előző bizonyítás gondolatmenetét folytatva, a

$$\frac{\sin(APC\angle)}{\sin(CPB\angle)} \cdot \frac{\sin(DPB\angle)}{\sin(APD\angle)}$$

értéket kell meghatároznunk. Ismert, hogy ha α egy háromszög a hosszúságú oldalával szemközti szög mértéke, és a háromszög körülírt körének sugara R,



akkor $a = 2R \cdot \sin\alpha$. Legyen az állításunkban szereplő k kör sugara R, akkor az APC, BPC, DPC és APD háromszögek körülírt körének sugara egyaránt R. Így

$$\sin(APC\angle) = \frac{AC}{2R}.$$

Hasonlóan kifejezve a további szereplő szögek szinuszait,

$$(ABCD)_k = \frac{\frac{AC}{2R}}{\frac{CB}{2R}} \cdot \frac{\frac{DB}{2R}}{\frac{AD}{2R}}$$

adódik, ami egyszerűsítés után tételünk igazságát jelenti. ■

3.8. Következmény. *(Ptolemaiosz-tétel) Tetszőleges húrnégyszög átlóhosszainak szorzata egyenlő a szemköztes oldalhosszak szorzatainak összegével.*

Bizonyítás: Korábban megmutattuk, hogy tetszőleges A, B, C, D kollineáris pontok esetén $(ABCD) = 1 - (ACBD)$. Mivel a kúpszeleti kettősviszony sugárnégyesek kettősviszonyaként van értelmezve, a kettősviszony azonosságai ebben az esetben is érvényben maradnak.

Ha tehát A, B, C, D egy húrnégyszög csúcsai, és körülírt köre k, akkor $(ABCD)_k = 1 - (ACBD)_k$. Ezt az előző tétel alapján kifejtve

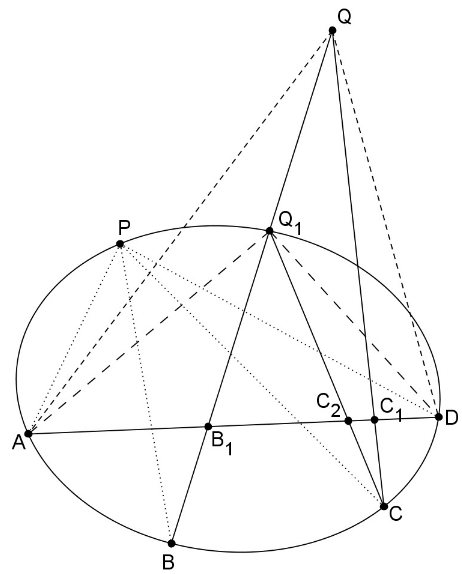
$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = 1 - \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DC}{AD}.$$

Átszorzás (és az előjelek megfelelő módosítása) után innen

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD,$$

és ezt kellett belátnunk. ■

3.9. Tétel. *(A Steiner-tétel megfordítása) Legyenek A, B, C, D egy k kúpszelet rögzített pontjai, valamint P a görbe egy tetszőleges további pontja. Ha Q a sík egy olyan pontja, amelyre $P(ABCD) = Q(ABCD)$, akkor Q illeszkedik k-ra.*



Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy Q nem illeszkedik a k kúpszeletre. Legyen ekkor Q_1 $\overleftrightarrow{QB}$ és k B-től külöböző metszéspontja. Mivel Q_1 rajta van a kúpszeleten, a Steiner-tétel miatt $Q_1(ABCD) = P(ABCD)$. Feltételünk miatt ebből

$$Q_1(ABCD) = Q(ABCD)$$

következik. Legyen $B_1 := \overleftrightarrow{QB} \cap \overleftrightarrow{AD}$ $C_1 := \overleftrightarrow{QC} \cap \overleftrightarrow{AD}$ és $C_2 := \overleftrightarrow{Q_1C} \cap \overleftrightarrow{AD}$. Ekkor a fenti kettősviszony-egyenlőségben szereplő sugárnégyeseket $\overleftrightarrow{AB}$-vel elmetszve $(AB_1C_2D) = (AB_1C_1D)$ adódik, ami csak $C_1 = C_2$ esetén lehetséges. Ebből azonban következik, hogy $Q_1 = Q$, és ez ellentmond annak, hogy Q nem illeszkedik a kúpszeletre. ∎

3.10. Tétel. *Megadva a sík öt általános helyzetű pontját - azaz öt olyan pontot, amelyek között nincsen három kollineáris - egy és csak egy olyan kúpszelet létezik, amely illeszkedik az öt adott pontra.*

Bizonyítás: Az *egyértelműség* bizonyításához tekintsünk egy olyan k kúpszeletet, amely illeszkedik az adott A, B, C, D, E pontokra. Az öt adott pontra illeszkedő tetszőleges kúpszelet valamely P pontjára a Steiner-tétel miatt $P(ABCD) = E(ABCD)$ kell, hogy teljesüljön, és a Steiner-tétel megfordítása alapján az összes ilyen tulajdonságú P pont illeszkedik k-ra.

Megmutatjuk, hogy az általános helyzetű A, B, C, D, E pontokhoz *van olyan* kúpszelet, amelyre mind az öt pont illeszkedik. Ehhez a kúpszelet definíciója miatt azt kell megmutatnunk, hogy bármely öt általános helyzetű pont kollineációval egy kör öt pontjába transzformálható.

Tekintsünk egy tetszőleges k' kört, és legyen A' a kör egy tetszőleges pontja. Válasszuk ki a kör azon B', C', D', E' pontjait, amelyekre $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{A'D'}$ és $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{A'E'}$ teljesül. Tekintsük azt a kollineációt, amelynél a B, C, D, E pontok képei rendre B', C', D', E'. Legyen A'' az A pont képe ennél a kollineációnál. A kollineáció kettősviszonytartása miatt

$$A(BCDE) = A''(B'C'D'E')$$

teljesül. A szerkesztésünkből adódóan

$$A(BCDE) = A'(B'C'D'E'),$$

ugyanis a megfelelő egyenespárok párhuzamosak, így bezárt szögeik egybevágóak. Ebből következik, hogy

$$A'(B'C'D'E') = A''(B'C'D'E').$$

A Steiner-tétel megfordítása miatt ebből következik, hogy A'' illeszkedik a k' körre, így az öt általános helyzetű pontot valóban egy kör öt pontjába transzformáltuk kollineációval. ■

Megjegyezzük - de később be is látjuk - hogy a *kúpszelet fogalmának duálisa: egy kúpszelet érintőinek halmaza.*

Így összefoglalva megállapíthatjuk, hogy egy kúpszeletet egyértelműen meghatároz

a. öt pontja;

b. négy pontja és az egyik adott pontra illeszkedő érintője;

c. három pontja és két adott pontra illeszkedő érintője;

d. öt érintője;

e. négy érintője és az egyik adott érintőre illeszkedő érintési pont;

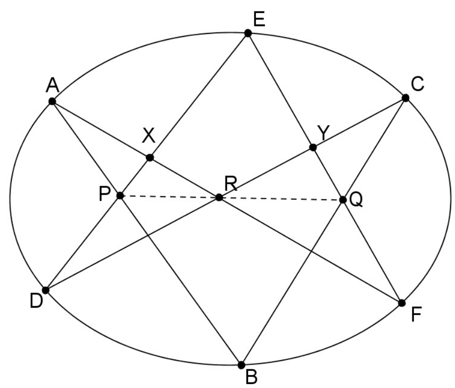
f. három érintője és két adott érintőre illeszkedő érintési pont.

Az első megállapítást igazoltuk, ebből az öt pont közül kettőt, illetve kétszer kettőt „egybeesőnek" tekintve a Steiner-tétel után tett megjegyzésünk értelmében következik a második és harmadik megállapítás. Az utolsó három állítás pedig az első három állítás duálisa.

3.4. Pascal tétele és alkalmazásai

3.11. Tétel. *(Pascal) Legyenek A, B, C, D, E, F egy kúpszelet pontjai. Ekkor $P := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, $Q := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$ és $R := \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA}$ kollineárisak.*

Bizonyítás: Vezessük be a további $X := \overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{DE}$ és $Y := \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$ jelöléseket.



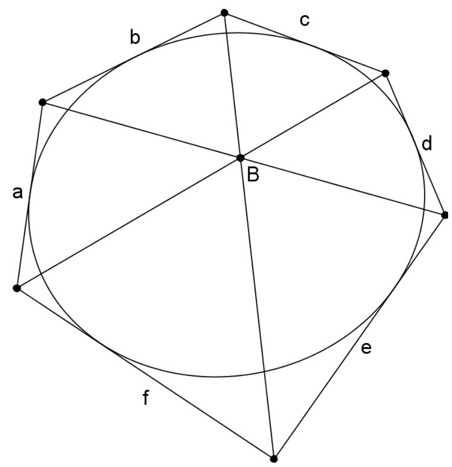
Ekkor $(DPXE)$ megegyezik az $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{AE}$ egyenesek kettősviszonyával. Ez pontosan a $(DBFE)_k$ kúpszeleti kettősviszonnyal egyenlő. A Steiner-tétel alapján ugyanezt a kúpszeleti kettősviszonyt kapjuk, ha a szóban forgó pontokat az A pont helyett C-ből vetítjük, azaz a $\overleftrightarrow{CY}$, $\overleftrightarrow{CQ}$, $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{CE}$ sugárnégyes kettősviszonyát képezzük. Ezen sugárnégyest az $\overleftrightarrow{EF}$ egyenessel elmetszve kapjuk végül, hogy $(DPXE) = (YQFE)$. A fundamentális tulajdonság alkalmazásával ebből következik, hogy $\overleftrightarrow{DY}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{XF}$ konkurrensek. Mivel $\overleftrightarrow{DY} = \overleftrightarrow{CD}$ és $\overleftrightarrow{XF} = \overleftrightarrow{FA}$, ezért a három egyenes közös pontja R, így R valóban illeszkedik $\overleftrightarrow{PQ}$-ra. ∎

Megfogalmazzuk Pascal tételének duálisát is.

3.12. Következmény. *(Brianchon) Legyenek a, b, c, d, e és f egy nemelfajuló másodrendű görbe érintői. Ekkor az $a \cap b$ és $d \cap e$ pontokra illeszkedő egyenes, a $b \cap c$ és $e \cap f$ pontokra illeszkedő egyenes, valamint a $c \cap d$ és $f \cap a$ pontokra illeszkedő egyenes konkurrensek.*

12	23	34
45	56	61
I	II	III

A gyakorlatban a Pascal-tétel alkalmazása úgy történik, hogy megszámozzuk a kúpszelet adott pontjait az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal, és a fenti táblázat alapján megrajzoljuk a megfelelő összekötő egyeneseket. Például 12 az 1 és 2 kúpszeletpontok összekötő egyenesét jelenti. A táblázatban az egymás alatti



egyenesek metszéspontja (összekötő egyenese) a megfelelő római számot kapja; a római számmal jelölt pontok a Pascal-tétel alapján kollineárisak. Közös egyenesük a *Pascal-egyenes*.

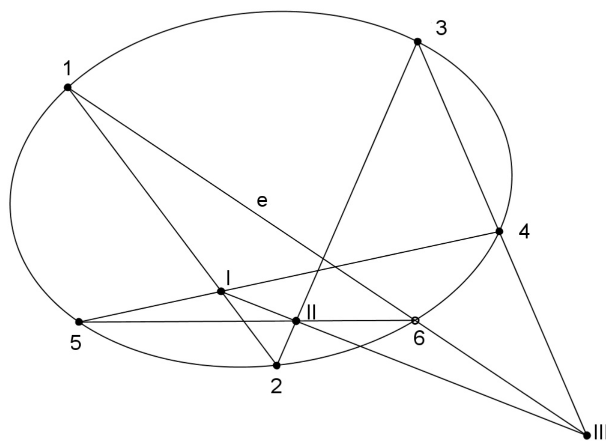
A Pascal-tétel - a Steiner-tétel után tett megjegyzésünk értelmében - abban az esetben is igaz marad, így eljárásunk akkor is alkalmazható, ha az adott pontok között vannak „egybeesők”, azaz valamelyik kúpszeletpontot a rá illeszkedő érintővel együtt ismerjük. Ebben az esetben „duplán számozunk”, azaz ha például ismerjük az 1-el számozott pontra illeszkedő érintőt, akkor ugyanezt a pontot 2-vel is számozzuk, és az 12 összekötő egyenesnek a pontban adott érintőegyenest tekintjük. Ügyeljünk arra, hogy a duplán számozott pont esetén az „összekötő egyenes” szerepeljen a táblázatban!

Duálisan: a Brianchon-tétel alkalmazása úgy történik, hogy megszámozzuk a kúpszelet adott érintőit az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal, és a fenti táblázat alapján megrajzoljuk a megfelelő metszéspontokat. Például 12 az 1 és 2 kúpszeletérintők metszéspontját jelenti. A táblázatban az egymás alatti pontok összekötő egyenese a megfelelő római számot kapja; a római számmal jelölt egyenesek a Brianchon-tétel alapján konkurrensek. Közös pontjuk a *Brianchon-pont*.

A Brianchon-tétel abban az esetben is igaz marad, így eljárásunk akkor is alkalmazható, ha az adott érintők között vannak „egybeesők”, azaz valamelyik érintőt a rá illeszkedő kúpszeletponttal együtt ismerjük. Ebben az esetben „duplán számozunk”, azaz ha például ismerjük az 1-el számozott érintőre illeszkedő érintési pontot, akkor ugyanezt az érintőt 2-vel is számozzuk, és az 12 metszéspontnak az érintési pontot tekintjük. Ügyeljünk arra, hogy a duplán számozott érintő esetén a „metszéspont” szerepeljen a táblázatban!

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a Pascal-tétel és Brianchon-tétel csak olyan, kúpszeletekkel kapcsolatos illeszkedési feladatok megoldására alkalmazható, ahol a feladatnak egyetlen pont (vagy egyenes) a megoldása. Az olyan problémák esetén, ahol két megoldás is lehetséges (például egy kúpszelet és egy egyenes metszéspontjainak szerkesztése), egy később bemutatásra kerülő módszer, a centrális kollineáció alkalmazása vezet célhoz.

A Pascal-tétel és a Brianchon-tétel alkalmazásának illusztrálására bemutatjuk néhány alapvető szerkesztési feladat megoldását.

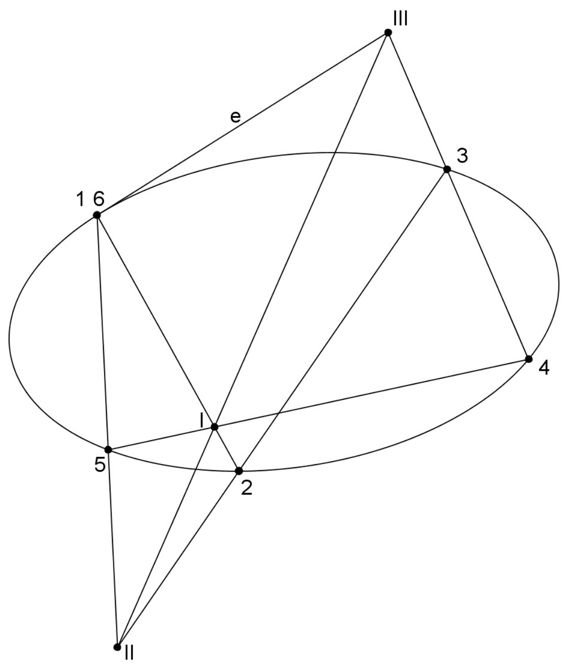


Elsőként megszerkesztjük öt pontja által meghatározott kúpszelet valamely adott pontjára illeszkedő egyenes másik metszéspontját a kúpszelettel. Mivel a feladatban kúpszeletpontok vannak adva, a Pascal-tétel alkalmazható.

Legyenek az adott pontok 1, 2, 3, 4, 5; és legyen adva egy 1-re illeszkedő e egyenes.

- Jelölje 6 a keresett pontot. Ekkor az e egyenes az 16 összekötő egyenes - függetlenül attól, hogy a 6 pont az egyenes mely pontja.
- A korábban megadott táblázatban az 12 és 45 egyenesek metszéspontjaként adódó I pont kijelölhető.
- A 34 és 61 egyenesek III metszéspontja - $61 = e$ figyelembevételével - szintén kijelölhető.
- Az I és III pontokra illeszkedő egyenes a Pascal-egyenes.
- II illeszkedik a Pascal-egyenesre és 23-ra, így megszerkeszthető.
- II illeszkedik az 56 egyenesre, ezért a $II, 5$ pontokra illeszkedő egyenes és e metszéspontja a keresett 6 pont.

Megszerkesztjük öt pontja által meghatározott kúpszelet valamely adott pontjára illeszkedő érintőjét.

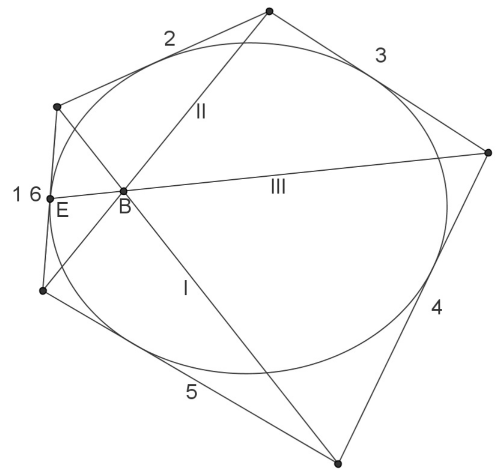


Legyenek az adott pontok 1, 2, 3, 4, 5, ahol az 1 pontra illeszkedő érintőt kell megszerkesztenünk. Ismét a Pascal-tétel alkalmazható, ugyanis egy adott pontra illeszkedő érintő a „duplán számozott" pontot önmagával összekötő egyenesként fogható fel. Legyen így $1 = 6$, ekkor a keresett érintő az 16 egyenes. Felhívjuk a figyelmet, hogy a számozásnál ügyelnünk kell arra, hogy a duplán számozott pontot két „szomszédos" számmal lássuk el.

- A korábban megadott táblázatban az 12 és 45 egyenesek metszéspontjaként adódó I pont, valamint a 23 és 56 egyenesek metszéspontjaként adódó II pont kijelölhető.
- Az I és II pontokra illeszkedő egyenes a Pascal-egyenes.
- III illeszkedik a Pascal-egyenesre és 34-re, így megszerkeszthető.
- III illeszkedik a 61 egyenesre, így 61 - azaz a keresett érintő - megkapható a duplán számozott $1 = 6$ pontot III-al összekötő egyenesként.

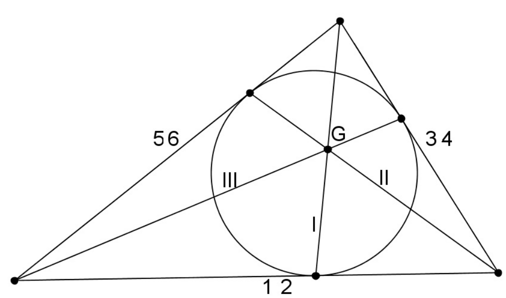
Megszerkesztjük öt érintője által meghatározott kúpszelet valamely adott érintőjére illeszkedő érintési pontját.

Vegyük észre, hogy problémánk az előző feladat duálisa. Így ebben az esetben a Brianchon-tétel alkalmazható. Ekkor azt az érintőt kell „duplán számozni", amelyen az érintési pontot keressük. Legyenek az adott érintők 1, 2, 3, 4, 5, ahol az 1 érintőre illeszkedő érintési pontot kell meghatározni. Legyen tehát $1 = 6$, ekkor a keresett érintési pont az 16 metszéspont.



- A korábban megadott táblázatban az 12 és 45 pontokra illeszkedő I egyenes, valamint a 23 és 56 pontokra illeszkedő II egyenes kijelölhető.
- Az I és II egyenesek metszéspontja a Brianchon-pont.
- III illeszkedik a Brianchon-pontra és 34-re, így megszerkeszthető.
- III illeszkedik a 61 pontra, így 61 - azaz a keresett érintési pont - megkapható a duplán számozott $1 = 6$ egyenes és III metszéspontjaként.

Új bizonyítást adunk végül a *Gergonne-pont* létezésére. Megmutatjuk tehát, hogy tetszőleges háromszög beírt körének az oldalegyenesekre illeszkedő érintési pontjait a szemköztes csúcsokkal összekötő egyenesek konkurrensek.

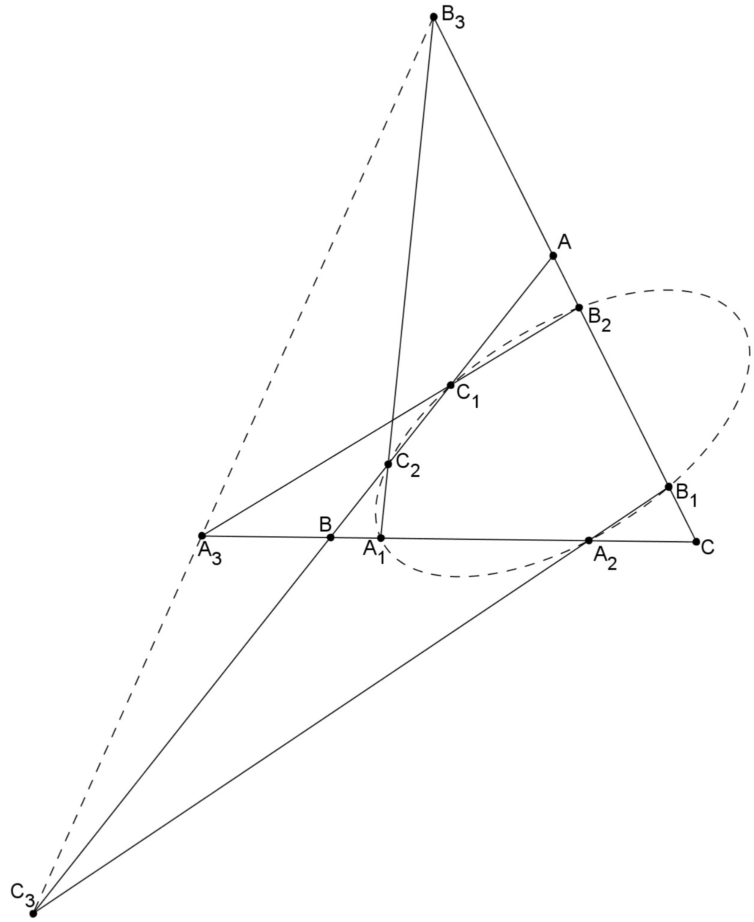


A háromszög beírt körének, mint kúpszeletnek az oldalegyenesek érintői, legyenek ezek az $1 = 2$, $3 = 4$, $5 = 6$ érintők. A Brianchon-tétel alkalmazásával közvetlenül adódik az állítás.

A következő tétel a Menelaosz-tétel kúpszeletekre történő általánosítása.

3.13. Tétel. *(Carnot) Legyen adott egy ABC háromszög, és tegyük fel, hogy $A_1, A_2 \in \overleftrightarrow{BC}$, $B_1, B_2 \in \overleftrightarrow{CA}$, $C_1, C_2 \in \overleftrightarrow{AB}$ a csúcsoktól különböző pontok. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 és C_2 akkor és csak akkor illeszkedik egy kúpszeletre, ha*

$$(ABC_1)(ABC_2)(BCA_1)(BCA_2)(CAB_1)(CAB_2) = 1.$$



Bizonyítás: Legyen $A_3 := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B_2C_1}$, $B_3 := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A_1C_2}$ és $C_3 := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$. A Pascal-tétel miatt A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 és C_2 akkor és csak akkor illeszkedik egy kúpszeletre, ha A_3, B_3 és C_3 kollineáris. Így azt kell megmutatnunk, hogy e három pont kollinearitása ekvivalens a tételben szereplő feltétellel.

A_3 értelmezése folytán A_3, B_2 és C_1 kollineáris, így a Menelaosz-tétel miatt

$$(ABC_1)(BCA_3)(CAB_2) = -1.$$

Hasonlóan, A_1, B_3 és C_2 kollineáris, így

$$(ABC_2)(BCA_1)(CAB_3) = -1.$$

Végül, A_2, B_1 és C_3 kollineáris, így

$$(ABC_3)(BCA_2)(CAB_1) = -1.$$

A három összefüggést összeszorozva

$$(ABC_1)(ABC_2)(ABC_3)(BCA_1)(BCA_2)(BCA_3)(CAB_1)(CAB_2)(CAB_3) = -1$$

adódik. Mivel - ismét a Menelaosz-tételre hivatkozva - A_3, B_3 és C_3 akkor és csak akkor kollineáris, ha

$$(ABC_3)(BCA_3)(CAB_3) = -1,$$

a fenti egyenlőség miatt ez valóban pontosan akkor áll fenn, ha

$$(ABC_1)(ABC_2)(BCA_1)(BCA_2)(CAB_1)(CAB_2) = 1.$$

■

A Menelaosz-tétel hasonló általánosítása nem csak kúpszeletekre (azaz másodrendű görbékre), hanem n-edrendű algebrai görbékre is megfogalmazható. Az általános tétel szerint a háromszög minden oldalegyenesén tekintve n, a csúcsoktól különböző pontot, a felvett $3n$ darab pont akkor és csak akkor illeszkedik egy n-edrendű görbére, ha a fentihez hasonlóan képzett, összesen $3n$ darab osztóviszony szorzata $(-1)^n$.

3.5. A pólus-poláris kapcsolat

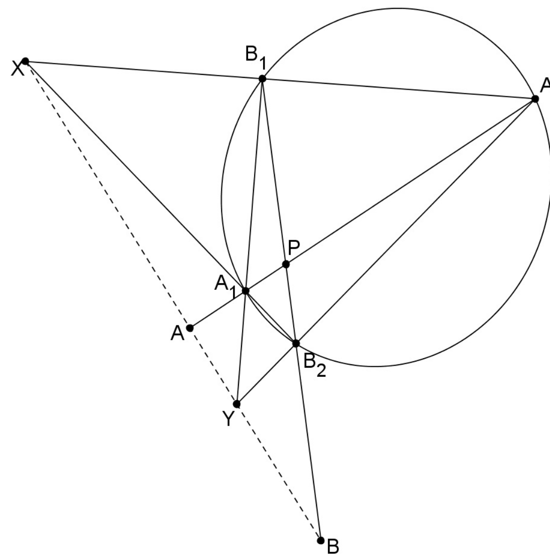
3.14. Tétel. *Legyen adott a síkban egy k kúpszelet és egy, a kúpszeletre nem illeszkedő P pont. Tekintsük egy P-re illeszkedő szelőjét k-nak, és legyen P-nek a szelőre illeszkedő kúpszeletpontokra vonatkozó harmonikus társa Q. Az így kapott Q pontok kollineárisak, azaz egy, a szelő megválasztásától független egyenesre illeszkednek. Közös egyenesüket P* polárisá*nak hívjuk, és azt mondjuk, hogy P a kapott egyenes* pólusa.

Bizonyítás: Tekintsünk egy, a P pontra illeszkedő rögzített szelőt. Ennek metszéspontjai a kúpszelettel legyenek A_1 és A_2, és legyen A a P pont (A_1A_2)-re vonatkozó harmonikus társa. Legyen T az A_1 és A_2 pontokra illeszkedő kúpszeletérintők metszéspontja.

Tekintsünk egy tetszőleges további szelőt, amelynek a kúpszelettel közös pontjai B_1 és B_2. Legyen továbbá B a P pont (B_1B_2)-re vonatkozó harmonikus társa. Megmutatjuk, hogy B - a második szelő megválasztásától függetlenül - illeszkedik az $\overleftrightarrow{AT}$ egyenesre.

Legyen $X := \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$ és $Y := \overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_2B_2}$.

Mivel az $A_1B_2A_2B_1$ teljes négyszög A_1 és A_2 csúcsai által meghatározott oldalegyenesére illeszkedő átlóspont P, következik, hogy P (A_1A_2)-re vonatkozó



harmonikus társa illeszkedik a P-vel szemköztes átlóegyenesre, azaz $\overleftrightarrow{XY}$-ra. Tehát A *illeszkedik* $\overleftrightarrow{XY}$*-ra.*

Hasonlóan ellenőrizhető, hogy B *illeszkedik* $\overleftrightarrow{XY}$*-ra.*

A Pascal-tétel segítségével egyszerűen ellenőrizhető, hogy X, Y *és* T *kollineárisak.* Valóban, alkalmazzuk a Pascal-tételt az $1 = 2 = A_2$, $3 = B_2$, $4 = 5 = A_1$, $6 = B_1$ pontokra.

Összefoglalva: az $\overleftrightarrow{XY}$ egyenesre egyaránt illeszkedik A, B és T, amiből következik, hogy B valóban illeszkedik $\overleftrightarrow{AT}$-re. Mivel $\overleftrightarrow{AT}$ a B-t tartalmazó szelő megválasztásától független egyenes, ez állításunk igazságát jelenti. ■

3.15. Állítás. *Ha P külső pont, akkor P pólusa a P-re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjainak egyenese.*

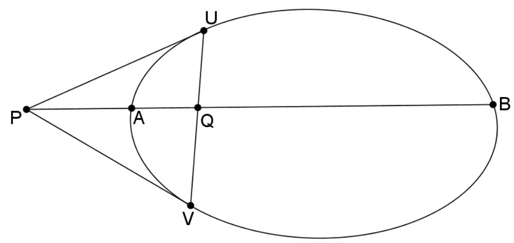
Bizonyítás: Legyenek a P-re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjai U és V, valamint egy P-re illeszkedő tetszőleges szelő közös pontjai a kúpszelettel A és B. Azt kell megmutatnunk, hogy $Q := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{UV}$ illeszkedik P polárisára, azaz hogy $(PQAB) = -1$.

A $(PQAB)$ pontnégyes kettősviszonya megegyezik a pontokat U-ból vetítő sugárnégyes kettősviszonyával, azaz

$$(PQAB) = U(PQAB).$$

Ezen sugárnégyes közös pontja, U illeszkedik a tekintett k kúpszeletre, így kettősviszonyuk pontosan a kúpszelettel alkotott metszéspontjaik kúpszeleti kettősviszonya. Tehát

$$U(PQAB) = (UVAB)_k.$$



Ez a kúpszeleti kettősviszony - a Steiner-tétel alapján - megegyezik a kúpszeletpontokat a kúpszelet tetszőleges más pontjából vetítő sugárnégyes kettősviszonyával, ezért

$$(UVAB)_k = V(UVAB).$$

Utóbbi sugárnégyes elemeit $\overleftrightarrow{AB}$-vel elmetszve a kapott pontok kettősviszonya egyenlő a sugárnégyes elemeinek kettősviszonyával, így végül

$$V(UVAB) = (QPAB),$$

azaz

$$(PQAB) = (QPAB).$$

$$(QPAB) = \frac{1}{(PQAB)}$$

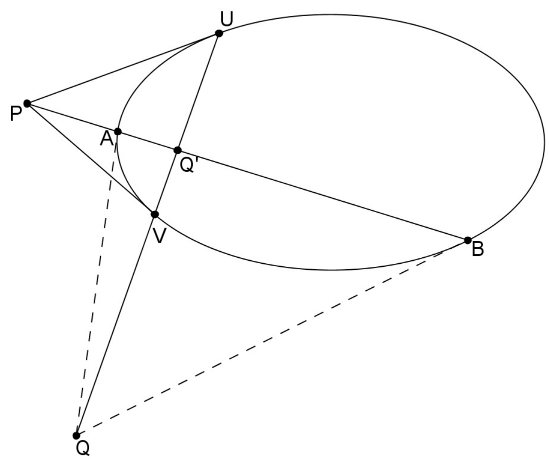
miatt innen $(PQAB) = 1$ vagy $(PQAB) = -1$ következik. Mivel azonban A és B különböző pontok, $(PQAB) \neq 1$, így állításunkat igazoltuk. ■

3.16. Állítás. *Ha Q illeszkedik P polárisára, akkor P illeszkedik Q polárisára.*

Bizonyítás: Ha a P és Q pontok valamelyike belső pont, akkor a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes két pontban metszi a kúpszeletet, legyenek azek A és B. Ha Q rajta van P polárisán, akkor Q a P pont (AB)-re vonatkozó harmonikus társa. Ebből azonban következik, hogy P rajta van Q polárisán.

Tegyük fel, hogy P és Q egyaránt külső pontok, és legyenek a P-re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjai U és V. Ekkor P polárisa $\overleftrightarrow{UV}$. Legyen Q $\overleftrightarrow{UV}$ tetszőleges külső pontja, és legyen Q (UV)-re vonatkozó harmonikus társa Q'. Ekkor Q' illeszkedik Q polárisára. Azt kell megmutatnunk, hogy $\overleftrightarrow{PQ'}$ Q polárisa.

Legyenek $\overleftrightarrow{PQ'}$ és a tekintett k kúpszelet közös pontjai A és B. Azt kell megmutatnunk, hogy $\overleftrightarrow{AQ}$ és $\overleftrightarrow{BQ}$ a kúpszelet érintői, ebből ugyanis következik, hogy $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{PQ'}$ Q polárisa. Azt fogjuk igazolni, hogy $\overleftrightarrow{AQ}$ érinti a kúpszeletet. Legyen $\overline{Q}$ az A-ra illeszkedő kúpszeletérintő és $\overleftrightarrow{UV}$ metszéspontja. Azt látjuk be, hogy ekkor $\overline{Q} = Q$.



Mivel Q' illeszkedik P polárisára, $(ABPQ') = -1$. Ebből következik, hogy az $(ABPQ')$ pontnégyest U-ból vetítő sugárnégyes kettősviszonya, így ezen sugárnégyes elemeinek a kúpszelettel alkotott metszéspontjainak kúpszeleti kettősviszonya is -1, tehát

$$(ABUV)_k = -1.$$

Ekkor az $(ABUV)$ pontnégyest A-ból vetítő sugárnégyes elemeinek kettősviszonya a Steiner-tétel miatt szintén -1, így ezt a négy egyenest $\overleftrightarrow{UV}$-vel elmetszve harmonikus pontnégyest kapunk. Tehát

$$(\overline{Q}Q'UV) = -1.$$

Azonban Q' (UV)-re vonatkozó harmonikus társa Q, így valóban, $\overline{Q} = Q$. ∎

3.17. Definíció. *Azt mondjuk, hogy két pont* konjugált *egymáshoz egy kúpszeletre nézve, ha illeszkednek egymás polárisaira. Két egyenes konjugált egymáshoz egy kúpszeletre nézve, ha illeszkednek egymás pólusaira.*

Eddig a sík *kúpszeletre nem illeszkedő* pontjai és a *kúpszeletet nem érintő* egyenesei között adtunk meg bijekciót. Ez a bijekció *illeszkedéstartó* abban az értelemben, hogy $\overleftrightarrow{AB}$ pólusa $a \cap b$: valóban, az $a \cap b$ pont A-hoz és B-hez egyaránt konjugált.

Ezt a bijekciót kiterjesztjük a teljes valós projektív síkra.

3.18. Definíció. *Egy kúpszeletpont polárisának a rá illeszkedő kúpszeletérintőt, egy kúpszeletérintő pólusának a rá illeszkedő érintési pontot nevezzük.*

Ez a definíció valóban illeszkedéstartó módon terjeszti ki az előző bijekciót a teljes síkra: abból, hogy tetszőleges külső pont polárisa tartalmazza a pontból húzott érintők érintési pontjait, következik, hogy a kúpszelet tetszőleges pontja konjugált a rá illeszkedő érintő összes pontjához.

3.19. Következmény. *Rendeljük hozzá a sík tetszőleges pontjához egy rögzített kúpszeletre vonatkozó polárisát, tetszőleges egyeneshez pedig a pólusát. Ez a leképezés a sík pontjainak és egyeneseinek között bijektív és illeszkedéstartó.*

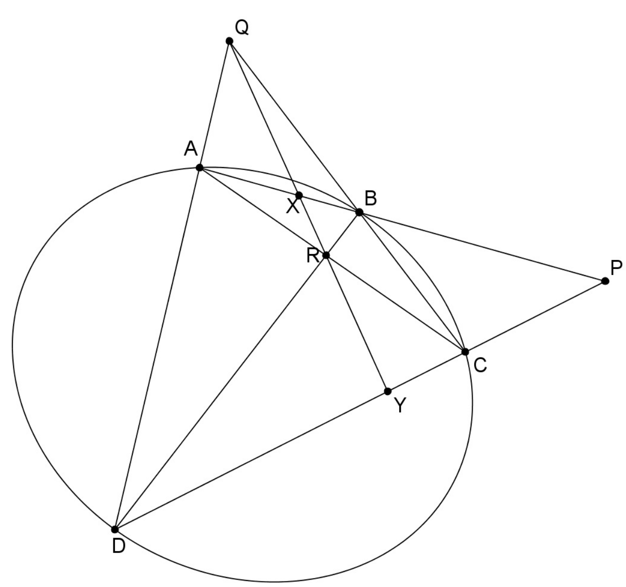
Ez azonban a *dualitás elvé*nek igazságát jelenti: a dualitás elvének megfogalmazása után tett megjegyzésünk értelmében ehhez elegendő volt egy olyan bijekciót megadnunk, amely a valós projektív sík pontjainak halmazát bijektív egyenestartó módon képezi le az egyenesek halmazára.

Mivel a kiválasztott kúpszelet tetszőleges pontjához a kúpszelet pontbeli érintőjét rendeltük hozzá, ezzel beláttuk azt a korábban tett megállapításunkat is, hogy *a kúpszelet duálisa a kúpszelet érintőinek halmaza.*

3.20. Definíció. *Egy háromszög csúcsainak egy kúpszeletre vonatkozó polárisai egy háromszög oldalegyenesei, ezt a háromszöget az eredeti háromszög* poláris háromszög*ének nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy háromszög egy kúpszelet* polárháromszöge*, ha a poláris háromszöge önmaga.*

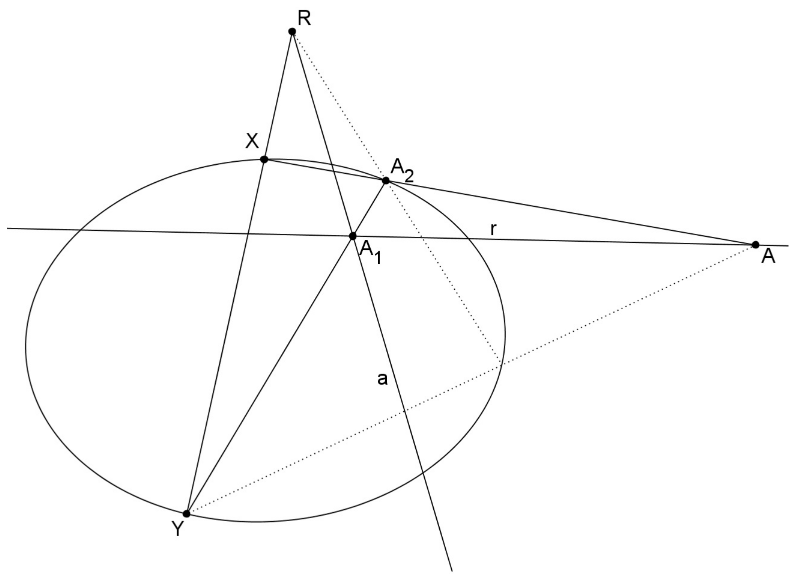
A *polárháromszög* tehát olyan háromszög, amelynél tetszőleges csúcs polárisa a szemköztes háromszögoldal. Másként fogalmazva, a polárháromszög olyan háromszög, amelynek csúcsai páronként konjugáltak egymáshoz a kúpszeletre nézve.

3.21. Állítás. *Egy kúpszeletbe írt tetszőleges teljes négyszög átlóspontjai a görbe egy polárháromszögét alkotják.*



Bizonyítás: Használva az ábra jelöléseit, legyen A, B, C és D a görbe négy pontja, az $ABCD$ teljes négyszög átlóspontjai P, Q és R. Megmutatjuk, hogy P

polárisa a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenes. Legyen $\overleftrightarrow{QR}$ metszéspontja $\overleftrightarrow{AB}$-vel illetve $\overleftrightarrow{CD}$-vel X és Y. Ekkor a teljes négyszögnek A és B csúcsai, P átlóspontja, X pedig a szemköztes átlóegyenes $\overleftrightarrow{AB}$-vel közös pontja, így $(ABPX)$ harmonikus pontnégyes. Ebből következik, hogy P és X konjugáltak a kúpszeletre nézve. Hasonlóan adódik, hogy P és Y is konjugáltak. Így P polárisa az $\overleftrightarrow{XY} = \overleftrightarrow{QR}$ egyenes, és ezt kellett igazolnunk. ∎

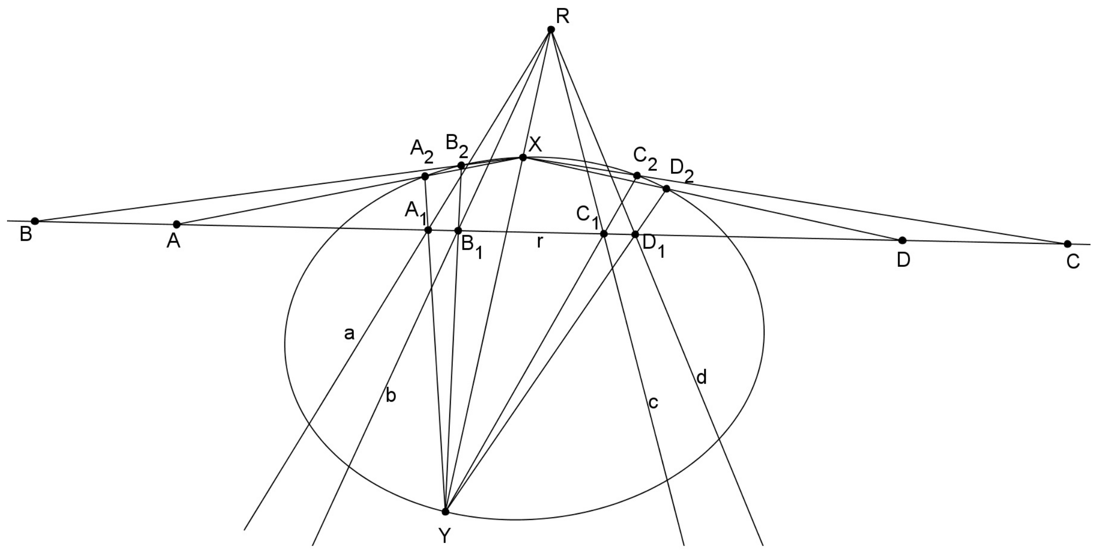


Tekintsünk egy k kúpszeletet, és egy rá nem illeszkedő R pontot. Legyen továbbá R polárisa r. Eljárást adunk egy R-re illeszkedő tetszőleges a egyenes pólusának meghatározására.

- Rögzítsünk egy R-re illeszkedő tetszőleges x szelőt, és legyenek ennek a kúpszelettel közös pontjai X és Y.
- Legyen a és r közös pontja A_1.
- Legyen $\overleftrightarrow{YA_1}$ és a kúpszelet Y-tól különböző közös pontja A_2.
- Ekkor $\overleftrightarrow{XA_2}$ és r metszépontja az a egyenes keresett A pólusa.

Valóban, az $\overleftrightarrow{XY}$ és $\overleftrightarrow{RA_2}$ szelők által a kúpszeletből kimetszett teljes négyszög egy átlóspontja R, így a négyszög szemköztes átlója r. Ebből következik, hogy a négyszög további átlóspontjai A és A_1, vagyis A valóban $\overleftrightarrow{RA_1}$ pólusa.

3.22. Állítás. *A pólus-poláris kapcsolat kettősviszonytartó leképezés: ha az A, B, C, D kollineáris pontok polárisai rendre a, b, c, d, akkor $(ABCD) = (abcd)$.*



Bizonyítás: Tekintsük az a, b, c, d konkurrens egyeneseket, közös pontjuk legyen R. Ekkor a tekintett egyenesek A, B, C, D pólusai az R pont r polárisára illeszkednek. Rögzítve egy R-re illeszkedő x szelőt, határozzuk meg az A, B, C, D pontokat a fent ismertetett eljárással. Az eljárás során keletkező megfelelő pontokat a fentieknek megfelelően jelölje A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2.

Ekkor az $(abcd)$ sugárnégyes elemeit r-el elmetszve kapott pontok kettősviszonya egyenlő $(abcd)$-vel, így

$$(abcd) = (A_1B_1C_1D_1).$$

A kapott négy pontot Y-ból vetítő sugárnégyes kettősviszonya egyenlő a kúpszelettel keletkező metszéspontok kúpszeleti kettősviszonyával, így

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)_k.$$

Ez utóbbi kúpszeleti kettősviszony a Steiner-tétel miatt megegyezik a négy pontot X-ből vetítő sugárnégyes kettősviszonyával, így

$$(A_2B_2C_2D_2)_k = X(A_2B_2C_2D_2).$$

Végül a sugárnégyes elemeit r-el elmetszve kapjuk, hogy

$$X(A_2B_2C_2D_2) = (ABCD),$$

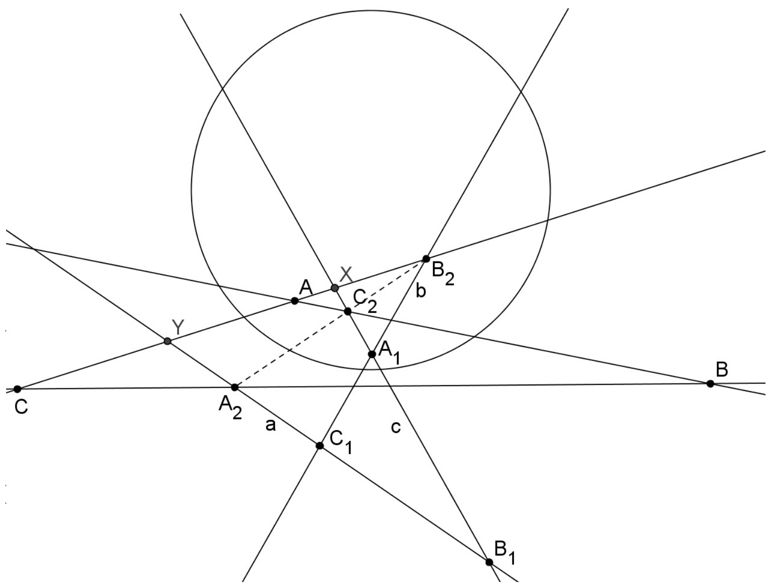
tehát valóban,

$$(abcd) = (ABCD).$$

■

Mivel a dualitás elvét a pólus-poláris kapcsolat segítségével indokolhatjuk meg, az előző állítás azt is jelenti, hogy a *pontnégyes kettősviszonya és a sugárnégyes kettősviszonya* valóban *duális fogalmak*.

3.23. Tétel. *(Chasles) Ha egy háromszög egy kúpszeletnek nem polárháromszöge, akkor (pontra és tengelyre nézve egyaránt) perspektív a poláris háromszögével.*



Bizonyítás: Tekintsük az ABC háromszöget, és tegyük fel, hogy a csúcsok polárisai az oldalegyenesektől különböző a, b, c egyenesek. Jelölje az $a \cap b$ pontot C_1, az $a \cap c$ pontot B_1 és a $b \cap c$ pontot A_1. Azt kell megmutatnunk, hogy az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek tengelyre nézve perspektívek. Legyen $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A_1B_1}$ a C_2 pont, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B_1C_1}$ az A_2 pont és végül az $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A_1C_1}$ a B_2 pont; ekkor feladatunk az A_2, B_2, C_2 pontok kollinearitásának belátása.

Legyen továbbá X az $\overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{AC}$ és Y az $\overleftrightarrow{B_1C_1} \cap \overleftrightarrow{AC}$ pont. Ekkor a $(C_2A_1XB_1)$ pontok kettősviszonya egyenlő a polárisaik kettősviszonyával, azaz a $\overleftrightarrow{CC_1}$, $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CB_1}$, $\overleftrightarrow{CA}$ egyenesek kettősviszonyával:

$$(C_2A_1XB_1) = C(C_1BB_1A).$$

Ezen sugárnégyest tetszőleges egyenessel elmetszve ugyanilyen kettősviszonyú pontnégyest kapunk, így az a egyenessel történő metszés után

$$C(C_1BB_1A) = (C_1A_2B_1Y)$$

adódik. A kettősviszony azonosságait alkalmazva

$$(C_1A_2B_1Y) = (A_2C_1YB_1),$$

tehát

$$(C_2A_1XB_1) = (A_2C_1YB_1).$$

A fundamentális tulajdonság miatt ekkor $\overleftrightarrow{C_2A_2}$, $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ és $\overleftrightarrow{XY}$ konkurrensek. Mivel $\overleftrightarrow{XY} = \overleftrightarrow{AC}$, és B_2 $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ metszéspontja, ez valóban azt jelenti, hogy B_2 rajta van az $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ egyenesen, amit be kellett látnunk. ∎

Mivel egy kör középpontja tetszőleges átmérő felezőpontja, egyszerűen látható, hogy tetszőleges kör középpontjának polárisa a végtelen távoli egyenes. Ebből adódóan a centrum fogalmát általánosíthatjuk tetszőleges kúpszeletre: *egy kúpszelet centruma a végtelen távoli egyenes pólusa*, feltéve, hogy az véges helyzetű pont. Látható, hogy mivel az ellipszisek és hiperbolák középpontosan szimmetrikusak, középpontjuk valóban centrum ebben az értelemben is.

Ennek megfelelően egy kúpszelet *átmérői a centrumra illeszkedő egyenesek*, másként fogalmazva, a *végtelen távoli pontok polárisai.*

A parabolák esetén a végtelen távoli egyenes érintő, így annak pólusa végtelen távoli pont: a parabola tengelyének végtelen távoli pontja. Ezért a parabola esetén nem szokás centrumról beszélni. A végtelen távoli pontok polárisai egy parabolára vonatkozóan illeszkednek a parabola végtelen távoli pontjára, tehát ebben az esetben átmérőknek a tengellyel párhuzamos egyeneseket nevezhetjük.

Mivel az egyenesek konjugáltságát és az átmérő fogalmát is megfogalmaztuk kúpszeletekre, ezért a *konjugált átmérőpár* fogalma tetszőleges kúpszeletre általánosítható: olyan átmérők, amelyek konjugáltak egymáshoz. Világos, hogy ez a fogalom speciális esetként visszaadja az ellipszisek konjugált átmérőpárjának fogalmát, azonban ilyen értelemben *hiperbola konjugált átmérőpárjá*ról is beszélhetünk.

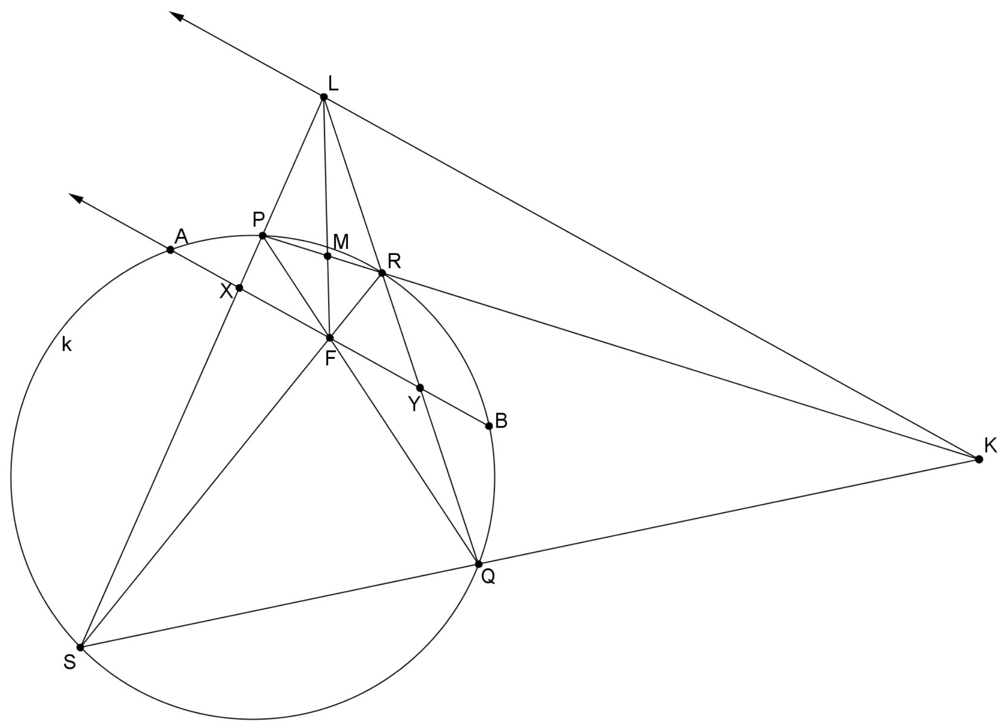
Egyszerűen látható, hogy *egy kúpszelet párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy átmérőre illeszkednek. Ez az átmérő konjugált az eredeti húrokkal párhuzamos átmérőhöz.* Valóban, a V_∞ végtelen távoli pontra illeszkedő húrok felezőpontjai konjugáltak V_∞-hez, hiszen tetszőleges szakasz felezőpontja és egyenesének végtelen távoli pontja harmonikus társak a szakasz végpontjaira nézve. Ez azt jelenti, hogy a felezőpontok mindegyike illeszkedik V_∞ polárisára, ami valóban átmérő. Ha ezen átmérő végtelen távoli pontja W_∞, akkor W_∞ illeszkedik V_∞ polárisára, azaz V_∞ és W_∞ konjugáltak.

Alkalmazásként végül belátunk egy elemi geometriai tételt.

3.24. Állítás. *(A pillangó-tétel) Legyen $\overline{AB}$ a k kör tetszőleges húrja, és F $\overline{AB}$ felezőpontja. Legyenek $\overline{PQ}$ és $\overline{RS}$ a kör további F-re illeszkedő húrjai. Legyen $\overleftrightarrow{AB}$ metszéspontja $\overleftrightarrow{PS}$-el X, $\overleftrightarrow{QR}$-el Y. Ekkor $\overline{XY}$ felezőpontja F.*

Bizonyítás: Legyen $K := \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{QS}$, $L := \overleftrightarrow{PS} \cap \overleftrightarrow{QR}$ és $M := \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{LF}$.

Mivel a k körbe írt $PRQS$ négyszög átlóspontjai K, L, F, ezért KLF a kör egy polárháromszöge. Így F polárisa $\overleftrightarrow{KL}$. Mivel F $\overline{XY}$ felezőpontja, konjugált $\overleftrightarrow{AB}$ V_∞ végtelen távoli pontjához, így F polárisára illeszkedik V_∞. Ez azt jelenti, hogy $KL \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



Így az $(XYFV_\infty)$ pontnégyest L-ből $\overleftrightarrow{PR}$-re vetítve a $(PRMK)$ pontnégyest kapjuk, tehát

$$(XYFV_\infty) = (PRMK).$$

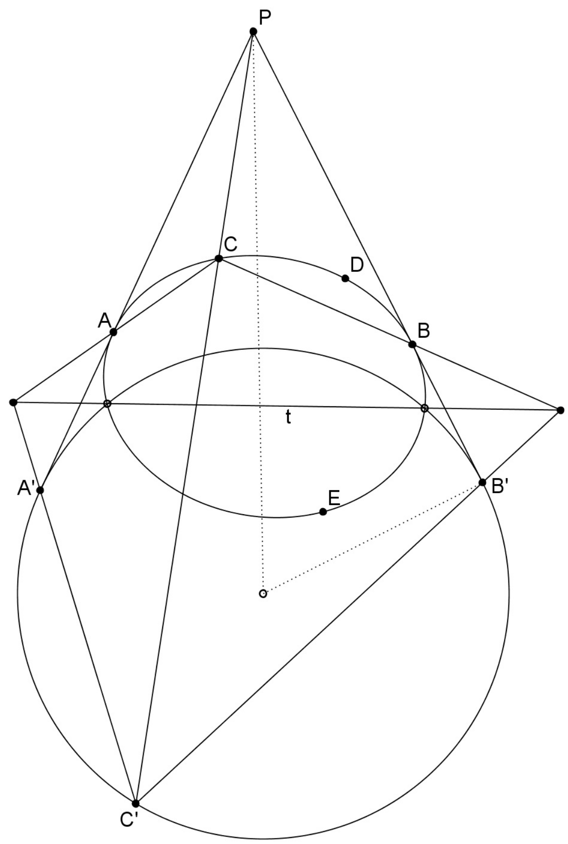
Mivel a $PRQS$ teljes négyszögnek P és R csúcsai, K átlóspontja, és M illeszkedik a K-val szemköztes átlóra, itt $(PRMK) = -1$. Ebből következik, hogy $(XYFV_\infty) = -1$, ami azt jelenti, hogy F az $\overline{XY}$ szakasz végpontjaira vonatkozóan a végtelen távoli pont harmonikus társa, azaz valóban felezőpont. ■

3.6. Kúpszeletek képe centrális kollineációnál

Ahogyan a tengelyes affinitások segítségével ellipszisekkel kapcsolatos szerkesztési problémák visszavezethetőek körökkel kapcsolatos szerkesztési problémákra, centrális kollineáció alkalmazásával tetszőleges kúpszeletre vonatkozó feladatok visszavezethetőek körre vonatkozó szerkesztési feladatra. Tetszőleges k kúpszelet esetén megadható ugyanis olyan centrális kollineáció, amelynél a kollineációs képként kapott k' kúpszelet kör.

Legyenek adottak az A, B, C, D, E pontok. Megmutatjuk, hogy az adott pontokra illeszkedő k kúpszelethez hogyan határozható meg a kívánt tulajdonságú centrális kollineáció.

- A Pascal-tétel alkalmazásával megszerkeszthetőek a k kúpszelet A és B pontokra illeszkedő érintői: legyenek ezek rendre a és b.



- Legyen a és b metszéspontja P. Legyen tetszőleges, az a és b egyeneseket egyaránt érintő - k-val megegyező szögtartományba eső - kör k'. (Tetszőleges ilyen kör középpontja illeszkedik az a és b egyenesek által bezárt megfelelő szög szögfelezőjére.)

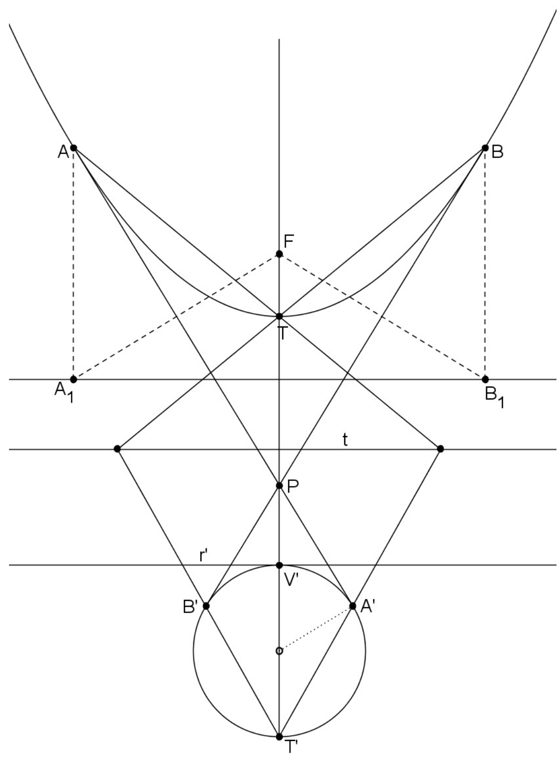
- Olyan kollineációt fogunk meghatározni, amelynek centruma P, és amelynél k képe k'. Legyenek k' érintési pontjai az a illetve b egyeneseken A' illetve B'.

- Legyen $\overleftrightarrow{PC}$ és k' valamelyik közös pontja C'.

- Az a kollineáció, amelynek centruma P, és az A, B, C pontokhoz rendre az A', B', C' pontokat rendeli, megfelel követelményeinknek. Valóban, k az A, B, C pontokra illeszkedő, a és b érintőkkel rendelkező kúpszelet. Kollineációnknál e pontok és érintők képei rendre A', B', C', a és b, hiszen a és b invariáns egyenesek. Így k képe ezen pontok és érintők által meghatározott kúpszelet, ami valóban k'.

- Kollineációnk tengelye például az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ és $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ fixpontok által meghatározott t egyenes. Megjegyezzük, hogy amennyiben k és k' metszik egymást, közös pontjaik illeszkednek t-re.

Tegyük fel, hogy adott egy parabola F fókusza és v vezéregyenese. A fenti módszert alkalmazva az alábbi módon határozható meg ezt a parabolát körbe transzformáló centrális kollineáció.



- Meghatározzuk a parabola T tengelypontját, valamint tetszőleges két további pontját. Az egyszerűség kedvéért ezt a két további pontot a parabola tengelyére szimmetrikusan határozzuk meg. Legyen A_1 a vezéregyenes tetszőleges pontja, ekkor az A_1-ben v-re állított merőleges és $\overleftrightarrow{A_1F}$ felezőmerőlegese a parabola egy A pontjában metszi egymást (lásd korábbi szerkesztésünket), és a parabola pontbeli érintője $\overleftrightarrow{A_1F}$ a-val jelölt felezőmerőlegese. A felvett pontokat a parabola tengelyére tükrözve kapjuk a parabola B pontját és arra illeszkedő b érintőt.

- Legyen a és b közös pontja P. Mivel az A és B pontokat a tengelyre szimmetrikusan választottuk, P illeszkedik a parabola tengelyére.

- Az előzőeknek megfelelően legyen k' az a és b egyeneseket érintő kör, az érintési pontok legyenek A' és B'.
- Mivel P illeszkedik a parabola tengelyére, és a parabola tengelyére a tengelypont és a parabola végtelen távoli pontja illeszkedik, a k' kör és a parabola tengelyének metszéspontjai a tengelypont T' képe valamint a parabola végtelen távoli pontjának V' képe. Mivel a parabolát érinti a végtelen távoli egyenes, a V'-re illeszkedő körérintő a kollineáció r' ellentengelye. A kollineáció tengelye az általános módszernél látott eljárással szerkeszthető meg: az $\overleftrightarrow{AT} \cap \overleftrightarrow{A'T'}$ valamint $\overleftrightarrow{BT} \cap \overleftrightarrow{B'T'}$ pontokra illeszkedő egyenes.

Tegyük fel, hogy egy k hiperbola fókuszai F_1 és F_2, tengelypontjai T_1 és T_2. Nyilvánvalóan ekkor a négy pont egy egyenesre - a hiperbola valós tengelyének egyenesére - illeszkedik, a $\overline{T_1T_2}$ és $\overline{F_1F_2}$ szakaszok felezőpontja pedig egyaránt O, a hiperbola középpontja.

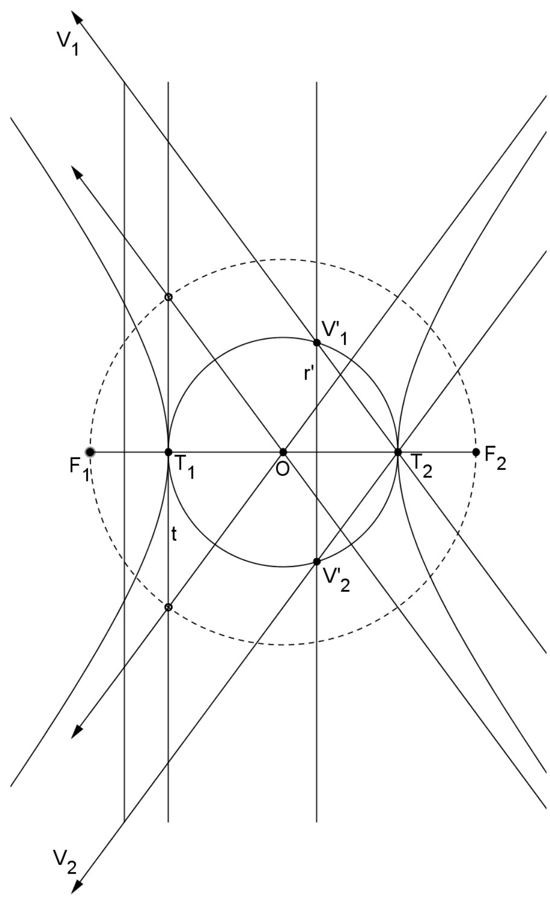
Ebben az esetben is meghatározunk a k hiperbolát körbe transzformáló centrális kollineációt, az előzőtől némileg eltérő módszerrel.

- A korábban már megismert módon megszerkesztjük az adott hiperbola aszimptotáit: ezek az $\overline{F_1F_2}$ átmérőjű kört a T_1-ben a valós tengelyre állított merőleges egyenes pontjaiban metszik, és illeszkednek O-ra. Az aszimptoták végtelen távoli pontjai legyenek $V_{1\infty}$ és $V_{2\infty}$.
- Legyen k' a $\overline{T_1T_2}$ átmérőjű kör. Olyan centrális kollineációt határozunk meg, amelynél a k hiperbola képe k'.
- Legyen T_2 a kollineáció centruma, k' T_2-beli t érintője a kollineáció tengelye.
- Tegyük fel, hogy a $V_{1\infty}$ és $V_{2\infty}$ végtelen távoli pontok képei rendre az aszimptotákkal T_2-n keresztül húzott párhuzamosok és k' V_1' és V_2' metszéspontjai. Ekkor a kollineáció r' ellentengelye $\overleftrightarrow{V_1'V_2'}$
- Az így meghatározott kollineáció a k hiperbolát valóban k'-be transzformálja. k ugyanis a $V_{1\infty}, V_{2\infty}, T_1, T_2$ pontokra illeszkedő, utóbbi pontban t érintővel rendelkező kúpszelet. A szóban forgó pontok képei illeszkednek k'-re, t invariáns egyenes és k'-nek szintén érintője, így k képe valóban k'.

Végül megvizsgáljuk, hogy egy adott kör adott centrális kollineáció általi képeként kapott kúpszelet meghatározó adatai hogyan szerkeszthetőek.

Legyen adott egy k kör, és legyen az adott kollineáció centruma C, tengelye t, az eltűnési egyenes q. Ekkor k képe

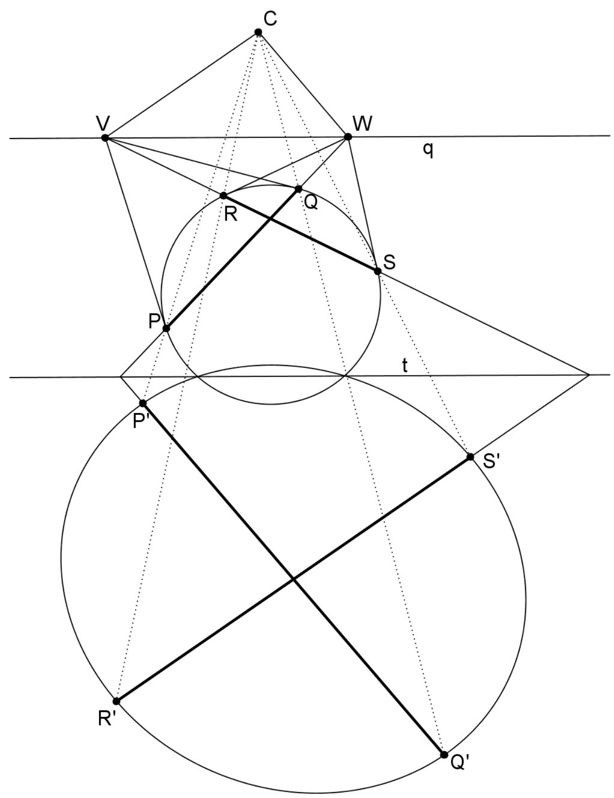
- ellipszis, ha k nem metszi q-t,
- parabola, ha k érinti q-t,
- hiperbola, ha k két pontban metszi q-t.



Ugyanis pontosan q és k közös pontjainak képei végtelen távoli pontok; egy kúpszelet pedig ezek számától függően ellipszis, parabola vagy hiperbola.

Tegyük fel először, hogy k nem metszi q-t. Megszerkesztjük ekkor a k' képellipszis egy konjugált átmérőpárját.

- Egy ellipszis egy konjugált átmérőpárját a végtelen távoli egyenes az ellipszisre nézve konjugált valamely pontpárjának polárisai alkotják. Így k' egy konjguált átmérőpárjának ősképe: a végtelen távoli egyenes ősképére, azaz q-ra illeszkedő, k-ra nézve konjugált pontpár polárisai.
- Válasszuk tehát a q-ra illeszkedő V pontot tetszőlegesen, ennek polárisa k-ra vonatkozóan a V-ből k-hoz húzott érintők P illetve Q érintési pontjaira illeszkedő egyenes. Legyen ezen egyenes q-val közös pontja W.
- Ekkor W és V konjugáltak k-ra nézve, így a $\overline{PQ}$ képeként kapott átmérőhöz konjugált átmérő a W polárisának képeként kapható. Legye-

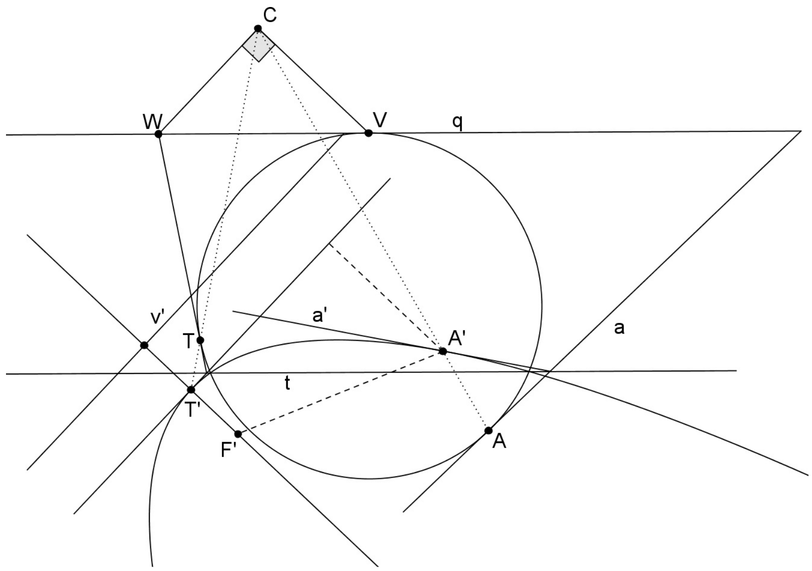


nek tehát a W-ből k-hoz húzott érintők érintési pontjai R és S. (Ekkor a konjugáltság tulajdonságaiból adódóan R, S és V kollineáris.)

- A keresett konjugált átmérőpár $\overline{PQ}$ és $\overline{RS}$ képeként kapható.

Legyen k q-t érintő kör. Ekkor k kollineációs képe parabola; meghatározzuk ezen parabola fókuszát és vezéregyenesét.

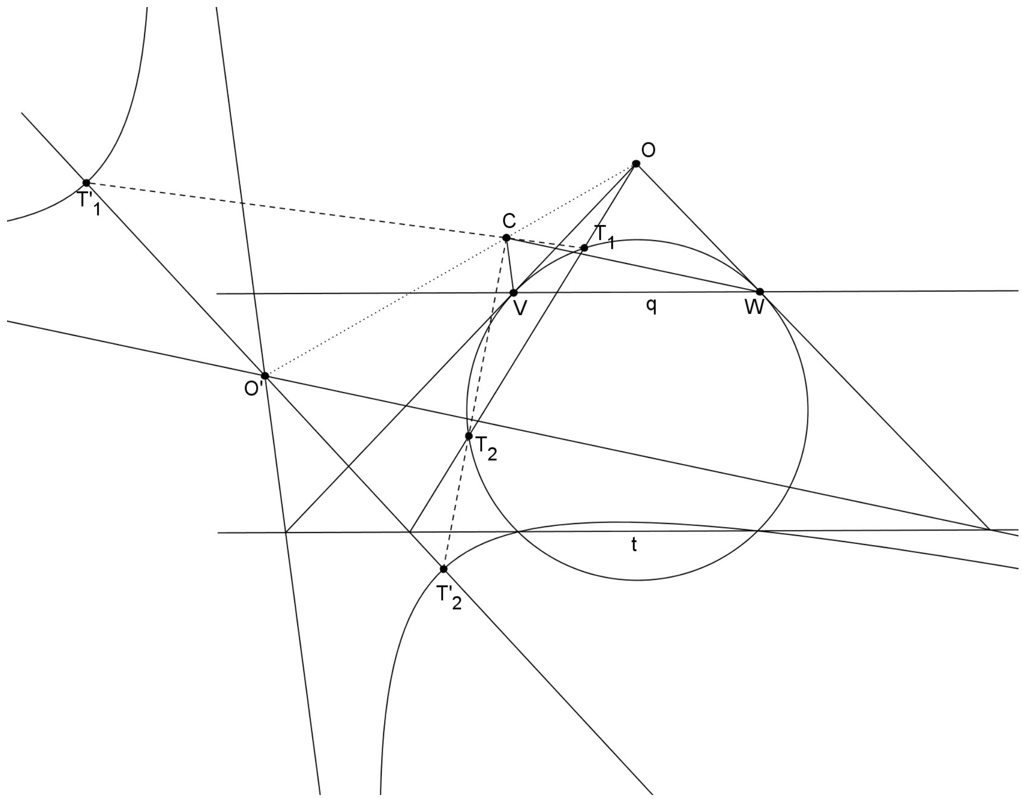
- Legyen k q-ra illeszkedő érintési pontja V. Ekkor k' végtelen távoli pontja V képe, azaz $\overleftrightarrow{CV}$ végtelen távoli pontja, V'_∞. Így a k' parabola tengelye párhuzamos $\overleftrightarrow{CV}$-vel.
- k' tengelypontbeli érintője merőleges a tengelyre, így irányát a V'_∞-re merőleges irányt megadó W'_∞ végtelen távoli pont jelenti. Ezen végtelen távoli pont ősképét a W'_∞ irányú, C-re illeszkedő egyenes és q metszéspontjaként kaphatjuk meg, legyen ez a pont W.
- Ekkor k' tengelypontbeli érintője megszerkeszthető, ősképe ugyanis a W-ből k-hoz húzott, q-tól különböző érintő. Az érintési pont ősképe az előző érintő k-ra illeszkedő t érintési pontja, így a keresett parabola T' tengelypontja is megszerkeszthető.



- Egy parabola fókuszát kimetszi a parabola tengelyéből egy tetszőleges parabolapontból a vezéregyenesre bocsátott merőlegesnek a pontbeli parabolaérintőre vonatkozó tükörképe. Jól ismert ugyanis, hogy a parabolapontból a vezéregyenesre bocsátot merőleges és a pontot a fókusszal összekötő egyenes által meghatározott szög szögfelezője éppen a parabolaérintő. Ezért a k kör egy tetszőleges A pontját, és arra illeszkedő a érintőjét kiválasztva, az A' és a' kollineációs képek a k' parabola egy pontját és a pontbeli érintőt adják. Így megszerkeszthető a parabola F' fókusza.
- A parabola fókuszát a tengelypontjára tükrözve megkapjuk a vezéregyenes egy pontját, amelyre illeszkedő, a tengelyre merőleges egyenes a keresett v' vezéregyenes.

Legyen végül k a q ellentengelyt két pontban metsző kör. Ekkor k kollineációs képe a k' hiperbola; meghatározzuk k' tengelypontjait és aszimptotáit.

- Legyenek k és q metszéspontjai V és W. Ekkor V és W képei a k' hiperbola aszimptotairányait jelentő V'_∞ és W'_∞ végtelen távoli pontok.
- A hiperbola aszimptotáinak ősképei a k kör V-re illetve W-re illeszkedő érintői.
- A hiperbola valós tengelye az aszimptoták egyeneseinek (külső vagy belső) szögfelezője. A két szögfelező ősképét megszerkesztve pontosan az egyik őskép metszi k-t, ez a valós tengely ősképe.
- A valós tengely ősképének k-val közös pontjai a hiperbola tengelypontjainak ősképei.



3.7. Feladatok

1. Adott egy ABC háromszög. Tetszőleges $0 < t < 1$ esetén legyen $U(t)$ illetve $V(t)$az $\overline{AB}$ illetve a $\overline{BC}$ szakaszt $\frac{t}{1-t}$ arányban osztó pont. Igazoljuk, hogy létezik olyan parabola, amely az összes $\overleftrightarrow{U(t)V(t)}$ egyenest érinti!

2. Adott egy kúpszelet négy pontja, és az egyik pontban az érintő. Szerkesszük meg egy további adott pontban a kúpszelet érintőjét!

3. Adott egy kúpszelet négy pontja, és az egyik pontban az érintő, továbbá egy, erre a pontra illeszkedő további e egyenes. Szerkesszük meg e másik, az adott kúpszeletre illeszkedő pontját!

4. Adott egy kúpszelet három pontja, ezek közül kettőben az érintő. Szerkesszünk meg a kúpszelet valamely további pontját!

5. Adott egy kúpszelet három pontja, ezek közül kettőben az érintő. Szerkesszük meg a kúpszelet harmadik adott pontra illeszkedő érintőjét!

6. Adott egy parabola három pontja és tengelyének iránya. Szerkesszük meg valamelyik adott pontban a parabola érintőjét!

7. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy pontja. Szerkesszük meg ebben a pontban a hiperbola érintőjét!
8. Adott egy hiperbola két aszimptotája, egy P pontja, és egy P-re illeszkedő e egyenes. Szerkesszük meg e és a hiperbola P-től különböző Q metszéspontját! Igazoljuk, hogy e és az aszimptoták metszéspontjait A_1-el illetve A_2-vel jelölve, $d(P, A_1) = d(Q, A_2)$.
9. Adott egy hiperbola négy pontja és egy aszimptota iránya. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit!
10. Adott egy kúpszelet öt érintője, és az egyikre illeszkedő P pont. Szerkesszük meg a kúpszelet P-re illeszkedő másik érintőjét!
11. Adott egy kúpszelet négy érintője, és az egyiken az érintési pont. Szerkesszük meg valamely másik adott érintőre illeszkedő érintési pontot!
12. Adott egy kúpszelet öt érintője. Szerkesszük meg a valamelyik adott érintővel párhuzamos további érintőt!
13. Adott egy parabola négy érintője, és egy e egyenes. Szerkesszük meg a parabola e-vel párhuzamos érintőjét!
14. Adott egy parabola három érintője, és ezek közül egyikben az érintési pont. Szerkesszük meg a parabola tengelyirányát!
15. Adott egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg a parabola tengelyét!
16. Igazoljuk, hogy tetszőleges parabola esetén bármely két érintő metszéspontját az érintőkre illeszkedő parabolapontok által meghatározott szakasz felezőpontjával összekötő egyenes párhuzamos a parabola tengelyével!
17. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy érintője. Szerkesszük meg az adott érintőre illeszkedő érintési pontot! Igazoljuk, hogy az érintési pont felezi az érintő aszimptoták közé eső szakaszát!
18. Igazoljuk, hogy bármely érintőnégyszög átlói, valamint a beírt körének a szemközti oldalakon levő érintési pontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át! Mutassuk meg, hogy az említett négy egyenes harmonikus sugárnégyest alkot!
19. Tegyük fel, hogy $ABCD$ szimmetrikus trapéz, amelynek alapjai $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, szárainak metszéspontja P. Legyen a trapéz köré írt kör A és C pontjához húzható érintők metszéspontja Q. Igazoljuk, hogy a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesek párhuzamosak!
20. Legyen ABC tetszőleges háromszög, amelynek beírt köre a $\overline{BC}$ oldalt a D, az $\overline{AC}$ oldalt az E, az $\overline{AB}$ oldalt az F pontban érinti. Legyen G a $\overline{CF}$ szakasz, H a $\overline{BE}$ szakasz további közös pontja a beírt körrel. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{EF}$ és $\overleftrightarrow{GH}$ konkurrensek!

21. Legyen ABC tetszőleges háromszög, amelynek beírt köre az $\overline{AB}$ oldalt az M, az $\overline{AC}$ oldalt az N pontban érinti. Legyen P az $\overleftrightarrow{MN}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ egyenesek közös pontja. A beírt kör $\overleftrightarrow{BC}$ oldalegyenessel párhuzamos érintője messe az $\overline{AB}$ oldalt a D, a $\overline{AC}$ oldalt az E pontban. Legyen F a $\overline{DE}$ szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{PF}$ érinti az ABC háromszög beírt körét!

22. Tegyük fel, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek körülírt körei megegyeznek! Jelölje az oldalak páronként vett metszéspontjait $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = G$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = H$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = I$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = J$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = K$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = L$. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{GJ}$, $\overleftrightarrow{HK}$ és $\overleftrightarrow{IL}$ konkurrens!

23. Igazoljuk, hogy tetszőleges körbe írt teljes négyszög átlói által meghatározott háromszög magasságpontja a kör középpontja!

24. Adott egy kúpszelet öt pontja és egy egyenes. Szerkesszük meg az egyenes és a kúpszelet közös pontjait!

25. Adott egy kúpszelet öt pontja és egy további pont. Szerkesszük meg a kúpszelet adott pontra illeszkedő érintőit!

26. Adott egy kúpszelet öt pontja. Döntsük el, hogy a kúpszelet ellipszis, parabola vagy hiperbola!

27. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg valamely további pont kúpszeletre vonatkozó polárisát!

28. Adott egy kúpszelet öt érintője. Szerkesszük meg a kúpszelet egy konjugált átmérőpárját!

29. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg a kúpszelet egy konjugált átmérőpárját!

30. Adott egy parabola fókusza és vezéregyenese, valamint egy e egyenes. Szerkesszük meg e és a parabola közös pontjait!

31. Adott egy parabola fókusza és vezéregyenese, valamint egy külső pont. Szerkesszük meg az adott pontból a parabolához húzható érintőket!

32. Adott egy parabola fókusza és vezéregyenese, valamint egy e egyenes. Szerkesszük meg a parabola e-vel párhuzamos érintőit!

33. Adottak egy hiperbola fókuszai és tengelypontjai, valamint egy e egyenes. Szerkesszük meg e és a hiperbola közös pontjait!

34. Adottak egy hiperbola fókuszai és tengelypontjai, valamint egy külső pont. Szerkesszük meg az adott pontból a hiperbolához húzható érintőket!

35. Adottak egy hiperbola fókuszai és tengelypontjai, valamint egy e egyenes. Szerkesszük meg a hiperbola e-vel párhuzamos érintőit!

36. Adott egy centrális kollineáció centruma, tengelye, a q ellentengely, valamint egy q-t nem metsző k kör. Szerkesszük meg a k kollineációs képeként kapható ellipszis tengelyeit!

37. Adott egy centrális kollineáció tengelye, a q ellentengely, valamint egy q-t nem metsző k kör. Határozzuk meg a kollineáció centrumát úgy, hogy k képe ismét kör legyen!

38. Legyen ABC tetszőleges háromszög, és P tetszőleges, az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont. Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AP}$ a háromszög körülírt körét A-n kívül az R pontban metszi. Legyen K $\overleftrightarrow{BC}$ tetszőleges pontja. A $\overleftrightarrow{KA}$ illetve $\overleftrightarrow{KR}$ egyenesek és a körülírt kör további metszéspontjait jelölje L illetve M. Legyen továbbá $\overleftrightarrow{KP} \cap \overleftrightarrow{AB} = X$, $\overleftrightarrow{KP} \cap \overleftrightarrow{AC} = Y$, $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{BC} = Q$. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{CX}$ és $\overleftrightarrow{BY}$ konkurrens egyenesek!

39. Tekintsünk egy ABC háromszöget, és legyen M tetszőleges, az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont, valamint l egy M-re illeszkedő, a csúcsok egyikét sem tartalmazó egyenes. Jelölje l metszéspontjait a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ oldalegyenesekkel rendre A_1, B_1, C_1; valamint az $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CM}$ egyenesek metszéspontjait a háromszög körülírt körével rendre A_2, B_2, C_2. Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ egyenesek egy, a körülírt körre illeszkedő ponton mennek át!

40. Legyen ABC tetszőleges háromszög, és jelölje a beírt kör érintési pontjait a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ oldalakon rendre D, E, F. Legyen $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AB} = P$. Tekintsünk egy tetszőleges C-re illeszkedő egyenest, amelynek $\overleftrightarrow{AB}$-vel és $\overleftrightarrow{EF}$-el közös pontjai rendre N és M. Legyen továbbá O a beírt kör középpontja, valamint $\overleftrightarrow{PM} \cap \overleftrightarrow{AC} = Q$. Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{ON}$ és $\overleftrightarrow{FQ}$ merőleges egyenesek!

41. Adott egy k kör és a k belsejében fekvő A és B pontok. Szerkesszünk olyan pontpárt, amely konjugált a k körre nézve és harmonikusan választja el az (AB) pontpárt!

42. Adott egy k kör és a k belsejében fekvő ABC háromszög. Kiválasztva a háromszög valamely két csúcsát, tekintsük azt a pontpárt, amely konjugált k-ra nézve és a választott két csúcsot harmonikusan választja el. Az így kapott három pontpár mindegyikéből tekintsük a körre nézve külső pontokat. Igazoljuk, hogy ez a három külső pont kollineáris!

4. Homogén koordináták

4.1. A homogén koordináták értelmezése

Ebben a fejezetben a valós projektív sík pontjait valós számhármasok segítségével fogjuk jellemezni.

Ebből a célból legyen az euklideszi sík a háromdimenziós tér $z = 1$ egyenletű síkja, ekkor az euklideszi sík $P(x, y)$ pontjának a tér $P(x, y, 1)$ pontja felel meg. Azonosítsuk be a P pontot a térbeli koordinátarendszer O origóját P-vel összekötő egyenes összes pontjával: ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ esetén $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$ a P pontot jellemzi. Amennyiben P végtelen távoli pont, az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes az origón keresztül a $z = 1$ sík valamely egyenesével párhuzamos egyenest jelent, ennek összes pontja a tér xy-síkjában van, tehát bármely pontjának koordinátája 0. Ez azt jelenti, hogy *a valós projektív sík tetszőleges pontját beazonosítottuk a tér origóra illeszkedő egyeneseivel.*

A valós projektív sík pontjait tehát olyan módon látjuk el koordinátákkal, hogy a nekik megfeleltetett térbeli egyenes *tetszőleges*, origótól különböző pontjának koordinátái a valós projektív sík megfelelő pontját jellemzik. Ilyen módon *a valós projektív sík tetszőleges pontja* $[x_1, x_2, x_3]$, *ahol* $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ *valós számhármas, és az* (x_1, x_2, x_3) *és* (y_1, y_2, y_3)*valós számhármasokat azonosnak tekinjük, ha van olyan* $\lambda \neq 0$ *valós szám, amelyre* $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(y_1, y_2, y_3)$. Egy ilyen valós számhármast a valós projektív sík megfelelő pontjának *homogén koordinátá*inak mondunk.

Az $[x_1, x_2, x_3]$ pont tehát

- az euklideszi sík $\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$ pontja, ha $x_3 \neq 0$,
- végtelen távoli pont, ha $x_3 = 0$.

Az euklideszi sík valamely ponthalmazának egyenletét az euklideszi síkon használt ún. *Descartes-koordánátáк*ból *homogén koordinátákba* válthatjuk át, ha elvégezzük az

$$x = \frac{x_1}{x_3}\ ,\ y = \frac{x_2}{x_3}$$

helyettesítést. Az egyenletben x_3 nevezőben előforduló legmagasabb kitevőjével átszorozva elvégezzük a „projektív bővítést”, azaz az átszorzás után kapott egyenletnek már végtelen távoli pontok koordinátái is eleget tehetnek, amelyeket az eredeti alakzat végtelen távoli pontjainak nevezünk.

Leírjuk homogén koordináták segítségével a valós projektív sík *egyenes*eit. Az euklideszi sík egy tetszőleges egyenesének egyenlete

$$e_1 x + e_2 y + e_3 = 0$$

alakú, ahol e_1 és e_2 egyszerre nem tűnik el. A fenti helyettesítést elvégezve

$$e_1 \frac{x_1}{x_3} + e_2 \frac{x_2}{x_3} + e_3 = 0,$$

átszorzás után az

$$e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

alakot kapjuk. Itt az $[e_1, e_2, e_3]$ elemhármas egyértelműen jellemzi az egyenest, így azt az *egyenes homogén koordinátái*nak hívjuk. Így *a valós projektív sík tetszőleges egyenese* $[e_1, e_2, e_3]$*, ahol* $(e_1, e_2, e_3) \neq (0, 0, 0)$ *valós számhármas, és az* (e_1, e_2, e_3) *és* (f_1, f_2, f_3)*valós számhármasokat azonosnak tekinjük, ha van olyan* $\lambda \neq 0$ *valós szám, amelyre* $(e_1, e_2, e_3) = \lambda(f_1, f_2, f_3)$.

Vegyük észre, hogy a valós projektív sík tetszőleges pontját és tetszőleges egyenesét ugyanolyan módon láthatjuk el homogén koordinátákkal. Észrevehetjük továbbá, hogy az $[x_1, x_2, x_3]$ pont és az $[e_1, e_2, e_3]$ egyenes illeszkedését leíró

$$e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0$$

egyenletben a pont és egyenes szerepe felcserélhető. Ennélfogva ha tetszőleges pontnak megfeleltetjük az ugyanolyan homogén koordinátájú egyenest, és tetszőleges egyenesnek megfeleltetjük az ugyanolyan homogén koordinátájú pontot, akkor a valós projektív sík pontjainak és egyeneseinek halmaza között illeszkedéstartó bijekciót adunk meg. Ez újabb indoklást ad a *dualitás elvé*re: ha egy állítás bizonyításában a pontok és egyenesek koordinátáinak szerepét felcseréljük, a duális állítás bizonyításához jutunk.

(Megjegyezzük, hogy ha a ponthalmaz és egyeneshalmaz között ezt az illeszkedéstartó bijekciót a korábban látott módon, egy kúpszeletre vonatkozó pólus-poláris kapcsolatként szeretnénk megkapni, akkor az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ egyenletű kúpszelethez, egy úgynevezett *képzetes kör*höz jutnánk. Nyilvánvaló, hogy ennek az egyenletnek a sík egyetlen pontjának koordinátái sem tesznek eleget, azonban pólus-poláris kapcsolatot - egy ún. elliptikus polaritást - erre vonatkozóan is meg lehet adni.)

Az $[e_1, e_2, e_3]$ egyenes tehát

- az euklideszi sík $e_1x + e_2y + e_3 = 0$ egyenese, ha $e_1^2 + e_2^2 \neq 0$,
- $[0, 0, 1]$ - azaz az $x_3 = 0$ egyenes - a végtelen távoli egyenes.

Meghatározzuk az

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

egyenletű egyenes (tehát az euklideszi sík $ax + by + c = 0$ egyenesének) végtelen távoli pontját. A végtelen távoli pontokat $x_3 = 0$ jellemzi, így az egyenesre illeszkedő $[x_1, x_2, 0]$ végtelen távoli pontra

$$ax_1 + bx_2 = 0$$

áll fenn. Ezen egyenlet (x_1, x_2) megoldásai a $(b, -a)$ számpár valós számszorosai, így a keresett végtelen távoli pont

$$[b, -a, 0].$$

Mivel $(b, -a)$ az eredeti egyenes irányvektora, látható, hogy *két egyenes végtelen távoli pontja* valóban *akkor és csak akkor egyezik meg, ha azonos az irányvektoruk.* $[x_1, x_2, 0]$ tehát az (x_1, x_2) irányvektorú egyenesek közös végtelen távoli pontja.

Tekintsük az $A[a_1, a_2, a_3]$ és $B[b_1, b_2, b_3]$ pontokat. Meghatározzuk az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes egyenletét. Egy $X[x_1, x_2, x_3]$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre, azaz A, B, és X akkor és csak akkor kollineáris, ha a térben az origóból a nekik megfelelő pontokba mutató $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OX}$ vektorok lineárisan függőek (azaz a három vektor egy síkban van). Az (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) és (x_1, x_2, x_3) vektorok pedig pontosan akkor lineárisan függőek, ha a belőlük, mint sorvektorokból képzett determináns 0, azaz

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt a determinánst kifejtve megkapjuk az egyenes keresett egyenletét. A kifejtési tétel alapján tehát az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes homogén koordinátái

$$[a_2b_3 - b_2a_3, b_1a_3 - a_1b_3, a_1b_2 - b_1a_2].$$

A dualitás elve alapján az $e[e_1, e_2, e_3]$ és $f[f_1, f_2, f_3]$ egyenesek metszéspontja is könnyen meghatározható. Az $u[e_1, e_2, e_3]$ egyenes akkor és csak akkor illeszkedik a két egyenes metszéspontjára, ha

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

így az e és f egyenesek metszéspontjának homogén koordinátái

$$[e_2f_3 - f_2e_3, f_1e_3 - e_1f_3, e_1f_2 - f_1e_2].$$

4.2. A kettősviszony kifejezése homogén koordinátákkal

4.1. Lemma. *Az $A[a_1, a_2, a_3]$ és $B[b_1, b_2, b_3]$ pontok egyenesére azok és csak azok a pontok illeszkednek, amelyekhez vannak olyan α, β valós számok, hogy a pont homogén koordinátái*

$$[\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)].$$

Mivel már korábban láttuk, hogy egy pont akkor és csak akkor illeszkedik az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre, ha a háromdimenziós tér neki megfelelő vektora az A-nak és B-nek megfelelő vektorokkal lineárisan függő rendszert alkot, az állítás nyilvánvaló.

4.2. Definíció. *Legyenek C és D az $A[a_1, a_2, a_3]$ és $B[b_1, b_2, b_3]$ pontok egyenesének azon, A-tól és B-től különböző pontjai, melyeknek homogén koordinátái*

$$C[\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)] \text{ és } D[\gamma(a_1, a_2, a_3) + \delta(b_1, b_2, b_3)].$$

Ekkor az

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\gamma}{\delta}$$

számot a négy pont kettősviszony*ának hívjuk.*

Megmutatjuk először, hogy a fenti definíció jó, azaz független az A és B pontok homogén koordinátáinak megválasztásától. Valóban, tegyük fel, hogy az A és B pontoknak valamely más, $[k(a_1, a_2, a_3)]$ és $[l(b_1, b_2, b_3)]$ homogén koordinátáit választottunk (ahol $k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Ekkor

$$C = [\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)] = [\frac{\alpha}{k} k(a_1, a_2, a_3) + \frac{\beta}{l} l(b_1, b_2, b_3)],$$

$$D = [\gamma(a_1, a_2, a_3) + \delta(b_1, b_2, b_3)] = [\frac{\gamma}{k} k(a_1, a_2, a_3) + \frac{\delta}{l} l(b_1, b_2, b_3)],$$

így

$$(ABCD) = \frac{\frac{\beta}{l}}{\frac{\alpha}{k}} : \frac{\frac{\delta}{l}}{\frac{\gamma}{k}} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\gamma}{\delta}.$$

Ellenőrizzük, hogy a most bevezetett kettősviszony-fogalom megegyezik a korábban értelmezett kettősviszony-fogalommal.

Tegyük fel először, hogy A, B, C, D az euklideszi sík véges helyzetű pontjai. Ekkor megválaszthatóak a homogén koordináták $A[a_1, a_2, 1]$ és $B[b_1, b_2, 1]$ módon. Korábban már láttuk, hogy az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ pontokra illeszkedő euklideszi egyenes pontjai $(1-t)(a_1, a_2) + t(b_1, b_2)$, ahol a pont A és B alappontokra vonatkozó osztóviszonya $\frac{t}{1-t}$. Ennek megfelelően legyen

$$C[(1-t)(a_1, a_2, 1) + t(b_1, b_2, 1)] \text{ és } D[(1-s)(a_1, a_2, 1) + s(b_1, b_2, 1)].$$

Ekkor

$$(ABCD) = \frac{t}{1-t} : \frac{s}{1-s} = \frac{(ABC)}{(ABD)},$$

így ebben az esetben visszakaptuk a kettősviszony korábbi definícióját.

Abban az esetben, ha D_∞ az egyenes végtelen távoli pontja, olyan kombináló együtthatókat kell keresnünk, amelyekkel a harmadik koordináta 0, így

$$D_\infty[(a_1, a_2, 1) - (b_1, b_2, 1)].$$

Ezt azt jelenti, hogy

$$(ABCD_\infty) = \frac{t}{1-t} : \frac{-1}{1} = -(ABC),$$

ami megegyezik a korábban értelmezett kettősviszony-értékkel.

Megjegyezzük, hogy a koordinátás kifejezést alkalmazva újabb indoklást adhatunk arra a tényre, hogy a pontnégyes kettősviszonya és a sugárnégyes kettősviszonya duális fogalmak. Ehhez azt kell ellenőriznünk, hogy az $a[a_1, a_2, a_3]$, $b[b_1, b_2, b_3]$, $c[\alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)]$

és $d[\gamma(a_1,a_2,a_3)+\delta(b_1,b_2,b_3)]$ egyenesek kettősviszonya $\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\gamma}{\delta}$. A korábban már látott módon a négy egyenes kettősviszonyát megkapjuk azokat tetszőleges, a közös pontjukra nem illeszkedő egyenessel elmetszve adódó pontnégyes kettősviszonyaként. Feltehető, hogy a négy tekintett egyenes közös pontja nem végtelen távoli pont, és ebben az esetben a metsző egyenesnek megválasztható a végtelen távoli egyenes. A szóban forgó egyenesek végtelen távoli pontjai rendre $A=[a_2,a_1,0]$, $B=[b_2,b_1,0]$, $C=[\alpha a_2+\beta b_2,\alpha a_1+\beta b_1,0]$, $D=[\gamma a_2+\delta b_2,\gamma a_1+\delta b_1,0]$; és ezek kettősviszonya valóban $\frac{\beta}{\alpha}:\frac{\gamma}{\delta}$.

Végül formulát adunk az $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3]$, $C[c_1,c_2,c_3]$, $D[d_1,d_2,d_3]$ pontok kettősviszonyának kiszámítására. Ehhez meg kell határoznunk azokat az α,β együtthatókat, amelyekre

$$(c_1,c_2,c_3)=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\beta(b_1,b_2,b_3).$$

Válasszunk ki a koordináták közül két olyat, amelyekre a megfelelő koordináták egyenlőségéből adódó egyenlet nem triviális, legyenek ezek például az első és második koordináta. Ekkor az adódó egyenletek

$$\alpha a_1+\beta b_1=c_1,$$

$$\alpha a_2+\beta b_2=c_2.$$

Ezen egyenletrendszer megoldása az (α,β) együtthatókra (például a Cramer-szabály alapján)

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \beta=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy azok a γ,δ együtthatók, amelyekre

$$(d_1,d_2,d_3)=\gamma(a_1,a_2,a_3)+\delta(b_1,b_2,b_3),$$

$$\gamma=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\ \delta=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Így

$$(ABCD)=\frac{\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}{\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}:\frac{\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}{\dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

4.3. Kollineációk koordinátás kifejezése

4.3. Tétel. *(A projektív geometria alaptétele) A valós projektív sík tetszőleges kollineációja esetén vannak olyan a_{ij} $((i,j) \in \{1,2,3\})$ valós számok, hogy a kollineációnál tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x'_1, x'_2, x'_3]$ pont, amelyre*

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti módon megadott leképezés pontosan akkor kollineáció, ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A tételt az utolsó fejezetben bizonyítjuk.

Megmutatjuk, hogy *a projektív geometria alaptételének közvetlen következménye az affin geometria alaptétele.* Az affinitások ugyanis pontosan azok a kollineációk, amelyeknél minden végtelen távoli pont képe végtelen távoli pont. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges affinitás olyan kollineáció, amelynél a fenti előállításban szereplő együtthatókra tetszőleges $(x_1, x_2, 0)$ számhármas esetén

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0.$$

Innen $(1,0,0)$ és $(0,1,0)$ választással adódik, hogy $a_{31} = 0$ és $a_{32} = 0$. Vegyük észre, hogy ha a kollineáció előállításában szereplő a_{ij} együtthatók mindegyikét ugyanazzal a $\lambda \neq 0$ valós számmal végigszorozzuk, akkor ugyanezt a kollineációt kapjuk: minden pont képének minden koordinátája λ-szorosára változik, ami azt jelenti, hogy a képpontok változatlanok. Ez azt jelenti, hogy valamely, 0-tól különböző együtthatót szabadon megválaszthatunk. Legyen most $a_{33} = 1$. Ez azt jelenti, hogy az affinitás az $[x, y, 1]$ ponthoz azt az $[x'_1, x'_2, x'_3]$ pontot rendeli, amelyre

$$x'_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$

$$x'_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23},$$

$$x'_3 = a_{33} = 1.$$

Tehát - Descartes-koordánátákra áttérve - (x, y) képe

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}),$$

az affin geometria alaptétele pedig pontosan ilyen együtthatók létezését állította.

4.4. Tétel. *A valós projektív sík tetszőleges kollineációja kettősviszonytartó leképezés.*

Bizonyítás: Elegendő azt megmutatnunk, hogy tetszőleges kollineáció „megőrzi a kombináló együtthatókat”, azaz ha $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, $Z = [\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)]$, és X kollineációs képe $X' = [x_1', x_2', x_3']$ valamint Y kollineációs képe $Y' = [y_1', y_2', y_3']$, akkor Z kollineációs képe

$$Z' = [\alpha(x_1', x_2', x_3') + \beta(y_1', y_2', y_3')].$$

Tegyük fel, hogy egy kollineációnál tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x_1', x_2', x_3']$ pont, amelyre

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Ekkor

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3,$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3,$$

$$y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3.$$

Mivel az Z pont $[z_1, z_2, z_3]$ homogén koordinátáira

$$z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1,$$

$$z_2 = \alpha x_2 + \beta y_2,$$

$$z_3 = \alpha x_3 + \beta y_3,$$

innen Z képének $[z_1', z_2', z_3']$ koordinátáira tetszőleges $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén

$$z_i' = a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + a_{i3}z_3 = a_{i1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + a_{i2}(\alpha x_2 + \beta y_2) + a_{i3}(\alpha x_3 + \beta y_3) =$$

$$= \alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3) + \beta(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3) = \alpha x_i' + \beta y_i'$$

adódik. Ez állításunk igazságát jelenti. ■

A kollineációk alaptételének értelmében bármely négy, általános helyzetű pont kollineációval az $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$ pontokba transzformálható. Ez azt jelenti, hogy egy (illeszkedési jellegű) állítás igazolásánál feltehetjük, hogy - az eredeti pontok helyett egy ilyen kollineáció általi képekkel dolgozva - valamely négy, általános helyzetű pont koordinátái $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *bármely négy, általános helyzetű pont megválasztható a koordinátarendszer* $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$ *alappontjainak.*

A módszer alkalmazását az alábbi egyszerű, de fontos állítás igazolásával illusztráljuk.

4.5. Állítás. *(A Fano-tulajdonság.) A valós projektív síkon egyetlen teljes négyszög átlóspontjai sem kollineárisak.*

Bizonyítás: Válasszuk meg a koordinátákat úgy - ugyanis fenti megjegyzésünk értelmében egy kollineáció alkalmazásával elérhető - hogy a tekintett teljes négyszög csúcsainak koordinátái $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ és $[1,1,1]$ legyenek. Ekkor az átlóspontok koordinátái $[1,1,0]$, $[1,0,1]$ és $[0,1,1]$, amelyek valóban nem kollineáris pontok. ■

4.6. Állítás. *(A kollineációk fixponttétele.) A valós projektív sík tetszőleges kollineációjának van fixpontja.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a tekintett kollineációnál tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x_1', x_2', x_3']$ pont, amelyre

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Egy $[x_1, x_2, x_3]$ pont és képe akkor egyezik meg, ha az (x_1, x_2, x_3) és (x_1', x_2', x_3') számhármasok csak egy $\lambda \neq 0$ skalárszorzóban különböznek, azaz van olyan $\lambda \neq 0$, amelyre

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3.$$

Rendezve az egyenleteket,

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0.$$

Ennek az egyenletrendszernek a $(0,0,0)$ valós számhármas mindig megoldása; olyan megoldás tehát, amely a valós projektív sík egy pontját reprezentálja, akkor és csak akkor van, ha az egyenletrendszer nem egyértelműen oldható meg. A Cramer-szabály alapján az egyértelmű megoldhatóság akkor és csak akkor teljesül, ha az alapmátrix determinánsa nem 0, így csak abban az esetben kapunk nemtriviális megoldást, ha van olyan λ, amelyre

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt a determinánst kifejtve, λ-ra egy harmadfokú egyenletet kapunk. Ismert, hogy egy valós együtthatós harmadfokú egyenletnek mindig van valós gyöke. (Az algebra alaptétele szerint ugyanis három komplex gyök van; a komplex gyökök azonban konjugáltjukkal együtt fordulnak elő, így valamelyik gyök szükségképpen megegyezik a konjugáltjával, azaz valós.) Ez a valós gyök azonban biztosan nem 0, hiszen tetszőleges kollineáció esetén $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy minden kollineáció esetén van olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre a fenti egyenletrendszernek van megoldása, ez a megoldás fixpontot szolgáltat. ∎

Megfogalmazzuk az előző tétel duálisát is.

4.7. Állítás. *A valós projektív sík tetszőleges kollineációjának van invariáns egyenese.*

4.4. A kúpszeletek egyenletei

A kúpszeletek definíció szerint a körök kollineációs képei. A következőkben megadjuk a kúpszeletek egyenletének általános alakját.

Induljunk ki az euklideszi sík kanonikus helyzetű,

$$x^2 + y^2 = 1$$

egyenletű köréből. Ennek egyenlete homogén koordinátákkal felírva

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Tekintsük azt a kollineációt, amelynél tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x_1', x_2', x_3']$ pont, amelyre

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Ez a kollineáció a fenti kört az

$$(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2)x_1^2+(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2)x_2^2+(a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2)x_3^2+2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32})x_1x_2+$$

$$+2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})x_2x_3 + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33})x_1x_3 = 0$$

egyenletű kúpszeletbe transzformálja. Bevezetve a

$$b_{ij} := a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} \ , \ i, j \in \{1, 2, 3\}$$

jelöléseket kapjuk, hogy a kör kollineációs képének egyenlete - azaz egy *tetszőleges kúpszelet egyenlete* -

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0$$

alakú. Fontos megjegyezni, hogy egy ilyen alakú egyenlet csak akkor kúpszelet egyenlete, ha vannak olyan a_{ij} $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ számok, amelyekre

$$b_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j}$$

és $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

A következőkben megmutatjuk, hogy *a parabola és a hiperbola valóban kúpszeletek*. Mint azt korábban láttuk, a parabola illetve hiperbola kanonikus egyenletei Descartes-koordinátákban $y = \frac{1}{2p}x^2$ illetve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ezeket homogén koordinátákba átírva kapjuk az

$$x_1^2 - 2px_2x_3 = 0$$

illetve

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0$$

egyenleteket. Látható, hogy ezek valóban a kúpszeletek egyenleteinek megfelelő alakúak, meg kell azonban mutatnunk, hogy megoldható az előző a_{ij} együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer.

Ebből a célból közvetlenül megadjuk azokat a kollineációkat, amelyek a kanonikus helyzetű parabolát illetve hiperbolát az egységkörbe transzformálják. Egy ilyen kollineáció inverze ugyanis az egységkört a megfelelő parabolába illetve hiperbolába viszi, és mivel a kúpszeletek definíció szerint a körök kollineációs képei, ezzel belátjuk, hogy a parabola és a hiperbola valóban kúpszelet.

Tekintsük először az $x_1^2 - 2px_2x_3 = 0$ parabolát, és azt a kollineációt, amelynél tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x_1', x_2', x_3']$ pont, amelyre

$$x_1' = x_1,$$

$$x_2' = \sqrt{\frac{p}{2}}(x_3 - x_2),$$

$$x_3' = \sqrt{\frac{p}{2}}(x_3 + x_2).$$

Megmutatjuk, hogy ennél a kollineációnál a parabola képe az

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

kör. A kör egyenletébe a megfelelő koordinátákat behelyettesítve kapjuk, hogy ősképének egyenlete

$$x_1^2 + \frac{p}{2}(x_3 - x_2)^2 - \frac{p}{2}(x_3 + x_2)^2 = 0.$$

Az egyenlet bal oldalát alakítva,

$$x_1^2 + \frac{p}{2}((x_3 - x_2)^2 - (x_3 + x_2)^2) = x_1^2 + \frac{p}{2}((2x_3)(-2x_2)) = x_1^2 - 2px_2x_3,$$

azaz a kör őképe valóban a kanonikus helyzetű parabola.

Tekintsük a $b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0$ hiperbolát, és azt a kollineációt, amelynél tetszőleges $[x_1, x_2, x_3]$ pont képe az az $[x_1', x_2', x_3']$ pont, amelyre

$$x_1' = abx_3,$$

$$x_2' = ax_2,$$

$$x_3' = bx_1.$$

Megmutatjuk, hogy ennél a kollineációnál a hiperbola képe az

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

kör. A kör egyenletébe a megfelelő koordinátákat behelyettesítve kapjuk, hogy ősképének egyenlete

$$a^2b^2x_3^2 + a^2x_2^2 - b^2x_1^2 = 0,$$

azaz a kör ősképe valóban a kanonikus helyzetű hiperbola.

Meghatározzuk végül a parabolák és hiperbolák végtelen távoli pontjait.

Tekintsük először az $x_1^2 - 2px_2x_3 = 0$ parabolát. A parabolát az $x_3 = 0$ egyenessel elmetszve az $x_1^2 = 0$ egyenlethez jutunk, így a parabolára illeszkedő tetszőleges végtelen távoli pont koordinátái $[0, x_2, 0]$ alakúak. Egyetlen ilyen pontja van a valós projektív síknak: $[0, 1, 0]$, hiszen az összes ilyen alakú, $(0, 0, 0)$-tól különböző számhármas $(0, 1, 0)$ skalárszorosa. Mivel $[0, 1, 0]$ az y-tengely végtelen távoli pontja, és a kanonikus helyzetű parabola tengelye az y-tengely, ezzel beláttuk, hogy *a parabolának* valóban *egyetlen végtelen távoli pontja van, mégpedig a tengelyének végtelen távoli pontja.*

Tekintsük végül a $b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0$ hiperbolát. A hiperbolát az $x_3 = 0$ egyenessel elmetszve a

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = 0,$$

azaz a

$$(bx_1 - ax_2)(bx_1 + ax_2) = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel a bal oldalon álló szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, kapjuk, hogy a kanonikus helyzetű hiperbolának két végtelen távoli pontja van: $[a, b, 0]$ és $[a, -b, 0]$. Figyelembe véve a hiperbola kanonikus egyenletében szereplő paraméterek geometriai jelentését, kapjuk, hogy a hiperbola aszimptotái éppen annak a téglalapnak az átlói, amelynek középvonalai azok az x illetve y tengelyre illeszkedő, $2a$ illetve $2b$ hosszúságú szakaszok, amelyek felezőpontja az origó. Így az aszimptoták irányvektorai (a, b) illetve $(a, -b)$, ami azt jelenti, hogy *a hiperbolának* valóban *két végtelen távoli pontja van, mégpedig az aszimptoták végtelen távoli pontjai.*

4.5. Baricentrikus koordináták

Egy korábbi megjegyzésünknek megfelelően bármely négy, A, B, C, D általános helyzetű pont kollineációval az $A'[1,0,0]$, $B'[0,1,0]$, $C'[0,0,1]$, $D'[1,1,1]$ pontokba transzformálható, így az eredeti pontok helyett egy ilyen kollineáció általi képekkel dolgozva bármely négy pontról feltehető, hogy koordinátáik rendre $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$.

Válasszuk meg a fenti pontnégyest úgy, hogy D az ABC háromszög súlypontja legyen. Ekkor, alkalmazva a fent megadott kollineációt, tetszőleges pont képének koordinátáit a pont ABC háromszögre vonatkozó *baricentrikus koordinátá*inak nevezzük.

Megmutatjuk, hogy $[0,1,\alpha]$, $[\beta,0,1]$ és $[1,\gamma,0]$ rendre azon A_1, B_1, C_1 pontok baricentrikus koordinátái, amelyekre $(BCA_1)=\alpha$, $(CAB_1)=\beta$ és $(ABC_1)=\gamma$.

Tekintsük először az $[0,1,\alpha]$ baricentrikus koordinátájú A_1 pontot, és legyen A_F $\overline{BC}$ felezőpontja. Mivel D súlypont, ekkor $A_F=\overleftrightarrow{AD}\cap\overleftrightarrow{BC}$, így egyszerűen ellenőrizhető, hogy A_F baricentrikus koordinátái $[0,1,1]$. Mivel a baricentrikus koordinátákat egy kollineáció alkalmazásával kaptuk, és a kollineációk kettősviszonytartó leképezések, ez azt jelenti, hogy $(BCA_1A_F)=\alpha$. Azonban, mivel A_F felezőpont, $(BCA_F)=1$, így

$$(BCA_1A_F)=\frac{(BCA_1)}{(BCA_F)}=(BCA_1),$$

tehát valóban, $(BCA_1)=\alpha$ teljesül.

Legyen B_1 az $[\beta,0,1]$ baricentrikus koordinátájú pont, és legyen B_F $\overline{AC}$ felezőpontja. Ekkor $B_F=\overleftrightarrow{BD}\cap\overleftrightarrow{AC}$, így B_F baricentrikus koordinátái $[1,0,1]$, tehát $(CAB_1B_F)=\beta$. Mivel B_F felezőpont, $(CAB_F)=1$, így

$$(CAB_1B_F)=\frac{(CAB_1)}{(CAB_F)}=(CAB_1),$$

tehát valóban, $(CAB_1)=\beta$ áll fenn.

Végül, ha C_1 az $[1,\gamma,0]$ baricentrikus koordinátájú pont, és C_F $\overline{AB}$ felezőpontja, $C_F=\overleftrightarrow{CD}\cap\overleftrightarrow{AB}$, tehát C_F baricentrikus koordinátái $[1,1,0]$. Így az előzőekhez hasonlóan $(ABC_1C_F)=\gamma$, és $(ABC_F)=1$ miatt $(ABC_1)=\gamma$ teljesül.

Baricentrikus koordináták alkalmazásával egyszerű bizonyítást adhatunk a Ceva-tételre és a Menelaosz-tételre.

*Menelaosz tétel*ének igazolása ugyanis ezek után annak megmutatását jelenti, hogy $[0,1,\alpha]$, $[\beta,0,1]$ és $[1,\gamma,0]$ akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\alpha\beta\gamma=-1$. Alkalmazva, hogy a tekintett három pont akkor és csak akkor kollineáris, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix}=0,$$

a determináns kifejtése után közvetlenül adódik állításunk.

A *Ceva-tétel* belátásához azt kell ellenőrizni, hogy a $[0, 1, \alpha]$ és $[1, 0, 0]$, $[\beta, 0, 1]$ és $[0, 1, 0]$ valamint $[1, \gamma, 0]$ és $[0, 0, 1]$ pontok egyenesei akkor és csak akkor konkurrensek, ha $\alpha\beta\gamma = 1$. Az első egyenes homogén koordinátái $[0, \alpha, -1]$, a második egyenes koordinátái $[-1, 0, \beta]$ és végül a harmadik egyenes homogén koordinátái $[\gamma, -1, 0]$, és e három egyenes akkor és csak akkor konkurrens, ha

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & \beta \\ \gamma & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

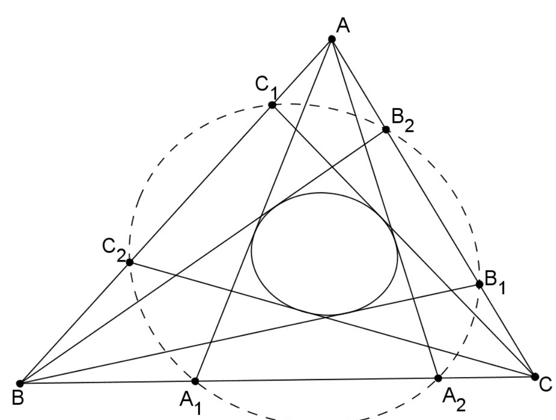
A fenti determinánst kifejtve ez a Ceva-tétel igazságát jelenti.

Baricentrikus koordináták segítségével a *Carnot-tétel* az alábbi alakot ölti: $[0, 1, \alpha_1]$, $[0, 1, \alpha_2]$, $[\beta_1, 0, 1]$, $[\beta_2, 0, 1]$, $[1, \gamma_1, 0]$ és $[1, \gamma_2, 0]$ *akkor és csak akkor illeszkednek egy kúpszeletre, ha*

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 = 1.$$

Végül a Carnot-tétel fenti alakjának alkalmazásaként igazoljuk a következő állítást.

4.8. Állítás. *Tetszőleges háromszög csúcsaiból egy tetszőleges rögzített kúpszelethez húzott érintőegyenesek szemköztes háromszögoldallal alkotott metszéspontjaiként kapható hat pont egy kúpszeletre illeszkedik.*



Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a rögzített háromszög csúcsainak homogén koordinátái $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$ és $C = [0, 0, 1]$. Legyenek a rögzített k kúpszelethez A-ból húzott érintők és $\overleftrightarrow{BC}$ közös pontjai $A_1[0, 1, \alpha_1]$ és $A_2[0, 1, \alpha_2]$, a B-ből húzott érintők és $\overleftrightarrow{AC}$ közös pontjai $B_1[\beta_1, 0, 1]$ és $B_2[\beta_2, 0, 1]$, a C-ből húzott érintők és $\overleftrightarrow{AB}$ közös pontjai $C_1[1, \gamma_1, 0]$ és $C_2[1, \gamma_2, 0]$.

Ha $[0,1,\alpha]$ $\overleftrightarrow{BC}$ egy tetszőleges pontja, akkor az A-ra és $[0,1,\alpha]$-ra illeszkedő egyenes pontjainak koordinátái valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $[1,\lambda,\alpha\lambda]$ alakúak. Ha ez az egyenes a kúpszelet egy érintője, ez azt jelenti, hogy egyetlen olyan λ létezik, amelyre $[1,\lambda,\alpha\lambda]$ kielégíti a rögzített kúpszelet

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

egyenletét. Behelyettesítés után kapjuk, hogy a

$$\lambda^2(a_{22} + 2a_{23}\alpha + a_{33}\alpha^2) + \lambda(2a_{12} + 2a_{23}\alpha) + a_{11} = 0$$

egyenletnek egy és csak egy λ megoldása van. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a szóban forgó másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0, azaz

$$4(a_{12} + \alpha a_{13})^2 - 4a_{11}(a_{22} + 2a_{23}\alpha + a_{33}\alpha^2) = 0.$$

Ez átalakítás után az

$$\alpha^2(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) + \alpha(2a_{12}a_{13} - 2a_{11}a_{23}) + (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0$$

egyenlethez vezet. Ezen egyenlet α_1 és α_2 gyökeinek szorzata a konstans tag és a másodfokú tag együtthatójának hányadosa, így kapjuk, hogy

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}.$$

Legyen most $[\beta,0,1]$ $\overleftrightarrow{AC}$ egy tetszőleges pontja. Ekkor a B-re és $[\beta,0,1]$-re illeszkedő egyenes pontjai $[\lambda\beta,1,\lambda]$ alakúak. Így egy ilyen egyenes pontosan akkor érinti a tekintett kúpszeletet, ha a

$$\lambda^2(a_{33} + 2a_{13}\beta + a_{11}\beta^2) + \lambda(2a_{23} + 2a_{12}\beta) + a_{22} = 0$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$4(a_{23} + a_{12}\beta)^2 - 4a_{22}(a_{33} + 2a_{13}\beta + a_{11}\beta^2) = 0,$$

azaz

$$\beta^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) + \beta(2a_{12}a_{23} - 2a_{13}a_{22}) + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33}) = 0.$$

Ezen egyenlet gyökeinek szorzata

$$\beta_1\beta_2 = \frac{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}.$$

Végül legyen $[1,\gamma,0]$ $\overleftrightarrow{AB}$ egy tetszőleges pontja. Ekkor a C-re és $[1,\gamma,0]$-ra illeszkedő egyenes pontjai $[\lambda,\lambda\gamma,1]$ alakúak. Így egy ilyen egyenes pontosan akkor érinti a tekintett kúpszeletet, ha a

$$\lambda^2(a_{11} + 2a_{12}\gamma + a_{22}\gamma^2) + \lambda(2a_{13} + 2a_{23}\gamma) + a_{33} = 0$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$4(a_{13}+a_{23}\gamma)^2-4a_{33}(a_{11}+2a_{12}\gamma+a_{22}\gamma^2)=0,$$

azaz

$$\gamma^2(a_{23}^2-a_{22}a_{33})+\gamma(2a_{13}a_{23}-2a_{12}a_{33})+(a_{13}^2-a_{11}a_{33})=0.$$

Így az egyenlet gyökeinek szorzata

$$\gamma_1\gamma_2=\frac{a_{13}^2-a_{11}a_{33}}{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}.$$

Tehát

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2=\frac{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}{a_{13}^2-a_{11}a_{33}}\cdot\frac{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}\cdot\frac{a_{13}^2-a_{11}a_{33}}{a_{23}^2-a_{22}a_{33}}=1,$$

ami a Carnot-tételből következően állításunk igazságát jelenti. ■

4.6. A projektív geometria alaptételének bizonyítása

Tegyük fel, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

és rendeljük hozzá tetszőleges $[x_1,x_2,x_3]$ ponthoz azt az $[x_1',x_2',x_3']$ pontot, amelyre

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$
$$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.$$

Egy ilyen leképezést a továbbiakban *projektív kollineáció*nak hívunk. Feladatunk annak belátása, hogy *a valós projektív sík kollineációi pontosan a projektív kollineációk.*

Elsőként megindokoljuk, hogy *a projektív kollineációk valóban kollineációk.* A bijektivitás abból következik, hogy az együtthatókból képzett determináns nem tűnik el. Az egyenestartás ellenőrzéséhez azt kell megmutatni, hogy a projektív kollineációk a lineáris kombinációt megőrzik - ezt azonban a kettősviszonytartás bizonyításánál már megtettük.

A folytatásban azt látjuk be, hogy *minden kollineáció projektív kollineáció.*

Ehhez először azt ellenőrizzük, hogy *tetszőleges A, B, C, D pontnégyeshez található olyan projektív kollineáció, amelynél képeik rendre* $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ és $[1,1,1]$.

Konstruálunk az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ és $[1,1,1]$ pontokat rendre az $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3]$, $C[c_1,c_2,c_3]$, $D[d_1,d_2,d_3]$ pontnégyes elemeibe transzformácló projektív kollineációt, ennek inverze ugyanis a feltételünknek megfelelő leképezés. (Az, hogy *projektív kollineáció inverze is projektív kollineáció*, egyszerűen ellenőrizhető: együtthatói ugyanis az eredeti projektív kollineációnál szereplő együtthatókból képzett mátrix inverzének elemei.)

Rendelje a keresett kollineáció tetszőleges $[x_1,x_2,x_3]$ ponthoz azt az $[x'_1,x'_2,x'_3]$ pontot, amelyre

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Mivel $[1,0,0]$ képe $[a_1,a_2,a_3]$, ekkor valamely $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$ka_1 = a_{11}\ ,\ ka_2 = a_{21}\ ,\ ka_3 = a_{31}$$

következik. Hasonlóan, mivel $[0,1,0]$ képe $[b_1,b_2,b_3]$, valamely $l \in \mathbb{R}$-re

$$lb_1 = a_{12}\ ,\ lb_2 = a_{22}\ ,\ lb_3 = a_{32}.$$

Végül amiatt, hogy $[0,0,1]$ képe $[c_1,c_2,c_3]$, valamely $m \in \mathbb{R}$-re

$$mc_1 = a_{13}\ ,\ mc_2 = a_{23}\ ,\ mc_3 = a_{33}.$$

Így a kollineáció tetszőleges $[x_1,x_2,x_3]$ ponthoz azt az $[x'_1,x'_2,x'_3]$ pontot rendeli, amelyre

$$x'_1 = ka_1x_1 + lb_1x_2 + mc_1x_3,$$

$$x'_2 = ka_2x_1 + lb_2x_2 + mc_2x_3,$$

$$x'_3 = ka_3x_1 + lb_3x_2 + mc_3x_3.$$

Mivel $[1,1,1]$ képe $[d_1,d_2,d_3]$, ez azt jelenti, hogy

$$d_1 = ka_1 + lb_1 + mc_1,$$

$$d_2 = ka_2 + lb_2 + mc_2,$$

$$d_3 = ka_3 + lb_3 + mc_3.$$

Mivel az eredetileg adott pontnégyes általános helyzetű, ennek az egyenletrendszernek a (k,l,m) ismeretlenekre van megoldása, így valóban létezik a kívánt tulajdonságú projektív kollineáció.

Legyen φ tetszőleges kollineáció. Legyenek A, B, C, D rendre az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ pontok képe ennél a kollineációnál. Legyen ψ az a projektív kollineáció, amelynél A, B, C, D pontok képei rendre $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$. Ekkor a két kollineáció kompozíciója, azaz $\psi \circ \varphi$ az $[1,0,0]$,

$[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ pontokat fixen hagyja. A folytatásban *azt fogjuk megmutatni, hogy az egyetlen olyan kollineáció, amely az* $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ *pontokat fixen hagyja, az identitás. Ebből ugyanis következik a projektív geometria alaptétele:* ha $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, akkor $\varphi = \psi^{-1}$, tehát a tetszőlegesen választott φ kollineáció egy projektív kollineáció inverze, azaz maga is projektív kollineáció.

Tekintsünk tehát egy olyan kollineációt, amely az $X[1,0,0]$, $Y[0,1,0]$, $Z[0,0,1]$, $U[1,1,1]$ pontokat fixen hagyja.

Legyen A a $\overleftrightarrow{ZX}$ egyenesre illeszkedő pont, ekkor homogén koordinátái valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $[a,0,1]$. Mivel $\overleftrightarrow{ZX}$ két fixpontot köt össze, invariáns egyenes, így az A pont képének koordinátái $A'[a',0,1]$.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden a-hoz hozzárendeli az így megfeleltetett a'-t. A kollineáció bijektivitásából következően f *bijektív.*

Tekintsünk egy, az $\overleftrightarrow{YZ}$ egyenesre illeszkedő $B[0,b,1]$ pontot. Mivel $\overleftrightarrow{YZ}$ szintén két fixpontra illeszkedik, szintén invariáns egyenes. B képe tehát valamely $B'[0,b',1]$ pont. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden $b \in \mathbb{R}$-hez az így kapott b'-t rendeli hozzá.

Ha P homogén koordinátái $[a,b,1]$, akkor P képe $[f(a),g(b),1]$. Valóban, $[a,b,1]$ az $[a,0,1]$-et $[0,1,0]$-val összekötő egyenes metszéspontja a $[0,b,1]$-et $[1,0,0]$-val összekötő egyenessel. Ennek képe a kollineációnál pedig az $[f(a),0,1]$-et $[0,1,0]$-val összekötő egyenes metszéspontja a $[0,g(b),1]$-et $[1,0,0]$-val összekötő egyenessel.

$\overleftrightarrow{ZU}$ szintén invariáns egyenes, így bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén az $[a,a,1]$ pont képének is megegyezik az első két koordinátája. $[a,a,1]$ képe azonban $[f(a),g(a),1]$, így $f(a) = g(a)$ teljesül bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén.

Mivel $[1,1,1]$ feltételünk szerint a kollineáció fixpontja, innen $f(1) = 1$ adódik.

Az előző érvelésben az első két koordináta helyett a második két koordinátával dolgozva értelmezhetünk egy olyan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektív leképezést, amelyre $[1,y,z]$ kollineációs képe $[1,h(y),h(z)]$. Ekkor az előző érvelésnek megfelelően $h(1) = 1$.

Tekintsük ekkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén az $[1,x,1]$ homogén koordinátájú pontot. Ennek képe egyrészt $[1,f(x),1]$, másrészt $[1,h(x),1)]$. Így következik, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$-re $f(x) = h(x)$.

Tegyük fel, hogy $a \neq 0$. Ekkor $[a,1,1]$ képe az előzőek alapján $[f(a),1,1]$. Azonban az $[a,1,1]$ pontnak megválaszthatjuk az $\left[1,\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]$ homogén koordinátáit is, és így képe $\left[1,f\left(\frac{1}{a}\right),f\left(\frac{1}{a}\right)\right]$. Ez megegyezik az $[f(a),1,1]$ ponttal, amelynek homogén koordinátái $\left[1,\left(\frac{1}{f(a)}\right),\left(\frac{1}{f(a)}\right)\right]$ alakban is írhatóak. Így kapjuk, hogy tetszőleges $a \neq 0$ esetén

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{f(a)}.$$

Tekintsük most tetszőleges $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ esetén az $[a,ab,1]$ pontot. Ennek képe egyrészt $[f(a), f(ab), 1]$. Másrészt az eredeti pontot $\left[1, b, \frac{1}{a}\right]$ módon is megadhatjuk, és így kapjuk, hogy képe $\left[1, f(b), f\left(\frac{1}{a}\right)\right]$. Ez utóbbi pont megegyezik az előző pontban látottak miatt az $\left[1, f(b), \frac{1}{f(a)}\right]$, azaz az $[f(a), f(a)f(b), 1]$ ponttal. Így megmutattuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Megmutatjuk, hogy kollineációnknál *tetszőleges* $[a, b, c]$ *képe* $[f(a), f(b), f(c)]$. Valóban, az $[a, b, c]$ pont homogén koordinátáinak az $\left[1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right]$ számhármast választva kapjuk, hogy képe $\left[1, f\left(\frac{b}{a}\right), f\left(\frac{c}{a}\right)\right]$. Itt például

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = f\left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = f(b) \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) = f(b) \cdot \frac{1}{f(a)} = \frac{f(b)}{f(a)},$$

így a $[a, b, c]$ képe az $\left[1, \frac{f(b)}{f(a)}, \frac{f(c)}{f(a)}\right]$ pont, ami valóban megegyezik $[f(a), f(b), f(c)]$-vel.

Tekintsük végül tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $[a, b, a+b]$ pontot. Az ilyen alakú pontok az $[1, 0, 1]$ és $[0, 1, 1]$ pontokra illeszkedő egyenesen vannak. Ez a két pont azonban fixpont a kollineációnknál: $[1, 0, 1]$ ugyanis a $[0, 1, 0]$ és $[1, 1, 1]$ fixpontok összekötő egyenesének metszéspontja az $[1, 0, 0]$ és $[0, 0, 1]$ fixpontok összekötő egyenesével, tehát két invariáns egyenes metszéspontja. Hasonlóan, $[0, 1, 1]$ a $[0, 0, 1]$ és $[0, 1, 0]$ fixpontok összekötő egyenesének metszéspontja az $[1, 0, 0]$ és $[1, 1, 1]$ fixpontok összekötő egyenesével, tehát szintén két invariáns egyenes metszéspontja. Ez azt jelenti, hogy az $[a, b, a+b]$ alakú homogén koordinátákkal rendelkező pontokat tartalmazó egyenes invariáns, így tetszőleges ilyen alakú pont képe is ilyen alakú. Mivel $[a, b, a+b]$ képe $[f(a), f(b), f(a+b)]$, így

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

következik bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

Összefoglalva: megmutattuk, hogy bármely olyan kollineációnál, amely az X, Y, Z, U pontokat fixen hagyja, tetszőleges $[a, b, c]$ pont képe $[f(a), f(b), f(c)]$, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bijektív*, *additív* (azaz bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $f(a+b) = f(a) + f(b)$) és *bármely* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén* $f(ab) = f(a)f(b)$. Az ilyen tulajdonságú f függvényeket a valós számtest *automorfizmus*ainak hívjuk. Annak belátásához, hogy a tekintett kollineációnk az identitás, azt fogjuk megmutatni, hogy *a valós számtest egyetlen automorfizmusa az identitás.*

Legyen f a valós számtest tetszőleges automorfizmusa. Ekkor

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

így $f(0) = 0$. Továbbá

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1),$$

így $f(1) = 1$. Mivel

$$0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1) = 1 + f(-1),$$

így $f(-1) = -1$. Tehát

$$f(a-b) = f(a+(-b)) = f(a) + f((-1)\cdot b) = f(a) + f(-1)\cdot f(b) = f(a) - f(b).$$

Így, ha $x > 0$, akkor van olyan $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, amelyre $x = a^2$, és

$$f(x) = f(a^2) = (f(a))^2 > 0,$$

valamint ha $x < 0$, akkor van olyan $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, amelyre $x = -a^2$, és

$$f(x) = f(-a^2) = f(-1)\cdot(f(a))^2 = -(f(a))^2 < 0.$$

Tehát *a valós számtest tetszőleges automorfizmusát tekintve egy szám pontosan akkor pozitív illetve negatív, ha a képe is az.*

Megmutatjuk, hogy *a valós számok tetszőleges automorfizmusa folytonos.* Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, és legyen $\delta := f^{-1}(\epsilon)$. Tegyük fel, hogy

$$|x - x_0| < \delta = f^{-1}(\epsilon).$$

Hattassuk mindkét oldalra az f automorfizmust. Ekkor $|x - x_0| = x - x_0$ vagy $|x - x_0| = x_0 - x$ attól függően, hogy $x > x_0$ vagy $x_0 > x$. Első esetben

$$f(|x - x_0|) = f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) > 0,$$

második esetben

$$f(|x - x_0|) = f(x_0 - x) = f(x_0) - f(x) > 0,$$

így mindenképpen

$$f(|x - x_0|) = |f(x) - f(x_0)|.$$

Az előzőek alapján f rendezéstartó, ugyanis $a > b$ pontosan akkor teljesül, ha $a - b > 0$, ami ekvivalens az $f(a-b) = f(a) - f(b) > 0$, azaz az $f(a) > f(b)$ reláció fennállásával. Így az eredeti egyenlőség mindkét oldalán az f függvényt hattatva kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

amiből következik, hogy f valóban folytonos.

Megmutatjuk végül, hogy *ha f folytonos additív függvény, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$f(x) = f(1)\cdot x.$$

- Tegyük fel először, hogy k természetes szám. Ekkor teljes indukióval igazoljuk, hogy $f(k) = f(1) \cdot k$.

  Azt már beláttuk, hogy az additivitásból $f(0) = 0$ következik. Ha bármely $k < n$-re igaz az állítás, akkor

  $$f(n) = f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1) = (n-1)f(1) + f(1) = n \cdot f(1).$$

- Megmutatjuk, hogy az állítás negatív egészekre is igaz. Valóban, ha k pozitív egész, akkor

  $$f(0) = f(k + (-k)) = f(k) + f(-k),$$

  így

  $$f(-k) = -f(k) = -k \cdot f(1).$$

- Ha p és q egészek, akkor

  $$p \cdot f(1) = f(p) = f\left(\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + \cdots + f\left(\frac{p}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right),$$

  ahol a szereplő összeg q tagból áll. Így

  $$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1),$$

  azaz állításunk tetszőleges racionális számra teljesül.

- Ha végül x irracionális szám, akkor van olyan racionális tagú sorozat, amelynek határértéke x. Mivel f folytonos függvény, e sorozat tagjainak f általi képe $f(x)$-hez tart, így tetszőleges valós számra adódik az állítás.

Mivel a valós számtest automorfizmusai folytonos additív függvények, ebből következik, hogy ha f a valós számtest egy automorfizmusa, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f(1) \cdot x = x,$$

és ezt kellett belátnunk.