

Bevezetés a projektív geometriába

Matematika BSc, 2013.

Szilasi Zoltán

1. Affin és projektív síkok

1.1. Definíció. Egy $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ rendezett hármast illeszkedési geometriának nevezünk, ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ halmazok, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ reláció. $\mathcal{P}$ elemeit pontoknak, $\mathcal{L}$ elemeit egyeneseknek, $\mathcal{I}$ -t illeszkedési relációnak hívjuk. Azt mondjuk, hogy az $X \in \mathcal{P}$ pont illeszkedik az $l \in \mathcal{L}$ egyenesre, ha $(X, l) \in \mathcal{I}$.

Ha egy illeszkedési geometriában pontok egy halmazához található olyan egyenes, amelyre a halmaz összes eleme illeszkedik, akkor a tekintett pont-halmazt *kollineárisnak* nevezzük. Amennyiben egyenesek egy halmazához van olyan pont, amely a tekintett egyenesek mindegyikére illeszkedik, azt mondjuk, hogy az egyenesek *konkurrens*ek.

1.2. Definíció. Egy illeszkedési geometriát affin síknak nevezünk, ha teljesülnek rá a következő axiómák.

- (A1) Bármely két pontra illeszkedik pontosan egy egyenes.
- (A2) Tetszőlegesen megadva egy l egyenest és egy rá nem illeszkedő A pontot, létezik pontosan egy olyan egyenes, amely illeszkedik A -ra és nincsen közös pontja l -el.
- (A3) Létezik három nem kollineáris pont.

Ha egy affin sík két egyenesének nincs közös pontja, azt mondjuk, hogy a két egyenes *párhuzamos*. Megállapodunk továbbá abban, hogy minden egyenes párhuzamos önmagával. Az e és f egyenesek párhuzamosságát $e \parallel f$ módon fogjuk kifejezni. Az A és B pontokra illeszkedő egyértelmű egyenest $\overleftrightarrow{AB}$ jelöli.

Példák affin síkokra.

1. Az *euklideszi sík*. Legyenek a ponthalmaz elemei az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ valós számpárok, az egyenesek az $[m, b] \in \mathbb{R}^2$ valós számpárok illetve a $[c] \in \mathbb{R}$ valós számok. Az illeszkedési reláció értelmezése a következő: az (x, y) pont pontosan akkor illeszkedik az $[m, b]$ egyenesre, ha $y = mx + b$, és pontosan akkor illeszkedik a $[c]$ egyenesre, ha $x = c$. Azt mondjuk, hogy az $[m, b]$ egyenes meredeksége m . A $[c]$ alakú egyeneseket függőleges egyeneseknek nevezzük.

2. A *minimális modell*. Legyenek a ponthalmaz elemei A, B, C, D ; az egyenes-halmaz elemei $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$; az illeszkedési reláció a tartalmazás.

1.3. Definíció. Egy illeszkedési geometriát projektív síknak nevezünk, amennyiben teljesülnek rá az alábbi axiómák.

(P1) Bármely két pontra illeszkedik pontosan egy egyenes.

(P2) Bármely két egyenesnek létezik egy és csak egy közös pontja.

(P3) Létezik négy általános helyzetű pont; azaz négy olyan pont, amelyek közül semelyik három nem kollineáris.

Egy projektív sík egy egyenesre illeszkedő összes pontok halmazát *pontsornak*, a szóban forgó egyenest a pontsor *tartóegyenesének* hívjuk. Egy pontra illeszkedő összes egyenesek halmazát *sugársornak*, a sugársor elemeinek közös pontját a sugársor *tartópontjának* nevezzük. A pontsorokat és a sugársorokat együttesen *elsőfajú projektív alapalakzatoknak* mondjuk.

1.4. Állítás. Ha $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ projektív sík, akkor $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}^{-1})$ is projektív sík. Ezt a projektív síkot az eredeti sík duálisának mondjuk.

Bizonyítás: Az „új geometriában” a (P1) és (P2) tulajdonságok teljesülése az eredeti síkon igaz (P2) illetve (P1) tulajdonságok teljesülését jelenti, így bizonyítást csak (P3) igényel. Ehhez azt kell megmutatni, hogy bármely projektív síknak létezik négy olyan egyenese, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy pontra. (P3) miatt tetszőleges projektív síkon létezik négy olyan pont, melyek között nincs három kollineáris, legyenek ezek A, B, C, D . Könnyen belátható, hogy ekkor az $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{DA}$ egyenesek megfelelnek a feltételeknek. ■

1.5. Definíció. Projektív síkok egy osztályát önduálisnak nevezzük, ha minden síkkal együtt a duálisát is tartalmazza.

Egy projektív síkokra vonatkozó állítás duálisán az eredetiből a „pont” és „egyenes” szavak (és az azokkal definiált megfelelő fogalmak) felcserélésével kapott új állítást értjük. Ha egy állítás projektív síkok egy önduális osztályának minden síkjában igaz, akkor ugyanez teljesül az állítás duálisára is.

1.6. Következmény. (A dualitás elve) Az összes projektív síkok osztálya önduális.

Az előzőek alapján tehát ha egy állítás igaz az összes projektív síkon, akkor az állítás duálisa is igaz az összes projektív síkon.

1.7. Lemma. Tetszőleges affin sík egyeneseinek halmazán a párhuzamosság ekvivalenciareláció.

Bizonyítás: A reflexivitás és a szimmetria a párhuzamosság definíciója alapján nyilvánvaló. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy $l \parallel m$ és $m \parallel n$. Ha a tekintett egyenesek között van két egybeeső, akkor $l \parallel n$ automatikusan következik, tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy l és n nem párhuzamos, közös pontjuk legyen P . Ekkor l és n egyaránt P -re illeszkedő, m -el párhuzamos egyenesek, ami ellentmond az affin párhuzamossági axiómának. ■

1.8. Definíció. *Egy affin sík egyenesei között a párhuzamosság, mint ekvivalenciareláció által indukált ekvivalenciaosztályokat végtelen távoli (vagy ideális) pontoknak hívjuk.*

1.9. Állítás és definíció. *(Az affin síkok projektív lezárása) Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ affin sík. Jelölje $\mathcal{P}_i$ a sík végtelen távoli pontjainak halmazát, és legyen l_∞ egy új szimbólum, amit végtelen távoli (vagy ideális) egyenesnek nevezünk. Ekkor az alábbi $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometria projektív sík:*

$\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_i$ *(a pontok halmaza az affin sík pontjait és a végtelen távoli pontokat tartalmazza);*

$\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{l_\infty\}$ *(az egyenesek halmaza az affin sík egyeneseit és a végtelen távoli egyenest tartalmazza);*

$\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cup \{(A, l_\infty) | A \in \mathcal{P}_i\} \cup \{(A, l) | A \in \mathcal{P}_i, l \in \mathcal{L}\}$ *(az affin síkon teljesülő illeszkedések mellett minden végtelen távoli pont illeszkedik a végtelen távoli egyenesre, továbbá minden egyenesre illeszkedik az általa reprezentált végtelen távoli pont).*

$A(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ *projektív síkot a $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ affin sík projektív lezártjának nevezzük.*

Bizonyítás:

- (P1) igazolásához megmutatjuk, hogy a $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometriában bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes. Ha $A, B \in \mathcal{P}$, azaz A és B az affin sík pontjai, akkor illeszkedik rájuk az affin sík egy és csak egy egyenese. Ez az illeszkedés az új illeszkedési struktúrában is teljesül. Az affin sík egy pontjára és egy végtelen távoli pontra a párhuzamossági axióma miatt illeszkedik egy és csak egy egyenes: a végtelen távoli pont egy, az affin sík adott pontjára nem illeszkedő reprezentáns egyenesét tekintve azzal egy és csak egy párhuzamos létezik az adott ponton keresztül. Végül két végtelen távoli pontra csakis a végtelen távoli egyenes illeszkedik.
- (P2) ellenőrzéséhez belátjuk, hogy a $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometriában bármely két egyenesnek egy és csak egy közös pontja van. Az affin sík valamely két egyenese metsző vagy párhuzamos. Amennyiben metszőek, közös pontjuk az affin sík egy pontja, és nincs közös végtelen távoli pontjuk. Amennyiben párhuzamosak, az affin síkon nincs közös pontjuk, azonban ugyanazon végtelen távoli pontot reprezentálják. Végül az affin sík egy egyenese és a végtelen távoli egyenes pontosan az affin sík egyenese által reprezentált végtelen távoli pontban metszik egymást.

- Végül (P3) megmutatása végett ellenőrizzük, hogy tetszőleges affin síkon van négy általános helyzetű pont. (A3) miatt tetszőleges affin síkon van három nem kollineáris pont, legyenek ezek A, B és C . Legyen a C -re illeszkedő $\overleftrightarrow{AB}$ -vel párhuzamos egyértelmű egyenes c , a B -re illeszkedő $\overleftrightarrow{AC}$ -vel párhuzamos egyértelmű egyenes b . Világos, hogy b és c nem párhuzamos. Így A, B, C és $b \cap c$ a kívánt tulajdonsággal rendelkező pontnégyes.

■

A következőkben az előző konstrukció „megfordításával” egy tetszőleges projektív síkból affin síkot készítünk.

1.10. Állítás. *Legyen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ projektív sík, $l \in \mathcal{L}$ a sík tetszőleges egyenese. Ekkor az alábbi $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometria affin sík:*

$\mathcal{P}' := \mathcal{P} \setminus \{A \mid (A, l) \in \mathcal{I}\}$ (a pontok a projektív sík l -re nem illeszkedő pontjai);

$\mathcal{L}' := \mathcal{L} \setminus \{l\}$ (az egyenesek a projektív sík l -től különböző egyenesei);

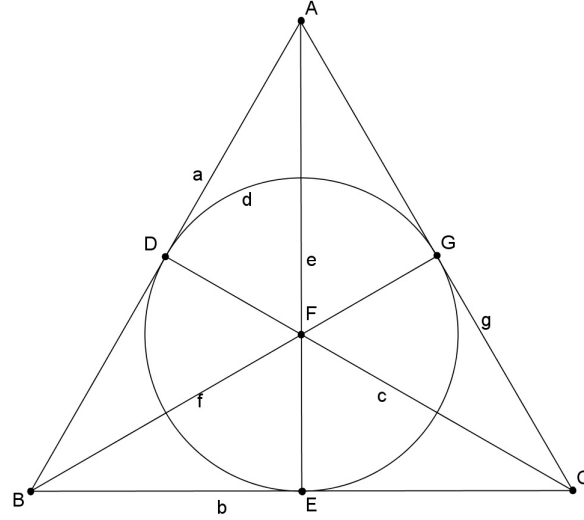
$\mathcal{I}' := \{(A, e) \mid A \in \mathcal{P}', e \in \mathcal{L}', (A, e) \in \mathcal{I}\}$ (az illeszkedések a projektív sík „megmaradó” illeszkedései).

Bizonyítás: $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ bármely két pontjára illeszkedik egy és csak egy egyenes, ugyanis a projektív síkon ez teljesült, és $\mathcal{P}'$ -höz tartozó pontot tartalmazó egyenest nem hagytunk el. Hasonlóan egyszerűen látható, hogy $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ -ben van három nem kollineáris pont, ugyanis a projektív síkon van négy általános helyzetű egyenes, melyek közül legfeljebb egyet hagytunk el. Így a megmaradó három általános helyzetű egyenes metszéspontjai nem kollineárisak.

Végül ellenőrizzük az affin párhuzamossági axióma teljesülését. Legyen adott az A pont, és a rá nem illeszkedő e egyenes. Ekkor a projektív sík $e \cup l$ és A pontjaira illeszkedő egyenes „megmaradó része” párhuzamos az e egyenessel. További ilyen egyenes nincs, ugyanis a projektív síkon teljesülő (P2) tulajdonság miatt az A -ra illeszkedő egyenesek mindegyike metszi e -t, a további egyenesek $\mathcal{P}'$ -höz tartozó pontban. ■

Példák projektív síkokra.

1. A *valós projektív sík* az euklideszi sík projektív lezártja.
2. A *Fano-sík* az affin síkok minimális modelljének projektív lezártja. Az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{CF}$ párhuzamos egyenesek által meghatározott végtelen távoli pont legyen D , a $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{AF}$ párhuzamos egyenesek által meghatározott végtelen távoli pont legyen E és a $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{BF}$ párhuzamos egyenesek által meghatározott végtelen távoli pont legyen G .



A Fano-sík

2. Perspektivitások és projektivitások

2.1. Definíció. Legyen e és e' egy projektív sík két egyenese, és O egy olyan pont, amely egyik egyenesre sem illeszkedik. Az e tartóegyenesű pontsorra képező O középpontú perspektivitáson olyan leképezést értünk, amely bármely e -re illeszkedő A ponthoz az $A' := \overrightarrow{OA} \cap e'$ pontot rendeli. A perspektív helyzetű pontsorokat $(A_1, A_2, \dots) \xrightarrow{O} (A'_1, A'_2, \dots)$ (ahol az A_i pont perspektív képe A'_i), vagy $(e) \xrightarrow{O} (e')$; esetleg $(A_1, A_2, \dots) \xrightarrow{O} (A'_1, A'_2, \dots)$ vagy $(e) \xrightarrow{O} (e')$ módon jelöljük.

Másképpen megfogalmazva: két pontsor egy O középpontra nézve perspektív helyzetben van, ha az O tartópontú sugársor két különböző egyenessel való metszetei. Az O középpontú perspektivitásra az O középpontú vetítés elnevezés is használatos. Duális módon értelmezzük a sugársorok közötti perspektív leképezést.

2.2. Definíció. Legyen O és O' egy projektív sík két pontja, és e egy rájuk nem illeszkedő egyenes. Az O tartópontú sugársort az O' tartópontú sugársorra képező e tengelyű perspektivitáson olyan leképezést értünk, amely bármely O -re illeszkedő x egyeneshez azt az x' egyenest rendeli, melynek két pontja $e \cap x$ és O' . A perspektív helyzetű sugársorokat $(x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{e} (x'_1, x'_2, \dots)$ (ahol az x_i egyenes perspektív képe x'_i), vagy $(O) \xrightarrow{e} (O')$; esetleg $(x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{e} (x'_1, x'_2, \dots)$ vagy $(O) \xrightarrow{e} (O')$ módon jelöljük.

Azaz: két sugársor az e tengelyre nézve perspektív helyzetben van, ha az e tartóegyenesű pontsort két különböző pontból vetítik.

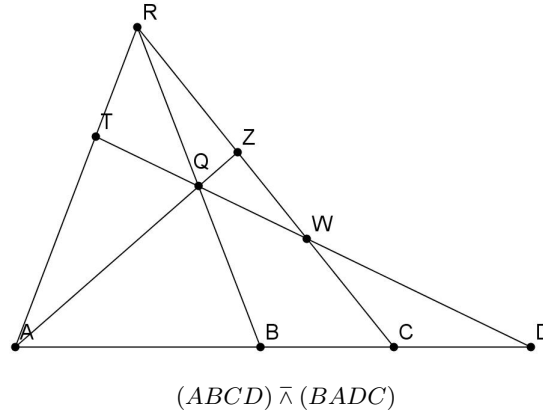
2.3. Definíció. Egy pontsort egy sugársorra képező perspektivitáson azt a leképezést értjük, ami a pontsor minden eleméhez a sugársor azon egyenesét rendeli, amely az adott ponton áthalad.

2.4. Definíció. Egy elsőfajú projektív alapalakzatot egy másik elsőfajú projektív alapalakzatra képező projektív leképezésen véges sok, elsőfajú projektív alapalakzatok közötti perspektivitas kompozícióját értjük. Jele: $\bar{\wedge}$.

Tehát ha létezik az e tartójú pontsor (A_i) elemeit rendre az e' tartójú pontsor (A'_i) elemeire képező projektívitas, akkor azt mondjuk, hogy a két pontsor projektív helyzetű, és az $(A_i) \bar{\wedge} (A'_i)$ jelölést használjuk.

2.5. Állítás. Ha A, B, C, D négy kollineáris pont, $(ABCD) \bar{\wedge} (BADC)$.

Bizonyítás: Legyen A, B, C, D négy kollineáris pont, R a közös egyenesükön



kívüli pont, T, Q, W pedig $\overleftrightarrow{RA}, \overleftrightarrow{RB}, \overleftrightarrow{RC}$ metszéspontja egy, a D -n átmenő tetszőleges egyenessel, és $\overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{RC} = \{Z\}$. Ez esetben

$$(ABCD) \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} (ZRCW) \stackrel{A}{\bar{\wedge}} (QTDW) \stackrel{R}{\bar{\wedge}} (BADC).$$

Tehát $(ABCD) \bar{\wedge} (BADC)$ valóban teljesül. ■

2.6. Állítás. Ha A, B, C, D négy kollineáris pont, $(ABCD) \bar{\wedge} (DCBA)$.

Bizonyítás: Az előző bizonyítás jelöléseit megtartva legyen $\overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{QC} = \{S\}$. Ekkor

$$(ABCD) \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} (ARST) \stackrel{C}{\bar{\wedge}} (DWQT) \stackrel{R}{\bar{\wedge}} (DCBA).$$

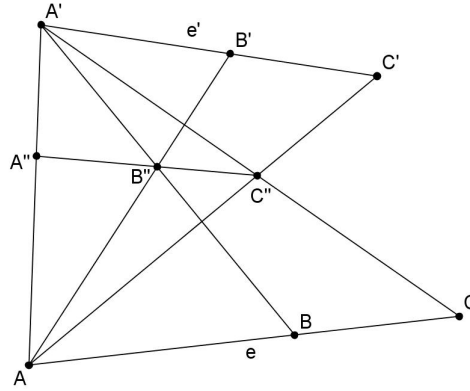
■

2.7. Következmény. Ha A, B, C, D négy kollineáris pont, $(ABCD) \bar{\wedge} (CDAB)$.

Bizonyítás: Az előző állításokat felhasználva $(ABCD) \bar{\wedge} (DCBA) \bar{\wedge} (CDAB)$. ■

2.8. Állítás. *Megadva egy projektív sík egy e egyenesén az A, B, C , és a tőle nem feltétlenül különböző e' egyenesen az A', B', C' pontokat, van olyan projektivitás a két egyenes pontjai között, amelynél az A pont képe A' , a B pont képe B' és a C pont képe C' .*

Bizonyítás:

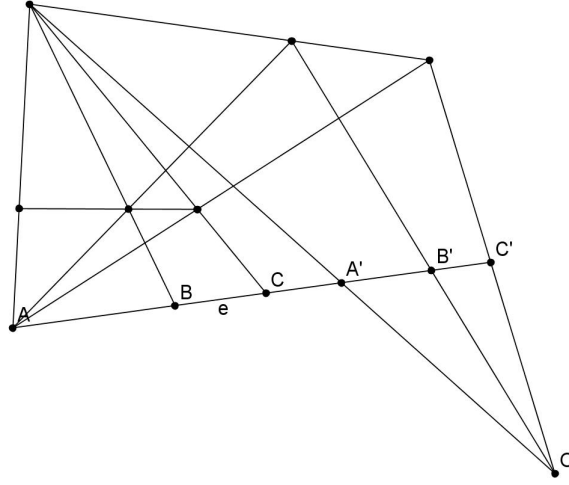


Három pont és azok képei által meghatározott projektivitás két egyenes között.

Tegyük fel először, hogy az e és e' egyenesek különböznek, és vezessük be az $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} =: \{B''\}$ és $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} =: \{C''\}$, továbbá az $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{B''C''} =: \{A''\}$ jelöléseket. Ekkor $(ABC) \xrightarrow{A'} \overleftrightarrow{A''B''C''} \xrightarrow{A} (A'B'C')$. Így az e tartóegyenesű pontsor elemeit a $\overleftrightarrow{B''C''}$ tartóegyenesű pontsor elemeire képező, A' középpontú perspektivitás, és az utóbbi pontsor elemeit az e' tartóegyenesű pontsor elemeire képező A középpontú perspektivitás kompozíciója a feltételeknek megfelelő projektivitás.

Amennyiben valamennyi adott pont ugyanazon egyenesre illeszkedik, úgy válasszunk egy tetszőleges O külső pontot, és egy s , a pontok egyenesétől különböző egyenest, amelyre O nem illeszkedik. Vetítsük elsőként az A, B, C pontokat az O középpontból az s egyenesre, majd az így nyert A', B' és C' pontokra alkalmazzuk a bizonyítás első részében látott két perspektivitás kompozícióját. Az így meghatározott három perspektivitás kompozíciója ebben az esetben is a feltételeket kielégítő projektivitás. ■

2.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság, ha két különböző tartóegyenesű pontsora közötti projektivitás pontosan akkor perspektivitás, ha a két pontsor közös eleme a projektivitásban önmagának felel meg.*



Három pont és azok képei által meghatározott projektivitás egy egyenesen.

2.10. Tétel. (*A projektivitások alaptétele*) Tegyük fel, hogy egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság. Legyenek adottak a sík egy e egyenesén az A, B, C , egy e' egyenesén az A', B', C' különböző pontok. Ekkor egyértelműen létezik olyan projektivitás az e és e' egyenesek között, amelynél A képe A' , B képe B' és C képe C' .

Bizonyítás: A kívánt tulajdonságú projektivitás létezését már **2.8.**-ban igazoltuk, így csak az egyértelműséget kell bizonyítanunk.

Legyen először az e és e' egyenesek közös pontja az $A = A'$ pont. Ebben a speciális esetben az állítás igaz, ugyanis a fundamentális tulajdonság miatt ekkor a tekintett projektivitás biztosan perspektivitás, amelynek centruma $\overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$, tehát egyértelmű.

Megmutatjuk, hogy ebből következően tetszőleges f, f' egyenesek X, Y, Z illetve X', Y', Z' pontjaira is igaz az állítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy ebben az esetben két, a feltételeknek megfelelő projektivitás létezik, legyenek ezek p_1 és p_2 . Legyen P az f egyenes egy olyan pontja, amelyhez p_1 és p_2 különböző pontokat rendel, legyenek ezek P' és P'' . Tekintsünk egy t projektivitást az e és f egyenesek között, amely az A, B és C pontokhoz rendre az X, Y és Z pontokat rendeli, ilyen **2.8.** alapján létezik. Hasonlóan, van olyan u projektivitás az f' és e' egyenesek között, amely az X', Y' és Z' pontoknak rendre az A', B' és C' pontokat felelteti meg. Ekkor a $t \circ p_1 \circ u$ és $t \circ p_2 \circ u$ kompozíciók egyaránt az e és e' egyenesek közötti olyan projektivitások, amelynél az A, B és C pontok képe rendre A', B' és C' . Legyen az f egyenes P pontjának t általi ösképe P^{-1} . A $t \circ p_1 \circ u$ projektivitás a P^{-1} pontnak az u projektivitás által P' -höz rendelt pontot felelteti meg, a $t \circ p_2 \circ u$ projektivitás pedig ugyanezen ponthoz az u által P'' -höz rendelt pontot rendeli. Ezen két pont a projektivitások bijektív tulajdonsága miatt különbözik, tehát a $t \circ p_1 \circ u$

valamint a $t \circ p_2 \circ u$ projektivitás két különböző, a feltételeknek megfelelő projektivitás az e és e' egyenesek között. Korábban beláttuk azonban, hogy ilyen projektivitás egyértelműen létezik, így ellentmondásra jutottunk. ■

Ha egy projektív síkon teljesül a projektivitások alaptétele, akkor azt a tényt, hogy egy projektivitásnál az A pont képe A' , a B pont képe B' és a C pont képe C' , a jövőben a rövideg kedvéért úgy is kifejezzük majd, hogy a projektivitást az (ABC) és $(A'B'C')$ ponthármasok határozzák meg.

2.11. Következmény. *Ha egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság, akkor egy pontsorán értelmezett olyan projektivitás, amelynek van három különböző fixpontja, az identikus leképezés.*

A továbbiakban azt mondjuk, hogy egy projektív sík eleget tesz a *Staudt-féle tulajdonságnak*, ha egy pontsorán értelmezett olyan projektivitás, amelynek van három különböző fixpontja, az identikus leképezés.

Ebben az esetben tehát egy pontsort önmagára képező, nem identikus projektivitás fixpontjainak száma legfeljebb kettő lehet. Ilyenkor a projektivitást *elliptikusnak*, *parabolikusnak* vagy *hiperbolikusnak* mondjuk aszerint, hogy fixpontjainak száma 0, 1 vagy 2.

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy projektív sík eleget tesz a Staudt-féle tulajdonságnak. Ekkor teljesül a projektivitások alaptétele is, azaz megadva a sík egy e egyenesén az A, B, C , és a tőle nem feltétlenül különböző e' egyenesén az A', B', C' pontokat, egyértelműen létezik olyan projektivitás a két egyenes pontjai között, amelynél az A pont képe A' , a B pont képe B' és a C pont képe C' .*

Bizonyítás: Az állítás létezésre vonatkozó része tetszőleges projektív síkon igaz, mint azt már a 2.8. állításban igazoltuk.

Az egyértelműség igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy létezik két megfelelő projektivitás is. Ekkor létezik olyan X pontja az e egyenesnek, melynek a két projektivitásnál két különböző képe van, az az különböző X' és X'' pontokra $(ABCX) \bar{\wedge} (A'B'C'X')$ és $(ABCX) \bar{\wedge} (A'B'C'X'')$ egyaránt fennáll. Ekkor azonban $(A'B'C'X') \bar{\wedge} (A'B'C'X'')$ teljesülne, amiből a Staudt-féle tulajdonság miatt $X' = X''$ következne, ami ellentmond indirekt feltevésünknek. ■

2.13. Következmény. *Ha egy projektív síkon teljesül a projektivitások alaptétele, akkor a fundamentális tulajdonság is.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az e és e' egyenesek M metszéspontja egy projektivitásnál invariáns. Legyen az e egyenes A és B pontjainak projektív képe rendre az e' egyenes A' és B' pontja. Ekkor az $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} =: \{O\}$ középpontú e és e' tartójú pontsorok közötti perspektivitásnál A képe A' , B képe B' és az E pont invariáns. A projektivitások alaptétele miatt ez a három pontpár egyértelműen meghatározza a projektivitást, így az eredetileg tekintett projektív leképezés éppen ez a perspektivitás. ■

Az előzőekben tehát azt mutattuk meg, hogy a *fundamentális tulajdonság*, a *Staudt-tulajdonság*, valamint a *projektivitások alaptétele ekvivalens állítások*.

A *Staudt-tulajdonságból* nyilvánvalóan következik a *duálisa*. Tegyük fel ugyanis, hogy egy sugársort önmagára képező projektivitásnál három egyenes fixen marad. A sugársor tartópontjára nem illeszkedő e egyenessel metszve a sugársor elemeit, e -n egy olyan projektivitást kapunk, amelynek a három fix egyenessel vett metszéspontjai fixpontok. Ekkor a Staudt-tulajdonság miatt az e -n kapott projektivitás minden pontot fixen hagy. Ebből következik, hogy az eredeti sugársoron adott projektivitásnál minden egyenes fix egyenes.

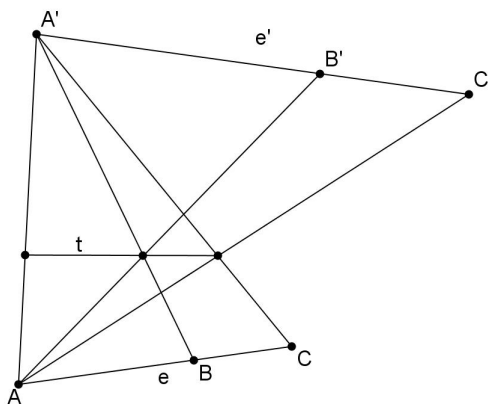
Mivel a fundamentális tulajdonság illetve a projektivitások alaptétele a Staudt-tulajdonsággal ekvivalens állítások, következik, hogy ezekből is következik a duálisuk. Tehát azon projektív síkok körében, amelyek eleget tesznek az említett három tulajdonság bármelyikének - és így mindegyikének - teljesül a dualitás elve. Így az ilyen projektív síkok körében érvényes bármely állításból következik a duálisa.

Megfogalmazzuk a fundamentális tulajdonság duálisát is.

2.14. Következmény. *Ha egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság, akkor két különböző pontjára illeszkedő sugársorok közötti projektivitás pontosan akkor perspektivitás, ha a sugársorok tartópontjainak egyenese invariáns.*

2.15. Következmény. *Ha egy projektív sík eleget tesz a fundamentális tulajdonságnak, tetszőleges két pontsora közötti projektív leképezés előáll legfeljebb három perspektivitás kompozíciójaként. Amennyiben a leképezés egy pontsort tőle különböző tartóegyenestől képez, előáll legfeljebb két perspektivitás kompozíciójaként.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a pontsorok e és e' tartóegyenese különböző. Ek-



Projektivitás előállítása két perspektivitás kompozíciójaként.

kor tekintsük a projektivitást egyértelműen meghatározó (ABC) és $(A'B'C')$

ponthármasokat. Az A pontból $(A'B'C')$ -t és az A' pontból (ABC) -t vetítő sugársorok projektív helyzetűek, mivel projektív pontsorokat vetítenek, ebben a projektivitásban azonban a sugársorok A és A' tartópontjait összekötő egyenes invariáns. Így a két sugársor perspektív helyzetű, legyen e perspektivitás tengelye t . Ekkor az e egyenes pontjait A' -ből t -re, és a t pontjait A -ból e' -re vetítő perspektivitások kompozíciója éppen az eredetileg tekintett projektivitás. Amennyiben az e és e' tartóegyenesek megegyeznek, a **2.8.** állítás bizonyításának második részéhez hasonlóan vetítsük az e tartóegyenesű pontsort egy tetszőleges külső O pontból egy tetszőleges, e -től különböző, O -t nem tartalmazó s egyenesre. Így ezen perspektivitás és az előzőekben meghatározott két perspektivitás kompozíciójaként előáll az eredeti projektív leképezés. ■

A látott konstrukció egyúttal eljárást ad két kollineáris ponthármas (vagy két konkurrens egyeneshármas) által meghatározott projektivitásban további elemek képének meghatározására.

3. A fundamentális tulajdonság ellenőrzése a valós projektív síkon

3.1. Definíció. Az euklideszi sík különböző kollineáris A, B, C pontjai esetén (ABC) az a λ szám, amelyre $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. (ABC) -t a három pont által meghatározott osztóviszonynak nevezzük.

(ABC) tehát az $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ szakaszok hosszainak előjeles hányadosa; vagyis az a szám, amelynek abszolút értéke $\frac{d(A,C)}{d(C,B)}$, és előjele pozitív vagy negatív attól függően, hogy az $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ szakaszok megegyező vagy ellentétes irányúak. Ezt az előjeles hányadost a továbbiakban egyszerűen $\frac{AC}{CB}$ módon jelöljük.

Tegyük fel, hogy az A pont helyvektora $\mathbf{a}$, a B pont helyvektora $\mathbf{b}$. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes tetszőleges további C pontjának pontjának helyvektora $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ alakú, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $(ABC) = \frac{t}{1-t}$.

3.2. Állítás. Ha $(ABC) = \lambda$, akkor

$$\begin{aligned}(BAC) &= \frac{1}{\lambda}, \\(ACB) &= -(\lambda + 1), \\(CAB) &= -\frac{1}{\lambda + 1}, \\(BCA) &= -\frac{\lambda + 1}{\lambda}, \\(CBA) &= -\frac{\lambda}{\lambda + 1}.\end{aligned}$$

Bizonyítás: A definíció alapján

$$(BAC) = \frac{BC}{CA} = \frac{CB}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = \frac{1}{\lambda}$$

és

$$(ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{CB - CA}{BC} = -1 - \frac{AC}{CB} = -(\lambda + 1).$$

Innen

$$\begin{aligned}(CAB) &= \frac{1}{(ACB)} = -\frac{1}{\lambda + 1}, \\(BCA) &= -(BAC) + 1 = -\frac{1}{\lambda} - 1 = -\frac{\lambda + 1}{\lambda}\end{aligned}$$

és

$$(CBA) = \frac{1}{(BCA)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 1}.$$

■

3.3. Állítás. Adott A, B pontokhoz és $\lambda \neq -1$ számhoz egy és csak egy olyan C pont van, amelyre $(ABC) = \lambda$.

Bizonyítás: Ha A helyvektora $\mathbf{a}$, B helyvektora $\mathbf{b}$, akkor C helyvektora $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ alakú. $(ABC) = \lambda$ miatt $\lambda = \frac{t}{1-t}$. Innen átalakítás után

$$\lambda - t\lambda = t,$$

azaz

$$t = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

adódik. Tehát az egyetlen lehetséges C pont a

$$\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{1 + \lambda}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\mathbf{b}$$

helyvektorú pont. ■

3.4. Állítás. Ha A, B, C valamint A', B', C' kollineáris ponthármasok, és $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$, akkor $(ABC) = (A'B'C')$, azaz az osztóviszony párhuzamos vetítéssel szemben invariáns.

A fenti állítás a párhuzamos szelők tételének közvetlen átfogalmazása.

3.5. Definíció. Legyenek A, B, C, D különböző kollineáris, véges helyzetű pontok. Az

$$(ABCD) := \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD}$$

számot a négy pont kettősviszonyának hívjuk.

3.6. Állítás. Legyenek A, B, C, D különböző kollineáris, véges helyzetű pontok. Ekkor

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

$$(ACBD) = 1 - (ABCD).$$

Bizonyítás:

$$(BADC) = \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CA}{BC} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = (ABCD),$$

$$(CDAB) = \frac{CA}{AD} \cdot \frac{BD}{CB} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = (ABCD),$$

az előző azonosság alapján pedig

$$(DCBA) = (BADC).$$

$$\begin{aligned}
(BACD) &= \frac{BC}{CA} \cdot \frac{DA}{BD} = \frac{DB}{AD} \cdot \frac{AC}{CB} = \frac{1}{(ABCD)}. \\
(ACBD) &= \frac{AB}{BC} \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{(AC - BC) \cdot (DB + BC)}{BC \cdot AD} = \frac{AC \cdot DB - BC \cdot (DB - AC + BC)}{BC \cdot AD} = \\
&= \frac{AC \cdot DB - BC \cdot (DB + BC + CA)}{BC \cdot AD} = \frac{AC \cdot DB - BC \cdot DA}{BC \cdot AD} = \\
&= -\frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} - \frac{BC \cdot DA}{BC \cdot AD} = 1 - (ABCD).
\end{aligned}$$

■

A következőkben értelmezzük a végtelen távoli pontot tartalmazó kettősviszonyokat is. Négy kollineáris pont közül 0, 1 vagy 4 lehet végtelen távoli.

Amennyiben pontosan egy végtelen távoli pont van a tekintett négy pont között, a fenti azonosságok alkalmazásával elérhető, hogy ez az utolsó pont legyen. Amennyiben D_∞ a pontnégyes egyetlen végtelen távoli eleme,

$$(ABCD_\infty) := -(ABC).$$

A fenti definíciót indokolja, hogy ha egy egyenes A és B pontjait rögzítjük, D pedig „tart” a végtelen távoli ponthoz, akkor az (ABD) osztóviszony -1 -hez tart. Valóban, ha A az $\mathbf{a}$ helyvektorú pont, B a $\mathbf{b}$ helyvektorú pont, és D helyvektora $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$, akkor $(ABD) = \frac{t}{1-t}$, és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1-t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = -1.$$

3.7. Tétel. Legyenek A, B, C, D véges helyzetű kollineáris pontok, és P a közös egyenesükre nem illeszkedő véges helyzetű pont. Jelölje a $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ és $\overrightarrow{PD}$ egyeneseket rendre a, b, c és d . Ekkor

$$(ABCD) = \frac{\sin(ac\angle)}{\sin(cb\angle)} \cdot \frac{\sin(db\angle)}{\sin(ad\angle)},$$

ahol a szereplő szögeket egy rögzített forgásirány mellett előjellel látjuk el.

Bizonyítás: Legyen m az A, B, C, D pontok közös egyenesének P ponttól való távolsága. Ekkor az ACP háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy

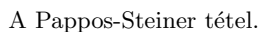
$$AC \cdot m = AP \cdot CP \cdot \sin(ac\angle).$$

Innen

$$AC = \frac{AP \cdot CP \cdot \sin(ac\angle)}{m}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$CB = \frac{CP \cdot BP \cdot \sin(cb\angle)}{m},$$



Így

és ezt kellett belátnunk. ■

3.8. Definíció. Legyenek a, b, c, d egy sugársor elemei. Ekkor az

számat a négy egyenes kettősviszonyának hívjuk.

A P pontot az A, B, C, D pontokkal összekötő egyenesek kettősviszonyát szokás egyszerűen $P(ABCD)$ módon jelölni.

Az előző tétel azt fejezi ki, hogy *pontnégyes kettősviszonya megegyezik a pontokat tetszőleges külső pontból vetítő sugárnégyes kettősviszonyával*, illetve, duálisan, *sugárnégyes kettősviszonya megegyezik az egyeneseket tetszőleges további egyenessel elmetszve kapott pontnégyes kettősviszonyával*.

3.9. Következmény. (Pappos-Steiner) *A perspektivitások kettősvizonytartó leképezések, azaz ha az A, B, C, D kollineáris pontokat egy P pontból vetítve az A', B', C', D' pontokat kapjuk, akkor $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Bizonyítás: Az előző tétel alapján a $\overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{PB}, \overleftrightarrow{PC}, \overleftrightarrow{PD}$ egyenesek kettősviszonya mind az $(ABCD)$, mind az $(A'B'C'D')$ kettősviszonnyal megegyezik. ■

A sugárnégyes kettősviszonyának fogalmát felhasználva értelmezhetjük *négy végtelen távoli pont kettősviszonyát* is. Rögzítsünk egy tetszőleges P pontot a síkban, és ezt az $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ pontokkal összekötő egyenesek legyenek rendre a, b, c, d . Ekkor $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) := (abcd)$. Ez az érték független a P pont megválasztásától, ugyanis a P pont egy további megválasztása esetén kapott sugárnégyes eltolással átvihető az eredeti sugárnégyese, így a kettősviszony definíciójában szereplő szögek változatlanok.

3.10. Állítás. *Legyenek adottak az A, B, C kollineáris pontok, és a $\lambda \neq 0, 1$ valós szám. Ekkor egy és csak egy olyan D pont létezik, amelyre $(ABCD) = \lambda$.*

Bizonyítás: Az $(ABCD) = \lambda$ feltételből adódóan

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \lambda,$$

azaz

$$(ABD) = \frac{(ABC)}{\lambda}.$$

Itt az egyenlőség jobb oldalán egy megadott valós szám szerepel, így ha ez nem -1 , akkor az osztóviszonyra vonatkozó megfelelő tételből következik állításunk. Amennyiben a jobb oldalon szereplő valós szám -1 , D a tekintett pontok egyenesének végtelen távoli pontja. $\lambda = 1$ esetén $C = D$ adódna, azonban a kettősviszony definíciójában feltettük, hogy a négy tekintett pont különböző. ■

A Pappos-Steiner tétel alapján tehát a valós projektív síkon a perspektivitások kettősviszonytartó leképezések, ez azonban azt jelenti, hogy azok véges kompozíciói, tehát a *projektivitások* is *kettősviszonytartó leképezések*. Ebből következik, hogy a *valós projektív síkon teljesül a projektivitások alaptétele*.

Adjuk meg ugyanis a sík egy e egyenesén az A, B, C , és az e' egyenesen az A', B', C' pontokat. Ha egy projektivitásnál A képe A' , B képe B' és C képe C' , akkor az e egyenesen egy tetszőleges további D pontot tekintve annak képe csak e' azon egyértelmű D' pontja lehet, amelyre $(ABCD) = (A'B'C'D')$ teljesül. Tehát valóban, az (ABC) és $(A'B'C')$ által meghatározott projektivitás egyértelmű.

Mivel a fundamentális tulajdonság és a Staudt-tulajdonság ekvivalens a projektivitások alaptételével, következik, hogy e két tulajdonság is teljesül a valós projektív síkon.

4. Desargues-féle és Pappos-féle projektív síkok

4.1. Definíció. Legyen adott egy projektív síkon három nem kollineáris pont: A , B és C . ABC háromszögön a három pont, valamint az $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ egyenesek unióját értjük. A pontokat háromszög csúcsainak, a szóban forgó egyeneseket a háromszög oldalegyeneseinek hívjuk.

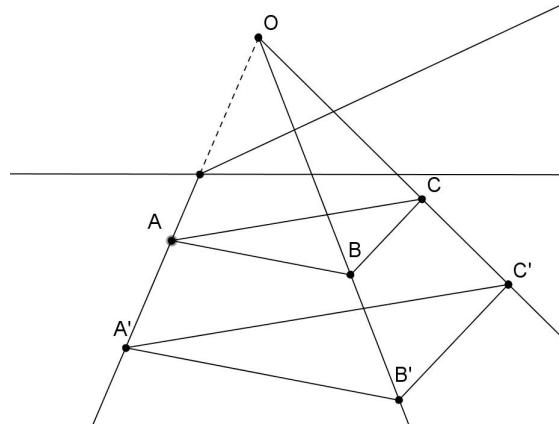
4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek perspektívek az O pontra nézve, ha az O pont az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek mindegyikére illeszkedik.

Azt mondjuk, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek perspektívek a t egyenesre/tengelyre nézve, ha az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ és $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ pontok mindegyike illeszkedik a t egyenesre.

4.3. Definíció. Egy projektív síkot Desargues-félének nevezünk, ha benne bármely két, pontra nézve perspektív háromszög tengelyre nézve is perspektív.

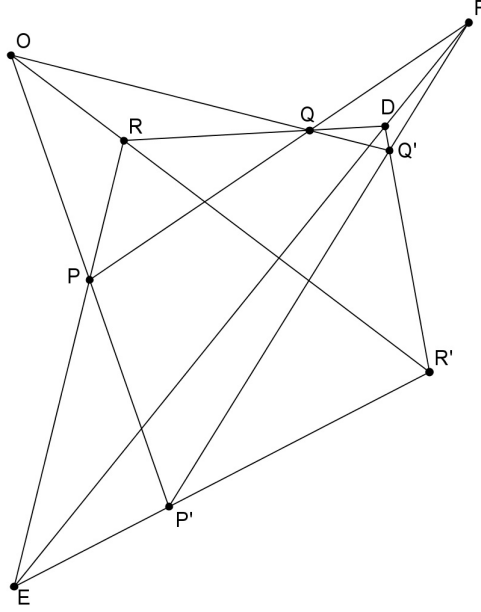
Nem Desargues-féle projektív sík például a Moulton-féle projektív sík. A Moulton-féle affin sík konstrukciója a következő. Legyen $\mathcal{P}$ a valós affin sík $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ pontjainak halmaza. Legyen $\mathcal{L}_1$ a sík nempozitív meredekségű egyeneseinek és függőleges egyeneseinek halmaza. $\mathcal{L}_2$ álljon az alábbi módon nyert egyenesekből. Tekintsük a sík pozitív meredekségű egyeneseit. Ezen egyenesek összes pozitív y -koordinátájú pontjának y koordinátáját változtassuk a felére. Legyen $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, $\mathcal{I} := \infty$. Ekkor $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ affin sík. Ezen affin sík projektív lezártja a Moulton-féle projektív sík.

A lenti ábra a Desargues-tulajdonság duálisára mutat ellenpéldát a Moulton-síkon, azonban a következő állítás értelmében ebből következik, hogy a Moulton-sík nem Desargues-féle.



A Moulton-sík nem Desargues-féle.

4.4. Állítás. A Desargues-féle projektív síkok önduális osztályt alkotnak.

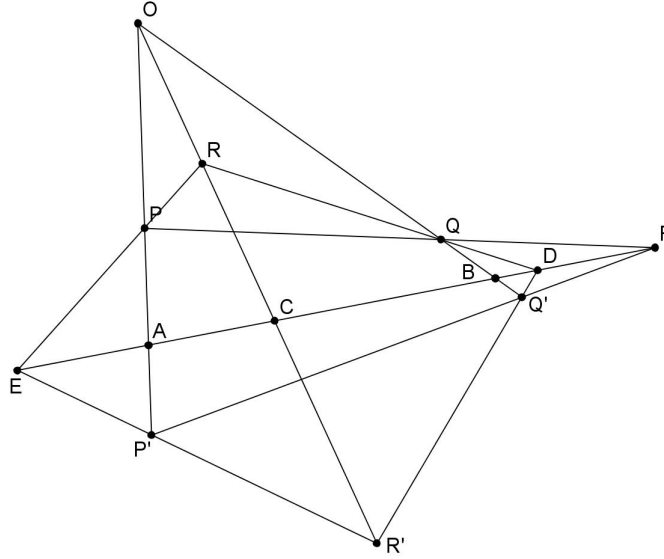


A Desargues-tulajdonságból következik a duálisa.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy projektív sík Desargues-féle. Ekkor az, hogy a sík duálisa is Desargues-féle, ekvivalens azzal, hogy a síkban teljesül a Desargues-tulajdonság duálisa. Tehát elegendő azt igazolnunk, hogy a síkban a t tengelyre nézve perspektív PQR és $P'Q'R'$ háromszögek pontra nézve perspektívek. Vezessük be a következő jelöléseket: $\overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q'R'} =: \{D\}$, $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{P'R'} =: \{E\}$, $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P'Q'} =: \{F\}$. Ekkor a $PP'E$ és $QQ'D$ háromszögek perspektívek az F pontra nézve. Így e két háromszög tengelyre nézve is perspektív. A perspektivitás tengelyének három pontja R , R' és $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{QQ'} =: \{O\}$. E három pont kollinearitása pontosan azt jelenti, hogy a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek perspektívek az O pontra nézve. ■

4.5. Tétel. *Ha egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság, akkor Desargues-féle.*

Bizonyítás: Tekintsük a sík PQR és $P'Q'R'$ háromszögeit, és tegyük fel, hogy e két háromszög az O pontra nézve perspektív. Legyen $\overleftrightarrow{QR} \cap \overleftrightarrow{Q'R'} =: \{D\}$, $\overleftrightarrow{RP} \cap \overleftrightarrow{R'P'} =: \{E\}$ és $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{P'Q'} =: \{F\}$; feladatunk megmutatni, hogy a D , E és F pontok kollineárisak. Vezessük be az $\overleftrightarrow{OP} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{A\}$, $\overleftrightarrow{OQ} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{B\}$ és $\overleftrightarrow{OR} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{C\}$ jelöléseket. Ekkor $(OPAP') \overset{E}{\wedge} (ORCR') \overset{D}{\wedge} (OQBQ')$ teljesül, így O a (PAP') és (QBQ') ponthármasok által meghatározott projektivitás invariáns pontja. Ebből következően a fundamentális tulajdonság alkalmazásával



A fundamentális tulajdonságból következik a Desargues-tulajdonság.

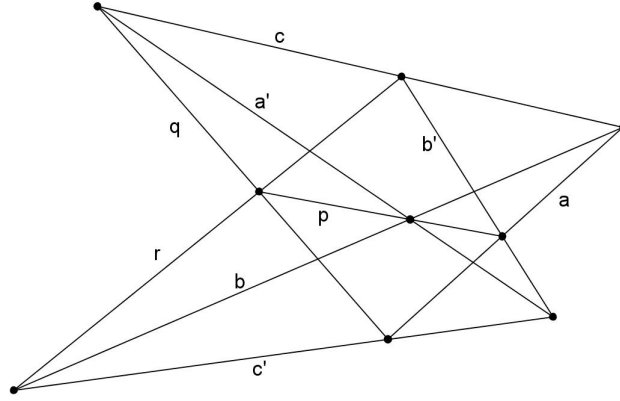
az utóbbi projektivitás perspektivitás, a perspektivitás centruma pedig a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{P'Q'}$ egyenesek F metszéspontja. Mivel ezen perspektivitásban az A pont képe B , az F pont illeszkedik ezen két pont egyenesére, ami megegyezik a $\overleftrightarrow{DE}$ egyenessel. Ezzel beláttuk, hogy a D , E és F pontok kollineárisak. ■

4.6. Definíció. Egy projektív síkot Pappos-félének nevezünk, ha benne tetszőleges két A, B, C és A', B', C' kollineáris ponthármas esetén az $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C} =: \{Q\}$, $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C} =: \{R\}$ ponthármas is kollineáris.

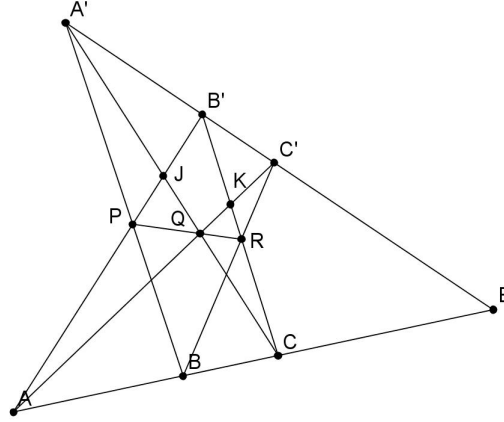
4.7. Állítás. A Pappos-féle projektív síkok önduális osztályt alkotnak.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy projektív sík Pappos-féle. Ahhoz, hogy a sík duálisa is Pappos-féle, az előzőekhez hasonlóan elegendő azt beáltatni, hogy a síkon igaz a Pappos-tulajdonság duálisa. Megmutatjuk tehát, hogy ha a, b, c és a', b', c' két konkurrens egyeneshármas, akkor a p, q, r egyenesek is konkurrens, ahol p az $a \cap b'$ és $a' \cap b$ pontokra, q az $a \cap c'$ és $a' \cap c$ pontokra és r a $b \cap c'$ és $b' \cap c$ pontokra illeszkedő egyenes. Tekintsük a c egyenesre illeszkedő $a \cap b$, $b' \cap r$ és $a' \cap q$; illetve a c' egyenesre illeszkedő $a' \cap b'$, $b \cap r$ és $a \cap q$ pontokat. A Pappos-tulajdonságot ezen két kollineáris ponthármasra alkalmazva, az $r \cap q$, $a \cap b'$ és $a' \cap b$ ponthármasok kollineárisak. Mivel az utóbbi két pont egyenese p , ez valóban a p, q és r egyenesek konkurrens voltát jelenti. ■

4.8. Tétel. Ha egy projektív síkon teljesül a fundamentális tulajdonság, akkor a sík Pappos-féle.



A Pappos-tulajdonságból következik a duálisa.



A fundamentális tulajdonságból következik a Pappos-tulajdonság.

Bizonyítás: Vezessük be az $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{CA'} =: \{J\}$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} =: \{E\}$ és $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{CB'} =: \{K\}$ jelöléseket.

Ekkor $(APJB') \stackrel{A'}{\wedge} (ABCE) \stackrel{C'}{\wedge} (KRCB')$ teljesül. Ekkor B' az (APJ) és (KRC) ponthármassok által meghatározott projektivitás invariáns pontja. Így a fundamentális tulajdonság alapján ezen projektivitás perspektivitás, a perspektivitás centruma pedig az $\overleftrightarrow{AK}$ és $\overleftrightarrow{JC}$ egyenesek Q metszéspontja. Mivel ezen perspektivitásban a P pont képe R , valóban a P , Q és R pontok kollinearitása adódik.

■

A fenti tétel megfordítása is teljesül, ezt nem bizonyítjuk.

4.9. Tétel. Egy projektív sík pontosan akkor Pappos-féle, ha teljesül benne a fundamentális tulajdonság.

A fundamentális tulajdonság, a projektivitások alaptétele illetve a Staudt-tulajdonság tehát egyaránt ekvivalensek a Pappos-tulajdonsággal. Szintén bizonyítás nélkül jegyezzük meg, hogy már az alábbi, a Staudt-tulajdonságnál látszólag gyengébb feltétel is ekvivalens a Pappos-tulajdonsággal.

4.10. Tétel. (Schleiermacher) *Ha egy projektív sík tetszőleges egyenesét önmagára képező minden olyan projektivitás, amelynek van öt fixpontja, identitás, akkor a sík Pappos-féle.*

A fundamentális tulajdonság és a Pappos-tulajdonság ekvivalenciájából adódik a következő tétel.

4.11. Tétel. (Hessenberg) *Minden Pappos-féle projektív sík Desargues-féle.*

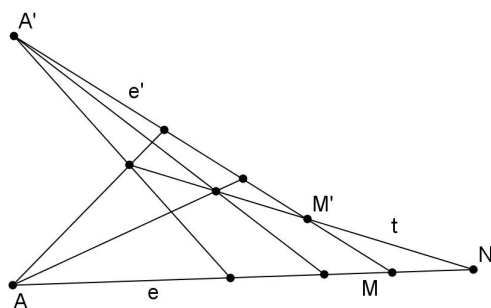
Megjegyezzük, hogy a megfordítás nem teljesül, ugyanis konstruálható olyan projektív sík, amely Desargues-féle de nem Pappos-féle. Véges projektív síkok körében azonban ez nem lehetséges: ha egy *véges* projektív sík Desargues-féle, akkor Pappos-féle.

Azt a tényt, hogy a Staudt-tulajdonságból következik a Pappos-tulajdonság, a különböző tartóegyesű pontsorok közötti projektivitások tengelyének vizsgálatával is beláthatjuk.

2.15. bizonyításának első részében az e tartóegyesű pontsor tetszőleges A elemét választva határoztunk meg olyan pontsort, amely a két projektív pontsor mindegyikével perspektív helyzetű. Felmerül a kérdés, hogy ez az egyenes (a *projektivitás tengelye*) függ-e az A pont megválasztásától. Megmutatjuk, hogy a válasz nemleges.

4.12. Állítás. *Tekintsünk egy olyan projektív síkot, amely eleget tesz a Staudt-féle tulajdonságnak. Tekintsünk a síkon az e és e' tartóegyesű pontsorok közötti tetszőleges projektivitást, és legyen az e egyenes egy A pontjának projektív képe A' . Az A' tartópontú sugársor minden elemének feleltessük meg az A tartópontú sugársor egy elemét a következő módon. Ha az A' tartópontú sugársor x eleme az e egyenest az X pontban metszi, akkor x képe legyen az $\overleftrightarrow{AX'}$ egyenes, ahol X' az X pont projektív képe. A két sugársor között ilyen módon nyert perspektivitás tengelye független az e egyenes A pontjának megválasztásától.*

Bizonyítás: Korábban már igazoltuk, hogy az A és A' tartópontú sugársorok között megadott leképezés valóban perspektivitás. Jelölje a perspektivitás tengelyét t , és legyen az e és e' egyenesek metszéspontja M . Az e és e' tartóegyesű pontsorok közötti projektivitást az előző bizonyításban látott módon állítsuk elő az az e egyenes pontjait A' -ből t -re, és a t pontjait A -ból e' -re vetítő perspektivitások kompozíciójaként. Ezen előállításból látható, hogy az e egyenesre illeszkedő M pont képe a projektivitásban e' és t metszéspontja, az e' egyenesre szintén illeszkedő M pont ösképe a projektivitásban pedig az e egyenes és t metszéspontja. Ezen két pont viszont nem függ az A pont megválasztásától,



A projektivitás tengelye.

csak a megadott projektivitástól, és e két pont egyértelműen meghatározza a t egyenest, így a t egyenes is független az A pont megválasztásától. ■

A fenti állításból már következik, hogy a Staudt-féle tulajdonságból következik a Pappos-tulajdonság. Legyen ugyanis a Pappos-konfigurációban szereplő A, B, C pontok egyenese e ; az A', B', C' pontok egyenese e' , és tekintsük ezen két tartóegyeneseű pontsor között azt a projektivitást, amit az (ABC) és $(A'B'C')$ ponthármas határoz meg. Jelöljük ezen projektivitás - az előzőek szerint egyértelmű - tengelyét t -vel. Az előző állítás alapján látható, hogy a P, Q és R pontok mindegyike illeszkedik a t egyenesre, tehát valóban kollineárisak.

5. Harmonikus pontnégyesek

5.1. Definíció. Legyen adott egy projektív síkon négy pont, A, B, C és D , melyek között nincsen három kollineáris. Az $ABCD$ teljes négyszögön a négy pont, valamint az $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ és $\overleftrightarrow{CD}$ egyenesek unióját értjük. A pontokat négyszög csúcsainak, a szóban forgó egyeneseket a négyszög oldalainak hívjuk. Az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$ és $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ pontokat a teljes négyszög átlóspontjainak nevezzük. A három átlóspont által meghatározott háromszög oldalegyeneseit a teljes négyszög átlóinak mondjuk. Egy átlósponttal szemköztes átlón a teljes négyszög azon átlóját értjük, amelyre az adott pont nem illeszkedik.

A teljes négyszög duálisa a teljes négyoldal.

5.2. Definíció. Legyen adott egy projektív síkon négy egyenes, a, b, c és d , melyek között nincsen három konkurens. Az $abcd$ teljes négyoldalon a négy egyenes, valamint az $a \cap b, a \cap c, a \cap d, b \cap c, b \cap d$ és $c \cap d$ pontok unióját értjük. A pontokat négyoldal csúcsainak, az egyeneseket a négyoldal oldalainak hívjuk. Az $a \cap b$ és $c \cap d, a \cap d$ és $b \cap c$, illetve az $a \cap c$ és $b \cap d$ pontokat összekötő egyeneseket a teljes négyoldal átlóinak nevezzük. A három átló által meghatározott háromszög csúcsait a teljes négyoldal átlóspontjainak mondjuk. Egy átlósponttal szemköztes átlón a teljes négyoldal azon átlóját értjük, amelyre az adott pont nem illeszkedik.

5.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy projektív sík eleget tesz a Fano-axiómának, ha benne egyetlen teljes négyszög átlóspontjai sem kollineárisak.

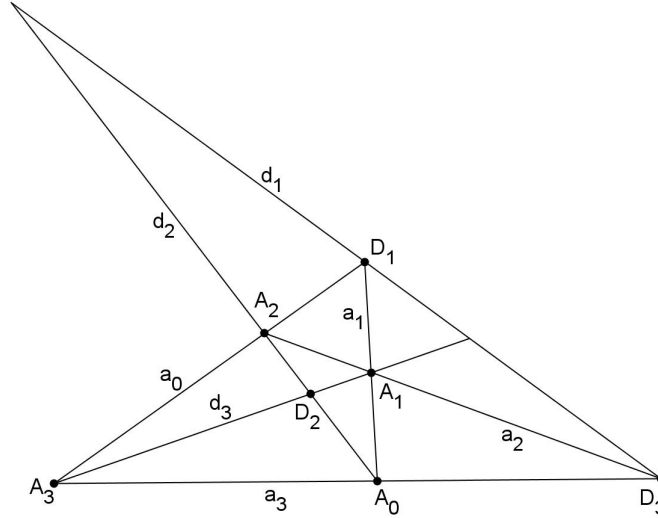
A Fano-sík például nem tesz eleget a Fano-axiómának. Később megindokoljuk, hogy a valós projektív sík eleget tesz a Fano-axiómának.

5.4. Állítás. A Fano-axiómának eleget tevő projektív síkok önduális osztályt alkotnak.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy projektív síkon teljesül a Fano-axióma. Megmutatjuk, hogy ekkor a síkon teljesül a Fano-axióma duálisa is, azaz egyetlen teljes négyoldal átlói sem konkurenssek.

Tekintsük az a_0, a_1, a_2, a_3 egyenesek által meghatározott teljes négyoldalt, jelölje d_1, d_2 és d_3 ezen teljes négyoldal átlóit. Tekintsük azon teljes négyszöget, amelynek csúcsai $\{A_0\} := a_1 \cap a_3, \{A_1\} := a_1 \cap a_2, \{A_2\} := a_0 \cap a_2$ és $\{A_3\} := a_0 \cap a_3$. Ezen teljes négyszög átlóspontjai $\{D_1\} := a_0 \cap a_1, \{D_2\} := d_2 \cap d_3$ és $\{D_3\} := a_2 \cap a_3$. Ekkor látható, hogy D_1 és D_3 illeszkedik d_1 -re. A Fano-axióma miatt D_1, D_2 és D_3 nem kollineáris, így d_1, d_2 és d_3 nem lehet konkurens. Ellenkező esetben ugyanis d_2 és d_3 közös pontja, azaz D_2 illeszkedne a d_1 egyenesre, ami a D_1 és D_3 pontok egyenese. ■

5.5. Definíció. Egy projektív síkon az A, B, C, D kollineáris pontokról azt mondjuk, hogy harmonikus pontnégyest alkotnak, ha van olyan teljes négyszög, melynek A és B csúcsai, C átlóspontja, és D a két további átlóspontra illeszkedő egyenes és az $\overleftrightarrow{AB}$ oldal metszéspontja.



A Fano-axiómából következik a duálisa.

5.6. Definíció. Egy projektív síkon az a, b, c, d konkurrens egyenesekről azt mondjuk, hogy harmonikus sugárnégvest alkotnak, ha van olyan teljes négyszög, melynek a és b egyenesei, c átlója, és d a két további átló metszéspontjára és $a \cap b$ -re illeszkedő egyenes.

Egyszerűen látható a következő állítás:

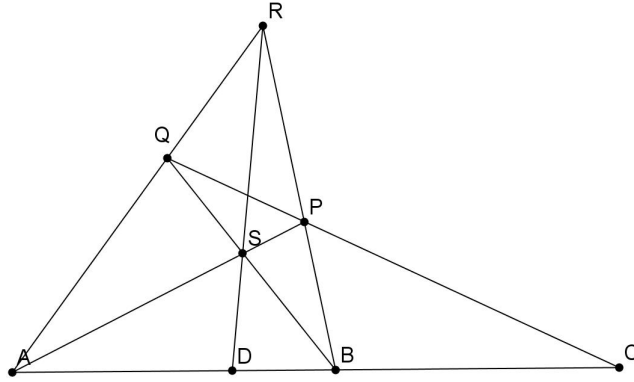
5.7. Lemma. Ha egy projektív sík eleget tesz a Fano-axiómának, tetszőleges $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes esetén a C és D pontok különbözőek.

5.8. Lemma. Ha $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes, akkor $(ABDC)$ is harmonikus pontnégyes.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $ABPQ$ teljes négyszög átlópontjai R, S és C , továbbá $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{AB}$ a D pont. Ekkor az $ABRS$ teljes négyszögnek D átlópontja, C pedig a $\overleftrightarrow{PQ}$ átlóra illeszkedik, így $(ABDC)$ is harmonikus pontnégyes. ■

5.9. Állítás és definíció. Tetszőleges A, B, C különböző kollineáris pontokhoz létezik olyan D pont, melyre $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes. Ha a sík Desargues-féle, ez a D pont egyértelmű. Az így meghatározott D pontot a C pont A és B pontokra vonatkozó harmonikus konjugáltjának vagy harmonikus társának nevezzük.

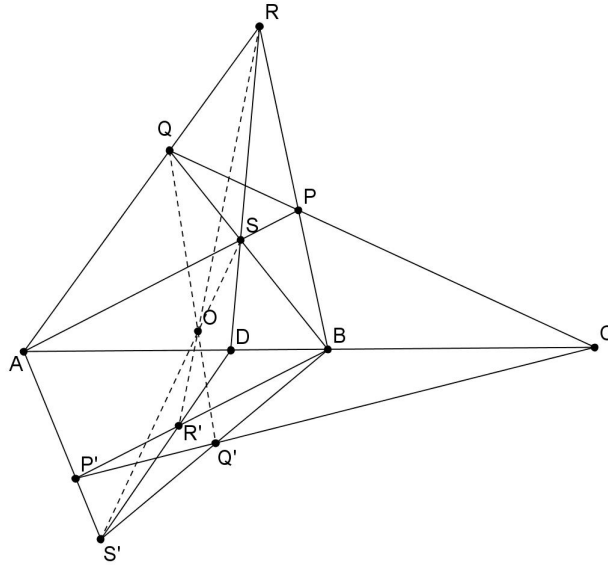
Bizonyítás: A feltételnek megfelelő D pont létezésének igazolásához megmutatjuk, hogy van olyan teljes négyszög, amelynek két csúcsa A és C , és egy átlójára illeszkedik a B pont. Tekintsünk egy tetszőleges PQR háromszöget, melynek



A C pont A és B pontokra vonatkozó harmonikus konjugáltjának szerkesztése.

$\overleftrightarrow{QR}$ oldalegyenesére illeszkedik A , $\overleftrightarrow{RP}$ oldalegyenesére illeszkedik B , és $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyenesére illeszkedik C . Legyen ekkor $\overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BQ} =: \{S\}$; a keresett D pont $\overleftrightarrow{RS}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ metszéspontjaként kapható.

Az egyértelműség igazolásához tekintsünk két különböző, a harmonikus



A harmonikus társ egyértelműsége Desargues-féle projektív síkokon.

pontnégyes definíciójában szereplő teljes négyszöget. Legyenek az egyik teljes négyszög csúcsai A, B, P, Q ; C -től különböző átlópontjai R és S ; a másik teljes négyszög csúcsai A, B, P', Q' ; C -től különböző átlópontjai R' és S' . Megmutatjuk, hogy $\overleftrightarrow{RS}$ és $\overleftrightarrow{R'S'}$ $\overleftrightarrow{AB}$ -vel való metszéspontjai megegyeznek. A feltételek

alapján a PQR és $P'Q'R'$ háromszögek az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre nézve perspektívek, így a Desargues-tulajdonság duálisát felhasználva pontra nézve is perspektívek; jelölje a perspektivitás centrumát O . Hasonlóan, a PQS és $P'Q'S'$ háromszögek is perspektívek az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre nézve, így az O pont illeszkedik az $\overleftrightarrow{SS'}$ egyenesre is. Így az RSP és $R'S'P'$ háromszögek az O pontra nézve perspektívek, ezért a Desargues-tulajdonság alapján tengelyre nézve is. Ebből következik, hogy az $\overleftrightarrow{RS}$ és $\overleftrightarrow{R'S'}$ egyenesek A és B egyenesén metszik egymást, ezzel az állítást igazoltuk. ■

5.10. Állítás. *Négy kollineáris pont pontosan akkor alkot harmonikus pontnégyest, ha van olyan teljes négyszög, amelynek két tekintett pont átlóspontja, a másik kettő pedig ezen pontok által meghatározott átló metszéspontja két oldalegyenessel.*

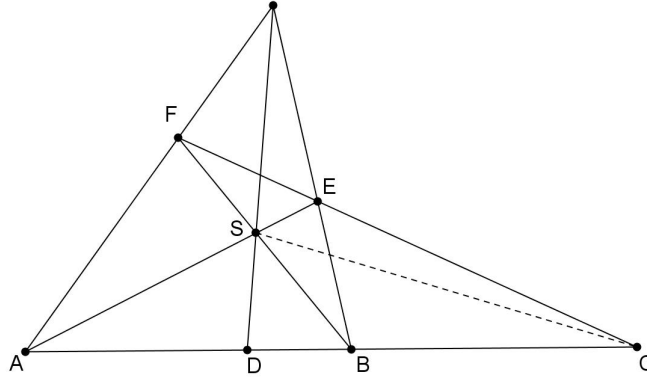
Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy az $(ABCD)$ pontnégyes harmonikus. Ekkor van olyan $ABPQ$ teljes négyszög, melyre $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{PQ}$ metszéspontja D , valamint C illeszkedik az $\{Y\} := \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{BP}$ és $\{X\} := \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BQ}$ pontok egyenesére. Ekkor $XPYQ$ a kívánt tulajdonságú teljes négyszög, ugyanis A és B ebben a teljes négyszögben átlóspontok, C illeszkedik az $\overleftrightarrow{XY}$ oldalegyenesre, D illeszkedik a $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyenesre.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $(ABCD)$ pontnégyeshez van olyan $PQRS$ teljes négyszög, amelynek $\overleftrightarrow{PS}$ oldalegyenesére illeszkedik C , $\overleftrightarrow{QR}$ oldalegyenesére illeszkedik D , $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{RS}$ átlóspontja B , valamint $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{QS}$ átlóspontja A . Ekkor az $AQBR$ teljes négyszögnek A és B csúcsai, D átlóspontja, C pedig illeszkedik a másik két átlóspont egyenesére, így $(ABCD)$ valóban harmonikus pontnégyes. ■

5.11. Állítás. *Desargues-féle projektív síkon harmonikus pontnégyessel perspektív helyzetű egyenesek harmonikus sugárnégyest alkotnak, és fordítva, harmonikus sugárnégyessel perspektív helyzetű pontnégyes harmonikus.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyest, és legyen $ABEF$ olyan teljes négyszög, melynek C egy átlóspontja, D pedig illeszkedik a C -vel szemköztes átlóra, és a perspektivitás S középpontja egy további átlóspont. A harmonikus negyedik egyértelműsége alapján belátható, hogy ilyen teljes négyszög tetszőleges előre megadott, a pontnégyes egyenesére nem illeszkedő S ponthoz létezik.

Vetítsük S -ből az $(ABCD)$ pontokat. Ekkor $\overleftrightarrow{SA}$ és $\overleftrightarrow{SC}$ az $ABEF$ teljes négyszög $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FA}$ oldalegyenesei által meghatározott teljes négyoldal két átlóegyenese, $\overleftrightarrow{SB}$ és $\overleftrightarrow{SD}$ ugyanezen teljes négyoldal S átlóspontját köti össze egy-egy csúcsponttal. **5.10.** miatt a dualitás elve alapján egy konkurrens sugárnégyes pontosan akkor harmonikus, ha van olyan teljes négyoldal, melynek két tekintett egyenes átlóegyenese, a két további egyenes pedig az egyenesek metszéspontjaként kapható átlóspontot két további csúcsponttal köti össze. Így



Harmonikus pontnégyest vetítve harmonikus sugárnégyest kapunk.

valóban, az S pontból a harmonikus pontnégyest harmonikus sugárnégyessel vetítettük.

Az állítás megfordítása a dualitás elve alapján következik. ■

Mivel a projektivitások véges sok perspektivitás kompozíciójaként állnak elő, azonnal adódik az alábbi következmény.

5.12. Következmény. *Desargues-féle projektív síkon harmonikus pontnégyes projektív képe harmonikus pontnégyes.*

5.13. Következmény. *Ha egy Pappos-féle projektív síkon $(ABCD)$ és $(A'B'C'D')$ egyaránt harmonikus pontnégyesek, akkor $(ABCD) \bar{\wedge} (A'B'C'D')$.*

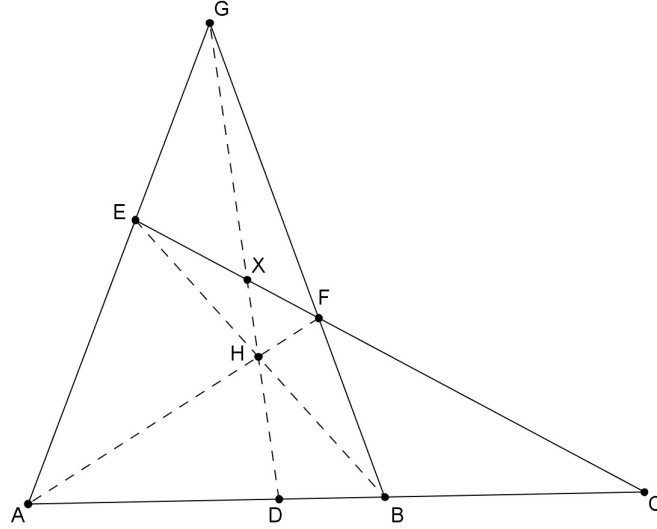
Bizonyítás: Tekintsük az (ABC) és $(A'B'C')$ pontnégyesek által meghatározott projektivitást. Mivel $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes, az előző következmény miatt D képe az a D'' pont, amelyre $(A'B'C'D'')$ harmonikus pontnégyes. A harmonikus társ egyértelműsége miatt ekkor $D' = D''$, tehát a tekintett projektívitásnál D képe valóban D' . ■

5.14. Állítás. *Ha egy Pappos-féle projektív sík eleget tesz a Fano-tulajdonságnak, akkor a sík egy kollineáris $(ABCD)$ pontnégyese akkor és csak akkor harmonikus, ha $(ABCD) \bar{\wedge} (BACD)$.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes. Legyenek a harmonikus pontnégyes definíciójában szereplő teljes négyszög csúcsai A, B, E, F ; az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{EF}$ átlóspont C , a további átlóspontok G és H , melyek egyenese $\overleftrightarrow{AB}$ -t D -ben metszi. Ekkor

$$(ABCD) \stackrel{G}{\bar{\wedge}} (EFCX) \stackrel{H}{\bar{\wedge}} (BACD).$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(ABCD) \bar{\wedge} (BACD)$. Legyen C (AB) -re vonatkozó harmonikus társa D' , és tegyük fel, hogy $D' \neq D$. Ekkor $(ABCD')$



Ha $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes, akkor $(ABCD) \bar{\wedge} (BACD)$.

harmonikus pontnégyes, így az állítás első része miatt $(ABCD') \bar{\wedge} (BACD')$. Ez a projektivitás és a feltételben szereplő projektivitás is A -hoz B -t, B -hez A -t és C -hez C -t rendeli, így a projektivitások alaptétele miatt a két projektivitás megegyezik. Ennél a projektivitásnál D és D' egyaránt fixpontok. Mivel C is fixpont, a Staudt-tulajdonságból adódóan a projektivitás az identitás. Azonban $A \neq B$ és A képe B , így az az indirekt feltevésünk, hogy $D' \neq D$, ellentmondáshoz vezet. Tehát $D' = D$ és $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes. ■

5.15. Következmény. *A valós projektív sík egy kollineáris pontnégyese pontosan akkor harmonikus, ha kettősszorzója -1 .*

Bizonyítás: 5.14. miatt $(ABCD)$ akkor és csak akkor harmonikus pontnégyes, ha $(ABCD) \bar{\wedge} (BACD)$. A Pappos-Steiner tétel miatt ez a valós projektív síkon $(ABCD) = (BACD)$ teljesülésével ekvivalens. A kettősszorzony tulajdonságaiból adódik, hogy $(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}$. Így azt kaptuk, hogy $(ABCD)$ akkor és csak akkor harmonikus pontnégyes, ha

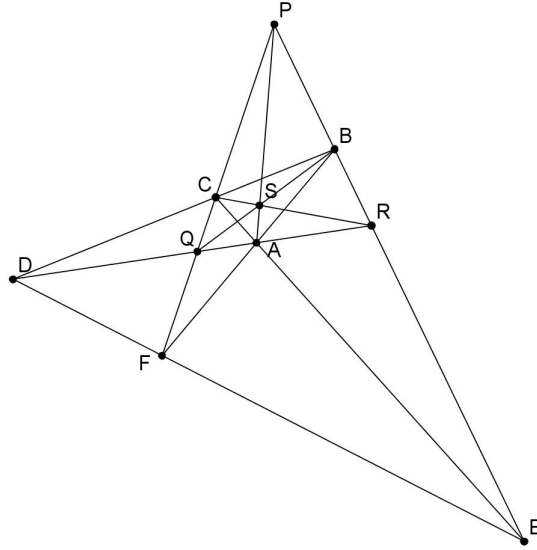
$$(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Ez utóbbi egyenlőség csak $(ABCD) = 1$ vagy $(ABCD) = -1$ esetén teljesül. $(ABCD) = 1$ azonban azt vonná maga után, hogy $C = D$ teljesül, ami a Fano-tulajdonság miatt lehetetlen. Ez állításunk igazságát jelenti. ■

5.16. Állítás és definíció. *Legyen adott egy Desargues-féle projektív síkon egy PQR háromszög, és legyen S a sík egy tetszőleges pontja, amely a háromszög egyetlen oldalegyenesére sem illeszkedik. Legyen $\overrightarrow{QR} \cap \overrightarrow{SP} =: \{A\}$, $\overrightarrow{RP} \cap \overrightarrow{SQ} =:$*

$\{B\}$, $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{SR} =: \{C\}$. Legyenek A , B és C harmonikus konjugáltjai a háromszög megfelelő csúcsaira nézve D , E és F . Ekkor a D , E , F ponthármas kollineáris, egyenesüket az S pont PQR háromszögre vonatkozó harmonikus polárisának nevezzük.

Megfordítva, ha adott egy s egyenes, amelynek a háromszög oldalaival alkotott metszéspontjait D , E és F jelöli, jelölje az D , E , F pontok megfelelő háromszögcsúcsokra vonatkozó harmonikus konjugáltjait A , B és C . Ekkor ezen pontokat a háromszög szemköztes csúcsaival összekötve három konkurrens egyenest kapunk, melyek közös pontját az s egyenes háromszögre vonatkozó harmonikus pólusának hívunk.



S harmonikus polárisa a D , E , F pontok egyenese.

Bizonyítás: Az állítás első részének belátásához tekintsük a PQR és ABC háromszögeket, melyek az S pontra nézve perspektívek. A Desargues-tulajdonság miatt ezen háromszögek tengelyre nézve is perspektívek, amely tengely $\overleftrightarrow{QR}$ oldalegyenessel alkotott metszéspontja legyen D' , $\overleftrightarrow{PR}$ oldalegyenessel alkotott metszéspontja legyen E' , és $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyenessel alkotott metszéspontja legyen F' . A $BQRC$ teljes négyszöget tekintve látható, hogy $(QRAD')$ harmonikus pontnégyes, és mivel az A pont Q és R pontokra vonatkozó harmonikus társa egyértelmű, $D' = D$. Hasonlóan, $E' = E$ és $F' = F$. Így D , E , F valóban kollineárisak.

Az állítás megfordítása a dualitás elvének felhasználásával adódik. ■

6. Involúciók

Ebben a fejezetben feltételezzük a fundamentális tulajdonság és a Fano-axióma teljesülését.

6.1. Definíció. Azokat a pontsorokat vagy sugársorokat önmagukra képező projektivitásokat, amelyek négyzete az identitás, involúcióknak nevezzük.

6.2. Lemma. Ha egy pontsort önmagára képező projektivitás esetén valamely A pontra $A'' = A$ teljesül, azaz a projektivitás a pontsor két elemét felcseréli, akkor a leképezés involúció.

Bizonyítás: Tekintsük a pontsor tetszőleges további X elemét, annak projektív képét jelöljük X' -vel. Ekkor az involúció definíciója alapján $(AA'XX') \bar{\wedge} (A'AX'X'')$. Az **2.5.** állításból adódóan $(A'AX'X'') \bar{\wedge} (AA'X''X')$, így $(AA'XX') \bar{\wedge} (AA'X''X')$. A Staudt-tulajdonság alapján azonban ez csak $X = X''$ esetén lehetséges, tehát a leképezés involúció. ■

Az involúció a pontsor elemeit „pontpárokbá” rendezi, ezért ha A képe A' , azt úgy is kifejezhetjük, hogy (AA') az involúció egy megfelelő pontpárja.

6.3. Következmény. Egy involúciót két megfelelő pontpárja egyértelműen meghatároz.

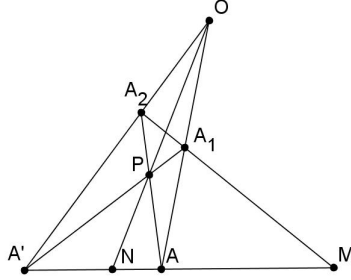
Bizonyítás: Legyen (AA') és (BB') két megfelelő pontpár. Tekintsük az $(AA'B)$ és $(A'AB')$ ponthármasok által meghatározott projektivitást. Az előző lemmából adódóan ez a projektivitás involúció, mivel az A és A' pontokat felcseréli, ebből adódóan a B' pont képe valóban B . A projektivitások alaptétele miatt más ilyen involúció nincs. ■

6.4. Következmény. Egy pontsor (AA') , (BB') és (CC') pontpárjai pontosan akkor megfelelő pontpárok egy involúcióban, ha $(ABCC') \bar{\wedge} (B'A'CC')$.

Bizonyítás: Ha az (AA') és (BB') megfelelő pontpárok által meghatározott involúcióban (CC') megfelelő pontpár, akkor $(ABCC') \bar{\wedge} (A'B'C'C)$ nyilvánvaló, és **2.5.** miatt ez a kívánt $(ABCC') \bar{\wedge} (B'A'CC')$ összefüggést jelenti. Megfordítva, ha $(ABCC') \bar{\wedge} (B'A'CC')$ teljesül, akkor ismét **2.5.** felhasználásával $(ABCC') \bar{\wedge} (A'B'C'C)$, ami valóban azt jelenti, hogy (AA') , (BB') és (CC') egy involúció megfelelő pontpárjai. ■

Amennyiben (AA') , (BB') és (CC') egy involúció megfelelő pontpárjai, szokás azt mondani, hogy $(ABC)(A'B'C')$ involutorikus hatos.

6.5. Állítás. Ha egy involúciónak van fixpontja, és nem identitás, akkor egyértelműen létezik további fixpont is. Az involúció megfelelő pontpárjai ekkor harmonikus konjugáltak a fixpontokra nézve.



Fixponttal rendelkező involúció.

Bizonyítás: Jelölje M az involúció fixpontját, és legyen (AA') egy megfelelő pontpár. Tekintsünk egy tetszőleges, az involúció tartóegyenesétől különböző s egyenest, amelyre az M pont illeszkedik, illetve egy O pontot, amely egyik szóban forgó egyenesre esem illeszkedik. Tekintsük azt az O középpontú perspektivitást, amely az involúció tartóegyenesének pontjaihoz rendeli az s egyenes pontjait, és jelölje A_1 az $s \cap \overleftrightarrow{OA}$, A_2 az $s \cap \overleftrightarrow{OA'}$ pontot. Legyen továbbá az $\overleftrightarrow{A_1A'}$ és $\overleftrightarrow{A_2A}$ egyenesek metszéspontja P . Ekkor $(AA'M) \xrightarrow{O} (A_1A_2M) \xrightarrow{P} (A'AM)$, azaz egy O és egy P centrumú perspektivitás kompozíciójaként áll elő az involúció. Tekintsük az $AA'A_1A_2$ teljes négyszöget. A Fano-tulajdonság miatt M nem illeszkedik az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenesre, így annak az involúció tartóegyenesével alkotott metszéspontja különbözik M -től, jelölje ezt a pontot N . Ekkor N fixpont. Az előbb említett teljes négyszög egy oldala az involúció tartóegyenesé, így látható, hogy $(AA'MN)$ harmonikus pontnégyes. További fixpont létezése esetén a Staudt-tulajdonság miatt a leképezés az identitás volna, így következik, hogy M és N az involúció összes fixpontja. ■

Egy involúciót *elliptikusnak* vagy *hiperbolikusnak* hívjuk aszerint, hogy fixpontjainak száma 0 vagy 2. Az előző állításból adódóan nincs olyan involúció, amelynek pontosan egy fixpontja volna, vagyis parabolikus lenne. Sokszor azonban *parabolikus involúcióként* említjük azt a leképezést, amely egy pontsor összes eleméhez a pontsor ugyanazon elemét rendeli.

Az előző állításból következően egy hiperbolikus involúciót a két fixpontja egyértelműen meghatározza.

6.6. Lemma. *Ha (MN) megfelelő pontpár az (AA_1) és (BB_1) valamint az $(A'A_1)$ és $(B'B_1)$ megfelelő pontpárok által meghatározott involúciókban, akkor megfelelő pontpár az (AB') és (BA') megfelelő pontpárok által meghatározott involúcióban is.*

Bizonyítás: A 6.4. következmény miatt ha (MN) megfelelő pontpár az (AA_1) és (BB_1) megfelelő pontpárok által meghatározott involúcióban, $(MNAB) \bar{\wedge} (MNB_1A_1)$ teljesül. Mivel (MN) megfelelő pontpár az $(A'A_1)$ és $(B'B_1)$ megfelelő pontpárok által meghatározott involúcióban is, $(MNB_1A_1) \bar{\wedge} (MNA'B')$

is igaz. Így $(MNAB) \bar{\wedge} (MNA'B')$, ami a 6.4. következmény alkalmazásával az állítás igazságát jelenti. ■

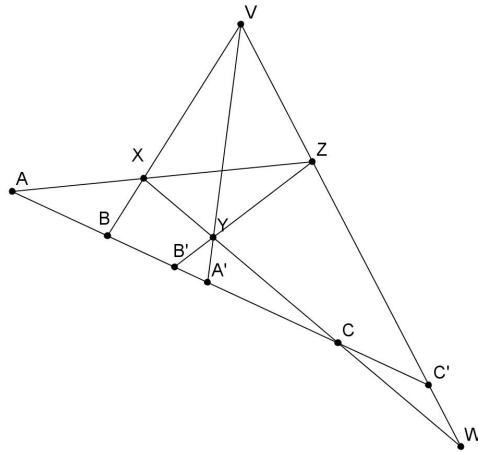
6.7. Lemma. *A K_1 és K_2 fixpontok valamint az L_1 és L_2 fixpontok által meghatározott involúciókban pontosan akkor létezik közös megfelelő pontpár, ha a (K_1K_2) és (L_1L_2) megfelelő pontpárok által meghatározott involúció hiperbolikus; ekkor a közös megfelelő pontpárt ezen involúció M és N fixpontjai alkotják.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy M és N a két involúció közös megfelelő pontpárja. Ekkor (MNK_1K_2) és (MNL_1L_2) harmonikus pontnégyes, így az M és N fixpontok által meghatározott involúcióban (K_1K_2) és (L_1L_2) valóban megfelelő pontpárok. Ezek alapján az állítás megfordítása nyilvánvaló. ■

6.8. Állítás. *Egy pontsort vagy sugársort önmagára képező tetszőleges projektivitás felírható legfeljebb két involúció kompozíciójaként.*

Bizonyítás: Tekintsük az (ABC') és $(A'B'C')$ ponthármasok által egyértelműen meghatározott projektivitást. Tegyük fel, hogy C nem fixpont. Tekintsük az (AB') és (BA') megfelelő pontpárok által meghatározott involúciót. Jelöljük a C pont képét ebben az involúcióban D -vel. Ekkor ezen involúciót komponálva az $(A'B')$ és $(C'D)$ megfelelő pontpárok által meghatározott involúcióval, éppen a kívánt projektivitást kapjuk. ■

Ha ismerjük egy involúció két megfelelő pontpárját, akkor ahogyan tetszőleges projektivitást, az involúciót is felírhatjuk legfeljebb három perspektivitás kompozíciójaként, és így meghatározhatjuk tetszőleges további pont képét az involúcióban. Pontok involúciós képének meghatározására további módszert ad az alábbi fontos tétel.



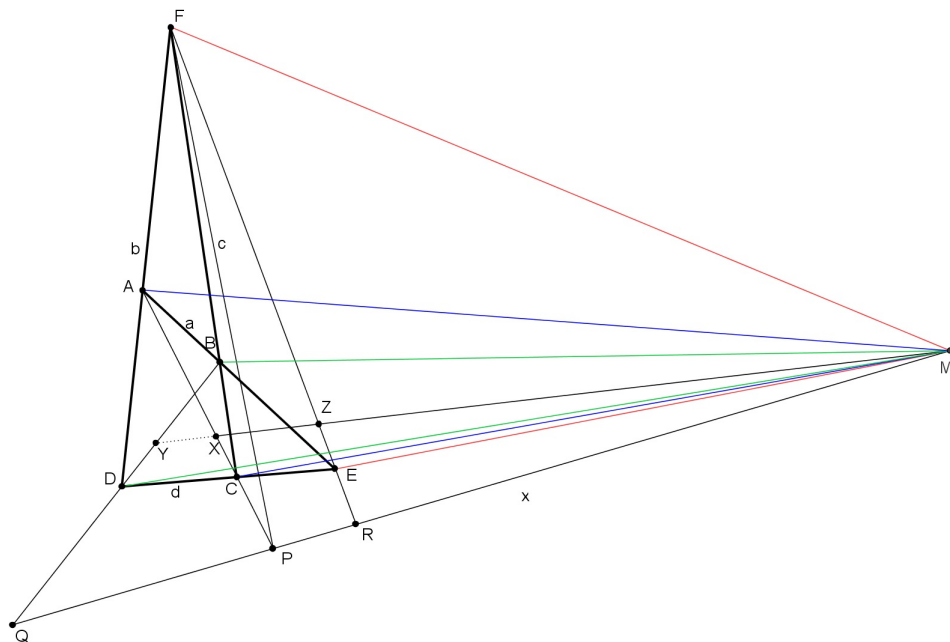
Desargues tétele a teljes négyszögről.

6.9. Tétel. (*Desargues tétele a teljes négyszögről.*) Egy teljes négyszög szemköztes oldalegyeneseit a sík bármely, a négyszög csúcsaira nem illeszkedő g egyenese egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszi.

Bizonyítás: Jelölje az $XYZV$ teljes négyszög szemköztes oldalegyeneseinek a g egyenessel alkotott metszéspontjait rendre $A, A'; B, B'; C, C'$. A 6.4. következmény értelmében elegendő belátnunk, hogy $(ABCC') \bar{\wedge} (B'A'CC')$. Vezessük be az $\overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{ZV} =: \{W\}$ jelölést. Ekkor $(ABCC') \stackrel{X}{\bar{\wedge}} (ZVWC') \stackrel{Y}{\bar{\wedge}} (B'A'CC')$ teljesül, így az állítást igazoltuk. ■

Végül előző tételünk duálisának alkalmazására mutatunk példát.

6.10. Állítás. (*A Newton-Gauss egyenes projektív általánosítása.*) Tekintsünk egy teljes négyoldalt, és egy, a négyoldal egyik csúcsára sem illeszkedő x egyenest. Ekkor x -nek a négyoldal átlóegyeneseivel alkotott metszéspontjainak a négyoldal szóban forgó átlóegyenésére illeszkedő csúcsokra vonatkozó harmonikus társai kollineárisak.

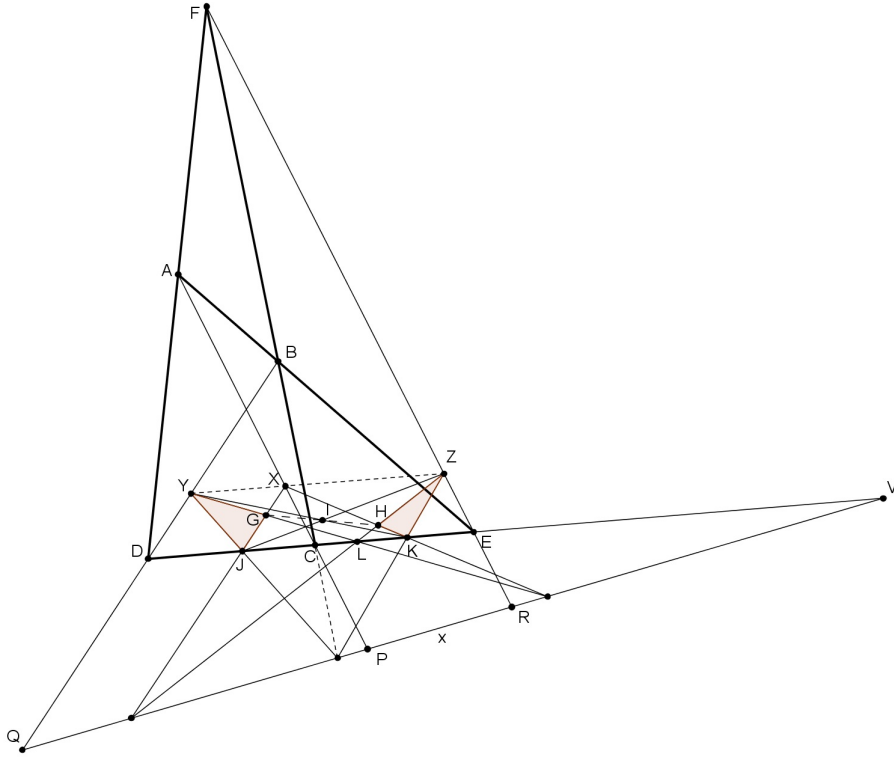


A Newton-Gauss egyenes projektív általánosítása.

Bizonyítás: Legyenek a négyoldal egyenesei a, b, c, d . Legyen $a \cap b =: \{A\}$, $a \cap c =: \{B\}$, $c \cap d =: \{C\}$, $b \cap d =: \{D\}$, $a \cap d =: \{E\}$, $b \cap c =: \{F\}$, $x \cap \overleftrightarrow{AC} =: \{P\}$, $x \cap \overleftrightarrow{BD} =: \{Q\}$, $x \cap \overleftrightarrow{EF} =: \{R\}$. Jelölje P harmonikus társát az A és C pontokra vonatkozóan X , Q harmonikus társát a B és D pontokra

vonatkozóan Y, R harmonikus társát az E és F pontokra vonatkozóan Z . Azt kell megmutatnunk, hogy X, Y és Z kollineáris.

Legyen $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{XZ} =: \{M\}$. Ekkor Desargues teljes négyszögekre vonatkozó tételének duálisa miatt $(\overleftrightarrow{MA}, \overleftrightarrow{MC})$, $(\overleftrightarrow{MB}, \overleftrightarrow{MD})$ és $(\overleftrightarrow{ME}, \overleftrightarrow{MF})$ egy sugárinvolúció megfelelő sugárpárjai. Mivel M -ből az $(ACXP)$ és $(EFZR)$ pontnégyeseket vetítve egyaránt harmonikus sugárnégyest kapunk, ennek a sugárinvolúciónak $\overleftrightarrow{MP}$ és $\overleftrightarrow{MX}$ a fixelemei. Mivel M -ből a $(BDYQ)$ pontnégyest vetítve is harmonikus sugárnégyest kapunk, Y illeszkedik az $\overleftrightarrow{MX}$ fixegyenesre, ami állításunk igazságát jelenti. ■



A Newton-Gauss egyenes projektív általánosítása - második bizonyítás.

Az előző állítást beláthatjuk a Desargues-tulajdonság és a Pappos-tulajdonság alkalmazásával is.

Legyen $x \cap \overleftrightarrow{CD} =: V$, és jelölje (CD) harmonikus társát V -re vonatkozóan J , (CE) harmonikus társát V -re vonatkozóan K , (DE) harmonikus társát V -re vonatkozóan L . Legyen továbbá $\overleftrightarrow{XJ} \cap \overleftrightarrow{YL} =: G$, $\overleftrightarrow{XK} \cap \overleftrightarrow{ZL} =: H$, $\overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{ZJ} =: I$.

Mivel $(VJCD)$ és $(QYBD)$ egyaránt harmonikus pontnégyes, $(VJCD) \bar{\wedge} (QYBD)$. Így a fundamentális tulajdonság miatt $\overleftrightarrow{VQ}$, $\overleftrightarrow{JY}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ konkurrens, vagyis $\overleftrightarrow{JY} \cap \overleftrightarrow{BC} = x$ -en metszi egymást. Hasonlóan, $(RZFE)$ és $(VKCE)$ egyaránt

harmonikus pontnégyes, így $(RZFE) \bar{\wedge} (VKCE)$ miatt $\overleftrightarrow{ZK} \cap \overleftrightarrow{CF}$ x -en metszi egymást. Mivel $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{CF}$, ez azt jelenti, hogy x és $\overleftrightarrow{BC}$ közös pontjára $\overleftrightarrow{JY}$ és $\overleftrightarrow{ZK}$ egyaránt illeszkedik, vagyis $\overleftrightarrow{JY}$ és $\overleftrightarrow{ZK}$ közös pontja x -en van.

Hasonló gondolatmenettel kapható, hogy $\overleftrightarrow{JX}$ és $\overleftrightarrow{ZL}$ közös pontja, valamint $\overleftrightarrow{YL}$ és $\overleftrightarrow{KX}$ közös pontja szintén x -re illeszkedik. Ebből következik, hogy az YJG és KZH háromszögek x -re nézve perspektívek. Így a Desargues-tulajdonság megfordítása miatt a két háromszög pontra nézve is perspektív, a perspektivitás középpontja $\overleftrightarrow{YK} \cap \overleftrightarrow{ZJ} = I$. Így $\overleftrightarrow{GH}$ is tartalmazza az I pontot, azaz G , H és I kollineáris. Végül a (GIH) és (KLJ) ponthármasokra alkalmazva a Pappos-tulajdonságot adódik, hogy X , Y és Z valóban kollineárisak.

7. Centrális kollineációk

7.1. Definíció. Legyenek $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ és $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ illeszkedési geometriák. A $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ leképezéspárt izomorfizmusnak nevezzük, ha $\varphi_1 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ és $\varphi_2 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ bijektívek, továbbá tetszőleges $(X, l) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ esetén $(X, l) \in \mathcal{I}$ pontosan akkor teljesül, amikor $(\varphi_1(X), \varphi_2(l)) \in \mathcal{I}'$. Két illeszkedési geometriát izomorfoknak mondunk, ha létezik közöttük izomorfizmus.

Szokás izomorfizmusnak nevezni két illeszkedési geometria pontjainak halmazai között megadott olyan bijektív leképezéseket, amelyek kollineáris pontokhoz kollineáris pontokat rendelnek. Egy ilyen leképezés - ami a mi definíciónk szerinti φ_1 leképezés - egyértelműen származtat egy φ_2 leképezést az egyenes-halmazok között oly módon, hogy φ_2 tetszőleges e egyeneshez az e -re illeszkedő pontok képeinek közös egyenesét rendeli.

7.2. Definíció. Egy illeszkedési geometriát önmagára képező izomorfizmusokat kollineációknak nevezzük.

A későbbiekben az egyszerűség kedvéért a kollineációk pontokon és egyeneseken ható részét egyformán fogjuk jelölni, tehát egy $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ kollineáció esetén a $\varphi_1(X)$ pontot illetve a $\varphi_2(l)$ egyenest $\varphi(X)$ illetve a $\varphi(l)$ jelöli.

Megállapodunk abban, hogy egy projektív sík egy (φ_1, φ_2) kollineációját tekintve valamely P pont $\varphi_1(P)$ képére egyszerűen a P' , valamely e egyenes $\varphi_2(e)$ képére egyszerűen az e' jelölést használjuk.

7.3. Definíció. Ha egy projektív sík egy kollineációjánál valamely C pontra illeszkedő összes egyenes invariáns, akkor azt mondjuk, hogy C a kollineáció centruma, és a kollineációt centrális kollineációnak nevezzük. Ha egy t egyenes összes pontja fixpont, akkor a t egyenes a kollineáció tengelye, és a kollineációt tengelyes kollineációnak mondjuk.

A kollineáció centruma és tengelye duális fogalmak.

7.4. Lemma. Centrális kollineáció esetén a centrum illeszkedik tetszőleges pontot a képével összekötő egyenesre.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a tekintett kollineációnál A képe A' , és hogy a kollineáció C centruma nem illeszkedik $\overleftrightarrow{AA'}$ -re. Ekkor a $\overleftrightarrow{CA}$ egyenes kollineációs képe $\overleftrightarrow{CA'}$, viszont a centrum definíciója miatt mindkettő fixegyenes. Így a két egyenes egybeesik, ami ellentmond feltevésünknek. ■

A definíció alapján a következő lemma nyilvánvaló.

7.5. Lemma. Ha egy egyenesre illeszkedik egy kollineáció két fixpontja, akkor az egyenes fixegyenes az adott kollineációban. Duálisan, bármely olyan pont, amelyre két fixegyenes illeszkedik, a kollineáció fixpontja.

7.6. Lemma. Ha valamely kollineációnak két különböző centruma vagy két különböző tengelye van, akkor az az identitás.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy ha egy kollineációnak két különböző tengelye van, akkor az az identitás. A centrumra vonatkozó állítás dualitással adódik.

Tegyük fel, hogy egy kollineációnak t_1 és t_2 is tengelye. Ha egy pont illeszkedik ezen egyenesek bármelyikére, akkor a tengely definíciójából adódóan fixpont. Belátjuk, hogy a sík összes többi P pontja is fix. Tegyük fel, hogy P nem illeszkedik a tengelyek egyikére sem. Mivel P -re legalább három egyenes illeszkedik, biztosan van közöttük két olyan, amelyek a tengelyeket különböző pontokban metszik. Mindkét egyenes két fixpontot köt össze, így fixegyenes. Következésképpen metszéspontjuk, azaz P fixpont. ■

7.7. Lemma. *Egy tengelyes kollineáció bármely olyan fixpontja, amely nem illeszkedik a tengelyre, centrum. Egy centrális kollineáció esetén bármely olyan fixegyenes, amelyre nem illeszkedik a centrum, a kollineáció tengelye.*

Bizonyítás: Ismét csak az állítás első felét igazoljuk, az állítás második fele ebből következik a dualitás elve alapján.

Tegyük fel, hogy t a kollineáció tengelye, F pedig t -re nem illeszkedő fixpont. Legyen f tetszőleges olyan egyenes, amelyre illeszkedik F . Megmutatjuk, hogy f fixegyenes, tehát F a kollineáció centruma. Mivel F nem illeszkedik a tengelyre, az f egyenes tengellyel való T metszéspontja különbözik F -től. Mivel T fixpont, az f egyenes két fixpontot köt össze, tehát fixegyenes. ■

7.8. Tétel. *Egy kollineációnak pontosan akkor van tengelye, ha van centruma.*

Bizonyítás: Elegendő belátnunk, hogy bármely tengelyes kollineációnak van centruma, a fordított állítás dualitással következik.

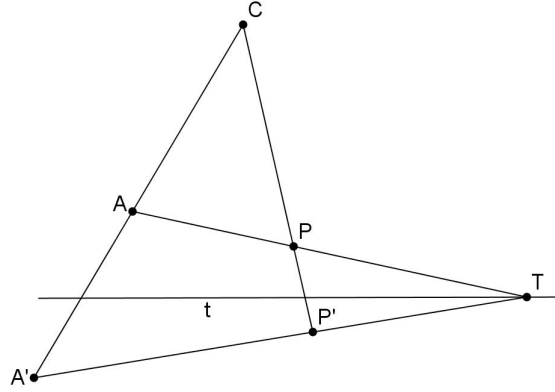
Tegyük fel, hogy t egy kollineáció tengelye. Ha a kollineációnak létezik t -re nem illeszkedő fixpontja, akkor az előző lemma miatt a kollineációnak van centruma. Tegyük fel tehát, hogy nincs ilyen pont. Legyen P egy t -re nem illeszkedő pont. Ekkor az előzőek alapján $P' \neq P$. Legyen $e := \overleftrightarrow{PP'}$, $C := e \cap t$. Ekkor e fixegyenes, ugyanis

$$e' = (\overleftrightarrow{PC})' = \overleftrightarrow{P'C'} = \overleftrightarrow{P'C} = e.$$

Tehát tetszőleges, a tengelyre nem illeszkedő pontot a képével összekötő egyenes fixegyenes. Legyen g tetszőleges C -n átmenő, t -től különböző egyenes, Q pedig egy C -től különböző, g -re illeszkedő pont. A $\overleftrightarrow{Q'Q}$ egyenes fix, ezért annak e -vel való metszéspontja fixpont. Feltételünk szerint azonban minden fixpont illeszkedik a tengelyre, így ez csak a C pont lehet. Így g fixegyenes, tehát C centrum. ■

7.9. Definíció. *Az olyan centrális kollineációt, amelynek centruma illeszkedik a tengelyére, elációnak hívjuk. Ellenkező esetben a centrális kollineációt homológiának nevezzük.*

7.10. Állítás. *Legyen adott egy projektív síkon három különböző kollineáris pont, C , A és A' ; illetve egy t egyenes, amelyre egyik pont sem illeszkedik. Ekkor legfeljebb egy olyan centrális kollineáció létezik, amelynek centruma C , tengelye t , és amelynél az A pont kollineációs képe A' .*



Pont képének meghatározása centrális kollineációnál.

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszőleges P pontot, amely sem az $\overleftrightarrow{AA'}$, sem a t egyenesre nem illeszkedik. Jelölje az $\overleftrightarrow{AP}$ egyenes t -vel való metszéspontját T . Ekkor a P pont kollineációs képe illeszkedik a $\overleftrightarrow{TA'}$ és $\overleftrightarrow{CP}$ egyenesekre is, így csak azok metszéspontja lehet. Ha valamely Q pont az $\overleftrightarrow{AA'}$ egyenesre illeszkedik, akkor kollineációs képe egyértelműen meghatározható egy tetszőlegesen felvett, $\overleftrightarrow{AA'}$ -re és t -re nem illeszkedő P pont, és annak az előzők szerint egyértelmű P' kollineációs képének felhasználásával az előző eljárás alapján. t minden pontja a tengely definíciója miatt fixpont. ■

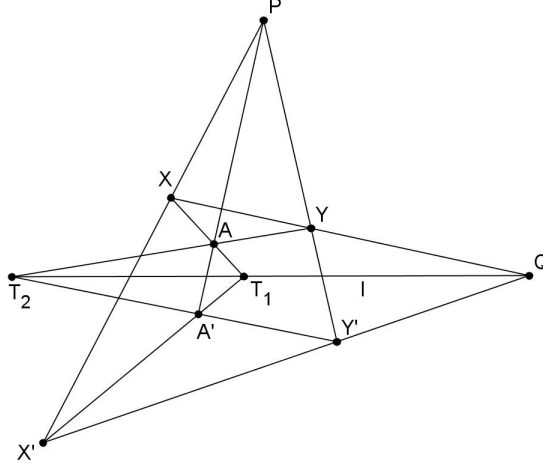
7.11. Definíció. Legyen P egy projektív sík egy pontja és l a sík egy egyenese. Azt mondjuk, hogy a sík (P, l) -tranzitív, ha tetszőleges P -től különböző és nem az l egyenesre illeszkedő Q pont, valamint a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesre illeszkedő Q' pont esetén van olyan P centrumú, l tengelyű kollineáció, amelynél a Q pont képe Q' .

7.12. Definíció. Legyen P egy projektív sík egy pontja és l a sík egy egyenese. Azt mondjuk, hogy a sík (P, l) -desarguesi, ha bármely két, P -re nézve perspektív háromszög, amelynek két megfelelő oldalpárja l -en metszi egymást, az l egyenesre nézve perspektív.

7.13. Tétel. (Baer) Egy projektív sík pontosan akkor (P, l) -tranzitív, ha (P, l) -desarguesi.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy ha a tekintett projektív sík (P, l) -desarguesi, akkor (P, l) -tranzitív. Legyenek A és A' tetszőleges olyan pontok, hogy P illeszkedjen $\overleftrightarrow{AA'}$ -re. Az előző bizonyítás mintájára megadunk egy, a projektív sík pontjai közötti leképezést, amelyről megmutatjuk, hogy P centrumú, l tengelyű kollineáció. Tekintsünk egy tetszőleges B pontot, amely sem az $\overleftrightarrow{AA'}$, sem az l egyenesre nem illeszkedik. Jelölje az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes l -lel való

metszéspontját T . Ekkor a B pont képe legyen a $\overleftrightarrow{TA'}$ és $\overleftrightarrow{PB}$ egyenesek közös pontja. Ha valamely Q pont az $\overleftrightarrow{AA'}$ egyenesre illeszkedik, akkor a képét definiáljuk egy tetszőlegesen felvett, $\overleftrightarrow{AA'}$ -re és l -re nem illeszkedő B pont, és annak az előzők szerint értelmezett B' képének felhasználásával az előző eljárás alapján. Legyen l minden pontja fixpont.



A Baer-tétel.

Meg kell mutatnunk, hogy ha a sík (P, l) -desarguesi, akkor az előzőekben leírt leképezés valóban kollineáció. Elsőként a bijektivitást igazoljuk.

Az injektivitás igazolásához tekintsünk két tetszőleges, X_1 és X_2 pontot. Belátjuk, hogy a leképezés különböző pontokat rendel hozzájuk. Ha X_1, X_2 és P kollineáris, akkor az $\overleftrightarrow{X_1A} \cap l$ és $\overleftrightarrow{X_2A} \cap l$ különböző pontok, így az $\overleftrightarrow{X_1X_2}$ egyenes két különböző pontja az X_1 illetve az X_2 pont képe. Ha X_1, X_2 és P nem kollineáris, akkor X_1 és X_2 képe különböző P -re illeszkedő egyenesekre illeszkedik, így nem eshet egybe.

A leképezés szürjektív, ugyanis tetszőleges B' ponthoz találunk B ősképet, mégpedig a $\overleftrightarrow{TA}$ és $\overleftrightarrow{PB'}$ egyenesek metszéspontját, ahol T a $\overleftrightarrow{B'A'}$ egyenes l -el való metszéspontját jelöli.

Meg kell még mutatnunk, hogy a leképezés tetszőleges kollineáris ponthármashoz kollineáris ponthármaszt rendel. Először is igazoljuk, hogy tetszőleges X és Y esetén $\overleftrightarrow{XY}$ és $\overleftrightarrow{X'Y'}$ l -en metszi egymást, ahol X' és Y' rendre az X és az Y pont megadott leképezés általi képe.

Amennyiben X vagy Y illeszkedik a l -re, az állítás nyilvánvaló, így feltehetjük, hogy nem ez a helyzet. Ha A, X és Y kollineáris, akkor az ezen pontok közös egyenesének l -el való T metszéspontjára és A' -re illeszkedő egyenesen lesz mind X' , mind Y' , így $\overleftrightarrow{XY}$ és $\overleftrightarrow{X'Y'}$ metszéspontja T , ami valóban illeszkedik l -re. Ha X, Y és A nem kollineáris, az $\overleftrightarrow{AX} \cap l =: \{T_1\}$ és $\overleftrightarrow{AY} \cap l =: \{T_2\}$ pontok

különbözőek, így a $\overleftrightarrow{T_1A'}$ és $\overleftrightarrow{T_2A'}$ egyenesek is különbözőek. Így X' , Y' és A' nem kollineáris. Ekkor az XYA és $X'Y'A'$ háromszögek a P pontra nézve perspektívek, így a (P, l) -Desargues-tulajdonság miatt az l egyenesre, mint tengelyre nézve is perspektívek. Így valóban, $\overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X'Y'}$ illeszkedik l -re.

Végül tekintsük egy g egyenes X , Y és Z pontjait, jelölje ezen pontok képét X' , Y' illetve Z' . Az előzőek miatt $\overleftrightarrow{X'Y'} \cap g =: \{Q\}$ illeszkedik l -re. Továbbá Y' illeszkedik a $g' := \overleftrightarrow{QX'}$ egyenesre is. $\overleftrightarrow{XZ} \cap \overleftrightarrow{X'Z'}$ szintén illeszkedik l -re, így ez a pont éppen a Q pont. Így Z' szintén illeszkedik a g' egyenesre, azaz beláttuk, hogy X' , Y' és Z' kollineáris pontok.

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha a sík (P, l) -tranzitív, akkor (P, l) -desarguesi. Tekintsük a sík $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögeit, amelyek a P pontra nézve perspektívek, valamint l az $\overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_2B_2}$ és $\overleftrightarrow{A_1C_1} \cap \overleftrightarrow{A_2C_2}$ pontok egyenese. Ekkor a feltétel szerint létezik olyan centrális kollineáció, melynek centruma P , tengelye l és az A_1 pont képe A_2 . Ezen centrális kollineációnál a $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ egyenes képe $\overleftrightarrow{B_2C_2}$. Legyen $\overleftrightarrow{B_1C_1} \cap l =: \{T\}$. A T pont képe illeszkedik a $\overleftrightarrow{B_2C_2}$ egyenesre, és fixpont, mivel illeszkedik l -re. Így $T \in \overleftrightarrow{B_2C_2}$ -re is illeszkedik, ami azt jelenti, hogy a $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek perspektívek a t egyenesre nézve. ■

Az 1.10. állítás alapján egy projektív sík tetszőlegesen választott egyenesét „elhagyva” a síkból, affin síkot kapunk. Így a projektív síkot tekinthetjük ezen affin sík projektív lezártjának. Ilyen esetekben a síkot *kibővített affin síkként* fogjuk említeni. A kibővített affin sík végtelen távoli egyenesét a projektív síkból tetszőlegesen elhagyott egyenessel azonosítjuk, párhuzamosság alatt pedig az affin síkban érvényes párhuzamosságot értjük.

7.14. Definíció. *Kibővített affin sík egy kollineációjának ellentengelyein a végtelen távoli egyenes képét illetve ősképet értjük. A végtelen távoli egyenes ősképet q -val, a végtelen távoli egyenes képét r' -vel fogjuk jelölni.*

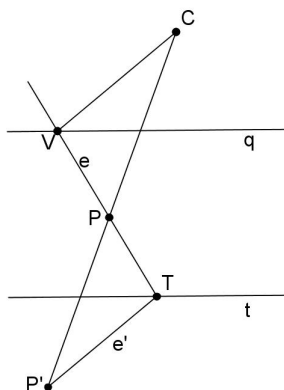
7.15. Lemma. *Kibővített affin sík centrális kollineációjának ellentengelyei párhuzamosak a kollineáció tengelyével.*

Bizonyítás: Legyen I a kollineáció tengelyének végtelen távoli pontja. Mivel I illeszkedik a tengelyre, fixpont, és illeszkedik a végtelen távoli egyenes képére és ősképre is. Tehát a tengely és az ellentengelyek végtelen távoli pontja megegyezik. ■

A kibővített affin síkok centrális kollineációira vonatkozó következő eredmények az eddigiekből speciális esetként adódnak. Fontosságuk miatt a legfontosabb konstrukciókat összefoglaljuk.

7.16. Következmény. *Megadva a kibővített affin sík két párhuzamos egyenesét (t és q) és egy C pontját, legfeljebb egy olyan centrális kollineáció létezik, melynek centruma C , tengelye t és a végtelen távoli egyenes ősképe q . Amennyiben a sík Desargues-féle, ilyen kollineáció biztosan létezik.*

Bizonyítás: Megadva a t és q egyeneseket, és a C pontot, tetszőleges P pont



Pont képezés meghatározása a centrum, a tengely és q ismeretében.

képe az alábbi módon kapható. Legyen e tetszőleges, P -re illeszkedő egyenes. Ekkor az e egyenes kollineációs képe illeszkedik az $e \cap t =: \{T\}$ pontra, illetve az $e \cap q =: \{V\}$ pont kollineációs képére. A V kollineációs képe végtelen távoli pont, és illeszkedik a $\overleftrightarrow{CV}$ egyenesre. Így e kollineációs képe a T ponton át $\overleftrightarrow{CV}$ -vel húzott párhuzamos, a P pont kollineációs képe ezen egyenes és $\overleftrightarrow{CP}$ metszéspontja. ■

7.17. Következmény. *Megadva egy kibővített affin sík két párhuzamos egyenesét (t és r') és egy C pontját, legfeljebb egy olyan centrális kollineáció létezik, melynek centruma C , tengelye t és a végtelen távoli egyenes képe r' . Amennyiben a sík Desargues-féle, ilyen kollineáció biztosan létezik.*

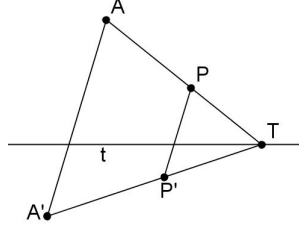
7.18. Definíció. *Kibővített affin sík egy kollineációját affinitásnak nevezzük, amennyiben a végtelen távoli egyenes a kollineáció invariáns egyenese. Egy affinitást tengelyes affinitásnak mondunk, ha létezik tengelye.*

A kibővített affin sík affinitásai éppen az affin síkot önmagára képező izomorfizmusok.

7.19. Következmény. *Kibővített affin sík tengelyes affinitásai pontosan azok a centrális kollineációk, melyek centruma végtelen távoli pont.*

Ezt másként úgy fejezhetjük ki, hogy a tengelyes affinitások egymásnak megfelelő pontpárjait összekötő egyenesek az affin síkon egymással párhuzamosak. Ezen párhuzamossági osztályt az *affinitás irányának* szokás nevezni.

7.20. Következmény. *Megadva egy kibővített affin sík egy t egyenesét, és két, rá nem illeszkedő pontját (A és A'), legfeljebb egy olyan tengelyes affinitás létezik, amelynek t a tengelye, és az A pont képe az affinitásnál az A' pont.*



Pont képének meghatározása tengelyes affinitásnál.

Bizonyítás: Legyen P tetszőleges t -re és $\overleftrightarrow{AA'}$ -re nem illeszkedő pont. Jelölje T a $\overleftrightarrow{PA}$ egyenes tengelypontját. Ekkor P' illeszkedik a $\overleftrightarrow{TA'}$ egyenesre, illetve az előző következmény alapján a P -re illeszkedő egyetlen $\overleftrightarrow{AA'}$ -vel párhuzamos egyenesre. Így ezen két egyenes metszéspontja P' . Amennyiben P illeszkedik $\overleftrightarrow{AA'}$ -re, **7.10.** bizonyításában látott módon vezethetjük vissza a konstrukciót az előző esetre. ■

A definíció alapján könnyen látható az alábbi következmény.

7.21. Következmény. *Kibővített affin sík egy tengelyes affinitása pontosan akkor eláció, ha tengelye és iránya párhuzamos.*

7.22. Definíció. *Kibővített affin sík egy centrális kollineációját középpontos hasonlóságnak mondjuk, ha tengelye a végtelen távoli egyenes.*

7.23. Következmény. *Megadva egy kibővített affin sík három különböző, kollineáris pontját (C, A, A') , egyértelműen létezik olyan C centrumú középpontos hasonlóság, amelynél az A pont képe A' .*

7.24. Következmény. *Legyen a valós projektív sík egy centrális kollineációjának centruma C , tengelye t , ellentengelyei q és r' , és tegyük fel, hogy ezek egyike sem ideális pont illetve egyenes. Ekkor a C pont és a q egyenes távolsága megegyezik a t és r' egyenesek távolságával.*

Bizonyítás: A fentiek alapján egyértelműen meghatározza a centrális kollineációt centruma C , tengelye t , és a tetszőlegesen választott A ponthoz rendelt A' . Legyen e egy tetszőleges, A -ra illeszkedő illeszkedő egyenes. Ha $e \cap t =: \{T\}$, az e egyenes kollineációs képe az $e' := \overleftrightarrow{A'T}$ egyenes. A q ellentengely egy pontját megkapjuk a C -re illeszkedő e -vel párhuzamos egyenes (x) és e' metszéspontjaként (Q_1) , az r' ellentengely egy pontja pedig a C -re illeszkedő, e' -vel párhuzamos egyenes (y) és e metszéspontja (R'_1) . Ezeken a pontokon keresztül t -vel húzott párhuzamos egyenesek az ellentengelyek. Jelölje az $r' \cap e$ pontot X , és a $q \cap y$ pontot Y . Ekkor a $CQ_1TR'_1$ négyszög paralelogramma, így a CQ_1 és TR'_1 távolság megegyezik. Ebből következően a hasonló CQ_1Y és TR'_1X háromszögek egybevágóak, így magasságuk egyenlő hosszú. Ez pedig éppen a bizonyítandó állítást jelenti. ■



43

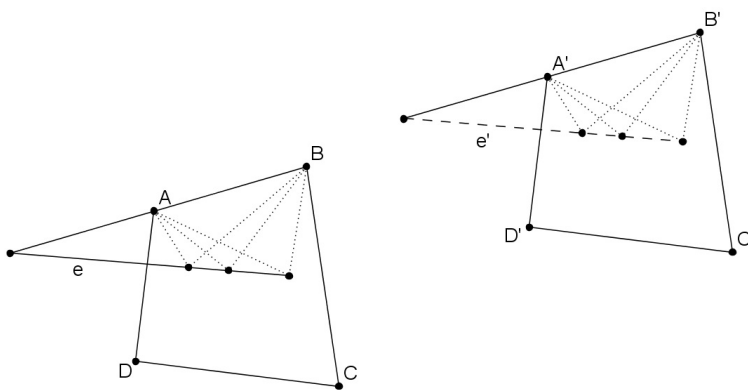
Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az $ABCD$ teljes négyszög csúcsai fixpontok. Ekkor ezen teljes négyszög oldalegyenesei invariáns egyenesek. Mivel így minden csúcson át halad három invariáns egyenes, a Staudt-tulajdonság duálisa alapján minden csúcson áthaladó összes egyenes invariáns. Tekintsünk egy tetszőleges további X pontot. Mivel az X pontra és a négyszög csúcsaira illeszkedő egyenesek invariánsak, az X pont a kollineáció fixpontja, így a kollineáció az identitás.

■

8.5. Tétel. *(A projektív kollineációk alaptétele.) Ha $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egy Pappos-féle projektív sík két (nem feltétlenül különböző) teljes négyszöge, pontosan egy olyan projektív kollineáció létezik, amelynél az A pont képe A' , a B pont képe B' , a C pont képe C' és a D pont képe D' .*

Bizonyítás: Elsőként konstruálunk egy, a feltételeknek megfelelő φ kollineációt. Ha egy X pont az $ABCD$ teljes négyszög valamely oldalegyenesére illeszkedik, akkor az adott oldalegyenes és képe által meghatározott pontsorok közötti projektivitást két-két csúcspont, és az egyes négyszögek adott egyenesekre illeszkedő átlópontjai egyértelműen meghatározzák; így X φ általi képe legyen az így meghatározott projektivitás által X -hez rendelt pont.

Tegyük fel, hogy az X pont nem illeszkedik egyetlen oldalegyenesre sem. Legyen az X és A pont által meghatározott egyenes x_1 , az X és B pont által meghatározott egyenes x_2 . Legyen az x_1 egyenes képe az az egyenes, amelyet az A tartópontú és az A' tartópontú sugársorok közötti azon projektivitás rendel hozzá, amelynél az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ egyenesek képei rendre $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ és $\overrightarrow{A'D'}$. Hasonlóan, az x_2 egyenes képe legyen az az egyenes, amelyet a B tartópontú és a B' tartópontú sugársorok közötti azon projektivitás rendel hozzá, amelynél a $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ egyenesek képei rendre $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ és $\overrightarrow{B'D'}$. Legyen az X pont φ általi képe az x_1 és x_2 egyenesek képeinek X' metszéspontja.



A projektív kollinációk alaptétele.

Megmutatjuk, hogy az így meghatározott leképezés valóban kollineáció. Le-

gyen valamely e egyenes képpontjainak halmaza e' . Tekintsük az A tartópontú sugársor és az A' tartópontú sugársor között az előző pontban meghatározott projektivitás inverzét, ez a projektivitás az A' -re illeszkedő egyenesekhez A -ra illeszkedő egyenest rendel. Az A tartópontú sugársor minden elemének feleltessük meg a B pontra illeszkedő azon egyenest, amellyel közös pontja e -re illeszkedik. Ez a leképezés perspektivitás az A és B tartópontú sugársorok között. Végül a B tartópontú sugársor és a B' tartópontú sugársor között tekintsük az előző pontban leírt projektivitást. Ezen három projektivitás kompozíciója az A' és B' tartópontú sugársorok közötti projektivitás. Ennél a projektivitásnál minden egyenes e' valamely pontjában metszi a képét. Azonban ezen projektivitásnál $A'B'$ fixegyenes, így a fundamentális tulajdonság duálisa miatt perspektivitás. Tehát az egymáshoz rendelt egyenesek metszéspontjai kollineárisak, azaz e' valóban egyenes.

φ tehát projektív kollineáció, ugyanis tetszőleges egyenes és képe által meghatározott pontsorok közötti leképezés felírható projektivitások kompozíciójaként. Az is világos, hogy e kollineációnál az $ABCD$ négyszög csúcsainak éppen az $A'B'C'D'$ négyszög megfelelő csúcsai felelnek meg.

Más ilyen tulajdonságú kollineáció nincs, ugyanis ha volna, akkor annak inverzét a φ -vel komponálva olyan kollineációt kapunk, amelynél az $ABCD$ teljes négyszög négy csúcsa invariáns, ami az előző lemma alapján az identikus leképezés. ■

Megjegyezzük, hogy Desargues-féle projektív síkok esetén a tétel az alábbi, gyengébb formában teljesül.

8.6. Tétel. *Ha $ABCD$ és $A'B'C'D'$ egy Desargues-féle projektív sík két (nem feltétlenül különböző) teljes négyszöge, akkor van olyan projektív kollineáció, amelynél az A pont képe A' , a B pont képe B' , a C pont képe C' és a D pont képe D' .*

Bizonyítás: A bizonyítás során felhasználjuk, hogy Baer tétele alapján a tekintett projektív sík bármely (P, l) pont-egyenes pár esetén (P, l) -tranzitív. Legyen P, Q, R, S és P', Q', R', S' két általános helyzetű pontnégyes. Legyen l olyan egyenes, amelyre sem P , sem P' nem illeszkedik. Legyen f olyan l tengelyű eláció, amely a P ponthoz P' -t rendeli. Legyen m olyan egyenes, amelyre illeszkedik P' , de nem illeszkedik $f(Q)$ és Q' . Legyen g olyan m tengelyű eláció, amely $f(Q)$ -hoz Q' -t rendeli. Legyen $n := \overleftrightarrow{P'Q'}$. Mivel $(g \circ f)(R)$ és R' nem illeszkedik n -re, van olyan h n -tengelyű eláció, amely $(g \circ f)(R)$ -hez R' -t rendeli. Így $h \circ g \circ f$ a P, Q, R pontokhoz rendre a P', Q', R' pontokat rendeli. Legyen $S'' := (h \circ g \circ f)(S)$. Ekkor sem S' , sem S'' nem illeszkedik a $P'Q'R'$ háromszög egyik oldalegyenesére sem. Legyen $T := \overleftrightarrow{P'S'} \cap \overleftrightarrow{Q'S''}$. Van olyan j P' -centrumú, $\overleftrightarrow{Q'R'}$ -tengelyű kollineáció, amely S'' -hez T -t rendeli, és van olyan Q' -centrumú, $\overleftrightarrow{P'R'}$ -tengelyű k kollineáció, amely T -hez S' -t rendeli. Ekkor $k \circ j \circ h \circ g \circ f$ a keresett tulajdonságú kollineáció, ugyanis centrális kollineációk kompozíciója, így tetszőleges pontsorra való leszűkítettje projektivitás. ■

A projektív kollineációk alaptételének alkalmazásaként megmutatjuk, hogy *a valós projektív síkon teljesül a Fano-tulajdonság*. Tekintsünk a valós projektív síkon egy $ABCD$ teljes négyszöget és egy olyan kollineációt, amelynél e négyszög $A'B'C'D'$ képe négyzet. Ekkor $A'B'C'D'$ átlópontjai közül kettő végtelen távoli pont, a harmadik pedig a négyzet átlóinak metszéspontja. Mivel tetszőleges négyzet átlói metszőek, ez a három pont nem lehet kollineáris. Így $A'B'C'D'$ átlópontjai nem kollineárisak, ezért a kollineációs ősképek, azaz $ABCD$ átlópontjai sem kollineárisak.

8.7. Következmény. *(Az affinitások alaptétele.) Tegyük fel, hogy egy affin sík projektív lezártja Pappos-féle projektív sík. Ezen kibővített affin síkon tekintsünk egy ABC és egy (tőle nem feltétlenül különböző) $A'B'C'$ háromszöget. Ekkor pontosan egy olyan affinitás létezik, amelynél az A pont képe A' , a B pont képe B' , és a C pont képe C' .*

Bizonyítás: Legyenek az ABC háromszög oldalegyenesei a , b és c ; illetve az $A'B'C'$ háromszög oldalegyenesei a' , b' és c' . Tekintsük az abc és az $a'b'c'$ teljes négyoldalt, ahol i az ideális egyenes. Ezen két teljes négyoldalra alkalmazva a projektív kollineációk alaptételének duálisát, pontosan egy olyan projektív kollineáció létezik, amely az abc teljes négyoldal egyeneseit rendre az $a'b'c'$ teljes négyoldal megfelelő egyeneseibe transzformálja. Ezen projektív kollineációnál i invariáns egyenes, tehát affinitás. ■

8.8. Definíció. *A Fano-axiómának eleget tevő tetszőleges projektív sík egy C centrumú, t tengelyű centrális kollineációját harmonikus homológiának hívjuk, ha a centrum egy tetszőleges pontra és annak képére vonatkozó harmonikus konjugáltja a t egyenesre illeszkedik.*

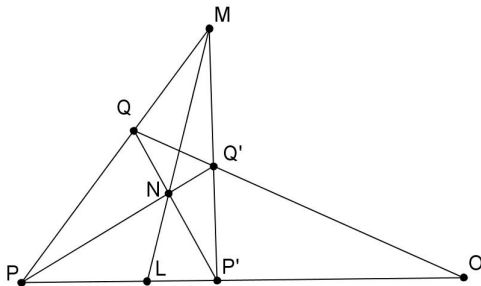
8.9. Állítás. *Ha egy Desargues- és Fano-tulajdonságoknak eleget tevő projektív síkon egy centrális kollineáció centruma C , tengelye t és valamely P pontot és annak P' képét tekintve $(CTPP')$ harmonikus pontnégyes, ahol $T := t \cap \overleftrightarrow{PP'}$, akkor a kollineáció harmonikus homológia.*

Bizonyítás: Azt kell megmutatnunk, hogy ha egy tetszőleges további A pont képe A' , akkor (CT_1AA') harmonikus pontnégyes, ahol $T_1 := t \cap \overleftrightarrow{AA'}$. Legyen $T_0 := \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{A'P'}$. Ekkor T_0 illeszkedik t -re a centrális kollineációk tulajdonságai miatt. Az $AA'PP'$ teljes négyszögnek C és T átlópontjai. Mivel $(CTPP')$ harmonikus, a C -vel szemköztes átló egyenes t . Ebből következik, hogy a tekintett teljes négyszögnek A és A' csúcsai, C átlópontja, T_1 pedig illeszkedik a szemköztes átló egyenesre, így valóban, (CT_1AA') harmonikus pontnégyes. ■

8.10. Állítás. *Ha egy Pappos-féle projektív síkon teljesül a Fano-tulajdonság, akkor a sík egy nem identikus projektív kollineációja pontosan akkor harmonikus homológia, ha négyzete az identitás.*

Bizonyítás: A harmonikus konjugáltság tulajdonságai alapján nyilvánvaló, hogy tetszőleges harmonikus homológia négyzete az identitás.

Megfordítva, tegyük fel, hogy egy nem identikus projektív kollineáció négyzete az identitás. Legyen a P pont kollineációs képe P' , és a velük nem kollineáris Q pont képe Q' . Ekkor a projektív kollineációk alaptétele alapján egyértelműen létezik olyan projektív kollineáció, amelynél a $PP'QQ'$ teljes négyszög csúcsainak rendre a $P'PQ'Q$ teljes négyszög csúcsai felelnek meg, ez éppen a szóban forgó kollineáció.



Ha egy projektív kollineáció négyzete az identitás, akkor harmonikus homológia.

PP' és QQ' invariáns egyenesek, így metszéspontjuk fixpont, jelölje ezt a pontot O . A kollineációnál a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes képe $\overleftrightarrow{P'Q'}$, így M metszéspontjuk fixpont. Hasonlóan a $\overleftrightarrow{PQ'}$ és $\overleftrightarrow{P'Q}$ egyenesek N metszéspontja is fixpont. Mivel $\overleftrightarrow{PP'}$ és $\overleftrightarrow{MN}$ invariáns egyenesek, metszéspontjuk, L is fix. Így az $\overleftrightarrow{MN}$ egyenesre három fixpont illeszkedik, tehát a Staudt tulajdonság miatt összes pontja fixpont. Így a kollineációnak van tengelye, tehát centrális kollineáció. Mivel O a Fano-axióma miatt a tengelyre nem illeszkedő fixpont, ezért O a kollineáció centruma. $OLPP'$ harmonikus pontnégyes, így a szóban forgó kollineáció éppen az O középpontú, t tengelyű harmonikus homológia - és ilyen a Baer-tétel értelmében pontosan egy létezik. ■

9. Kúpszeletek

Az euklideszi téргеometriában kúpszelet alatt egy körkúp egy, a kúp csúcsán át nem menő síkkal alkotott metszetét szokás érteni. A kúp e síkmetszet és az alapkör között egy centrális vetítést ad meg, ami a két sík között egy illeszkedéstartó bijekció, tehát a kúp alapköre és a kúpszelet kollineációs kapcsolatban van. Ezért természetes a kúpszeleteket, mint a körök kollineációs képeit értelmezni. A következőkben olyan definíció megfogalmazására fogunk törekedni, amely tetszőleges projektív síkon értelmes.

Az euklideszi sík tetszőleges körének pontjait a kör két pontjából vetítve a kerületi szögek tételének értelmében egybevágó sugársorokat kapunk. Kollineációt alkalmazva ezek képei projektív sugársorok. Így a kúpszelet projektív sugársorok megfelelő egyenesének metszési alakzata - ez a kúpszeletek *Steiner-féle definíciója*. Megjegyezzük, hogy amennyiben a sugársorok perspektívek, ún. elfajult kúpszelethez jutunk. A téргеometriai értelmezésnél az elfajult kúpszeleteket a kúp csúcsára illeszkedő síkokkal alkotott metszetekként kaphatjuk meg.

A hátralévő fejezetekben feltételezzük a fundamentális tulajdonság és a Fano-axióma teljesülését.

9.1. Definíció. Tekintsünk egy olyan π projektivitást egy projektív sík A és B tartópontú sugársorai között, amely nem perspektivitás. Az egymásnak megfelelő egyenesek metszéspontjainak halmazát a π projektivitás által meghatározott kúpszeletnek vagy másodrendű görbének nevezzük.

9.2. Állítás. Egy kúpszeletet egy egyenes legfeljebb két pontban metsz.

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszőleges e egyenest. A kúpszelet definíciójában szereplő π projektivitás az e tartóegyenestű pontsor egy projektivitását származtatja. Ha ugyanis $E \in e$, akkor az E -nek $\pi(\overrightarrow{PE}) \cap e$ -t megfelelő leképezés projektivitás. Ez a projektivitás nem identitás, mivel π nem perspektivitás. Így a Staudt-tulajdonság miatt legfeljebb két fixpontja lehet. Az egyenes kúpszeletre eső pontjai pedig pontosan ennek a projektivitásnak a fixpontjai. ■

9.3. Definíció. Egy egyenes egy kúpszelet érintője, ha pontosan egy közös pontja van a kúpszelettel. Azokat az egyeneseket, amelyeknek két közös pontja van a kúpszeletnek, szelőknak mondjuk.

Tekintsük az A és B tartópontú sugársorok közötti π projektivitás által meghatározott kúpszeletet. Ekkor $\pi(\overrightarrow{AB})$ egy B -re illeszkedő egyenes, tehát az A tartóponttal rendelkező sugársor $\overrightarrow{AB}$ eleme a képét B -ben metszi. Így B rajta van a kúpszeleten. Hasonlóan, $\pi^{-1}(\overrightarrow{AB})$ egy A -ra illeszkedő egyenes, tehát A is rajta van a kúpszeleten.

$\pi(\overrightarrow{AB})$ egyetlen, a kúpszeletre illeszkedő pontja B . Ha ugyanis lenne további közös X pontja a kúpszelettel, akkor annak a kúpszelet definíciója miatt az

$\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre is illeszkednie kellene, ez viszont ellentmond annak, hogy az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes közös pontjai a kúpszelettel A és B és $\overleftrightarrow{AB} \neq \pi(\overleftrightarrow{AB})$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\pi^{-1}(\overleftrightarrow{AB})$ egyetlen közös pontja a kúpszelettel A .

Tehát a kúpszelet A illetve B pontokra illeszkedő érintői $\pi^{-1}(\overleftrightarrow{AB})$ illetve $\pi(\overleftrightarrow{AB})$, a két pontra illeszkedő összes többi egyenes egy további pontban is metszi a kúpszeletet.

Megfogalmazzuk a kúpszelet fogalmának és a fentebb igazolt tulajdonságainak duálisát.

9.4. Definíció. Tekintsünk egy olyan π projektivitást egy projektív sík e és f tartóegyenesű pontsorai között, amely nem perspektivitás. Az egymásnak megfelelő pontok összekötő egyeneseinek halmazát a π projektivitás által meghatározott vonalkúpszeletnek vagy másodosztályú görbének nevezzük.

9.5. Következmény. A sík tetszőleges pontjára egy vonalkúpszeletnek legfeljebb két egyenese illeszkedik.

9.6. Definíció. Egy pont egy vonalkúpszelet érintési pontja, ha a vonalkúpszelet pontosan egy egyenese illeszkedik rá. Egy pontot külső pontnak mondunk, ha a vonalkúpszelet két egyenesét tartalmazza és belső pontnak nevezzük, ha nem tartalmazza a vonalkúpszelet egyetlen egyenesét sem.

9.7. Következmény. Tekintsük az e és f tartóegyenesű pontsorok közötti π projektivitás által meghatározott vonalkúpszeletet. Ez a vonalkúpszelet tartalmazza az e és f egyeneseket, és ezekre illeszkedő érintési pontjai rendre $\pi^{-1}(e \cap f)$ illetve $\pi(e \cap f)$. A tekintett két egyenes összes többi pontja a vonalkúpszelet pontosan két egyenesét tartalmazza.

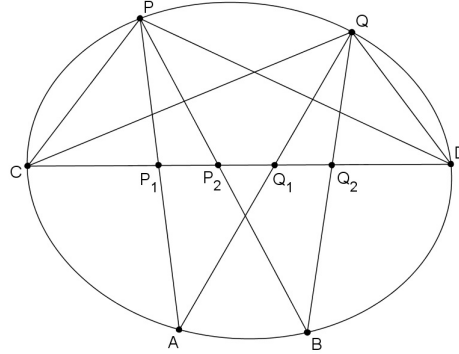
A következő állítás értelmében a kúpszelet definíciójában szereplő sugársorok tartópontjai nincsenek kitüntetett helyzetben.

9.8. Állítás. Tekintve egy kúpszelet tetszőleges két pontját, azokból a kúpszelet további pontjait vetítve projektív sugársorokat kapunk.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a P és Q tartópontú sugársorok közötti π projektivitás által meghatározott kúpszeletre illeszkednek az A, B, C, D pontok: $\pi(\overleftrightarrow{PA}) = \overleftrightarrow{QA}$, $\pi(\overleftrightarrow{PB}) = \overleftrightarrow{QB}$, $\pi(\overleftrightarrow{PC}) = \overleftrightarrow{QC}$, $\pi(\overleftrightarrow{PD}) = \overleftrightarrow{QD}$. Megmutatjuk, hogy az A és B pontokból vetítve a $(PQCD)$ pontnégyest szintén projektív sugársorokhoz jutunk. Jelölje a $\overleftrightarrow{CD}$ egyenes metszéspontját $\overleftrightarrow{PA}$ -val P_1 , $\overleftrightarrow{QA}$ -val Q_1 , $\overleftrightarrow{PB}$ -vel P_2 , $\overleftrightarrow{QB}$ -vel Q_2 .

A kúpszelet definíciója alapján $P(ABCD) \bar{\wedge} Q(ABCD)$, ezért

$$(CDP_1P_2) \bar{\wedge} (CDQ_1Q_2) \bar{\wedge} (DCQ_2Q_1)$$



Egy kúpszelet pontjait bármely két kúpszeletpontból vetítve projektív sugársorokat kapunk.

teljesül. Mivel a $(CDP_1P_2) \bar{\wedge} (DCQ_2Q_1)$ projektivitás a C és D pontokat felcserélni, involúció. Ebben az involúcióban (P_1Q_2) és (P_2Q_1) megfelelő pontpárok. Ezért

$$A(PQCD) \bar{\wedge} (P_1Q_1CD) \bar{\wedge} (Q_2P_2DC) \bar{\wedge} (P_2Q_2CD) \bar{\wedge} B(PQCD),$$

és ezt kellett belátnunk. ■

Megfogalmazzuk az előző állítás duálisát is.

9.9. Következmény. Tekintve egy vonalkúpszelet tetszőleges e_1 és e_2 egyenesét, azokat a vonalkúpszelet további egyeneseivel elmetszve rendeljük hozzá az e_1 -el keletkező metszésponthoz az e_2 -vel keletkező metszéspontot. Az így kapott leképezés az e_1 és e_2 tartóegyenesű pontsorok között projektivitás.

9.10. Tétel. Megadva

- öt pontot (amelyek között nincsen három kollineáris);
- négy pontot (amelyek között nincsen három kollineáris) és egy, az egyik adott pontra illeszkedő egyenest;
- három nem kollineáris pontot és két adott pontra illeszkedő egy-egy egyenest

egy és csak egy olyan kúpszelet létezik, amelyre az adott pontok illeszkednek és amelyet az adott egyenesek érintenek.

Bizonyítás:

- Legyenek az adott pontok A, B, C, D, E . Az a kúpszelet, amelyet az $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AE}$ egyenesekhez rendre az $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}$ egyeneseket rendelő projektivitás határoz meg, illeszkedik az öt adott pontra.

Ha egy kúpszelet illeszkedik az adott pontokra, akkor **9.8.** miatt a kúpszelet pontjait A -ból és B -ből vetítve projektív sugársorokat kapunk. Így a kúpszelet megegyezik a fent megadott projektivitás által meghatározott kúpszelettel.

- b. Ha az adott pontok A, B, C, D és az adott egyenes az A -ra illeszkedő a , akkor a kúpszeletet az $a, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}$ egyenesekhez rendre a $\overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ egyeneseket rendelő projektivitás határozza meg egyértelműen.
- c. Ha adottak az A, B, C pontok és az első két ponton rendre áthaladó a és b egyenesek, akkor a kúpszeletet az $a, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ egyenesekhez rendre a $\overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{BC}$ egyeneseket rendelő projektivitás határozza meg egyértelműen.

■

9.11. Következmény. Megadva

- a. öt egyenest (amelyek között nincsen három konkurrens);
- b. négy egyenest (amelyek között nincsen három konkurrens) és egy, az egyik adott egyenesre illeszkedő pontot;
- c. három nem konkurrens egyenest és két adott egyenesre illeszkedő egy-egy pontot

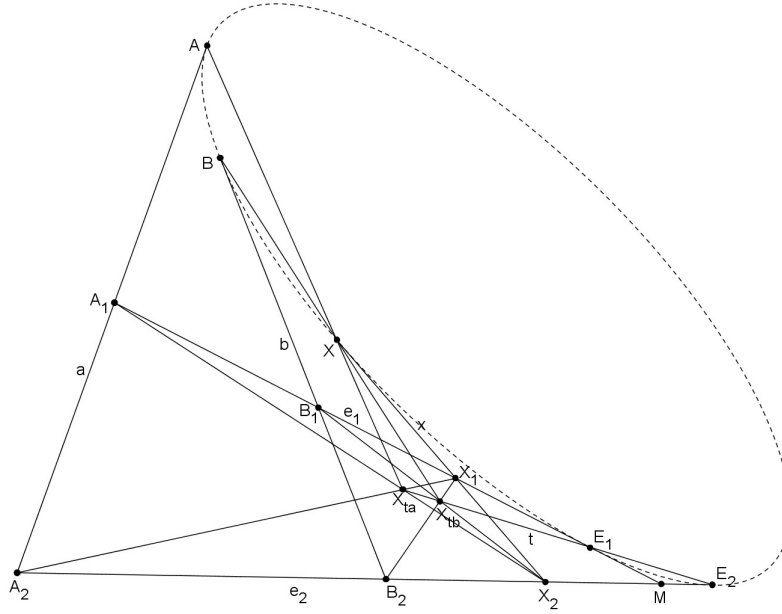
egy és csak egy olyan vonalkúpszelet létezik, amelynek az adott egyenesek érintői és az adott pontok érintési pontjai.

9.12. Tétel. Egy kúpszelet érintőinek halmaza vonalkúpszelet. Egy vonalkúpszelet érintési pontjainak halmaza kúpszelet.

Bizonyítás: A két állítás egymás duálisa, így elegendő a második állítást igazolnunk.

Tekintsük az e_1 és e_2 tartóegyenesei pontsorok közötti π projektivitás által meghatározott vonalkúpszeletet. Jelölje a π projektivitás **4.12.** értelmében vett tengelyét t .

Rögzítsük a vonalkúpszelet a és b egyeneseit, az ezekre illeszkedő érintési pontok legyenek rendre A és B . Ezeket az egyeneseket az e_1 -re illeszkedő A_1 pont és annak $A_2 := \pi(A_1)$ képe, valamint az e_1 -re illeszkedő B_1 és annak $B_2 := \pi(B_1)$ képének rögzítésével adjuk meg. Legyen továbbá x a vonalkúpszelet egy további egyenese: X_1 legyen az e_1 -re illeszkedő (változó) pont, $X_2 := \pi(X_1)$ annak képe, ekkor $x = \overleftrightarrow{X_1 X_2}$. Azt fogjuk ellenőrizni, hogy ha tetszőleges így kapott x egyenesre illeszkedő X érintési pontot A -val összekötő egyenesnek megfeleltetjük az X -et B -vel összekötő egyenest, akkor az A és B tartóegyenesei sugársorok között projektivitást kapunk. Ez állításunk igazságát jelenti, ugyanis a tekintett vonalkúpszelet érintési pontjainak halmaza ekkor éppen az így kapott projektivitás által meghatározott kúpszelet.



Egy vonalkúpszelet érintési pontjainak halmaza kúpszelet.

9.9. miatt a vonalkúpszelet a illetve x egyeneseivel elmetszve a vonalkúpszelet többi egyenesét, a keletkező megfelelő metszéspontokat egymásnak megfelelően projektivitást kapunk. Ebben a projektivitásban A_1 képe X_1 , A_2 képe X_2 , A képe $X_a := a \cap x$ és X_a képe X . Ezen projektivitás tengelyére a **4.12.** bizonyításában látott módon illeszkedik X_a képe illetve ösképe, azaz az A és X pontok. Illeszkedik rá továbbá az $X_{ta} := \overleftrightarrow{A_1X_2} \cap \overleftrightarrow{A_2X_1}$ pont. Ez utóbbi pont illeszkedik a vonalkúpszeletet meghatározó eredeti π projektivitás tengelyére, hiszen π -nél A_1 illetve X_1 képe rendre A_2 illetve X_2 . Az $\overleftrightarrow{AX}$ egyenes tehát a projektivitás tengelyét X_{ta} -ban metszi. Így az X pontot A -ból a π projektivitás t tengelyére vetítve, majd a kapott X_{ta} pontot A_2 -ből e_1 -re vetítve az X_1 ponthoz jutunk.

Az előzővel teljesen megegyező gondolatmenettel kapjuk, hogy a $\overleftrightarrow{BX}$ egyenes a projektivitás tengelyét az $X_{tb} := \overleftrightarrow{B_1X_2} \cap \overleftrightarrow{B_2X_1}$ pontban metszi. Tehát az X pontot B -ből a π projektivitás t tengelyére vetítve, majd a kapott X_{tb} pontot B_2 -ből e_1 -re vetítve szintén az X_1 ponthoz jutunk.

Összefoglalva: az eredeti vonalkúpszelet érintési pontjai éppen az

$$(\overleftrightarrow{AX}) \bar{\wedge} (X_{ta}) \stackrel{A_2}{\bar{\wedge}} (X_1) \stackrel{B_2}{\bar{\wedge}} (X_{tb}) \bar{\wedge} (\overleftrightarrow{BX})$$

projektivitás által meghatározott kúpszelet pontjai.

■

A fenti tétel alapján tehát a kúpszelet duálisa egy kúpszelet érintőinek halmaza. Ennek figyelembevételével a vonalkúpszeletekre vonatkozó (a kúpszeletekre vonatkozó tételek duálisaként adódó) tételeket kúpszeletek érintőire fogjuk megfogalmazni. A vonalkúpszelet esetén bevezetett fogalmakat (külső pont, belső pont, érintési pont) kúpszeletek esetén is értelemszerűen fogjuk használni.

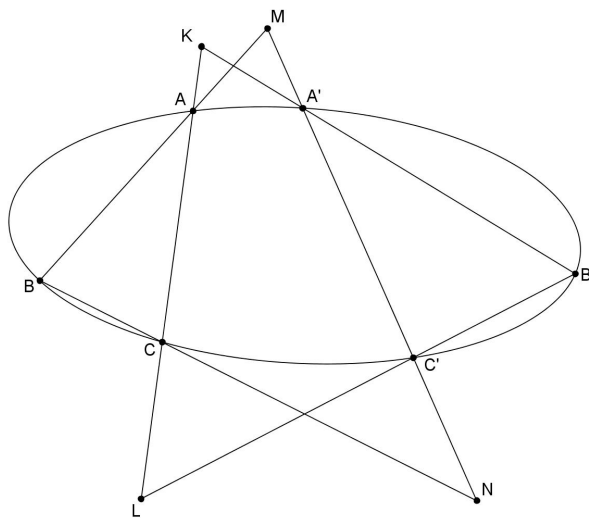
Így például **9.11.** az alábbi alakot ölti.

9.13. Következmény. *Megadva*

- öt egyenest (amelyek között nincsen három konkurrens);
- négy egyenest (amelyek között nincsen három konkurrens) és egy, az egyik adott egyenesre illeszkedő pontot;
- három nem konkurrens egyenest és két adott egyenesre illeszkedő egy-egy pontot

egy és csak egy olyan kúpszelet létezik, amelyre az adott pontok illeszkednek és amelyet az adott egyenesek érintenek.

9.14. Állítás. *Ha két háromszög hat csúcsa egy kúpszeletre illeszkedik, akkor van olyan kúpszelet, amelyet a két háromszög hat oldalegyenese érint.*

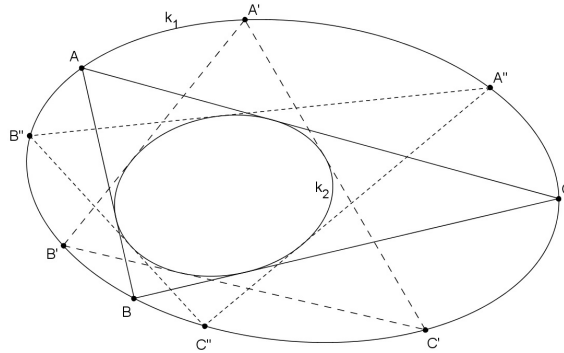


Ha két háromszög hat csúcsa egy kúpszeletre illeszkedik, akkor van olyan kúpszelet, amelyet a két háromszög hat oldalegyenese érint.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek csúcsai egy kúpszeletre illeszkednek! Legyen $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{B'A'} =: \{K\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} =: \{L\}$,

$\overleftrightarrow{A'C'} \cap \overleftrightarrow{BA} =: \{M\}$ és $\overleftrightarrow{A'C'} \cap \overleftrightarrow{BC} =: \{N\}$. Mivel a tekintett háromszögek csúcsai egy kúpszeleten vannak, a B illetve B' pontokból vetítve az $(ACA'C')$ pontnégyest, projektív sugársorokat kapunk. E projektív sugársorokat az $\overleftrightarrow{A'C'}$ illetve $\overleftrightarrow{AC}$ egyenesekkel metszve adódik, hogy $(MNA'C') \bar{\wedge} (ACKL)$. Megmutattuk, hogy két projektív pontsor megfelelő elemeit összekötő egyenesek és a tartóegyenesei - tehát egy vonalkúpszelet egyenesei - egy kúpszelet érintői, így valóban van olyan kúpszelet, amelyet az $\overleftrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{CN}, \overleftrightarrow{KA'}, \overleftrightarrow{LC'}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'C'}$ egyenesek érintenek. ■

Az előző állítást szokás az alábbi formában megfogalmazni.



Poncelet tétele $n = 3$ esetén.

9.15. Következmény. *Ha a valós projektív sík k_1 és k_2 kúpszeletei esetén van olyan háromszög, amelynek csúcsai k_1 -re illeszkednek és oldalegyenesei k_2 -t érintik, akkor végtelen sok ilyen háromszög van.*

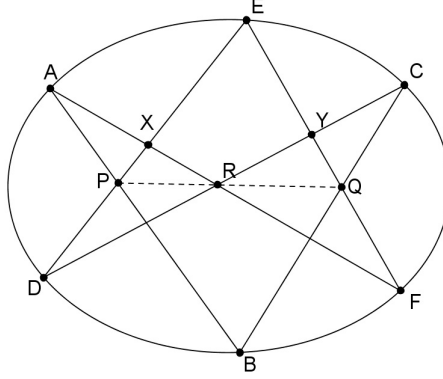
Bizonyítás: Legyen ABC a kívánt tulajdonságú háromszög, és A' a k_1 kúpszelet egy tetszőleges pontja. Legyenek B' és C' az A' -ből k_2 -höz húzott érintők k_1 -el alkotott további metszéspontjai. Ekkor az ABC és $A'B'C'$ háromszögek csúcsai k_1 -re illeszkednek, ezért van olyan kúpszelet, amelyet a háromszög hat oldalegyenesese érint. Mivel az ABC háromszög oldalegyenesesei, valamint $\overleftrightarrow{A'B'}$ és $\overleftrightarrow{A'C'}$ k_2 -t érintik, és egy kúpszeletet öt érintője egyértelműen meghatároz, ez a kúpszelet csak k_2 lehet. Így $\overleftrightarrow{B'C'}$ is érinti k_2 -t. Mivel A' a k_1 kúpszelet tetszőlegesen választott pontja, ilyen módon végtelen sok, kívánt tulajdonságú háromszög konstruálható. ■

Az előző állítás Poncelet tételének speciális esete ($n = 3$). A tételt általános formájában bizonyítás nélkül említjük meg.

9.16. Tétel. (Poncelet) *Ha a valós projektív sík k_1 és k_2 kúpszeletei esetén van olyan n -szög, amelynek csúcsai k_1 -re illeszkednek és oldalegyenesei k_2 -t érintik, akkor végtelen sok ilyen n -szög van.*

10. Pascal tétele

10.1. Tétel. (Pascal) Legyenek A, B, C, D, E, F egy kúpszelet pontjai. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA} =: \{R\}$ pontok kollineárisak.



A Pascal-tétel.

Bizonyítás: Vezessük be a $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{FA} =: \{X\}$ és $\overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{CD} =: \{Y\}$ jelöléseket. A kúpszelet definíciója alapján az A és C pontokból a $(DBFE)$ pontnégyest vetítő sugársorok projektív helyzetűek. Az első sugársort $\overleftrightarrow{DE}$ -vel, a másodikat $\overleftrightarrow{EF}$ -el metszve kapjuk, hogy $(DPXE) \bar{\wedge} (YQFE)$. Mivel a kapott projektivitásban az E pont invariáns, a leképezés a fundamentális tulajdonság miatt perspektivás. A perspektivitás középpontja $\overleftrightarrow{DY} \cap \overleftrightarrow{XF} = \{R\}$. A perspektivás R középpontjára illeszkedik a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes, azaz valóban, P, Q és R kollineáris. ■

Vegyük észre, hogy a Pascal-tétellel analóg, metsző egyenespárookra - mint elfajuló másodrendű görbékre - vonatkozó állítás éppen a Pappos-tulajdonság.

A Pascal-tétel az alábbi módon is megfogalmazható: *egy kúpszeletbe írt hatszög szemköztes oldalegyenespárjainak metszéspontjai kollineárisak.* Ekkor az $ABCDEF$ hatszög „szemköztes oldalpárjai” alatt éppen a tétel megfogalmazásában szereplő egyenespárokat értjük.

Indirekt meggondolással könnyen belátható a Pascal-tétel alábbi megfordítása.

10.2. Következmény. Ha az A, B, C, D, E, F pontok esetén teljesül, hogy a $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA} =: \{R\}$ kollineárisak, valamint a tekintett pontok között nincsen három kollineáris, akkor A, B, C, D, E és F egy kúpszeletre illeszkednek.

Bizonyítás: Tekintsük azt az egyértelmű kúpszeletet, amelyre az A, B, C, D, E pontok illeszkednek, és legyen F' az $\overleftrightarrow{AF}$ egyenes A -tól különböző metszéspontja a kúpszelettel. Ekkor a Pascal-tételt alkalmazva adódik, hogy $P, \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF'} =: \{Q'\}$ és R kollineárisak. Így Q és Q' egyaránt $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ közös pontja, ahonnan $Q = Q'$ és így $F = F'$ adódik, ami állításunk igazságát jelenti. ■

A Pascal-tételt a megfordításával együtt tehát az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

10.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy az A, B, C, D, E, F pontok között nincsen három kollineáris. Ekkor a tekintett pontok akkor és csak akkor egy kúpszelet pontjai, ha az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA} =: \{R\}$ pontok kollineárisak.*

Az alábbi tétel a Pascal-tétel duálisa.

10.4. Következmény. *(Brianchon) Legyenek a, b, c, d, e, f egy kúpszelet érintői. Jelölje az $a \cap b$ és $d \cap e$ pontok egyenesét x , az $a \cap c$ és $e \cap f$ pontok egyenesét y és az $c \cap d$ és $f \cap a$ pontok egyenesét z . Ekkor az x, y és z egyenesek konkurrenszek.*

Természetesen a dualitás elve alapján a Brianchon-tétel megfordítása is igaz.

Valamely A és B tartójú sugársorok közötti π projektivitás által meghatározott kúpszeletet tekintve korábban láttuk, hogy az A pontbeli érintő képe π -nél a $\overleftrightarrow{BA}$ egyenes. Ezért egy kúpszeletet rögzítve a kúpszeletpontot „önmagával összekötő egyenes” alatt a kúpszelet adott pontbeli érintőjét fogjuk érteni, hiszen ekkor formálisan az „ $\overleftrightarrow{AA}$ ” egyenes képe a $\overleftrightarrow{BA}$ egyenes. Duálisan: egy kúpszelet rögzítése után egy érintő „önmagával vett metszéspontján” az érintőre illeszkedő érintési pontot értjük.

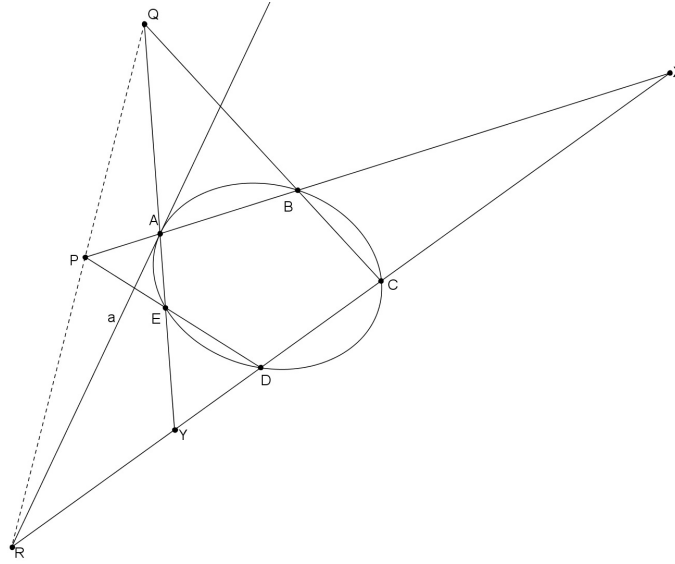
Így a Pascal-tétel - és duális módon a Brianchon-tétel - érvényben marad „elfajult hatszögek” esetén is. Ez a kúpszeletbe írt hatszög valamely két szomszédos csúcsának (illetve a duális esetén a kúpszelet köré írt hatszög valamely két szomszédos oldalának) egybeesését jelenti.

Ezeket a speciális eseteket a Pascal-tétel bizonyításának értelemszerű módosításával igazolhatjuk. Természetesen ezen speciális esetek megfordításai és duálisai is teljesülnek.

10.5. Következmény. *Legyenek A, B, C, D és E egy kúpszelet pontjai, az a kúpszelet A -ra illeszkedő érintője. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EA} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap a =: \{R\}$ pontok kollineárisak.*

Bizonyítás: Legyen X az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, Y az $\overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{CD}$ pont. Ekkor

$$(APXB) \bar{\wedge} D(APXB) \bar{\wedge} D(AECB).$$



A Pascal-tétel teljesülése az $AABCDE$ „elfajult hatszög” esetén.

A kúpszeletet meghatározó projektivitással kapcsolatos fenti megjegyzésünk értelmében $D(AECB) \bar{\wedge} A(AECB)$, ahol a $\overleftrightarrow{DA}$ sugár képe az a érintő. Így

$$A(AECB) \bar{\wedge} A(RYCX) \bar{\wedge} (RYCX) \bar{\wedge} (YRXC),$$

tehát $(APXB) \bar{\wedge} (YRCX)$. Ebben a projektivitásban az X pont képe önmaga, így a projektivitás perspektivitás. A perspektivitás középpontja $\overleftrightarrow{AY} \cap \overleftrightarrow{BC}$, azaz a Q pont. Tehát valóban, P , Q és R kollineáris. ■

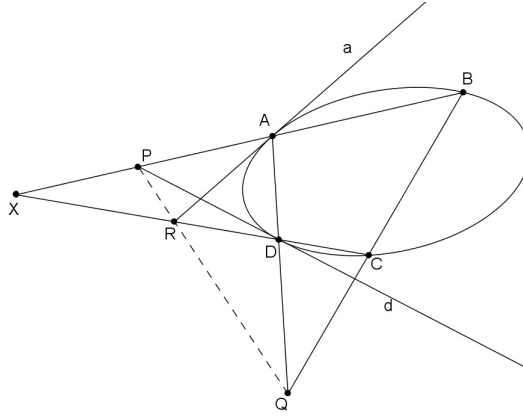
10.6. Következmény. Legyenek A , B , C , D egy kúpszelet pontjai, a és d a kúpszelet A illetve D pontra illeszkedő érintője. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB} \cap d =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AD} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap a =: \{R\}$ pontok kollineárisak.

Bizonyítás: Legyen X a $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ pont. Ekkor

$$(CDXR) \bar{\wedge} A(CDXR) \bar{\wedge} A(CDBF).$$

Itt $A(CDBF) \bar{\wedge} D(CDBF)$, ahol az $\overleftrightarrow{AD}$ sugár képe d . Így $D(CDBF) \bar{\wedge} D(XPBF) \bar{\wedge} (XPBF) \bar{\wedge} (BFXP)$. Tehát $(CDXR) \bar{\wedge} (BFXP)$. Ebben a projektivitásban az X pont képe önmaga, így a projektivitás perspektivitás. A perspektivitás centruma $\overleftrightarrow{DF} \cap \overleftrightarrow{BC}$, azaz a Q pont. Tehát valóban, P , Q és R kollineáris. ■

Végül azt a speciális esetet, amelyben a kúpszeletbe írt hatszög háromszöggé fajul, csak megfogalmazzuk. Az állítást később bizonyítjuk.

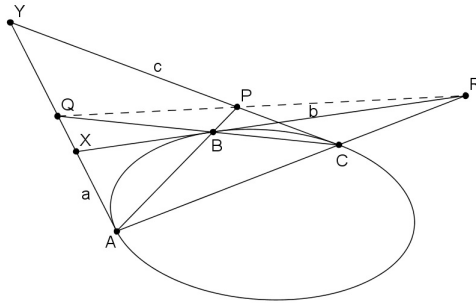


A Pascal-tétel teljesülése az $AABCDD$ „elfajult hatszög” esetén.

10.7. Állítás. *Egy kúpszeletbe írt háromszög, és a kúpszelet ezen háromszög csúcsaira illeszkedő érintői által alkotott háromszög tengelyre nézve perspektívek.*

A Pascal és Brianchon-tételek, valamint most látott következményeik és azok duálisainak alkalmazásával a **9.11.** és **9.13.** állítások alapján egyértelműen meghatározott másodrendű görbék további pontjai egyszerűen szerkeszthetők.

10.8. Következmény. *Legyenek A , B és C egy kúpszelet pontjai, valamint a , b és c a kúpszelet ezen pontokra illeszkedő érintői. Legyen $a \cap b =: \{X\}$, $a \cap c =: \{Y\}$ és $a \cap \overleftrightarrow{BC} =: \{Q\}$. Ekkor $(AQXY)$ harmonikus pontnégyes.*



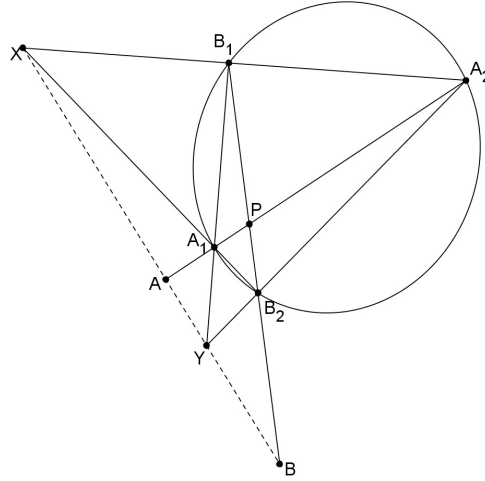
$(AQXY)$ harmonikus pontnégyes.

Bizonyítás: Vezessük be a további $c \cap \overleftrightarrow{AB} =: \{P\}$ és $b \cap \overleftrightarrow{CA} =: \{R\}$ jelöléseket. Ekkor a **10.7.** következmény alapján P , Q és R kollineárisak. Az $ABQR$ teljes négyzet $\overleftrightarrow{AQ}$ oldalegyenesén X átlópont, Y a négyzet egy átlójára illeszkedik, tehát valóban, $(AQXY)$ harmonikus pontnégyes. ■

11. Pólus és poláris

11.1. Tétel. Legyen adott egy k kúpszelet és egy, a kúpszeletre nem illeszkedő P pont. Tekintsük egy P -re illeszkedő szelőjét k -nak, és legyen P -nek a szelőre illeszkedő kúpszeletpontokra vonatkozó harmonikus társa Q . Az így kapott Q pontok kollineárisak, azaz egy, a szelő megválasztásától független egyenesre illeszkednek. Közös egyenesüket P polárisának hívjuk, és azt mondjuk, hogy P a kapott egyenes pólusa.

Bizonyítás: Tekintsünk egy, a P pontra illeszkedő rögzített szelőt. Ennek metszéspontjai a kúpszelettel legyenek A_1 és A_2 , és legyen A a P pont (A_1A_2) -re vonatkozó harmonikus társa. Legyen T az A_1 és A_2 pontokra illeszkedő kúpszeletérintők metszéspontja.



P polárisa.

Tekintsünk egy tetszőleges további szelőt, amelynek a kúpszelettel közös pontjai B_1 és B_2 . Legyen továbbá B a P pont (B_1B_2) -re vonatkozó harmonikus társa. Megmutatjuk, hogy B - a második szelő megválasztásától függetlenül - illeszkedik az $\overleftrightarrow{AT}$ egyenesre.

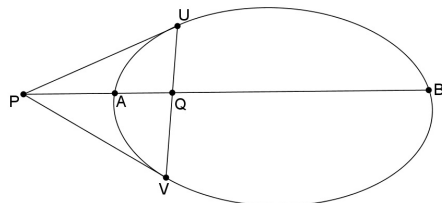
Legyen $X := \overleftrightarrow{A_1B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_1}$ és $Y := \overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_2B_2}$.

Mivel az $A_1B_2A_2B_1$ teljes négyszög A_1 és A_2 csúcsai által meghatározott oldalegyenesére illeszkedő átlópont P , következik, hogy P (A_1A_2) -re vonatkozó harmonikus társa illeszkedik a P -vel szemköztes átlóegyenesre, azaz $\overleftrightarrow{XY}$ -ra. Tehát A illeszkedik $\overleftrightarrow{XY}$ -ra. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy B illeszkedik $\overleftrightarrow{XY}$ -ra.

A Pascal-tételt az $A_2A_2B_2A_1A_1B_1$ elfajult hatszögre alkalmazva azt kapjuk, hogy X, Y és T kollineárisak.

Összefoglalva: az $\overleftrightarrow{XY}$ egyenesre egyaránt illeszkedik A, B és T , amiből következik, hogy B valóban illeszkedik $\overleftrightarrow{AT}$ -re. Mivel $\overleftrightarrow{AT}$ a B -t tartalmazó szelő

megválasztásától független egyenes, ez állításunk igazságát jelenti. ■



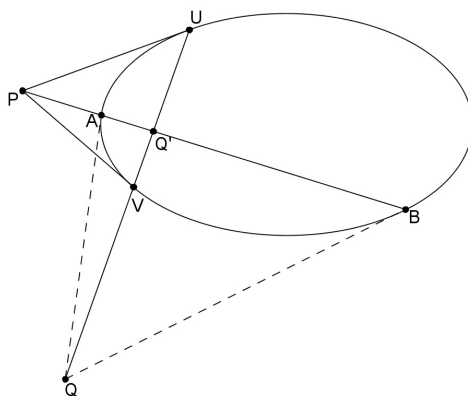
Külső pont polárisa.

11.2. Állítás. Ha P külső pont, akkor P pólusa a P -re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjainak egyenese.

Bizonyítás: Legyenek a P -re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjai U és V , valamint egy P -re illeszkedő tetszőleges szelő közös pontjai a kúpszelettel A és B . Azt kell megmutatnunk, hogy $Q := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{UV}$ illeszkedik P polárisára, azaz hogy $(PQAB)$ harmonikus pontnégyes.

$$(PQAB) \bar{\bar{\wedge}} U(UVAB) \bar{\wedge} V(UVAB) \bar{\bar{\wedge}} (QPAB).$$

Tehát $(PQAB) \bar{\wedge} (QPAB)$. **5.14.** miatt ebből következik, hogy $(PQAB)$ harmonikus pontnégyes. ■



Ha Q illeszkedik P polárisára, akkor P illeszkedik Q polárisára.

11.3. Állítás. Ha Q illeszkedik P polárisára, akkor P illeszkedik Q polárisára.

Bizonyítás: Ha a P és Q pontok valamelyike belső pont, akkor a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes két pontban metszi a kúpszeletet, legyenek azok A és B . Ha Q rajta van P polárisán, akkor Q a P pont (AB) -re vonatkozó harmonikus társa. Ebből azonban következik, hogy P rajta van Q polárisán.

Tegyük fel, hogy P és Q egyaránt külső pontok, és legyenek a P -re illeszkedő kúpszeletérintők érintési pontjai U és V . Ekkor P polárisa $\overleftrightarrow{UV}$. Legyen Q $\overleftrightarrow{UV}$ tetszőleges külső pontja, és legyen Q (UV) -re vonatkozó harmonikus társa Q' . Ekkor Q' illeszkedik Q polárisára. Azt kell megmutatnunk, hogy $\overleftrightarrow{PQ'}$ Q polárisa.

Legyenek $\overleftrightarrow{PQ'}$ és a tekintett k kúpszelet közös pontjai A és B . Azt kell megmutatnunk, hogy $\overleftrightarrow{AQ}$ és $\overleftrightarrow{BQ}$ a kúpszelet érintői, ebből ugyanis következik, hogy $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{PQ'}$ Q polárisa. Azt fogjuk igazolni, hogy $\overleftrightarrow{AQ}$ érinti a kúpszeletet. Legyen $\overline{Q}$ az A -ra illeszkedő kúpszeletérintő és $\overleftrightarrow{UV}$ metszéspontja. Azt látjuk be, hogy ekkor $\overline{Q} = Q$.

Mivel Q' illeszkedik P polárisára, $(ABPQ')$ harmonikus pontnégyes. Innen

$$(ABPQ') \bar{\wedge} U(ABUV) \bar{\wedge} A(ABUV) \bar{\wedge} (\overline{Q}Q'UV)$$

miatt $(\overline{Q}Q'UV)$ is harmonikus pontnégyes. Azonban Q' (UV) -re vonatkozó harmonikus társa Q , így valóban $\overline{Q} = Q$ következik. ■

11.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy két pont konjugált egymáshoz egy kúpszeletre nézve, ha illeszkednek egymás polárisaira. Két egyenes konjugált egymáshoz egy kúpszeletre nézve, ha illeszkednek egymás pólusaira.

Eddig a sík kúpszeletre nem illeszkedő pontjai és a kúpszeletet nem érintő egyenesei között adtunk meg bijekciót. Ez a bijekció illeszkedéstartó abban az értelemben, hogy $\overleftrightarrow{AB}$ pólusa $a \cap b$: valóban, az $a \cap b$ pont A -hoz és B -hez egyaránt konjugált.

Ezt a bijekciót kiterjesztjük a teljes projektív síkra.

11.5. Definíció. Egy kúpszeletpont polárisának a rá illeszkedő kúpszeletérintőt, egy kúpszeletérintő pólusának a rá illeszkedő érintési pontot nevezzük.

Ez a definíció valóban illeszkedéstartó módon terjeszti ki az előző bijekciót a teljes síkra: abból, hogy tetszőleges külső pont polárisa tartalmazza a pontból húzott érintők érintési pontjait, következik, hogy a kúpszelet tetszőleges pontja konjugált a rá illeszkedő érintő összes pontjához.

11.6. Következmény. Rendeljük hozzá a sík tetszőleges pontjához egy rögzített kúpszeletre vonatkozó polárisát, tetszőleges egyeneshez pedig a pólusát. Ez a leképezés a sík pontjainak és egyeneseseinek között bijektív és illeszkedéstartó.

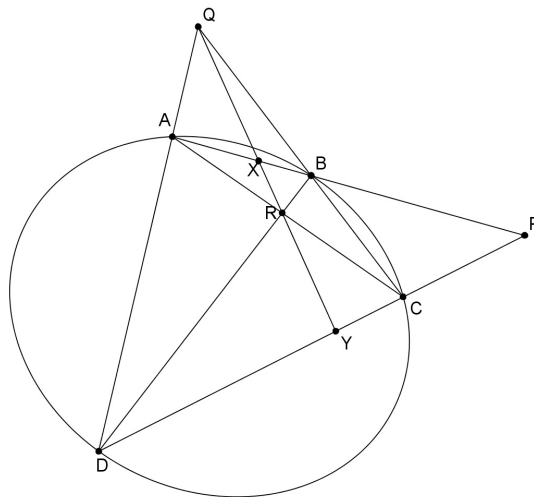
11.7. Definíció. Egy háromszög csúcsainak egy kúpszeletre vonatkozó polárisai egy háromszög oldalegyenesei, ezt a háromszöget az eredeti háromszög poláris háromszögének nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy háromszög egy kúpszelet polárháromszöge, ha a poláris háromszöge önmaga.

A polárháromszög tehát olyan háromszög, amelynél tetszőleges csúcs polárisa a szemköztes háromszögoldal. Másként fogalmazva, a polárháromszög

olyan háromszög, amelynek csúcsai páronként konjugáltak egymáshoz a kúpszeletre nézve.

A következő állítás teljesülése kiolvasható **11.1.** bizonyításából, mi azonban újra megindokoljuk.

11.8. Állítás. *Egy kúpszeletbe írt tetszőleges teljes négyszög átlópontjai a görbe egy polárháromszögét alkotják.*

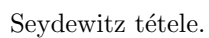


ABCD átlópontjai polárháromszöget alkotnak.

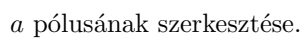
Bizonyítás: Használva az ábra jelöléseit, legyen A, B, C és D a görbe négy pontja, az $ABCD$ teljes négyszög átlópontjai P, Q és R . Megmutatjuk, hogy P polárisa a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenes. Legyen $\overleftrightarrow{QR}$ metszéspontja $\overleftrightarrow{AB}$ -vel illetve $\overleftrightarrow{CD}$ -vel X és Y . Ekkor a teljes négyszögnek A és B csúcsai, P átlópontja, X pedig a szemköztes átlóegyeses $\overleftrightarrow{AB}$ -vel közös pontja, így $(ABPX)$ harmonikus pontnégyes. Ebből következik, hogy P és X konjugáltak a kúpszeletre nézve. Hasonlóan adódik, hogy P és Y is konjugáltak. Így P polárisa az $\overleftrightarrow{XY} = \overleftrightarrow{QR}$ egyenes, és ezt kellett igazolnunk. ■

11.9. Tétel. *(Seydewitz) Egy kúpszeletbe írt háromszög bármely oldalához konjugált egyenes konjugált pontokban metszi a másik két oldalegyenest.*

Bizonyítás: Legyen a kúpszelet egy beírt háromszöge PQR . Ha egy c egyenes a $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyeneshez konjugált, akkor c a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes valamely C pontjának a polárisa. Legyen $\overleftrightarrow{RC}$ a kúpszelettel alkotott, R -től különböző metszéspontja S . Az előző tétel alapján ekkor a $PQRS$ teljes négyszög átlópontjai a kúpszelet egy polárháromszögét alkotják. Ezen háromszög c oldalegyenesese tartalmazza az A



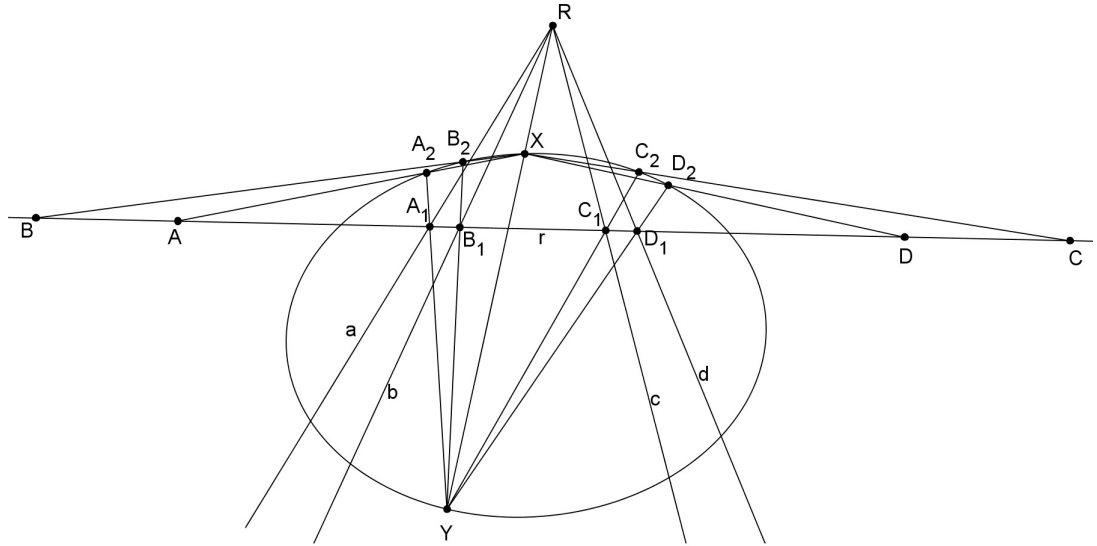
11.10. Következmény. *Egy kúpszelet köré írt háromszög bármely csúcsához konjugált pontot a másik két csúccsal összekötve konjugált egyeneseket kapunk.*



63

- Rögzítsünk egy R -re illeszkedő tetszőleges x szelőt, és legyenek ennek a kúpszelettel közös pontjai X és Y .
- Legyen a és r közös pontja A_1 .
- Legyen $\overleftrightarrow{YA_1}$ és a kúpszelet Y -tól különböző közös pontja A_2 .
- Ekkor $\overleftrightarrow{XA_2}$ és r metszéspontja az a egyenes keresett A pólusa.

Valóban, az $\overleftrightarrow{XY}$ és $\overleftrightarrow{RA_2}$ szelők által a kúpszeletből kimetszett teljes négyszög egy átlópontja R , így a négyszög szemköztes átlója r . Ebből következik, hogy a négyszög további átlópontjai A és A_1 , vagyis A valóban $\overleftrightarrow{RA_1}$ pólusa.



A pólus-poláris kapcsolat projektív leképezés.

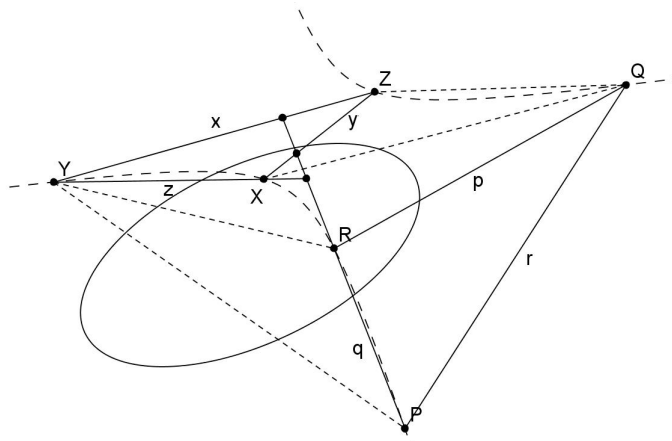
11.11. Állítás. *A pólus-poláris kapcsolat projektív leképezés: ha az A, B, C, D kollineáris pontok polárisai rendre a, b, c, d , akkor $(ABCD) \bar{\wedge} (abcd)$.*

Bizonyítás: Tekintsük az a, b, c, d konkurrens egyeneseket, közös pontjuk legyen R . Ekkor a tekintett egyenesek A, B, C, D pólusai az R pont r polárisára illeszkednek. Rögzítve egy R -re illeszkedő x szelőt, határozzuk meg az A, B, C, D pontokat a fent ismertetett eljárással. Az eljárás során keletkező megfelelő pontokat a fentieknek megfelelően jelölje $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$.

Ekkor a szerkesztésből kiolvashatóan

$$(abcd) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1D_1) \bar{\wedge} Y(A_2B_2C_2D_2) \bar{\wedge} X(A_2B_2C_2D_2) \bar{\wedge} (ABCD).$$

■



Egy kúpszelet bármely két polárháromszögének hat csúcsa egy kúpszeletre illeszkedik.

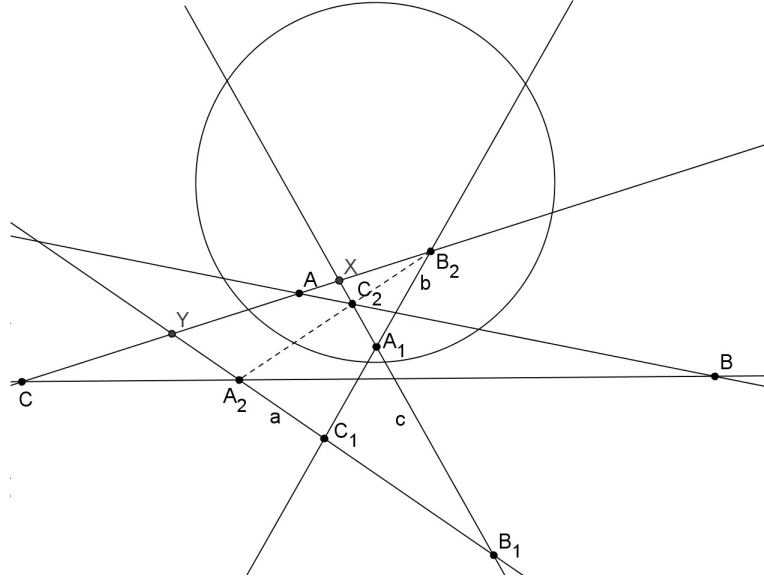
11.12. Állítás. *Egy kúpszelet bármely két polárháromszögének hat csúcsa egy kúpszeletre illeszkedik.*

Bizonyítás: Legyen az adott kúpszelet két polárháromszöge PQR és XYZ , a megfelelő pontok polárisai rendre p, q, r, x, y és z . A q egyenest elmet szve a $(prxz)$ egyenesekkel, a kapott négy pont **11.11.** miatt projektív helyzetű a Q pontot a $(PRXZ)$ pontokkal összekötő négy egyenessel. Az előző négy pontot Y -nal összekötve, ezen négy egyenessel perspektív helyzetű négy egyenest kapunk, mégpedig az Y pontból az $(RPZX)$ pontnégyest vetítő egyeneseket. Azonban $(RPZX) \bar{\wedge} (PRXZ)$, tehát a Q és Y pontokból vetítve a $(PRXZ)$ pontnégyest, projektív sugársorokat kapunk. Ez a kúpszeletek definíciója miatt azt jelenti, hogy a szóban forgó hat pont valóban egy kúpszeletre illeszkedik. ■

11.13. Tétel. (Chasles) *Ha egy háromszög egy kúpszeletnek nem polárháromszöge, akkor (pontra és tengelyre nézve egyaránt) perspektív a poláris háromszögével.*

Bizonyítás: Tekintsük az ABC háromszöget, és tegyük fel, hogy a csúcsok polárisai az oldalegyenesektől különböző a, b, c egyenesek. Jelölje az $a \cap b$ pontot C_1 , az $a \cap c$ pontot B_1 és a $b \cap c$ pontot A_1 . Azt kell megmutatnunk, hogy az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek tengelyre nézve perspektívek. Legyen $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A_1B_1}$ a C_2 pont, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B_1C_1}$ az A_2 pont és végül az $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A_1C_1}$ a B_2 pont; ekkor feladatunk az A_2, B_2, C_2 pontok kollinearitásának belátása.

Legyen továbbá X az $\overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{AC}$ és Y az $\overleftrightarrow{B_1C_1} \cap \overleftrightarrow{AB}$ pont. Ekkor **11.11.** miatt az $(C_2A_1XB_1)$ pontnégyes és a polárisok által alkotott sugárnégyes projektív kapcsolatban van. A szóban forgó pontok polárisai rendre a $\overleftrightarrow{CC_1}, \overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{CB_1}, \overleftrightarrow{CA}$ egyenesek. Így $(C_2A_1XB_1) \bar{\wedge} C(C_1BB_1A)$. Az a egyenessel történő metszés után $C(C_1BB_1A) \bar{\wedge} (C_1A_2B_1Y)$ adódik. Ismert, hogy $(C_1A_2B_1Y) \bar{\wedge} (A_2C_1YB_1)$.



Chasles tétele.

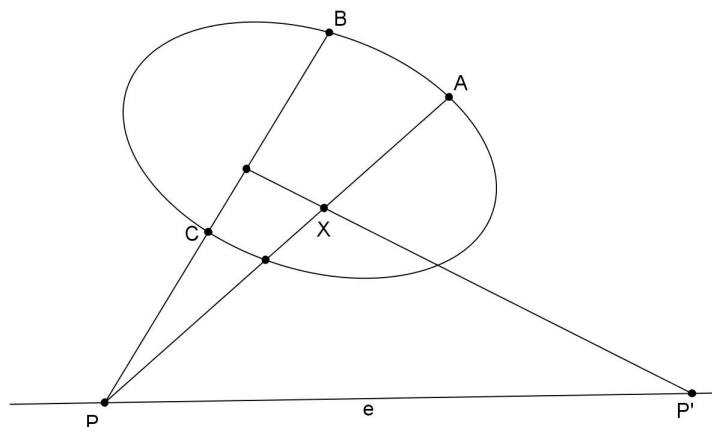
Összefoglalva: $(C_2A_1XB_1) \bar{\wedge} (A_2C_1YB_1)$. A fundamentális tulajdonság miatt ez a projektivitás perspektivitás, amelynek centruma $B_2 = \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{A_1C_1}$, így B_2 valóban illeszkedik az $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ egyenesre. ■

A következő állítást a 10.7. pontban bizonyítást nélkül fogalmaztuk meg mint a Pascal-tétel egy speciális esetét. Az állítás a Chasles-tétel speciális esetének is tekinthető, azonban a Chasles-tétel fent bemutatott bizonyítása ebben az esetben nem alkalmazható. Így az állítást külön igazoljuk.

11.14. Állítás. *Egy kúpszeletbe írt háromszög, és a kúpszelet ezen háromszög csúcsaira illeszkedő érintői által alkotott háromszög tengelyre nézve perspektívek.*

Bizonyítás: Legyen a kúpszeletbe írt háromszög ABC , a megfelelő érintőegyenesek a , b és c . Jelölje az $a \cap b$ pontot C_1 , a $b \cap c$ pontot A_1 , a $c \cap a$ pontot B_1 . Legyen továbbá $\overleftrightarrow{BC} \cap a = \{P\}$, $\overleftrightarrow{CA} \cap b = \{Q\}$, $\overleftrightarrow{AB} \cap c = \{R\}$. Ekkor 11.11. miatt $(A_1CB_1R) \bar{\wedge} (a_1cb_1r)$, ahol a_1 illetve b_1 az A_1 illetve B_1 pontok polárisát jelöli, így $a_1 = \overleftrightarrow{BC}$, $b_1 = \overleftrightarrow{AC}$. $(a_1cb_1r) \bar{\wedge} (BA_1QC_1) \bar{\wedge} (A_1BC_1Q)$, tehát $(A_1CB_1R) \bar{\wedge} (A_1BC_1Q)$. Ebben a projektivitásban A_1 önmagának felel meg, így perspektivitás. Ebből következik, hogy $\overleftrightarrow{CB} \cap \overleftrightarrow{B_1C_1} = \{P\}$ illeszkedik a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenesre, és ezt kellett igazolnunk. ■

11.15. Állítás és definíció. *Egy kúpszelet bármely, a görbét nem érintő egyenesen involúciót indukál: az egyenesen a görbére nézve konjugált pontpárok egy involúció megfelelő pontpárjai.*



Három pont és egy „képzetes pontpár” által meghatározott kúpszelet.

konstrukcióval, a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenes helyett ABC valamely más oldalegyeneséből kiindulva további kúpszeletpontot állíthatunk elő; így valóban, meghatározható a kúpszelet öt pontja. ■

Az előző tételre tekintettel szokás egy kúpszelet által egy egyenesen indukált elliptikus involúciót a kúpszelet és az egyenes által meghatározott *képzetes pontpár*nak nevezni. Amennyiben két kúpszelet valamely egyenesen ugyanazt az involúciót indukálja, azt mondjuk, hogy a tekintett egyenes a két kúpszelet *hatványvonala*. Megmutatható, hogy az euklideszi sík tetszőleges két köre esetén éppen az euklideszi értelemben vett hatványvonal és a végtelen távoli egyenes ilyen tulajdonságú.

A valós projektív síkon egy kúpszelet pontosan akkor kör, ha a végtelen távoli egyenesen azt az involúciót indukálja, amelynek megfelelő pontpárjai az egymásra merőleges irányokat jelentő végtelen távoli pontok. Ezt az involúciót szokás *abszolút involúciónak* nevezni, illetve - mint képzetes pontpárt - *abszolút képzetes körpontok*ként említeni. Ebben a speciális esetben az előző tétel azt a jól ismert tényt adja vissza, hogy az euklideszi sík bármely három, nem kollineáris pontja egyértelműen meghatároz egy kört.

12. Kúpszeletek kibővített affin síkon

12.1. Definíció. *Egy kúpszeletet ellipszisnek, parabolának vagy hiperbolának nevezünk aszerint, hogy végtelen távoli pontjainak száma 0, 1 vagy 2.*

12.2. Definíció. *Egy parabola végtelen távoli pontját a parabola tengelyirányának nevezzük; egy hiperbola végtelen távoli pontjait aszimptotairányoknak, a végtelen távoli pontjaira illeszkedő érintőket a hiperbola aszimptotáinak hívjuk.*

12.3. Definíció. *Amennyiben egy kúpszeletre nézve a végtelen távoli egyenes pólusa nem végtelen távoli pont, a kúpszeletet centrálisnak nevezzük. Centrális kúpszelet centrumán (vagy középpontján) a végtelen távoli egyenes kúpszeletre vonatkozó pólusát értjük.*

Látható, hogy pontosan a parabolák a nem centrális kúpszeletek, ugyanis a végtelen távoli egyenes tetszőleges parabola érintője (hiszen azzal éppen egy közös pontja van), így annak pólusa a rá illeszkedő érintési pont.

12.4. Definíció. *Egy egyenest egy centrális kúpszelet átmérőjének mondunk, ha illeszkedik a kúpszelet centrumára. Egy átmérő végpontján az átmérő és a kúpszelet metszéspontjait értjük.*

12.5. Definíció. *Egy egyenespárt egy centrális kúpszelet konjugált átmérőpárjának nevezünk, ha konjugáltak a kúpszeletre nézve, és mindkét egyenes a kúpszelet átmérője.*

13. Projektivitások kúpszeleten, a Steiner-szerkesztés

13.1. Definíció. Tekintsünk egy e egyenest és egy k kúpszeletet. Azt mondjuk, hogy a k kúpszelet egy O pontjából vetítjük a kúpszeletre az e egyenes pontjait, ha az e egyenes tetszőleges A pontjához az O és A pontok egyenesének a kúpszelettel közös, O -tól különböző pontját rendeljük. Amennyiben az O és A pontok egyenesre a kúpszelet érintője, rendeljük hozzá az A ponthoz O -t.

13.2. Definíció. Tekintsünk egy e tartóegyenesű pontsort önmagára képező projektivitást. Vetítsük az e egyenes pontjait egy k kúpszeletre annak O pontjából. Azt mondjuk, hogy a k kúpszeleten egy projektivitást adtunk meg, ha a kúpszelet tetszőleges A pontjához a kúpszelet azon A' pontját rendeljük, amelyre teljesül, hogy az A pont ösképe az e egyenesen megadott projektivitás általi képe az A' pont ösképe. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az e egyenesen megadott projektivitást O -ból a kúpszeletre vetítettük.

Amennyiben a kúpszelet pontjait a kúpszelet valamely más, O_1 pontjából vetítjük, az $\overleftrightarrow{OA}$ egyeneshez az $\overleftrightarrow{O_1A}$ egyenest rendelő leképezés a kúpszelet definíciója miatt projektivitás. Így ha az e egyenesen megadott projektivitást az O pont helyett O_1 -ből vetítjük, a pontokat vetítő sugársorok az eredetiekkel projektív kapcsolatban lesznek. Könnyen látható tehát az alábbi következmény.

13.3. Lemma. Egy kúpszeleten megadott projektivitást az A, B, C pontokhoz rendelt A', B', C' pontok egyértelműen meghatároznak.

Ebben az esetben is az (ABC) és $(A'B'C')$ ponthármasok által meghatározott projektivitásként fogjuk említeni a kúpszeleten ilyen módon megadott egyértelmű projektivitást.

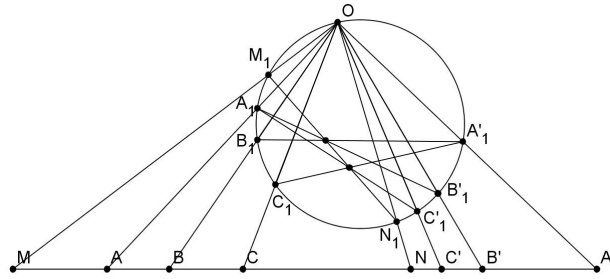
13.4. Definíció. Tekintsük egy kúpszeleten az (ABC) és $(A'B'C')$ pontok által meghatározott projektivitást. A Pascal-tétel értelmében kollineáris $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{CB'}$, $\overleftrightarrow{CA'} \cap \overleftrightarrow{AC'}$ és $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{BA'}$ pontok egyenesét a projektivitás tengelyének nevezzük.

Látható tehát, hogy a projektivitás tengelyének felhasználásával a kúpszelet tetszőleges további X pontjának képe szerkeszthető. Az előző jelöléseket megtartva, az $(ABCX)$ pontokat A' -ből a projektivitás tengelyére vetítve kapott pontnégyest jelölje $(GNMF)$. Ekkor a $(GNMF)$ pontnégyest A -ból a kúpszeletre vetítve éppen az $(A'B'C'X')$ pontnégyest kapjuk. Megmutatjuk, hogy a kúpszelet valamely X pontjához az így kapott X' pontot rendelő leképezés a kúpszeleten valóban projektivitás. Legyen e tetszőleges egyenes, az A -ra illeszkedő kúpszeletérintő e -vel közös pontja A_1 , $\overleftrightarrow{AB} \cap e = \{B_1\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap e = \{C_1\}$, $\overleftrightarrow{AA'} \cap e = \{A'_1\}$, $\overleftrightarrow{AB'} \cap e = \{B'_1\}$, $\overleftrightarrow{AC'} \cap e = \{C'_1\}$, $\overleftrightarrow{AX} \cap e = \{X_1\}$ és $\overleftrightarrow{AX'} \cap e = \{X'_1\}$. Ekkor $(A_1B_1C_1X_1) \bar{\bar{A}} A(A_1B_1C_1X_1) \bar{\bar{A}} A(ABCX)$. A kúpszelet definíciója miatt $A(ABCX) \bar{\bar{A}} A'(ABCX)$. Az előző konstrukció alapján

$A'(ABCX) \bar{\wedge} (GNMF) \bar{\wedge} A(A'B'C'X')$. Végül $A(A'B'C'X') \bar{\wedge} (A'_1B'_1C'_1X'_1)$. Így $(A_1B_1C_1X_1) \bar{\wedge} (A'_1B'_1C'_1X'_1)$ az a projektivitás az e egyenesen, amit a kúpszeletre vetítve az előzőekben megadott megfeleltetést kapjuk, így az valóban a kúpszeleten megadott projektivitás. Mivel egy kúpszeleten megadott projektivitást egyértelműen meghatároz a kúpszelet három pontjának képe, így beláttuk, hogy egy kúpszeleten adott projektivitást egyértelműen meghatároz a tengelye, és a kúpszelet egy pontjának képe.

A kúpszeleten adott projektivitás fixpontjai a projektivitás tengelyének a kúpszelettel alkotott metszéspontjai. Így egy kúpszeleten adott projektivitás elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus attól függően, hogy a projektivitás tengelye a kúpszeletet 0, 1 vagy 2 pontban metszi.

Nyilvánvaló, hogy egy pontsor elemei között megadott projektivitást egy kúpszeletre vetítve, az eredeti projektivitás fixpontjainak képei a kúpszeleten kapott projektivitás fixpontjai. Ezt a tényt használja ki a projektivitások fixpontjainak meghatározására szolgáló *Steiner-szerkesztés*.

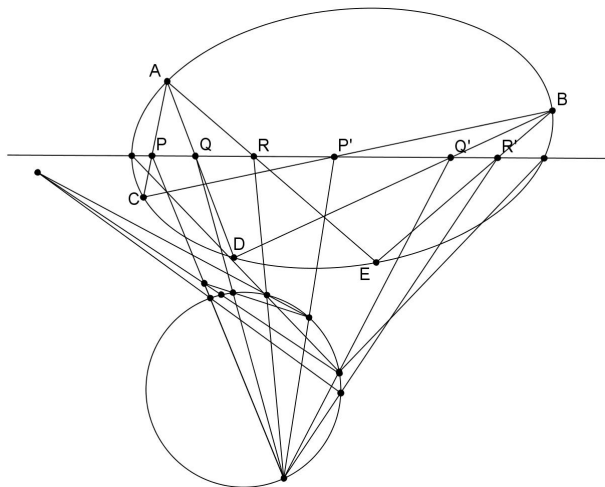


A Steiner-szerkesztés.

Tekintsük az e egyenes pontjai között értelmezett, (ABC) és $(A'B'C')$ ponthármasok által meghatározott projektivitást. Tekintsünk egy tetszőleges k kúpszeletet, és annak egy O pontját. (Amennyiben a valós projektív síkon euklideszi szerkesztést végzünk, a k kúpszelet a sík egy tetszőleges köre.) Ekkor az eredeti projektivitást O -ból k -ra vetítve kapunk a kúpszeleten egy projektivitást, melyet az $(A_1B_1C_1)$ és $(A'_1B'_1C'_1)$ ponthármasok határoznak meg. Ezen projektivitás tengelyét meghatározzák például az $\overleftrightarrow{A_1B'_1} \cap \overleftrightarrow{A'_1B_1}$ és $\overleftrightarrow{A_1C'_1} \cap \overleftrightarrow{A'_1C_1}$ pontok. A tengely és a kúpszelet M_1 és N_1 metszéspontja - amennyiben létezik - a kúpszeleten adott projektivitás két fixpontja. Ezen pontokat O -ból az e egyenesre vetítve, az e egyenesen megadott projektivitás fixpontjait kapjuk.

A Steiner-szerkesztés alkalmazásával meghatározhatjuk tetszőleges kúpszelet és egyenes közös pontjait, ha a kúpszelet öt pontját ismerjük. Legyen ugyanis adott a kúpszelet A, B, C, D és E pontja, és egy g egyenes. Ekkor a kúpszelet A és B pontjából vetítve a C, D és E pontokat, projektív sugársorokat kapunk. Ezen sugársorokat elmetszve a g egyenessel, a g tartóegyenesű pontsort

önmagára képező projektivitást nyerünk. Ennek fixpontjai éppen a kúpszelet és g közös pontjai, melyeket a Steiner-szerkesztés alkalmazásával határozhatunk meg.



Kúpszelet és egyenes közös pontjainak szerkesztése.

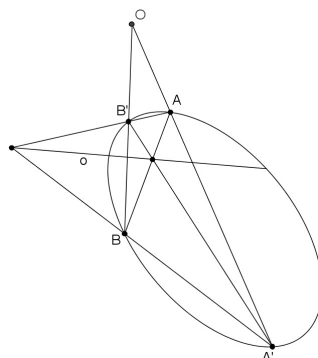
13.5. Definíció. Ha valamely e egyenesen megadott involúciót egy k kúpszeletre vetítünk, azt mondjuk, hogy a k kúpszeleten egy involúciót adtunk meg.

Az elsőfajú projektív alpalakzatokon értelmezett involúciók tulajdonságaira vonatkozó állítások a kúpszeleteken értelmezett involúciókra is teljesülnek. A kúpszeleteken adott involúciók megfelelő pontpárjainak meghatározását azonban megkönnyíti az alábbi tulajdonság.

13.6. Állítás és definíció. Ha egy kúpszeleten megadott involúciót a kúpszelet (AA') és (BB') pontpárjai határoznak meg, tetszőleges további (CC') megfelelő pontpár esetén a $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenes illeszkedik az $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$ pontra. A megfelelő pontpárok egyeneseinek ezen O közös pontját az involúció centrumának nevezzük. Az involúció centruma az involúció tengelyének pólusa.

Bizonyítás: A szóban forgó involúció pontosan az (ABB') és $(A'B'B)$ ponthármasok által meghatározott projektivitás. Ennek tengelye az $AA'BB'$ teljes négyszög egy átlója, míg O az ezzel szemköztes átlópont. Így az O pont valóban az involúció tengelyének pólusa. Mivel ez a pont független az involúciót meghatározó pontpárok megválasztásától, tetszőleges további (CC') megfelelő pontpár egyenese is illeszkedik O -ra. ■

Látható tehát, hogy a kúpszeleten megadott involúció a sík egy centrális kollineációjának leszűkítése a kúpszelet pontjaira, melynek centruma az involúció centruma, tengelye az involúció tengelye.



Involúció kúpszeleten.

13.7. Következmény. *Egy kúpszeleten megadott involúció pontosan akkor elliptikus, ha centruma a kúpszelet belső pontja, és pontosan akkor hiperbolikus, ha centruma a kúpszelet külső pontja.*

Így pontsor elemei között értelmezett involúció esetén is egyszerűen meghatározható tetszőleges pont képe, ha az involúciót egy kúpszeletre vetítjük. Az alábbi tulajdonság mind elsőfajú projektív alapalakzaton, mind kúpszeleten értelmezett involúcióra teljesül, igazolását azonban célszerű kúpszeleten adott involúcióra elvégezni.

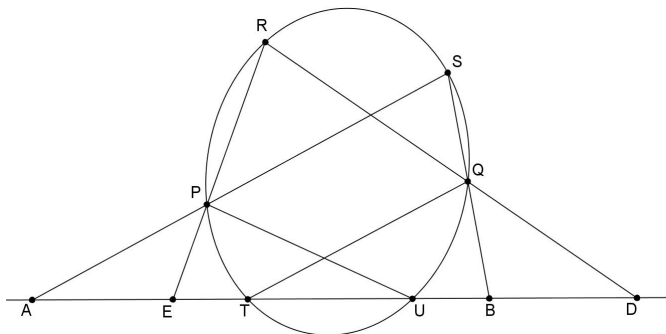
13.8. Állítás. *Ha két, ugyanazon kúpszeleten vagy elsőfajú projektív alapalakzaton értelmezett involúció közül legalább az egyik elliptikus, akkor van olyan pontpár, amely mindkét involúciónak megfelelő pontpárja.*

Bizonyítás: Amennyiben a két involúció elsőfajú projektív alapalakzaton van értelmezve, vetítsük azokat egy tetszőleges kúpszeletre. A kúpszeleten adott involúciók középpontjai közül valamelyik ekkor a kúpszeletnek belső pontja. Egy kúpszelet belső pontján áthaladó egyenesnek mindig van két közös pontja a kúpszelettel, ez esetben pedig az involúciók középpontjait összekötő egyenes és a kúpszelet közös pontjai közös megfelelő pontpárok. ■

Ha mindkét involúció hiperbolikus, a **6.7.** lemmában adtunk szükséges és elegendő feltételt közös megfelelő pontpár létezésére.

14. Desargues involúciótétele és alkalmazásai

14.1. Tétel. (Desargues involúciótétele.) Egy teljes négyszög csúcsaira illeszkedő kúpszeletek tetszőleges, a négyszög csúcsaira nem illeszkedő egyenessel alkotott metszéspontjai egy involúció megfelelő pontpárjait alkotják.



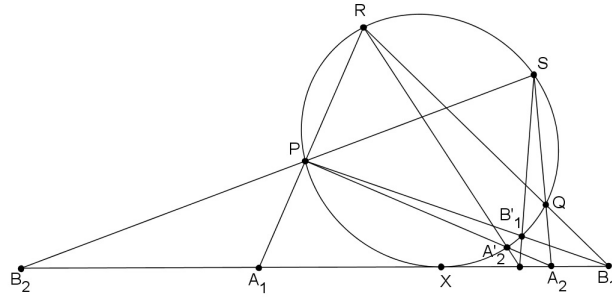
Desargues involúciótétele.

Bizonyítás: Legyen az adott négyszög $PQRS$, és az adott egyenes g . Tekintsünk egy tetszőleges k kúpszeletet, amely illeszkedik a P, Q, R, S pontokra, és legyenek k g -vel való metszéspontjai T és U . Legyen továbbá a $\overleftrightarrow{PS}, \overleftrightarrow{QS}, \overleftrightarrow{QR}$ és $\overleftrightarrow{PR}$ egyenes g -vel közös pontja A, B, D illetve E . Ekkor $(AETU) \bar{\wedge} (BDTU)$. Továbbá **2.5.** miatt $(BDTU) \bar{\wedge} (DBUT)$, így $(AETU) \bar{\wedge} (DBUT)$ adódik. Így T és U az (AD) és (BE) pontpárok által meghatározott involúció egy megfelelő pontpárja. ■

Megjegyezzük, hogy a teljes négyszög csúcsaira illeszkedő kúpszeletek összességét *kúpszeletsornak* is szokás nevezni.

A bizonyításból látható, hogy a kapott involúció éppen az az involúció, amelynek megfelelő pontpárjaiban a tekintett teljes négyszög oldalegyenesei az adott egyenest metszik (Desargues teljes négyszögekre vonatkozó tételének értelmében).

Ellenőrizhető, hogy az előző tételben meghatározott involúció fixpontjai a négy pontra illeszkedő, adott egyenest érintő kúpszeletek érintési pontjai. Legyenek ugyanis a teljes négyszög csúcsai P, Q, R, S , és legyen az adott g egyenest érintő valamely kúpszelet érintési pontja X . Legyen továbbá $\overleftrightarrow{PR}$ metszéspontja g -vel A_1 , $\overleftrightarrow{QS}$ metszéspontja A_2 , $\overleftrightarrow{QR}$ metszéspontja B_1 , $\overleftrightarrow{PS}$ metszéspontja B_2 . Ekkor az (A_1A_2) és (B_1B_2) megfelelő pontpárok által meghatározott involúció fixpontjait keressük meg a Steiner-szerkesztés alkalmazásával oly módon, hogy az involúciót vetítsük a tekintett, g -t érintő kúpszeletre annak P pontjából. Ekkor A_1 képe R , A_2 képe legyen A'_2 , B_1 képe legyen B'_1 , B_2 képe S . A kúpszeletre

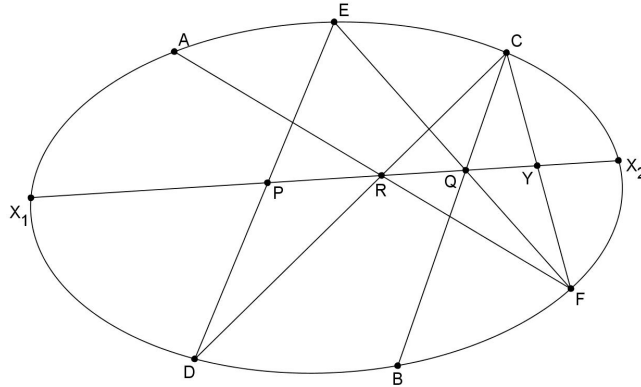


Egy kúpszeletsor elemei által egy egyenesből kimetszett involúció fixpontjai a kúpszeletsor adott egyenest érintő elemeinek érintési pontjai.

vetített involúció centruma $\overleftrightarrow{B_1S} \cap \overleftrightarrow{RA_2}$. A Pascal-tétel alapján ez a pont illeszkedik g -re, így a kúpszeletre vetített involúció egyik fixpontja X . Mivel azonban a kúpszeletre történő vetítés során X képe önmaga, ezért az eredeti involúció egyik fixpontja szintén X .

14.2. Következmény. Legfeljebb két olyan kúpszelet létezik, amely négy adott általános helyzetű pontra illeszkedik, és egy adott egyenest érint.

Bizonyítás: A négy adott pontra illeszkedő kúpszeletek és az adott e egyenes metszéspont-párjai által meghatározott involúció fixpontjai adják a lehetséges kúpszeletek érintési pontjait. Ezek száma 0 vagy 2. ■



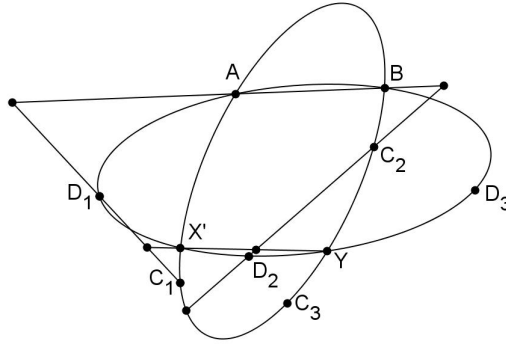
Desargues involúciótételéből következik a Pascal-tétel.

Desargues involúciótételét alkalmazva új, a korábbtól független bizonyítást adhatunk a Pascal-tételre. Megmutatjuk tehát, hogy ha A, B, C, D, E, F egy kúpszelet pontjai, akkor az $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE} =: \{P\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF} =: \{Q\}$ és $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{FA} =: \{R\}$ pontok kollineárisak.

Jelölje a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenes kúpszelettel közös pontjait X_1 és X_2 . Legyen $\overleftrightarrow{QR}$ és $\overleftrightarrow{CF}$ közös pontja Y , $\overleftrightarrow{QR}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ közös pontja P_1 , valamint $\overleftrightarrow{QR}$ és $\overleftrightarrow{DE}$ közös pontja P_2 . Azt kell belátnunk, hogy $P_1 = P_2$. Tekintsük k -t, mint a C, D, E, F pontokra illeszkedő kúpszeletet. Ekkor Desargues involúciótételét alkalmazva kapjuk, hogy (P_1P_2) , (QR) és (P_2Y) egy involúció megfelelő pontpárjai. Ha k -t, mint az A, B, C, F pontokra illeszkedő kúpszeletet tekintjük, hasonlóan adódik, hogy (P_1P_2) , (QR) és (P_1Y) egy involúció megfelelő pontpárjai. Mivel két megfelelő pontpár egyértelműen meghatározza az involúciót, kapjuk, hogy $P_1 = P_2$ valóban teljesül.

Desargues involúciótételének felhasználásával meghatározhatóak két kúpszelet metszéspontjai, amennyiben ismert a két kúpszelet két közös pontja, és ezen kívül mindkét kúpszelet három-három pontja. Belátható, hogy ha ennél kevesebb közös pont adott, a szerkesztés nem végezhető el euklideszi eszközökkel.

Legyen a k_1 kúpszelet öt pontja A, B, C_1, C_2, C_3 , és a k_2 kúpszelet öt



Két kúpszelet metszéspontjainak szerkesztése két közös pont ismeretében.

pontja A, B, D_1, D_2 és D_3 . Jelölje a további két keresett közös pontot X és Y . Világos, hogy elegendő az $\overleftrightarrow{XY}$ egyenest meghatározni, ugyanis annak tetszőleges kúpszelettel közös pontjai a Steiner-szerkesztés segítségével meghatározhatóak. Az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{XY}$ egyenespár a két kúpszelet négy metszéspontja által meghatározott kúpszeletsor elfajuló eleme. Ezen kúpszeletsor elemei tetszőleges, az A, B, X, Y pontokra nem illeszkedő egyenesből egy involúció megfelelő pontpárjait metszik ki. Tekintsük például a $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ egyenest. Ezen egyenes mindkét kúpszelettel alkotott további metszéspontjai a Pascal-tétel alkalmazásával meghatározhatóak, ezen két megfelelő pontpár meghatározza az egyenesből kimetszett involúciót. Ezen involúcióban az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes és az involúció tartóegyenésének metszéspontjának képe illeszkedik a keresett $\overleftrightarrow{XY}$ egyenesre. Valamely további, például a $\overleftrightarrow{C_2D_2}$ egyenesből kimetszett involúció segítségével az $\overleftrightarrow{XY}$ egyenes még egy pontját meghatározhatjuk.

14.3. Tétel. *Legyen $ABCD$ egy teljes négyszög, és X az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont. Ekkor az X pont $ABCD$ négyszög csúcsaira illeszkedő kúpszeletekre vonatkozó polárisai sugársort alkotnak.*

Bizonyítás: Legyen k az A, B, C, D és X pontokra illeszkedő kúpszelet. Legyen x ezen kúpszelet X pontra illeszkedő érintője. Desargues involúciótétele alapján a szóban forgó kúpszeletsor elemei x -et egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszik, X ezen involúció egy fixpontja. Jelölje az involúció másik fixpontját X' . Jelölje a kúpszeletsor valamely további kúpszeletét l , és legyenek az x egyenes és l közös pontjai L_1 és L_2 . Ekkor e két pont az x egyenesből kimetszett involúció egy megfelelő pontpárját alkotja, így $(XX'L_1L_2)$ harmonikus pontnégyes. Így az X pont l -re vonatkozó polárisa áthalad X' -n, tehát valóban, az X pont kúpszeletsor elemeire vonatkozó polárisai az X' tartópontú sugársor elemei. ■

A fenti tételben meghatározott sugársor X' tartópontját szokás az X pont a kúpszeletsor tetszőleges két elemére vonatkozó *Steiner-rokonának* is nevezni.

Desargues teljes négyszögekre vonatkozó tételének értelmében az előző bizonyításban szereplő, X és X' fixpontokkal rendelkező involúcióban az $ABCD$ négyszög szemköztes oldalegyenes-párjainak x -el való metszéspontjai megfelelő pontpárok. Így e metszéspont-párokat X és X' harmonikusan választja el. Ebből következik, hogy a teljes négyszög tetszőleges P átlópontját tekintve $\overleftrightarrow{PX}, \overleftrightarrow{PX'}$, valamint a P -re illeszkedő két négyszögoldal harmonikus sugárnégyest alkot. Ennek a ténynek a duálisa éppen **6.10.**

14.4. Következmény. *Legyen $ABCD$ egy teljes négyszög, és e a négyszög csúcsainak egyikére sem illeszkedő egyenes. Ekkor az e egyenes $ABCD$ négyszög csúcsaira illeszkedő kúpszeletekre vonatkozó pólusai egy kúpszeletre illeszkednek.*

Bizonyítás: Legyen X és Y az e egyenes két pontja. Az e egyenes valamely kúpszeletre vonatkozó pólusa az X és Y pontok polárisainak metszéspontja. Az X és Y pontok kúpszeletsor elemeire vonatkozó polárisai két, egymással projektív kapcsolatban lévő sugársort alkotnak, így metszéspontjaik egy kúpszeletre illeszkednek. ■

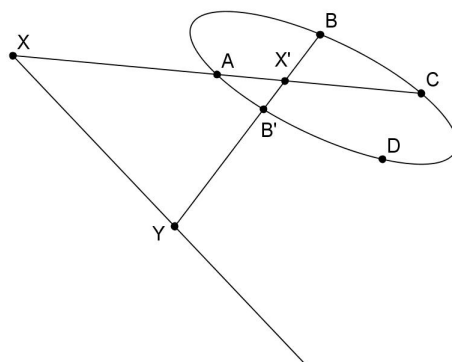
14.5. Állítás és definíció. *Legyen adott az $ABCD$ teljes négyszög, és az e egyenes, amely a négyszög egyik csúcsára sem illeszkedik. Tekintsük az e egyenes $ABCD$ -n áthaladó kúpszeletekre vonatkozó pólusai által alkotott kúpszeletet. Ezen kúpszeletre illeszkedik az $ABCD$ négyszög P, Q és R átlópontja, a négy pontra illeszkedő kúpszeletsor által e -ből kimetszett involúció fixpontjai, valamint a teljes négyszög hat egyenesének az e -vel való metszéspontjának a négyszög megfelelő két csúcsára vonatkozó harmonikus konjugáltja. Így e kúpszeletet az e egyenesre és az $ABCD$ négyszögre vonatkozó tizenegy pontos kúpszeletnek nevezzük.*

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy a kúpszeletsor által e -ből kimetszett involúció fixpontjai illeszkednek a kúpszeletre. A kúpszeletsor e -t érintő elemei

ugyanis - ha léteznek - éppen ezen pontokra illeszkednek. Így az e egyenes ezen kúpszeletekre vonatkozó pólusai valóban a fixpontok. Ha nem léteznek a kúpszeletsorban e -t érintő kúpszeletek, az involúciónak nincsenek fixpontjai.

Legyen az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes és e közös pontja X , és az X pont A és C pontokra vonatkozó harmonikus konjugáltja X' . Megmutatjuk, hogy van olyan eleme a kúpszeletsornak, amelynek az e -re vonatkozó pólusa X' . Jelölje $\overleftrightarrow{BX'}$ és e metszéspontját Y , és B harmonikus társát az Y és X' pontokra nézve B' . Ekkor a kúpszeletsor B' -re illeszkedő elemére vonatkozóan az e egyenes pólusa valóban X' ugyanis konjugált az X és Y pontokhoz egyaránt. A teljes négyszög oldalegyeneseseire vonatkozó állítás ugyanígy látható be.

Megmutatjuk végül, hogy a négyszög P , Q és R átlóspontjai is illeszkednek

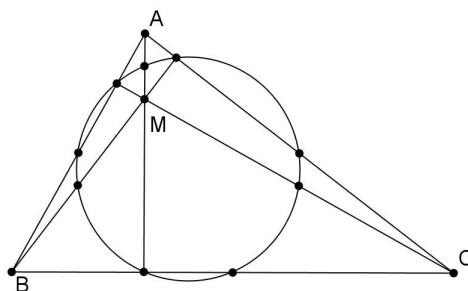


A tizenegy pontos kúpszelet.

a szóban forgó kúpszeletre. Ehhez igazoljuk, hogy a kúpszeletsor tetszőleges elemének az e egyenesre vonatkozó pólusa illeszkedik a P , Q és R pontok, valamint az e -ből kimetszett involúció fixpontjai (K és L) által meghatározott kúpszeletre. Legyen a kúpszeletsor valamely elemének e -vel alkotott metszéspontja S és T . A kúpszeletsor ezen elemének S és T pontbeli érintőinek metszéspontja (M), valamint a K és L pontok e kúpszelet egy polárháromszögét határozzák meg. Azonban a kúpszeletsor elemeinek **11.8.** miatt PQR is polárháromszöge, így **11.12.** felhasználásával adódik, hogy K , L , M , P , Q és R egy kúpszeletre illeszkednek. Tehát valóban, az M pont - ami a kúpszeletsor tetszőleges elemére vonatkozó pólusa az e egyenesnek - illeszkedik a K , L , P , Q és R pontok által meghatározott kúpszeletre. ■

A fenti tétel a valós projektív síkon speciális esetben a háromszöggeometria alábbi jól ismert tételét adja vissza.

14.6. Következmény és definíció. Az *euklideszi sík tetszőleges háromszögének oldalfelező pontjai, magasságainak talppontjai, illetve a magasságpontja és csúcsai által meghatározott szakaszok felezőpontjai egy körre illeszkednek. Ezen kört a háromszög Feuerbach-körének hívjuk.*



A Feuerbach-kör.

Bizonyítás: Tekintsük az ABC háromszög csúspontjaira és annak M magasságpontjára illeszkedő kúpszeletek által meghatározott kúpszeletsort. A szóban forgó pontok mindegyike illeszkedik a kúpszeletsor és az ideális egyenes által meghatározott tizenegy pontos kúpszeletre (14.5.). Valóban, a magasságok talppontjai az $ABCM$ teljes négyszög átlópontjai; a további hat pont pedig az $ABCM$ teljes négyszög hat egyenese esetén a végtelen távoli pont négyszög csúspontjaira vonatkozó harmonikus konjugáltja. A kúpszeletsor által a végtelen távoli egyenesből kimetszett involúcióban éppen a merőleges irányokat jelentő végtelen távoli pontok felelnek meg egymásnak. Így a kúpszeletsor tizenegy pontos kúpszeletére vonatkozóan a konjugált irányok éppen a merőleges irányok, ami azt jelenti, hogy a kúpszelet kör. ■

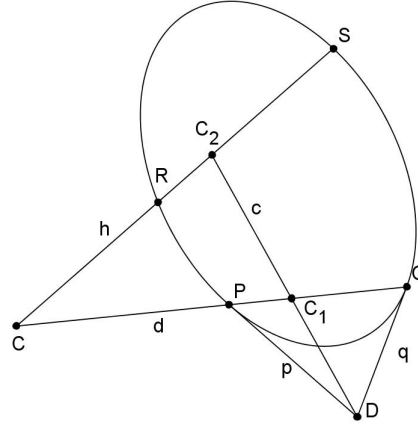
A sík valamely A, B, C pontjain áthaladó, az A pontot az a egyenesben érintő kúpszeletek szintén kúpszeletsort alkotnak. Ebben az esetben is igaz Desargues involúciótétele, amelynek belátása hasonlóan történhet, mint 14.1. esetén, így gyakorló feladat.

14.7. Állítás. *A sík három adott pontjára illeszkedő, és az egyik adott pontban adott érintővel rendelkező kúpszeletek a sík tetszőleges, a pontok egyikére sem illeszkedő egyenesét egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszik.*

14.8. Definíció. *Ha két kúpszeletnek van két közös pontja, és azon pontokban a kúpszeletek érintői is közősek, azt mondjuk, hogy a két kúpszelet kettősen érinti egymást.*

Két adott ponttal és azokban közös érintőkkel rendelkező, kettősen érintkező kúpszeletek is kúpszeletsort alkotnak. Desargues involúciótétele ezen kúpszeletsorra is igaz.

14.9. Állítás. *Két közös ponttal és azokban közös érintőkkel rendelkező kúpszeletek a sík tetszőleges, a közös pontok egyikére sem illeszkedő egyenesét egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszik. Ezen involúció egy fix-pontja a kúpszeletek közös pontjai által meghatározott egyenes és az involúció tartóegyeneseinek metszéspontja.*

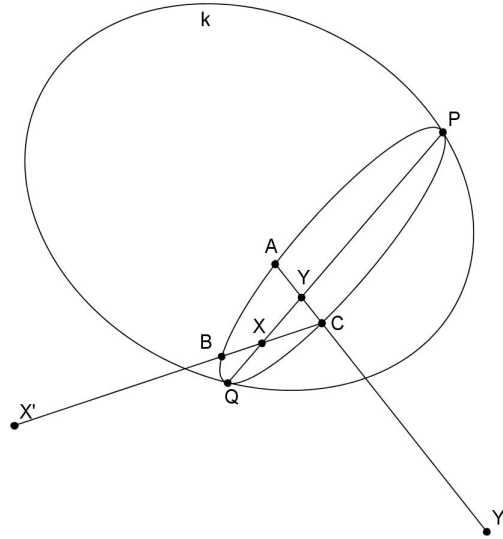


Desargues involúciótétele kettősen érintkező kúpszeletek által alkotott kúpszeletsorra.

Bizonyítás: Jelölje a kúpszeletsor elemeinek közös pontjait P és Q , ezen pontokban a közös érintőket p és q . Jelölje a P és Q pontok egyenesét d , a sík valamely további egyenesét pedig h . Jelöljük d és h közös pontját C -vel. Tekintsük a kúpszeletsor egy tetszőleges elemét, és legyen C polárisa ezen kúpszeletre vonatkozóan c . Legyen c és d közös pontja C_1 , c és h közös pontja pedig C_2 . A c egyenes a p és q egyenesek metszéspontjára és C_1 -re illeszkedő egyenes, a C_1 pont azonban a C pont P és Q pontokra vonatkozó harmonikus konjugáltja. Így C -nek a kúpszeletsor tetszőleges elemére vonatkozóan ugyanaz a polárisa. Tehát a c és h egyenesek C_2 metszéspontja is független a kúpszeletsorbéli elem megválasztásától, és a kúpszeletsor tetszőleges eleme azon involúció megfelelő pontpárjában metszi a h egyenest, melynek fixpontjai C és C_2 . ■

A fenti tétel felhasználásával meghatározható olyan kúpszelet, amely egy adott kúpszeletet kettősen érint, és illeszkedik három adott pontra. Legyen ugyanis az adott kúpszelet k , az adott pontok A , B és C . Tekintsük az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes azon Y , Y' pontpárját, melyek konjugáltak k -ra nézve és harmonikus konjugáltak az A és C pontokra nézve; valamint a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenes azon X , X' pontpárját, amelyek konjugáltak k -ra nézve és harmonikus konjugáltak a B és C pontokra nézve. (Ilyen pontpárok például két involúció közös megfelelő pontpárjaként szerkeszthetők.) Ekkor az $\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{XY'}$, $\overleftrightarrow{X'Y}$ és $\overleftrightarrow{X'Y'}$ egyenesek olyan pontpárokból metszik k -t, amelyek a feltételeket kielégítő kúpszeletek k -val közös pontjai lehetnek; így négy, a feltételeknek megfelelő kúpszelet létezik.

Megmutatjuk, hogy például az $\overleftrightarrow{XY}$ és k metszéspontjaként kapott pontokra és A , B , C -re illeszkedő kúpszelet megfelelő. Jelöljük azon kúpszeletet k_1 -el, amely illeszkedik C -re, valamint a k kúpszeletet a kapott metszéspontokban kettősen érinti, és tekintsük a k és k_1 kúpszeletek által meghatározott kúpszeletsort. Ezen kúpszeletsor elemei az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenest az előző tétel alapján olyan involúció



Adott kúpszeletet kettősen érintő, három adott pontra illeszkedő kúpszelet meghatározása.

megfelelő pontpárjaiban metszik, melynek egy fixpontja Y . Az involúció további fixpontja Y' , így a szerkesztés módjából látható, hogy a kúpszelet illeszkedik az A pontra. Hasonlóan mutatható meg, hogy a k_1 kúpszelet illeszkedik B -re is. Ha A , B és C a k kúpszelet belső pontjai, akkor az X , X' , Y , Y' pontok meghatározásához nem szükséges két involúció közös megfelelő pontpárját szerkeszteni, ugyanis a négy pont az alábbi, egyszerűbb módon is megkapható. Tekintsük azon teljes négyszöget, amelyet a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenes pólusát a B és C pontokkal összekötő egyenesek k -val alkotott metszéspontjai határoznak meg. Látható, hogy ezen teljes négyszög $\overleftrightarrow{BC}$ -re illeszkedő átlópontjai az X és X' pontok. Az Y és Y' pontok hasonlóan határozhatóak meg.

Hasonló módon határozható meg három pontra illeszkedő, két adott egyenest érintő kúpszelet. A két adott egyenest ugyanis egy elfajuló másodrendű görbének tekintve, az előző eljárás alkalmazható. Ebben az esetben akkor mondunk két pontot a metsző egyenespárra vonatkozóan konjugátnak, ha a két egyenessel alkotott metszéspontokra vonatkozóan harmonikus konjugáltak. Ezen megállapodás figyelembevételével a fenti módon igazolható az eljárás helyessége.

15. Feladatok

15.1. Affin és projektív síkok

1. Bizonyítsuk be, hogy az affin síkok axiómarendszere független: adjunk példát olyan illeszkedési geometriákra, amelyekre a három axióma közül pontosan kettő teljesül.
2. Bizonyítsuk be, hogy a projektív síkok axiómarendszere független: adjunk példát olyan illeszkedési geometriákra, amelyekre a három axióma közül pontosan kettő teljesül.
3. Mutassuk meg, hogy egy illeszkedési geometria pontosan akkor projektív sík, ha teljesül rá a (P1) és (P2) tulajdonságok mellett a következő két tulajdonság valamelyike:

(P4) bármely egyenesre illeszkedik legalább három pont, és bármely pontra illeszkedik legalább három egyenes;
(P5) a síknak van legalább két egyenese, és a sík bármely két egyeneséhez létezik olyan pont, amely a két egyenes egyikére sem illeszkedik.
4. Igazoljuk, hogy ha egy projektív sík egy egyenesére $n + 1$ pont illeszkedik ($n \in \mathbb{N}$), akkor minden egyenesére $n + 1$ pont, és minden pontjára $n + 1$ egyenes illeszkedik! Mutassuk meg, hogy ekkor a sík pontjainak és egyeneseinek száma egyaránt $n^2 + n + 1$! (Ezt az n számot a véges projektív sík *rendjének* nevezzük.)
5. Tegyük fel, hogy egy affin sík valamely egyenesére n pont illeszkedik. Határozzuk meg az előző feladat alapján egy tetszőlegesre illeszkedő pontok, egy tetszőleges pontra illeszkedő egyenesek, illetve a sík összes pontjainak és egyeneseinek számát! (Ezt az n számot a véges affin sík *rendjének* mondjuk.)
6. Tegyük fel, hogy egy illeszkedési geometriában
 - bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes;
 - bármely egyenesre n darab pont illeszkedik;
 - a pontok száma n^2 .Igazoljuk, hogy a tekintett illeszkedési geometria affin sík!
7. Tegyük fel, hogy egy illeszkedési geometriában
 - bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes;
 - bármely egyenesre $n + 1$ darab pont illeszkedik;
 - a pontok száma $n^2 + n + 1$.Igazoljuk, hogy a tekintett illeszkedési geometria projektív sík!

8. Tud-e hét jóbarát a hét napjaira hét olyan találkozót szervezni, hogy bármely két barátához pontosan egy olyan találkozó legyen, amelyen mindketten részt vesznek?

A továbbiakban feltételezzük, hogy amennyiben mást nem mondunk, olyan projektív síkon dolgozunk, amelyen teljesül a fundamentális tulajdonság.

15.2. Perspektivitások és projektivitások

9. Adottak egy e egyenes A, B, C , és az e' egyenes A', B', C' pontjai. Szerkesszük meg az e egyenes egy további pontjának képét annál a projektivitásnál, amelynél A képe A' , B képe B' , és C képe C' ! Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is az euklideszi sík projektív lezártján dolgozva, amikor az adott pontok valamelyike végtelen távoli pont!
10. Adottak egy P pontra illeszkedő a, b, c , és a P' pontra illeszkedő a', b', c' egyenesek. Szerkesszük meg a P pontra illeszkedő valamely további egyenes képét annál a projektivitásnál, amelynél a képe a' , b képe b' , és c képe c' !
11. Legyenek A, B és C kollineáris pontok, és jelölje π az (ABC) ponthármas elemeihez rendre a (BCA) ponthármas elemeit rendelő projektivitást.
 - a. Adjuk meg π -t három perspektivitas kompozíciójaként!
 - b. Tegyük fel, hogy π -nél egy D pont képe E , és E képe F . Határozzuk meg az F pont képét!
12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyenest önmagára képező projektivitásnak van fixpontja, akkor felírható két perspektivitas kompozíciójaként!
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy projektív sík tetszőleges olyan, valamely egyenest önmagára képező projektivitása, amelynek van fixpontja, felírható két perspektivitas kompozíciójaként, akkor a projektív síkon teljesül a Staudt-tulajdonság!
14. Adott egy egyenest önmagára képező projektivitas egy fixpontja, és két további pont képe. Szerkesszük meg az egyenes tetszőleges pontjának képét! Szerkesszük meg a projektivitas további fixpontját!
15. Adott egy egyenest önmagára képező projektivitas két fixpontja és egy további pont képe. Szerkesszük meg az egyenes tetszőleges pontjának képét!

15.3. A fundamentális tulajdonság ellenőrzése a valós projektív síkon

16. Legyenek adottak az A, B, C kollineáris pontok, továbbá az A' és B' pontok. Szerkesszük meg azt a C' pontot, amelyre $(A'B'C') = (ABC)$ teljesül!
17. Adott A, B pontok és λ valós szám esetén szerkesszük meg az euklideszi sík azon C pontját, amelyre $(ABC) = \lambda$ teljesül!
18. Legyen adott az $(ABCD)$ kollineáris pontnégyes és az $(A'B'C')$ kollineáris ponthármass! Szerkesszük meg azt a D' pontot, amelyre $(A'B'C'D') = (ABCD)$ teljesül!
19. Adott A, B, C kollineáris pontok és λ valós szám esetén szerkesszük meg az euklideszi sík azon D pontját, amelyre $(ABCD) = \lambda$ teljesül!
20. Legyen $ABCD$ az euklideszi sík tetszőleges konvex négyszöge! Jelölje az A csúcson keresztül a $\overleftrightarrow{BD}$ átlóegyenessel húzott párhuzamos és a B csúcson keresztül az $\overleftrightarrow{AC}$ átlóegyenessel húzott párhuzamos egyenesek metszéspontját E . Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{EC}$ egyenes ugyanolyan arányban osztja a $\overleftrightarrow{BD}$ átlót, mint az $\overleftrightarrow{ED}$ egyenes az $\overleftrightarrow{AC}$ átlót!
21. Legyen adott az euklideszi síkon egy ABC háromszög, és legyenek $A_1 \in \overleftrightarrow{BC}$, $B_1 \in \overleftrightarrow{CA}$, $C_1 \in \overleftrightarrow{AB}$ a csúcsoktól különböző pontok!
 - a. Igazoljuk, hogy A_1, B_1 és C_1 akkor és csak akkor kollineáris, ha $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1$! (*Menelaosz tétele*)
 - b. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{AA_1}, \overleftrightarrow{BB_1}$ és $\overleftrightarrow{CC_1}$ akkor és csak akkor konkurrensak vagy párhuzamosak, ha $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$! (*Ceva tétele*)
22. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges háromszög beírt körének az oldalegyenesekre illeszkedő érintési pontjait a szemköztes csúcsokkal összekötő egyenesek konkurrensak! (*Gergonne-pont*)
23. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges háromszög hozzáírt körének az oldalakra illeszkedő érintési pontjait a szemköztes csúcsokkal összekötő egyenesek konkurrensak! (*Nagel-pont*)

15.4. Desargues-féle és Pappos-féle projektív síkok

24. Adott egy P pont, valamint az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontját P -vel összekötő egyenest!
25. Adottak az e és f , valamint az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az e és f egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontját az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontjával összekötő egyenest! (Feltételezzük, hogy az e és m , valamint f és n egyenespárok metszéspontjai hozzáférhetőek.)

26. Adottak az a, b, c konkurens egyenesek és az egyenesek egyikére sem illeszkedő X, Y, Z pontok. Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek csúcsai az adott egyenesekre illeszkednek, és oldalegyeneseire illeszkednek a megadott pontok!
27. Adott az euklideszi síkon egy e egyenes, továbbá az m és n egyenesek. Szerkesszük meg az m és n egyenesek „hozzá nem férhető” metszéspontjára illeszkedő, e -vel párhuzamos egyenest!
28. Valaki megrajzolt egy háromszöget úgy, hogy a csúcsai nem fértek rá a téglalap alakú papírlapra, de legalább az oldalaiból egy-egy szakasz látszik. Tudjuk, hogy a háromszög magasságpontja valahol a papírlapon van. Ezen a papírlapon dolgozva szerkesszük meg a háromszög magasságpontját!
29. Legyen adott egy ABC háromszög, valamint az M, N és P pontok! Legyen a $\overleftrightarrow{BP}$ és $\overleftrightarrow{CN}$ egyenesek metszéspontja R , a $\overleftrightarrow{CM}$ és $\overleftrightarrow{AP}$ egyenesek metszéspontja Q , valamint az $\overleftrightarrow{AN}$ és $\overleftrightarrow{BM}$ egyenesek metszéspontja S ! Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{AR}, \overleftrightarrow{BQ}$ és $\overleftrightarrow{CS}$ egyenesek pontosan akkor konkurrens, ha az $\overleftrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{BN}$ és $\overleftrightarrow{CP}$ egyenesek konkurrens!
30. Igazoljuk, hogy az euklideszi síkon bármely háromszög súlyvonalai konkurrens!
31. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges háromszög magasságpontja, súlypontja, és körülírt körének középpontja kollineáris! (*Euler-egyenes*)
32. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges háromszög esetén a súlypont, a beírt kör középpontja, és a középvonalak által alkotott háromszög beírt körének középpontja (ún. *Spieker-pont*) kollineárisak! (*Nagel-egyenes*)
33. Adott az euklideszi síkon három kör, és tegyük fel, hogy bármely kettőnek léteznek közös külső érintői. Igazoljuk, hogy bármely két kör közös külső érintőinek metszéspontjai ugyanarra az egyenesre esnek! (*Monge tétele*)
34. Legyen az euklideszi síkon $PQRS$ egy paralelogramma, X a paralelogramma tetszőleges belső pontja. Jelölje a $\overleftrightarrow{PQ}$ oldalegyenessel X -en keresztül húzott párhuzamos metszéspontját $\overleftrightarrow{PS}$ -el M , $\overleftrightarrow{QR}$ -el N ; a $\overleftrightarrow{QR}$ oldalegyenessel X -en keresztül húzott párhuzamos metszéspontját $\overleftrightarrow{PQ}$ -val K , $\overleftrightarrow{RS}$ -el L . Bizonyítsuk be, hogy Q, S és $\overleftrightarrow{MK} \cap \overleftrightarrow{NL}$ kollineáris!
35. Tekintsünk az euklideszi síkon egy $ABCD$ paralelogrammát! Legyen P az ABD háromszög belső pontja; $\overleftrightarrow{BP}$ és $\overleftrightarrow{AD}$ metszéspontja Q , $\overleftrightarrow{DP}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ metszéspontja R . A Q -n keresztül $\overleftrightarrow{AB}$ -vel húzott párhuzamos és az R -en keresztül $\overleftrightarrow{AD}$ -vel húzott párhuzamos metszéspontja legyen S . Bizonyítsuk be, hogy C, P és S kollineáris!

36. Bizonyítsuk be a valós projektív síkon, hogy ha $A_2B_2C_2$ az $A_1B_1C_1$ háromszögbe beírt háromszög, $A_3B_3C_3$ az $A_2B_2C_2$ háromszögbe beírt háromszög, továbbá igaz, hogy $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ pontra nézve perspektívek, valamint $A_2B_2C_2$ és $A_3B_3C_3$ pontra nézve perspektívek, akkor $A_1B_1C_1$ és $A_3B_3C_3$ is pontra nézve perspektívek!
37. Bizonyítsuk be, hogy egy projektív síkon az alábbi tulajdonság ekvivalens a Desargues-tulajdonsággal: a síkon tetszőleges e_1, e_2, e_3 konkurrens egyenesek és P_1, P_2 rájuk nem illeszkedő pontok esetén az $e_1 \overset{P_1}{\wedge} e_2 \overset{P_2}{\wedge} e_3$ projektivitás perspektivitás.

15.5. Harmonikus pontnégyesek

38. Adott A, B, C kollineáris pontokhoz szerkesszünk olyan D pontot, hogy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes legyen!
39. Adott a, b, c konkurrens egyenesekhez szerkesszünk olyan d egyenest, hogy $(abcd)$ harmonikus sugárnégyes legyen!
40. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes végtelen távoli pontjának harmonikus társa (AB) -re vonatkozóan az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja!
41. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon egy trapéz szárainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait!
42. Adott az euklideszi síkon egy $\overline{AB}$ szakasz és annak F felezőpontja. Csak vonalzó használatával szerkesszünk a sík tetszőleges pontján át $\overleftrightarrow{AB}$ -vel párhuzamos egyenest!
43. Adott az euklideszi síkon egy $\overline{AB}$ szakasz és egy $\overleftrightarrow{AB}$ -vel párhuzamos e egyenes. Szerkesszük meg csak vonalzóval $\overline{AB}$ felezőpontját!
44. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges trapéz szárainak E metszéspontján át az alapokkal húzott párhuzamost a trapéz átlói olyan M ill. N pontokban metszik, hogy az $\overline{MN}$ szakasz felezőpontja E !
45. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges trapéz átlóinak G metszéspontján át az alapokkal húzott párhuzamos a szárakat olyan M ill. N pontokban metszi, hogy az $\overline{MN}$ szakasz felezőpontja G !
46. Igazoljuk, hogy az euklideszi síkon tetszőleges paralelogramma átlóinak metszéspontján át az oldalakkal húzott párhuzamosok középvonalak, azaz illeszkednek a megfelelő oldalak felezőpontjaira!
47. Mutassuk meg, hogy az euklideszi síkon tetszőleges paralelogramma átlói felezik egymást!

48. Ellenőrizzük, hogy az euklideszi síkon tetszőleges szög szárait harmonikusan választja el a belső és külső szögfelező!
49. Tekintsünk az euklideszi síkon egy ABC hegyesszögű háromszöget és tegyük fel, hogy a $BAC\angle$ mértéke kisebb, mint az $ABC\angle$ mértéke. Legyen az A -ból induló magasság talppontja R és a C -ből induló magasság talppontja P . Legyen Q olyan, P -től különböző pontja az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesnek, amelyre $d(A, P) \cdot d(B, Q) = d(A, Q) \cdot d(B, P)$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy az $\overleftrightarrow{RB}$ egyenes felezi a $PRQ\angle$ szöget!
50. Tegyük fel, hogy ABC az euklideszi sík egy nem egyenlő szárú háromszöge. Legyenek az $\overline{AC}$ oldalra illeszkedő P és Q pontok olyanok, amelyekre az $ABP\angle$ és a $QBC\angle$ ugyanakkora. Legyen az A -ból induló szögfelező metszéspontja $\overline{BP}$ -vel K és $\overline{BQ}$ -val M ; a C -ből induló szögfelező metszéspontja $\overline{BP}$ -vel L és $\overline{BQ}$ -val N . Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{KN}$ és $\overleftrightarrow{LM}$ konkurrens!
51. Adott egy A pont és a b, c, d egyenesek. Szerkesszünk az A pontra illeszkedő olyan egyenest, melynek a megfelelő adott egyenesekkel közös B, C, D pontjaira teljesül, hogy $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes!
52. Legyenek M, A, A' és A'' kollineáris pontok. Bizonyítsuk be, hogy az (MAA') és $(MA'A'')$ ponthármasok által meghatározott projektivitás pontosan akkor parabolikus, ha $(MA'AA'')$ harmonikus pontnégyes!
53. Tekintsünk egy ABC háromszöget és legyenek D, E, F rendre a $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$ oldalegyenesek pontjai úgy, hogy $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BE}$ és $\overleftrightarrow{CF}$ egy közös G pontra illeszkedjen. Legyen $\overleftrightarrow{AG} \cap \overleftrightarrow{EF} = H, \overleftrightarrow{BH} \cap \overleftrightarrow{DE} = J$ és $\overleftrightarrow{CH} \cap \overleftrightarrow{DF} = I$.
- Bizonyítsuk be, hogy I, A és J kollineárisak!
 - Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{BI}, \overleftrightarrow{CJ}$ és $\overleftrightarrow{AD}$ konkurrensak!

15.6. Involúciók

54. Adott egy egyenesen értelmezett involúció két megfelelő pontpárja. Szerkesszük meg tetszőleges további pont képét!
55. Egy pontsoron értelmezett involúció középpontján az egyenes végtelen távoli pontjának képét értjük. Szerkesszük meg egy involúció középpontját, ha adott az involúció két megfelelő pontpárja!
56. Adott egy egyenesen értelmezett involúció egy fixpontja, és egy további pont képe. Szerkesszük meg az involúció másik fixpontját, illetve az egyenes tetszőleges pontjának képét!
57. Adott egy egyenesen értelmezett involúció két fixpontja. Szerkesszük meg egy tetszőleges további pont képét!

58. Adott egy sugárinvolúció két megfelelő egyenespárja. Szerkesszük meg tetszőleges további egyenes képét!
59. Adott egy sugárinvolúció egy fixeleme, és egy további egyenes képe. Szerkesszük meg az involúció másik fixegyenesét, és valamely további egyenes képét!
60. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi sík tetszőleges háromszögének magasságegyenesei konkurrensek!
61. Adott egy teljes négyszög és egy, az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont. Igazoljuk, hogy van olyan pont, amely az adott pontot a négyszög bármely két átellenes oldalpárjától harmonikusan választja el! (Azaz a pontok egyenesén a két pont és bármely két átellenes oldalegyenessel alkotott metszéspont harmonikus pontnégyest alkot.)
62. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges teljes négyoldal szemköztes csúcspontpárjai által meghatározott szakaszok felezőpontjai kollineárisak! (*Newton-Gauss egyenes*)
63. Legyen ABC az euklideszi sík egy tetszőleges háromszöge, e tetszőleges egyenes, valamint E az e egyenes egy tetszőleges pontja. Jelölje e metszéspontjait a háromszög megfelelő oldalegyenseivel A_1, B_1 illetve C_1 ; e pontok E pontra vonatkozó tükröképeit A_2, B_2 illetve C_2 . Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{AA_2}, \overleftrightarrow{BB_2}$ és $\overleftrightarrow{CC_2}$ konkurrensek!

15.7. Centrális kollineációk

64. Adott egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és a sík egy (a centrumtól különböző, tengelyre nem illeszkedő) pontjának képe. Szerkesszük meg valamely további pont képét!
65. Adott egy centrális kollineáció centruma, a tengelyének egy pontja, és a sík egy további egyenesének képe. Szerkesszük meg egy további adott pont képét!
66. Adott egy centrális kollineáció tengelyének egy pontja, a sík egy pontjának képe, és a sík egy egyenesének képe. Szerkesszük meg a kollineáció centrumát és tengelyét!
67. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és a sík egy pontjának képe. Szerkesszük meg az ideális egyenes képét (r' ellentengely) és az ideális egyenes ösképet (q ellentengely)! Igazoljuk, hogy a két ellentengely párhuzamos!
68. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és a q ellentengely. Szerkesszük meg a sík egy pontjának képét!

69. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció centruma, tengelye, és az r' ellentengely. Szerkesszük meg a sík egy pontjának képét!
70. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció tengelye, q ellentengelye, és a sík egy pontjának képe. Szerkesszük meg a kollineáció centrumát!
71. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció két ellentengelye és a sík egy egyenesének képe. Szerkesszük meg a kollineáció tengelyét és centrumát!
72. Adott egy kibővített affin síkon egy centrális kollineáció centruma és két ellentengelye. Szerkesszük meg a sík egy adott pontjának képét!
73. Adott egy kibővített affin síkon egy eláció centruma, tengelye, és a sík egy A pontjának A' képe. Szerkesszük meg a sík tetszőleges további pontjának képét, valamint az eláció ellentengelyeit!
74. Adott egy kibővített affin sík egy tengelyes affinitásának tengelye és a sík egy pontjának képe. Szerkesszük meg a sík valamely további pontjának képét!
75. Adott egy kibővített affin sík egy tengelyes affinitásának tengelye és a sík egy pontjának képe. Szerkesszük meg a sík egy, a tengellyel párhuzamos egyenesének képét!
76. Adott egy kibővített affin sík egy tengelyes affinitásának tengelye és a sík egy pontjának képe úgy, hogy az affinitás iránya párhuzamos legyen a tengellyel. Szerkesszük meg a sík valamely további pontjának képét!
77. Adott az euklideszi síkon egy paralelogramma. Adjunk meg olyan tengelyes affinitást, amelynél a tekintett paralelogramma képe
- rombusz;
 - téglalap;
 - négyzet.
78. Adott az euklideszi síkon egy háromszög. Adjunk meg olyan tengelyes affinitást, amelynél a tekintett háromszög képe
- egyenlő szárú derékszögű háromszög;
 - szabályos háromszög.
79. Adott az euklideszi síkon egy tetszőleges négyszög. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelynél a tekintett négyszög képe
- paralelogramma;
 - derékszögű trapéz;
 - rombusz;

- d. téglalap;
 - e. négyzet;
 - f. előre megadott a oldalhosszúságú négyzet.
80. Adott az euklideszi sík egy négyzetének valamely kollineáció általi képe. Szerkesszük meg a négyzet egy kijelölt oldalán
- a. a felezőpont kollineációs képét;
 - b. valamelyik harmadolópont kollineációs képét;
 - c. az egyik harmadolópont kollineációs képének ismeretében a másik harmadolópont kollineációs képét!
81. Legyen adott az euklideszi síkon egy szakasz és annak az egyik harmadolópontja. Szerkesszük meg csak vonalzó alkalmazásával a másik harmadolópontot!
82. Tegyük fel, hogy l egy projektív sík tetszőleges egyenese. Bizonyítsuk be, hogy ha a sík tetszőleges, l -re nem illeszkedő Q pontját tekintve (Q, l) -tranzitív, akkor tetszőleges, l -re illeszkedő P pont esetén (P, l) -tranzitív!

15.8. Projektív kollineációk

83. Adottak az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ általános helyzetű pontnégyesek. Szerkesszük meg a sík tetszőleges további pontjának képét annál a projektív kollineációnál, amelynél A képe A' , B képe B' , C képe C' , és D képe D' !
84. Adottak az euklideszi síkon az ABC és $A'B'C'$ nem kollineáris ponthármak. Szerkesszük meg a sík tetszőleges további pontjának képét annál az affinitásnál, amelynél A képe A' , B képe B' , és C képe C' !
85. Adott egy harmonikus homológia centruma és tengelye.
- a. Szerkesszük meg egy tetszőleges pont képét!
 - b. Szerkesszük meg az ellentengelyeket! Mit állíthatunk tetszőleges harmonikus homológia ellentengelyeiről?
86. Igazoljuk, hogy bármely két, közös tengelyű harmonikus homológia kompozíciója eláció!

15.9. Kúpszeletek, Pascal tétele

87. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg a kúpszelet valamely további pontját a kúpszelet definíciója alapján!
88. Adott egy kúpszelet öt pontja, és egy adott pontra illeszkedő e egyenes. Szerkesszük meg e további közös pontját a kúpszelettel!

89. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg valamelyik adott pontban a kúpszelet érintőjét!
90. Adott egy kúpszelet négy pontja, és az egyik pontban az érintő. Szerkesszük meg egy további adott pontban a kúpszelet érintőjét!
91. Adott egy kúpszelet négy pontja, és az egyik pontban az érintő, továbbá egy, erre a pontra illeszkedő további e egyenes. Szerkesszük meg e másik, az adott kúpszeletre illeszkedő pontját!
92. Adott egy kúpszelet három pontja, ezek közül kettőben az érintő. Szerkesszünk meg a kúpszelet valamely további pontját!
93. Adott egy kúpszelet három pontja, ezek közül kettőben az érintő. Szerkesszük meg a kúpszelet harmadik adott pontra illeszkedő érintőjét!
94. Adott egy kúpszelet öt érintője, és az egyikre illeszkedő P pont. Szerkesszük meg a kúpszelet P -re illeszkedő másik érintőjét!
95. Adott egy kúpszelet öt érintője. Szerkesszük meg valamelyik adott érintőre illeszkedő érintési pontot!
96. Adott egy kúpszelet négy érintője, és az egyiken az érintési pont. Szerkesszük meg valamely másik adott érintőre illeszkedő érintési pontot!
97. Adott egy kibővített affin síkon egy kúpszelet öt érintője. Szerkesszük meg a valamelyik adott érintővel párhuzamos további érintőt!
98. Legyen adott az euklideszi síkon egy ABC háromszög, és legyenek $A_1, A_2 \in \overleftrightarrow{BC}$, $B_1, B_2 \in \overleftrightarrow{CA}$, $C_1, C_2 \in \overleftrightarrow{AB}$ a csúcsoktól különböző pontok! Igazoljuk, hogy A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 és C_2 akkor és csak akkor illeszkedik egy másodrendű görbére, ha $(ABC_1)(ABC_2)(BCA_1)(BCA_2)(CAB_1)(CAB_2) = 1!$ (*Carnot tétele*)

15.10. Pólus és poláris; kúpszeletek kibővített affin síkon

99. Adott egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg valamely további pont kúpszeletre vonatkozó polárisát!
100. Igazoljuk, hogy az euklideszi síkon tetszőleges körbe írt teljes négyszög átlói által meghatározott háromszög magasságpontja a kör középpontja!
101. Adott egy kúpszelet három pontja és a sík valamely egyenesén indukált elliptikus involúció. Szerkesszük meg a kúpszelet egy további pontját!
102. Adott egy kibővített affin síkon egy parabola három pontja és tengelyének iránya. Szerkesszük meg valamelyik adott pontban a parabola érintőjét!

103. Adott egy kibővített affin síkon egy hiperbola két aszimptotája és egy pontja. Szerkesszük meg ebben a pontban a hiperbola érintőjét!
104. Adott az euklideszi síkon egy hiperbola két aszimptotája, egy P pontja, és egy P -re illeszkedő e egyenes. Szerkesszük meg e és a hiperbola P -től különböző Q metszéspontját! Igazoljuk, hogy e és az aszimptoták metszéspontjait A_1 -el illetve A_2 -vel jelölve, $d(P, A_1) = d(Q, A_2)$.
105. Adott egy kibővített affin síkon egy hiperbola négy pontja és egy aszimptota iránya. Szerkesszük meg a hiperbola aszimptotáit!
106. Adott egy kibővített affin síkon egy parabola négy érintője, és egy e egyenes. Szerkesszük meg a parabola e -vel párhuzamos érintőjét!
107. Adott az euklideszi síkon egy parabola három érintője, és ezek közül egyikben az érintési pont. Szerkesszük meg a parabola tengelyirányát!
108. Adott az euklideszi síkon egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg a parabola tengelyét!
109. Igazoljuk, hogy az euklideszi sík tetszőleges parabolája esetén bármely két érintő metszéspontját az érintőkre illeszkedő parabolapontok által meghatározott szakasz felezőpontjával összekötő egyenes párhuzamos a parabola tengelyével!
110. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi sík tetszőleges háromszöge esetén a beírt kör oldalakra illeszkedő érintési pontjait a szemköztes csúcsokkal összekötő szakaszok egy ponton mennek át!
111. Igazoljuk, hogy az euklideszi síkon bármely érintőnégyyszög átlói, valamint a beírt körének a szemközti oldalakon levő érintési pontjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át! Mutassuk meg, hogy az említett négy egyenes harmonikus sugárnégyest alkot!
112. Adott az euklideszi sík egy ABC háromszöge. Tetszőleges $0 < t < 1$ esetén legyen $U(t)$ illetve $V(t)$ az $\overline{AB}$ illetve a $\overline{BC}$ szakaszt $\frac{t}{1-t}$ arányban osztó pont. Igazoljuk, hogy létezik olyan parabola, amely az összes $\overleftrightarrow{U(t)V(t)}$ egyenest érinti!
113. Tegyük fel, hogy az euklideszi sík ABC és $A'B'C'$ háromszögeinek körülírt köre megegyezik. Legyen $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = X$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = Y$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = Z$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = U$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = V$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = W$. Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{XU}$, $\overleftrightarrow{YV}$, $\overleftrightarrow{ZW}$ egyenesek konkurrenszek!
114. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi síkon tetszőleges kúpszelet párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy átmérőre illeszkednek és ez az átmérő konjugált az eredeti húrokkal párhuzamos átmérőhöz!

115. Bizonyítsuk be, hogy az euklideszi sík tetszőleges paralelogrammája köré írt kúpszelet középpontja a paralelogramma átlóinak metszéspontja!
116. Legyen az euklideszi síkon $ABCD$ szimmetrikus trapéz, amelynek alapjai $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$, szárainak metszéspontja P . Legyen a trapéz köré írt kör A és C pontjához húzható érintők metszéspontja Q . Igazoljuk, hogy a $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesek párhuzamosak!
117. Tegyük fel, hogy az euklideszi síkon az $ABCD$ érintőnégyyszög $\overline{AB}$ illetve $\overline{BC}$ oldalai a beírt kört rendre az E és F pontokban érintik. Jelölje az $\overline{AC}$ átló és a beírt kör közös pontjait P és Q . Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EP}$ és $\overleftrightarrow{FQ}$ konkurrens egyenesek!
118. Legyen ABC az euklideszi sík tetszőleges háromszöge, amelynek beírt köre a $\overline{BC}$ oldalt a D , az $\overline{AC}$ oldalt az E , az $\overline{AB}$ oldalt az F pontban érinti. Legyen G a $\overline{CF}$ szakasz, H a $\overline{BE}$ szakasz további közös pontja a beírt körrel. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{EF}$ és $\overleftrightarrow{GH}$ konkurrensak!
119. Legyen ABC az euklideszi sík tetszőleges háromszöge, amelynek beírt köre a $\overline{BC}$ oldalt a D , az $\overline{AC}$ oldalt az E , az $\overline{AB}$ oldalt az F pontban érinti. Legyen P a $\overline{BE}$ szakasz, Q a $\overline{CF}$ szakasz további közös pontja a beírt körrel. Legyen továbbá $M := \overleftrightarrow{EQ} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Mutassuk meg, hogy $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{MF}$ és $\overleftrightarrow{DE}$ konkurrensak!
120. Legyen ABC az euklideszi sík tetszőleges háromszöge, amelynek beírt köre az $\overline{AB}$ oldalt az M , az $\overline{AC}$ oldalt az N pontban érinti. Legyen P az $\overleftrightarrow{MN}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ egyenesek közös pontja. A beírt kör $\overleftrightarrow{BC}$ oldalegyenessel párhuzamos érintője messe az $\overline{AB}$ oldalt a D , a $\overline{AC}$ oldalt az E pontban. Legyen F a $\overline{DE}$ szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{PF}$ érinti az ABC háromszög beírt körét!
121. Legyen ABC az euklideszi sík tetszőleges háromszöge, amelynek a k beírt köre a megfelelő oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Az $\overleftrightarrow{AB}$ -vel párhuzamos, k -t érintő egyenes az $\overleftrightarrow{AC}$ és $\overleftrightarrow{BC}$ egyeneseket rendre az X és Y pontokban metszi. Legyen az $\overline{XY}$ szakasz felezőpontja F . Mutassuk meg, hogy $\overleftrightarrow{XC_1}$, $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ és $\overleftrightarrow{AF}$ egy ponton haladnak át!
122. Legyen adott az euklideszi sík egy köre és az arra illeszkedő A és B pontok. Legyen M az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja; és tekintsünk két további M -re illeszkedő egyenest, amelyek a kört a C, D illetve E, F pontpárokbán metszik. Jelölje X és Y az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes metszéspontját rendre a $\overleftrightarrow{CF}$ és $\overleftrightarrow{DE}$ egyenesekkel. Bizonyítsuk be, hogy M az $\overline{XY}$ szakasz felezőpontja! (*pillangó-tétel*)
123. Legyen ABC tetszőleges háromszög az euklideszi síkon, és P tetszőleges, az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont. Tegyük fel, hogy $\overleftrightarrow{AP}$ a

háromszög körülírt körét A -n kívül az R pontban metszi. Legyen K $\overleftrightarrow{BC}$ tetszőleges pontja. A $\overleftrightarrow{KA}$ illetve $\overleftrightarrow{KR}$ egyenesek és a körülírt kör további metszéspontjait jelölje L illetve M . Legyen továbbá $\overleftrightarrow{KP} \cap \overleftrightarrow{AB} = X$, $\overleftrightarrow{KP} \cap \overleftrightarrow{AC} = Y$, $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{BC} = Q$. Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{CX}$ és $\overleftrightarrow{BY}$ konkurens egyenesek!

124. Legyen ABC tetszőleges háromszög az euklideszi síkon, és jelölje a beírt kör érintési pontjait a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ oldalakon rendre D , E , F . Legyen $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AB} = P$. Tekintsünk egy tetszőleges C -re illeszkedő egyenest, amelynek $\overleftrightarrow{AB}$ -vel és $\overleftrightarrow{EF}$ -el közös pontjai rendre N és M . Legyen továbbá O a beírt kör középpontja, valamint $\overleftrightarrow{PM} \cap \overleftrightarrow{AC} = Q$. Bizonyítsuk be, hogy $\overleftrightarrow{IN}$ és $\overleftrightarrow{FQ}$ merőleges egyenesek!
125. Tekintsünk egy kúpszeletet és legyen t tetszőleges, a kúpszeletet nem érintő egyenes. Igazoljuk, hogy az a harmonikus homológia, amelynek tengelye t és centruma t pólusa, a tekintett kúpszeletet invariánsan hagyja (azaz minden kúpszeletpont kollineációs képe is a kúpszeletre illeszkedik)!
126. Legyen ABC tetszőleges háromszög az euklideszi síkon, amelynek beírt köre k . Tegyük fel, hogy k érintési pontja az $\overleftrightarrow{AB}$ oldalon D , $\overleftrightarrow{AD}$ további metszéspontja k -val E , és F a $\overleftrightarrow{DE}$ szakasz egy tetszőleges pontja. Jelölje a $\overleftrightarrow{BF}$ és $\overleftrightarrow{CF}$ szakaszok k -val közös pontjait rendre M és N . Igazoljuk, hogy $\overleftrightarrow{BN}$, $\overleftrightarrow{CM}$ és $\overleftrightarrow{DF}$ konkurens egyenesek!
127. Tekintsünk az euklideszi síkon egy ABC háromszöget, és legyen M tetszőleges, az oldalegyenesek egyikére sem illeszkedő pont, valamint l egy M -re illeszkedő, a csúcsok egyikét sem tartalmazó egyenes. Jelölje l metszéspontjait a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$ oldalegyenesekkel rendre A_1 , B_1 , C_1 ; valamint az $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BM}$, $\overleftrightarrow{CM}$ egyenesek metszéspontjait a háromszög körülírt körével rendre A_2 , B_2 , C_2 . Igazoljuk, hogy az $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ egyenesek egy, a körülírt körre illeszkedő ponton mennek át!
128. Adott az euklideszi síkon egy k kör és a k belsejében fekvő A és B pontok. Szerkesszünk olyan pontpárt, amely konjugált a k körre nézve és harmonikusan választja el az (AB) pontpárt!
129. Adott az euklideszi síkon egy k kör és a k belsejében fekvő ABC háromszög. Kiválasztva a háromszög valamely két csúcsát, tekintsük azt a pontpárt, amely konjugált k -ra nézve és a választott két csúcsot harmonikusan választja el. Az így kapott három pontpár mindegyikéből tekintsük a körre nézve külső pontokat. Igazoljuk, hogy ez a három külső pont kollineáris!
130. Adott egy háromszög és egy kúpszelet. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög csúcsaiból a kúpszelethez húzott érintők szemköztes háromszöggoldallal alkotott metszéspontjai egy kúpszeletre illeszkednek!

15.11. Projektivitások kúpszeleten, a Steiner-szerkesztés

131. Adott egy egyenest önmagára képező projektivitásnál három pont képe. Szerkesszük meg a projektivitás fixpontjait!
132. Adott egy sugársort önmagára képező projektitásnál három egyenes képe. Szerkesszük meg a projektivitás fixegyeneseit!
133. Adott egy egyenesen értelmezett involúciónál két pont képe. Szerkesszük meg az involúció fixpontjait!
134. Adott egy sugárinvolúciónál két megfelelő egyenespár. Szerkesszük meg a fixesugarakat!
135. Adott egy egyenesen értelmezett két hiperbolikus involúció két-két fixpontja. Szerkesszük meg az involúciók közös megfelelő pontpárját! Mi a megoldhatóság feltétele?
136. Adott egy egyenesen értelmezett két involúció két-két megfelelő pontpárja. Szerkesszük meg az involúciók közös megfelelő pontpárját!
137. Adott egy kúpszelet öt pontja és egy egyenes. Szerkesszük meg az egyenes és a kúpszelet közös pontjait!
138. Adott egy kúpszelet öt pontja és egy további pont. Szerkesszük meg a kúpszelet adott pontra illeszkedő érintőit!
139. Adott egy kibővített affin síkon egy kúpszelet öt pontja. Döntsük el, hogy a kúpszelet ellipszis, parabola vagy hiperbola!
140. Adott egy kibővített affin síkon egy kúpszelet öt érintője. Szerkesszük meg a kúpszelet egy konjugált átmérőpárját!
141. Adott egy kibővített affin síkon egy kúpszelet öt pontja. Szerkesszük meg a kúpszelet egy konjugált átmérőpárját!
142. Adott három pont és három egyenes. Szerkesszük meg azokat a háromszögeket, amelyekre teljesül, hogy csúcsai az adott egyenesekre, oldalegyenesei az adott pontokra illeszkednek!
143. Adottak az euklideszi síkon az A és B pontok, valamint egy x távolság. Szerkesszünk olyan C és D pontokat, melyek távolsága x , és $(ABCD)$ harmonikus pontnégyes!
144. Adott az euklideszi síkon egy kör és három, a körre nem illeszkedő pont. Szerkesszünk olyan háromszöget, amelynek csúcsai a körön vannak, és oldalegyeneseire illeszkednek az adott pontok!
145. Adott az euklideszi síkon egy háromszög. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek egy oldala illeszkedik a háromszög egyik oldalára, és másik két csúcsa illeszkedik a másik két háromszögoldalra!

15.12. Desargues involúciótétele

146. Adott egy kúpszelet négy pontja és egy érintője. Szerkesszük meg a lehetséges kúpszeletek érintési pontjait az adott érintőn!
147. Adott az euklideszi síkon négy általános helyzetű pont. Hány olyan parabola van, amelyre a négy pont mindegyike illeszkedik? Szerkesszük meg a lehetséges parabolák tengelyirányait!
148. Adott két kúpszelet három közös pontja, továbbá a kúpszeletek két-két pontja. Szerkesszük meg a kúpszeletek negyedik közös pontját!
149. Adott két kúpszelet két közös pontja, továbbá a kúpszeletek három-három pontja. Szerkesszük meg a kúpszeletek további két közös pontját (amennyiben léteznek)!
150. Igazoljuk, hogy három adott pontra illeszkedő, és az egyik adott pontban adott érintővel rendelkező kúpszeletek a sík tetszőleges, a pontok egyikére sem illeszkedő egyenesét egy involúció megfelelő pontpárjaiban metszik!
151. Adott egy kúpszelet három pontja és két érintője. Szerkesszük meg a lehetséges kúpszeletek érintési pontjait az adott érintőkön!
152. Adott egy kúpszelet három pontja, továbbá egy olyan kúpszelet, amelynek a keresett kúpszelettel két közös pontban közös érintője van. Szerkesszük meg a lehetséges kúpszeletekkel közös érintési pontokat!