Papp Ildikó

PROJEKTÍV GEOMETRIAI PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

Papp Ildikó

PROJEKTÍV GEOMETRIAI PÉLDATÁR

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Papp Ildikó

PROJEKTÍV GEOMETRIAI PÉLDATÁR

Első kiadás

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Lektor
Dr. Bácsó Sándor
Dr. Hoffmann Miklós

Copyright © Papp Ildikó, 2004
Copyright © elektronikus közlés mobiDIÁK könyvtár, 2004
mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Intézet
4010 Debrecen, Pf. 12.
Hungary
http://mobidiak.inf.unideb.hu/

A mű egyéni tanulmányozás céljára szabadon letölthető.
Minden egyéb felhasználás csak a szerző előzetes írásbeli engedélyével történhet.
A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003) és a
„GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver” (ITEM, 50/2003) projektek keretében
készült.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A *Projektív geometriai példatár* a Debreceni Egyetemen meghirdetésre kerülő Projektív geometria I.–II. kurzus gyakorlatainak anyagát tartalmazza. Az első félévben az affinitás, centrális kollineáció és involúció témakörébe tartozó feladatok, a második félévben az analitikus feladatok kerülnek feldolgozásra. A példatár szorosan kapcsolódik a *Bácsó Sándor – Papp Ildikó – Szabó József: Projektív geometria* című jegyzetéhez.

A példatár első része a feladatsorokat tartalmazza, míg a második rész a megoldásokat és útmutatásokat. A feladatok egy részéhez részletes megoldás (és ha szükséges, akkor ábra is)
tartozik, de vannak olyan feladatok is, melyeknél utalunk arra, hogy milyen lépések segítik a megoldást. Ezek a feladatok önálló feldolgozásra ajánlottak.

Az Ábrázoló geometria szakos hallgatók számára kívánatos, hogy a későbbi tanulmányaik során a jegyzetet és a példatárt ismét áttanulmányozzák, és ismereteiket ezáltal is elmélyítsék.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani kolleganőmnek, *Fazekas Saroltá*nak, akivel folytatott beszélgetések során sok ötletet kaptam a jegyzethez és a példatárhoz, és ezáltal is formálódott az anyag több tanéven keresztül.

Papp Ildikó
egyetemi tanársegéd

1. rész - Feladatok

Affinitás

Osztóviszony, általános affinitás

1. Rögzítsük az A és B pontokat, a C pontot pedig mozgassuk az *a* egyenesen. Mit mondhatunk az (ABC)=λ osztóviszony értékéről a C pont változtatása mellett?
2. Az *a* egyenes A, B, C rögzített pontjaira (ABC)=λ. Igazoljuk, hogy
   - (BAC)=$\frac{1}{\lambda}$,
   - (CAB)=$-\frac{1}{\lambda-1}$,
   - (BCA)=$1-\frac{1}{\lambda}$,
   - (CBA)=$\frac{\lambda}{\lambda-1}$,
   - (ACB)=$1-\lambda$.
3. Adott A és B pontokhoz szerkesszük meg azt a C pontot, melyre
   (ABC)=-1
   (ABC)=$\frac{3}{2}$
   (ABC)=$\frac{7}{3}$
4. Igazak-e a következő állítások?
   - Általános affinitás után egy háromszög súlyvonalának képe a képháromszög súlyvonala.
   - Általános affinitás után egy háromszög súlypontjának képe a képháromszög súlypontja.
   - Általános affinitás után egy háromszög magasságának képe a képháromszög magassága.
   - Általános affinitás után egy háromszög magasságpontjának képe a képháromszög magasságpontja.
   - Általános affinitás után egy háromszög középvonalának képe a képháromszög középvonala.
   - Általános affinitás után egy háromszög köré írható kör középpontjának képe a képháromszög köré írható kör középpontja.
   - Általános affinitás után egy háromszög beírható köre középpontjának képe a képháromszög beírható köre középpontja.
5. Általános affinitásban adottak az A→A’, B→B’, C és D pontok. Határozzuk meg az affinitást (C→C’) úgy, hogy a D’ pont az A’B’C’ háromszög magasságpontja legyen.
6. Általános affinitásban adottak az A→A’, B→B’, C és D pontok. Határozzuk meg az affinitást (C→C’) úgy, hogy az A’B’C’D’ négyszög trapéz legyen.
7. Adott az ABCD trapéz (ABCD), valamint A→A’, B→B’ megfelelő pontok. Határozzuk meg az affinitást (C→C’) úgy, hogy az A’B’C’D’
   - egyenlőszárú trapéz legyen,
   - paralelogramma legyen,
   - derékszögű trapéz legyen.

Tengelyes affinitás

8. Adott egy tengelyes affinitás az $a \rightarrow a'$, $b \rightarrow b'$ egyenespárokkal. Határozzuk meg az affinitás tengelyét és irányát!
9. Adott egy tengelyes affinitás P→P' pontpárral és $a \rightarrow a'$ egyenespárral. Határozzuk meg az affinitás tengelyét és irányát!
10. Adott egy tengelyes affinitás tengelyével és megfelelő pontpárral. Határozzuk meg egy tengellyel párhuzamos egyenes képét!
11. Adott egy tengelyes affinitás tengelye és egy A→A' megfelelő pontpár úgy, hogy az affinitás iránya párhuzamos a tengellyel (eláció). Határozzuk meg
    - egy AA' egyenesre illeszkedő pont képét,
    - tetszőleges *e* egyenes képét,
    - tetszőleges C pont képét!
12. Adott egy tengelyes affinitás tengelye és iránya és egy A pontra illeszkedő e és f egyenesek. Határozzuk meg az A' pontot úgy, hogy e' és f' merőlegesek legyenek!
13. Adott egy tengelyes affinitás tengelyével és A→A' pontpárral. Határozzuk meg az A pontban azt az r és s merőleges egyenespárt, melynek r' és s' képe az A' pontban szintén merőleges egymásra (invariáns derékszögpár)!
14. Adott az affinitás tengelye és egy ABCD paralelogramma. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az ABCD paralelogramma képe rombusz legyen!
15. Adott az affinitás tengelye és egy ABCD paralelogramma. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az ABCD paralelogramma képe négyzet legyen!
16. Adott az affinitás tengelye és egy ABCD paralelogramma. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az ABCD paralelogramma képe téglalap legyen!
17. Adott az affinitás tengelye, iránya és egy ABCD paralelogramma. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az ABCD paralelogramma képe trapéz legyen!
18. Adott az affinitás tengelye, iránya és egy ABCD trapéz. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az ABCD trapéz képe olyan derékszögű trapéz legyen, melynek az A csúcsánál van derékszög!
19. Adott a tengelyes affinitás tengelye és iránya, egy ABC háromszög, melynek a B és C csúcsai a tengelyre illeszkednek. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy ABC háromszög képe egyenlőszárú háromszög legyen: A'C'=A'B'!
20. Adott a tengelyes affinitás tengelye és iránya, egy ABC háromszög, melynek a B és C csúcsai a tengelyre illeszkednek. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy ABC háromszög képe egyenlőszárú háromszög legyen: A'C'=B'C'!
21. Adott az ortogonális affinitás tengelye és egy ABC háromszög. Határozzuk meg az ortogonális affinitást úgy, hogy az A'B'C' háromszög derékszögű háromszög legyen és a derékszög az A'-ben legyen!
22. Adott a tengelyes affinitás tengelye, egy ABC háromszög és egy φ szög. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az A'B'C' háromszög egyenlő szárú legyen és az A' és B' csúcsokhoz tartozó szög φ legyen!
23. Adott az affinitás tengelye és egy ABC háromszög. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy A'B'C' háromszög egyenlő oldalú legyen!
24. Adott az affinitás tengelye és egy ABC háromszög. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy A'B'C' háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög legyen!
25. Adott egy ABC háromszög, a háromszög belsejében egy D pont. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy a D' pont az A'B'C' háromszög súlypontja legyen!

26. Adott egy ABC háromszög, a háromszög belsejében egy D pont. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy a D' pont az A'B'C' háromszög köréírható körének középpontja legyen!
27. Adott egy ABC háromszög, a háromszög belsejében egy D pont. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy a D' pont az A'B'C' háromszög beírható körének középpontja legyen!

28. Adott a tengelyes affinitás tengelye és egy ABC háromszög. Határozzuk meg az affinitást úgy, hogy az A'B'C' hasonló legyen egy előre megadott $A^*B^*C^*$ háromszöghöz!
29. Adjunk példát arra, hogy két tengelyes affinitás egymásutánja nem minden esetben helyettesíthető egyetlen tengelyes affinitással!

Karakterisztika, dilatácó

30. Bizonyítsuk be, hogy tengelyes affinitás esetén két egymásnak megfelelő háromszög területének aránya egyenlő az affinitás karakterisztikájával!
31. Adott a tengelyes affinitásban egy megfelelő $a \to a'$ egyenespár, az affinitás i iránya és az affinitás λ karakterisztikája. Szerkesszük meg az affinitás tengelyét!
32. Adott a tengelyes affinitásban egy megfelelő $A \to A'$ pontpár a tengely egy T pontja és az affinitás λ karakterisztikája. Szerkesszük meg az affinitás tengelyét!
33. Adott a tengelyes affinitás t tengelye, i iránya és λ karakterisztikája. Szerkesszünk megfelelő pontpárt!
34. Adott a tengelyes affinitás t tengelyével és $A \to A'$ pontpárral. Szerkesztendők azok az egyenesek, melyeken a dilatáció 1.

Ellipszissel kapcsolatos feladatok

35. Adott a tengelyes affinitás tengelyével és megfelelő pontpárral, valamint egy ABC háromszög. Határozzuk meg az ABC háromszög köré írható kör affin képét!
36. Adott egy ellipszis két tengelye. Szerkesszük meg az ellipszis egy pontját és abban az érintőt!
37. Adott egy ellipszis két tengelye és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis egyenessel párhuzamos érintőjét!
38. Adott egy ellipszis két tengelye és egy külső pont. Szerkesszük meg a pontból az ellipszishez húzott érintőket!
39. Adott egy ellipszis két tengelye és egy általános helyzetű egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
40. Adott egy ellipszis két tengelye és egy olyan egyenes, amely párhuzamos a nagytengely egyenesével. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
41. Adott egy ellipszis két tengelye és egy olyan egyenes, amely párhuzamos a kistengely egyenesével. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
42. Adott egy ellipszis két tengelye és egy egyenes. Határozzuk meg az ellipszis adott egyenessel párhuzamos átmérőjét!
43. Adott egy ellipszis két tengelye és egy egyenes. Szerkesszük meg az egyeneshez konjugált irányú átmérőt!
44. Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárral és egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis egyenessel párhuzamos érintőjét!
45. Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárral és egy külső pont. Szerkesszük meg a pontból az ellipszishez húzott érintőket!

46. Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárral és egy általános helyzetű egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
47. Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárral és egy olyan egyenes, amely párhuzamos az egyik átmérővel. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
48. Adott egy ellipszis konjugált átmérőpárral és egy egyenes. Szerkesszük meg az egyeneshez konjugált irányt!
49. Adott egy ellipszis nagytengelye és egy érintője. Szerkesztendő a kistengely.
50. Adott egy ellipszis nagytengelye és egy pontja. Szerkesztendő a kistengely.
51. Adott egy ellipszis kistengelye és egy érintője. Szerkesztendő a nagytengely.
52. Adott egy ellipszis kistengelye és egy pontja. Szerkesztendő a nagytengely.
53. Adottak egy ellipszis tengelyeinek egyenesei és egy érintője az érintési ponttal. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
54. Adottak egy ellipszis tengelyeinek egyenesei és két pontja. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
55. Adottak egy ellipszis tengelyeinek egyenesei és egy külső pontból húzott két érintője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
56. Adott egy ellipszis egy átmérője és egy pontjában az érintője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
57. Adott egy ellipszis két átmérője és az egyikhez konjugált átmérő iránya. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
58. Adott egy ellipszis egy átmérője és egy hozzá konjugált irányú húron az egyik végpont. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
59. Adott egy ellipszis két konjugált átmérőjének egyenese és két pontja. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
60. Adott egy ellipszis egy átmérője és egy pontjában az érintője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
61. Adott egy ellipszis egy átmérője a hozzá konjugált átmérő irányával és az ellipszis egy érintője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
62. Adott egy ellipszis két konjugált átmérőjének egyenese és az ellipszis két érintője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!
63. Adott egy ellipszis két érintője és egy átmérője. Szerkesszük meg az ellipszis tengelyeit!

Centrális kollineáció

1. Adott egy centrális kollineáció tengelyével, centrumával és az A→A' megfelelő pontpárral. Határozzuk meg a q ellentengelyt, majd a B pontot vegyük fel úgy, hogy a q affin értelemben elválassza az A és B pontokat. Határozzuk meg az AB szakasz képét a centrális kollineációban!
2. Adott a centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a q ellentengellyel. Határozzunk meg egy megfelelő pontpárt!
3. Adott a centrális kollineáció tengelyével, centrumával és az r' ellentengellyel. Határozzunk meg egy megfelelő pontpárt!
4. Adott a centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a q ellentengellyel. Határozzuk meg olyan háromszög képét,
   - amelynek egyik oldala illeszkedik q-ra,
   - amelynek egyik csúcsa illeszkedik q-ra,
   - amelynek csúcsa a C-ből q-ra állított merőleges talppontja, az ezzel szemköztes oldal affin értelemben párhuzamos a tengellyel,
   - amelynek két oldalát átmetszi a tengely,
   - amelynek egy csúcsa illeszkedik a q-ra és a szemköztes oldalát metszi a q egyenes!
5. Adott a centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a q ellentengellyel. Határozzunk meg egy e egyeneshez olyan f egyenest, amelyekre e' és f' 60°-os szöget zár be!
6. Adott egy általános négyszög. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, melyben a négyszög képe
   - trapéz,
   - derékszögű trapéz,
   - paralelogramma,
   - téglalap,
   - négyzet!
7. Adott egy általános négyszög és egy 'a' szakasz. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, melyben a négyszög képe olyan paralelogramma, melynek az egyik oldala 'a' hosszúságú!

Parabolával kapcsolatos feladatok

8. Adott egy parabola fókusszal és vezéregyenessel. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, melyben a parabola képe kör!
9. Adott egy parabola fókusszal és vezéregyenessel, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg a parabola és egyenes közös pontjait!
10. Adott egy parabola fókusszal és vezéregyenessel, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg a parabola adott egyenessel párhuzamos érintőjét!
11. Adott egy parabola fókusszal és vezéregyenessel, valamint egy külső pont. Szerkesszük meg a parabola adott pontból húzható érintőit!

Hiperbolával kapcsolatos feladatok

12. Adott egy hiperbola fókuszokkal és csúcspontokkal. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, melyben a hiperbola képe kör!
13. Adott egy hiperbola fókuszokkal és csúcspontokkal, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg a hiperbola és egyenes közös pontjait!
14. Adott egy hiperbola fókuszokkal és csúcspontokkal, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg a hiperbola adott egyenessel párhuzamos érintőit!
15. Adott egy hiperbola fókuszokkal és csúcspontokkal, valamint egy külső pont. Szerkesszük meg a hiperbola adott pontból húzható érintőit!

Ellipszissel kapcsolatos feladatok

16. Adott egy ellipszis a tengelyeivel. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, melyben az ellipszis képe kör!
17. Adott egy ellipszis a tengelyeivel, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis és egyenes közös pontjait!
18. Adott egy ellipszis a tengelyeivel, valamint egy egyenes. Szerkesszük meg az ellipszis adott egyenessel párhuzamos érintőit!
19. Adott egy ellipszis a tengelyeivel, valamint egy külső pont. Szerkesszük meg az ellipszis adott pontból húzható érintőit!

Körrel kapcsolatos feladatok

20. Adott egy kör. Határozzunk meg olyan centrális kollineációt, amelyben a kör képe újra kör lesz!
21. Adott két kör. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amely az egyik kört a másikra képezi le!
22. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban a kollineáció tengelye a két kör hatványvonala.
23. Adott egy kör. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelyben a kör képe ellipszis!
24. Adott egy kör. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelyben a kör képe parabola!
25. Adott egy kör. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amelyben a kör képe hiperbola!

Vegyes feladatok

26. Adjunk meg olyan centrális kollineációt, amely egy kúpszeletet önmagára képez le, méghozzá úgy, hogy adott két pont adott két pontba megy át!
27. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan centrális kollineációban, amely egy kúpszeletet önmagára képez le, a centrum és a tengely pólus-poláris kapcsolatban van a kúpszeletre nézve!
28. Adott egy kúpszelet két érintője és három pontja. Szerkesszük meg a kúpszeletet!
29. Adott egy kúpszelet két pontja és három érintője. Szerkesszük meg a kúpszeletet!
30. Adott egy kúpszelet két érintője az érintési ponttal és még egy pontja. Szerkesszünk a sík egy tetszőleges pontjából érintőket a kúpszelethez.
31. Bizonyítsuk be, hogy mindig megadható olyan hasonlósági transzformáció, amely egy adott parabolát egy adott parabolába visz át. (Vagyis két parabola mindig hasonló.)

Involúció

Elliptikus involúció pontsoron

1. Adott egy elliptikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúcióban egy tetszőleges X_1 pont párját!
2. Adott egy elliptikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúció középpontját!
3. Adott egy elliptikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúció hatványpontjait!
4. Adott egy elliptikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és a H_1 hatványponttal. Szerkesszük meg a másik hatványpontot!
5. Adott egy elliptikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és a H_1 hatványponttal. Szerkesszük meg az involúcióban egy tetszőleges X_1 pont párját!
6. Adott egy elliptikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és az O középponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!
7. Adott egy elliptikus involúció a H_1 hatványponttal és az O középponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!
8. Adott egy elliptikus involúció a H_1 és H_2 hatványpontokkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!

Hiperbolikus involúció pontsoron

9. Adott egy hiperbolikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúcióban egy tetszőleges X_1 pont párját!
10. Adott egy hiperbolikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúció középpontját!
11. Adott egy hiperbolikus involúció két pontpárjával (A_1, A_2, C_1, C_2). Szerkesszük meg az involúció kettőspontjait!
12. Adott egy hiperbolikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és a K kettősponttal. Szerkesszük meg az involúció másik kettőspontját!
13. Adott egy hiperbolikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és a K kettősponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját csak vonalzó használatával!
14. Adott egy hiperbolikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és a K kettősponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját körsorok segítségével!
15. Adott egy hiperbolikus involúció az (A_1, A_2) pontpárral és az O középponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!
16. Adott egy hiperbolikus involúció a K kettősponttal és az O középponttal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!
17. Adott egy hiperbolikus involúció a K és L kettőspontokkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges X_1 pont párját!

Elliptikus involúció sugársorban

18. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
19. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg a tengelyeket!
20. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg a hatványsugarakat!
21. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a h_1 hatványsugárral. Szerkesszük meg a másik hatványsugarat!
22. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a h_1 hatványsugárral. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
23. Adott egy elliptikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a tengelyekkel. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
24. Adott egy elliptikus sugárinvolúció a h_1 hatványsugárral és az egyik tengellyel. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
25. Adott egy elliptikus sugárinvolúció a h_1 és h_2 hatványsugarakkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!

Hiperbolikus involúció sugársorban

26. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
27. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg a tengelyeket!
28. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2, c_1, c_2) sugarakkal. Szerkesszük meg a kettőssugarakat!
29. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a k kettőssugár. Szerkesszük meg a másik kettőssugarat!
30. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a k kettőssugár. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
31. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció az (a_1, a_2) sugarakkal és a tengelyekkel. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
32. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció a k kettőssugárral és a tengelyekkel. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!
33. Adott egy hiperbolikus sugárinvolúció a k és l kettőssugarakkal. Szerkesszük meg egy tetszőleges x_1 sugár párját!

Közös tartójú involúciók

34. Adott egy e egyenesen az A_1, A_2, C_1, C_2 involúció és az A_1', A_2', C_1', C_2' involúció. Szerkesszük meg a két involúció közös párját!
35. Adott egy P ponton az a_1, a_2, c_1, c_2 és az a_1', a_2', c_1', c_2' sugárinvolúció. Szerkesszük meg a két sugárinvolúció közös párját!
36. Adott egy e egyenesen két involúció a K és L, illetve a K' és L' kettőspontokkal. Szerkesszük meg a két involúció közös párját!

37. Adott egy P ponton két sugárinvolúció a *k* és *l*, illetve a *k*' és *l*' kettőssugarakkal. Szerkesszük meg a két sugárinvolúció közös párját!
38. Adottak egy *e* egyenesen a KL és K'L' szakaszok. Szerkesztendő olyan szakasz, amely végpontjai mindkét szakasz végpontjait harmonikusan választják szét!
39. Adott két, közös csúccsal bíró szög. Szerkesszünk olyan, ugyanezzel a csúccsal bíró harmadik szöget, amelynek szárai mindkét szög szárait harmonikusan választják szét!

Analitikus feladatok

Pont homogén koordinátái

1. Határozzuk meg a P pont Descartes-koordinátáit!
   - P[2,-3,-1]
   - P[4, 8, 2]
   - P[-1, 2, 3]
   - P[1,-1, $\frac{1}{2}$]
2. A [3,-4, 2] és [-6, 8, -4] számhármasok ugyanannak a pontnak a homogén koordinátái-e?
3. Adott két számhármas: [2, 4,1-3*x*] és [3, 6, -4*x*]. Hogyan kell az *x*-t megválasztani, hogy a számhármasok ugyanannak a pontnak a koordinátái legyenek?
4. Adott két számhármas: [4, 4-*x*,*xy*] és [3, 6-*x*, 7*x*]. Hogyan kell az *x*-t és *y*-t megválasztani, hogy a számhármasok ugyanannak a pontnak a koordinátái legyenek?

Alakzatok homogén koordinátás alakja és végtelen távoli pontjai

5. Adjuk meg a következő alakzatok homogén koordinátás alakját!
   - $2x-3y+1=0$
   - $x^2+y^2-4x+6y-12=0$
   - $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$
   - $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
   - $y^2=8x$
   - $xy=1$
   - $y=x^3-3x^2+3x-3$

6. Határozzuk meg a $2x-4y+5=0$ egyenes végtelen távoli pontját!
7. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ hiperbola végtelen távoli pontját!
8. Határozzuk meg az $x^2=-4y$ parabola végtelen távoli pontját!
9. Határozzuk meg az $y=2x^3$ görbe végtelen távoli pontját!
10. Határozzuk meg az $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ kör végtelen távoli pontját!
11. Határozzuk meg az $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$ ellipszis végtelen távoli pontját!

Illeszkedés, pontsor és sugársor

12. A P[2, 3, -4] pont illeszkedik-e a $3x+4y+5=0$ egyenesre?
13. Hogyan kell megválasztani a P[2, 4, x_3] pont x_3 koordinátáját, hogy a P pont illeszkedjen az $x+y-7=0$ egyenesre?
14. Írjuk fel az A (2, 1) és B(3, 4) pontokon áthaladó egyenes egyenletét!
15. Írjuk fel az A [2, -3, 4] és B[5, 6, 0] pontokon áthaladó egyenes egyenletét!

16. Írjuk fel az A [1, -1, 0] és B[1, 1, 0] pontokon áthaladó egyenes egyenletét!
17. Írjuk fel az A [5, -6, 3] és B[1, -4, 5] pontokon áthaladó egyenes egyenletét!
18. Számítsuk ki a $2x+y+1=0$ és $3x+4y+1=0$ egyenesek metszéspontját!
19. Számítsuk ki a $2x+3y+4=0$ és $5x+6y=0$ egyenesek metszéspontját!
20. Számítsuk ki az $x-y=0$ és $x+y=0$ egyenesek metszéspontját!
21. Számítsuk ki az $5x-6y+3=0$ és $x-4y+5=0$ egyenesek metszéspontját!
22. Egy egyenesre illeszkednek-e az A(2, 1), B(3, 4) és C(5, 6) pontok?
23. Egy egyenesre illeszkednek-e az A[2, -1, 3], B[4, 3, -2] és C[8, 11, -12] pontok?
24. Egy egyenesre illeszkednek-e az A[2, 0, 3], B[4, 0, 3] és C[1, -1, 0] pontok?
25. Sugársort alkotnak-e a $2x+y+1=0$, $3x+4y+1=0$ és $5x+6y+1=0$ egyenletű egyenesek?
26. Sugársort alkotnak-e a $2x-y+3=0$, $4x+3y-2=0$ és $8x+11y-12=0$ egyenletű egyenesek?
27. Sugársort alkotnak-e a $2x+3=0$, $4x+3=0$ és $x-y=0$ egyenletű egyenesek?
28. Adott három pont: A[2, 1, 0], B[3, 4, 2] és C[5, -6, λ]. Hogyan kell λ értékét megválasztani, hogy a megadott pontok egy egyenesre illeszkedjenek (kollineárisak legyenek)?
29. Adott három pont: A[2, -3, 4], B[0, 0, 1] és C[1, λ, -1]. Hogyan kell λ értékét megválasztani, hogy a megadott pontok egy egyenesre illeszkedjenek (kollineárisak legyenek)?
30. Adott három egyenes: $2x+y=0$, $3x+4y+2=0$ és $5x-6y+\lambda=0$. Hogyan kell λ értékét megválasztani, hogy a megadott egyenesek egy pontra illeszkedjenek (sugársort alkossanak)?
31. Adott három egyenes: $2x_1-3x_2+4x_3=0$, $x_3=0$ és $x_1+\lambda x_2-x_3=0$. Hogyan kell λ értékét megválasztani, hogy a megadott egyenesek egy pontra illeszkedjenek (sugársort alkossanak)?
32. Írjuk fel az A(2, -1) és B(1, 2) pontok által meghatározott egyenes egy tetszőleges pontjának a koordinátáit!
33. Írjuk fel az A(2, -1) és B(1, 2) pontok által meghatározott egyenes végtelen távoli pontjának a koordinátáit!
34. Írjuk fel az A[4, -2, -11] és B[1, 1, -1] pontok által meghatározott egyenes egy tetszőleges pontjának a koordinátáit!
35. Írjuk fel az A[2, -1, -1] és B[3, -4, 5] pontok által meghatározott egyenes és a $4x+y+1=0$ egyenes metszéspontjának a koordinátáit!
36. Írjuk fel a $2x-y+1=0$ és $x+2y+1=0$ egyenesek által meghatározott sugársor egy tetszőleges elemének az egyenletét!
37. Írjuk fel a $2x-y+1=0$ és $x+2y+1=0$ egyenesek által meghatározott sugársor origóra illeszkedő elemének az egyenletét!
38. Írjuk fel a $4x-2y-11=0$ és $x+y-1=0$ egyenesek által meghatározott sugársor egy tetszőleges elemének az egyenletét!
39. Írjuk fel a $2x-y-1=0$ és $3x-4y+5=0$ egyenesek által meghatározott sugársor P(4, 1) pontra illeszkedő elemének az egyenletét!
40. Írjuk fel a $3x+4y=0$ és $x+y-3=0$ egyenesek által meghatározott sugársor $4x+2y-1=0$ egyenessel párhuzamos elemének az egyenletét!
41. Írjuk fel a P(3, 2) pontra illeszkedő és az A(2, 1) és B(-3, 2) pontok egyenesével párhuzamos egyenes egyenletét!
42. Határozzuk meg a $2x+y+1=0$ és $-3x+2y+1=0$ egyenesek metszéspontjára illeszkedő, a $3x+2y+1=0$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét!
43. Határozzuk meg a $3x+2y+1=0$ egyenesnek azzal az egyenessel a metszéspontját, amely a $2x-y+1=0$, $-3x+2y+1=0$ egyenesekkel megadott sugársor origóra illeszkedő eleme!

Osztóviszony

44. Adott három pont: A(4, 2), B(-2, 3), C(-14, 5). Számítsuk ki az (ABC) osztóviszony értékét!
45. Adott három pont: A[2,-1, 1], B[-3, 2, 1], C[13, -8, -1]. Számítsuk ki az (ABC) osztóviszony értékét!
46. Adott két pont: A(2, 1), B(-3, 4).Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)=-1!
47. Adott két pont: A(2, 1), B(-3, 4).Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)=¾!
48. Adott két pont: A(2, 1), B(-3, 4).Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)= $7/3$!
49. Adott két pont: A[4,-2, 3], B[1, -1, 1]. Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)=-1!
50. Adott két pont: A[4,-2, 3], B[1, -1, 1]. Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)=¾!
51. Adott két pont: A[4,-2, 3], B[1, -1, 1]. Határozzuk meg az AB pontok egyenesén azt a C pontot, melyre az (ABC)= $7/3$!
52. Az $5x_1-3x_2+x_3=0$ és $x_2+x_3=0$ egyenesek M metszéspontjához valamint a $3x_1+4x_2-x_3=0$ és $2x_1+5x_2-x_3=0$ egyenesek N metszéspontjához hogyan kell megválasztani a P pontot úgy, hogy (MNP)=2 legyen?

Kettősviszony

53. Adott a számegyenes négy pontja: A(3), B(8), C(11), D(23). Számítsuk ki a következő kettősviszonyok értékét: (ABCD), (ABDC), (CDAB), (ACBD)!
54. Számítsuk ki az A(0, 2), B(1, 0), C(2, -2), D(-2, 6) pontok által meghatározott (ABCD) kettősviszony értékét!
55. A számegyenes A(4), B(-6), C(7) pontjaihoz határozzuk meg azt a D pontot, amelyre az (ABCD)=-3!
56. Számítsuk ki az A[4, -1, 2], B[1, -2, 3], C[4, 6, -8], D[3, 1, -1] pontok által meghatározott (ABCD) kettősviszony értékét!
57. Számítsuk ki az A[2, -3, 1], B[1, 2, 1], C[7, 0, 5], D[1, -5, 0] pontok által meghatározott (ABCD) kettősviszony értékét!
58. Számítsuk ki az A[4, 2, 0], B[3, -1, 0], C[1, 3, 0], D[-8, 6, 0] pontok által meghatározott (ABCD) kettősviszony értékét!
59. Adott három pont: A[-1, 0, 0], B[0, 1, 1], D[1, 2, 2]. Határozzuk meg azt a C pontot, amelyre az (ABCD)=2!
60. Adott három pont: A[2, 3, -2], B[1, -1, 2], C[5, 0, 4]. Határozzuk meg azt a D pontot, melyre az (ABCD)= $9/8$!
61. Adott három pont: A[2, -3, 4], B[1, -2, 1], C[x, -7, 6]. Határozzuk meg a C pont x koordinátáját és a D pontot, melyre az (ABCD)= $-3/2$!
62. Számítsuk ki az a: x+y=0, b: x-y=0, c: x=0, d: 2x-y=0 egyenesek által meghatározott ($abcd$) kettősviszony értékét!

63. Számítsuk ki az *a*: 2x+4y-1=0, *b*: x+2y+3=0, *c*: x+2y-1=0, *d*: x+2y=0 egyenesek által meghatározott (*abcd*) kettősviszony értékét!
64. Számítsuk ki az *a*: x-2y+1=0, *b*: x-2y-1=0, *c*: x-2y=0, *d*: x_3=0 egyenesek által meghatározott (*abcd*) kettősviszony értékét!
65. Adott három egyenes: 2x+3y-2=0, x-2y+1=0, 5x+4=0. Hogyan kell megválasztani a *d* egyenest, hogy (*abcd*)= $\frac{9}{7}$ legyen!
66. Adott három egyenes: 2x-3y+4=0, x-2y+1=0, λx-7y+6=0. Hogyan kell megválasztani a λ értékét és a *d* egyenest, hogy (*abcd*)= $\frac{2}{3}$ legyen!
67. Kössük össze a P(1, 1) pontot az A(0, 0), B(1, 0), C(2, 3), D(2, 0) pontokkal, az így kapott egyenesek legyenek *a*, *b*, *c*, *d*. Számítsuk ki az (*abcd*), (*abdc*), (*acbd*) kettősviszony értékeket!

Másodrendű görbék

Másodrendű görbe minősége, végtelen távoli pontok

1. Határozzuk meg a másodrendű görbe minőségét, ha egyenlete
   - $5x^2-6xy+y^2-12x-12y-1=0$,
   - $6x^2-4xy+y^2+x+2y-12=0$,
   - $x^2+6xy+9y^2-12x+6=0$.
2. Hogyan kell a $3x^2+2\lambda xy+y^2-12x+5y-1=0$ egyenletben a λ értékét megválasztani, hogy az egyenlet egy elliptikus másodrendű görbe egyenlete legyen?
3. Hogyan kell a $\lambda x^2+2xy+y^2-2x+4y-1=0$ egyenletben a λ értékét megválasztani, hogy az egyenlet egy hiperbolikus másodrendű görbe egyenlete legyen?
4. Egy másodrendű görbe egyenlete: $2x^2-2\lambda xy+8y^2+6x-4y+12=0$. A λ paraméter milyen értékére lesz a görbe elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus?
5. Határozzuk meg a másodrendű görbe végtelen távoli pontjait, ha egyenlete:
   - $5x^2-6xy+y^2-12x-12y-1=0$,
   - $6x^2-4xy+y^2+x+2y-12=0$,
   - $x^2+6xy+9y^2-12x+6=0$.
6. Írjuk fel azoknak a hiperbolikus másodrendű görbéknek az egyenletét, amelyeknek a végtelen távoli pontjai $P_1[2,-1,0]$ és $P_2[1,1,0]$!
7. Írjuk fel azoknak a parabolikus másodrendű görbéknek az egyenletét, amelyeknek a végtelen távoli pontja $P[1,2,0]$!
8. Hogyan kell megválasztani az $x^2+4xy-y^2+6x-4y+a_{33}=0$ egyenletben az a_{33} paraméter értékét, hogy egy elfajuló másodrendű görbe egyenletét kapjuk?
9. Egy másodrendű görbe egyenlete $x^2+2\lambda xy+4y^2+2x-2\lambda y=0$. A λ mely értékére lesz a görbe elfajuló parabolikus másodrendű görbe?
10. Egy másodrendű görbe egyenlete $x^2-8xy+4\lambda y^2+2\mu x+2y+2=0$. Határozzuk meg a λ és a μ értékét úgy, hogy a görbe elfajuló parabolikus másodrendű görbe legyen!

Másodrendű görbe és egyenes közös pontjai

11. A $P(1,1)$ és $Q(2,-1)$ pontok által meghatározott egyenesnek és a $2x^2+6xy+4y^2-12x+6y-1=0$ egyenletű másodrendű görbének hány közös pontja van?
12. A $P(5,2)$ és $Q(3,0)$ pontok által meghatározott egyenesnek és a $2x^2-xy-y^2-7x-2y+3=0$ egyenletű másodrendű görbének hány közös pontja van?
13. A $8x^2+2xy-y^2-10x-5y=0$ másodrendű görbe tartalmazza-e az $A(2,3)$, $B(1,-1)$ pontokat összekötő egyenest?

Konjugált pontok, pólus-poláris kapcsolat

14. A $P(1,-2)$ és $Q(3,1)$ pontok konjugáltak-e egymáshoz a $2x^2-xy-y^2-7x-2y+3=0$ egyenletű másodrendű görbére nézve?
15. A $P(1,-2)$ és $Q(3,1)$ pontok konjugáltak-e egymáshoz a $x^2-8xy+7y^2+6y+9=0$ egyenletű másodrendű görbére nézve?
16. Adott $x^2+2xy-y^2-4x+2y-4=0$ másodrendű görbe és a $P(2,y)$ pont. Hogyan kell a P pont y koordinátáját megválasztani, hogy a P pont önmagához konjugált legyen?

17. Adott két pont: P(x,2) és Q(2,1), továbbá az x^2-6xy+y^2-4x+5=0 másodrendű görbe. Határozzuk meg a P pont x koordinátáját úgy, hogy a megadott pontok egymáshoz konjugáltak legyenek a görbére nézve!
18. Az *e* egyenes egy másodrendű görbét az A(2,-1) és B(1,4) pontokban metsz. Határozzuk meg az *e* egyenes azon pontját, amely konjugált az *e* egyenes P(3,-6) pontjához!
19. Az x^2-xy+4x-3y+3=0 egyenletű másodrendű görbénél melyek a P(-3,-2) ponthoz konjugált pontok?
20. Adott a 2x^2-4xy+y^2-2x+6=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a megadott görbére vonatkozóan a P(3,1) pont polárisát!
21. Adott a 2x^2-4xy+y^2-2x+6=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a megadott görbére vonatkozóan a 2x-3y-2=0 egyenes pólusát!
22. Adott a x^2+6xy-y^2+2x-4y+5=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a megadott görbére vonatkozóan a P(2,3,0) pont polárisát !
23. Adott a x^2+6xy-y^2+2x-4y+5=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a megadott görbére vonatkozóan a 9x-2y-12=0 egyenes pólusát!
24. Adott az x^2+y^2+1=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a P(3, 0) pont polárisát!
25. Adott az x^2+y^2+1=0 másodrendű görbe. Számítsuk ki a 3x-4y+5=0 egyenes pólusát!
26. Bizonyítsuk be, hogy a kúpszelet fókuszainak polárisai a megfelelő direktrixek!
27. Igazoljuk, hogy egy másodrendű görbe esetén egy pontsorhoz tartozó pontok polárisai egy sugársorhoz tartoznak!
28. Bizonyítsuk be, hogy egy másodrendű görbe esetén az A, B, C, D kollineáris pontok *a*, *b*, *c*, *d* polárisaira (ABCD)=(*abcd*)!

Másodrendű görbe érintője

29. Határozzuk meg az 5x^2+7xy+y^2-x+2y=0 másodrendű görbéhez az origóból húzható érintők egyenletét!
30. Határozzuk meg a 3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0 másodrendű görbéhez a P(2,1) pontból húzható érintők egyenletét!
31. Határozzuk meg az x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0 másodrendű görbéhez a P(4,-2) pontból húzható érintők egyenletét!
32. Határozzuk meg az x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0 másodrendű görbének a 2x+2y-1=0 egyenessel párhuzamos érintőinek egyenletét!

Külső- és belső pont

33. Adott a 4x^2+6xy-3y^2+2x+2y+1=0 másodrendű görbe és a P(1,1) pont. Döntsük el, hogy a P pont külső pont-e!
34. Adott a x^2+2xy+y^2-4x+8y+7=0 másodrendű görbe és a P(2,3) pont. Döntsük el, hogy a P pont külső pont-e!
35. Adott az x^2+6xy-12x+4y-20=0 másodrendű görbe és a P(-2,1) pont. Döntsük el, hogy a P pont belső pont-e!
36. Adott az 2xy-2x+4y+5=0 másodrendű görbe és a P(1,1) pont. Döntsük el, hogy P pont belső pont-e!
37. Adott az x^2+4xy+8y^2-10x-4y+1=0 másodrendű görbe és a P(9,0) pont. Döntsük el, hogy P pont belső pont-e!

Centrum, átmérő

38. Határozzuk meg a másodrendű görbe centrumát, ha egyenlete
    a) $x^2+6xy+y^2+8x+24y+39=0$,
    b) $x^2-xy+y^2-5x+y-2=0$,
    c) $2x^2-4xy+5y^2-8x+6=0$,
    d) $x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$.
39. A koordinátarendszer kezdőpontját toljuk el a másodrendű görbe centrumába és írjuk fel a görbe egyenletét ebben a rendszerben
    a) $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$,
    b) $x^2-2xy+2x+2y+1=0$,
    c) $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$.
40. Írjuk fel az $x+2y-1=0$ egyenessel párhuzamos átmérő egyenletét, ha a másodrendű görbe egyenlete: $4x^2+6xy+4y^2-3y+1=0$!
41. Hogyan kell a $2x+\lambda y-2=0$ egyenes egyenletében a λ értéket megválasztani, hogy az egyenes átmérője legyen az $x^2+4xy+4y^2-2x+6y=0$ másodrendű görbének?
42. Adott egy másodrendű görbe: $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$. Írjuk fel az $x+2y+2=0$ egyenessel párhuzamos és az ahhoz konjugált átmérő egyenletét!
43. Egy másodrendű görbe egyenlete $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$. Határozzuk meg a konjugált átmérők egyenleteit, ha közülük az egyik áthalad az origón!
44. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola aszimptotái és egy konjugált átmérőpárja harmónikus négyest alkot!

Másodrendű görbe tengelyei, kanonikus alak

45. Határozzuk meg a másodrendű görbe tengelyeit, ha egyenlete
    a) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$,
    b) $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$,
    c) $4x^2+6xy+4y^2-3y+1=0$.
46. Egy másodrendű görbe egyenlete $(ax+by+c)^2+(\alpha x+\beta y+\chi)^2=1$, ahol $a\alpha+b\beta=0$ és $b\alpha\neq a\beta$. Bizonyítsuk be, hogy a görbe tengelyei az $ax+by+c=0$ és az $\alpha x+\beta y+\chi=0$ egyenletű egyenesek.
47. Egy szimmetrikus $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrix sajátvektorai: $\underline{s}_1(2, -3)$ és $\underline{s}_2(3, 2)$, a megfelelő sajátértékek: $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=-4$. Határozzuk meg a mátrix elemeit!
48. Hozzuk kanonikus alakra a következő egyenleteket:
    a) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$,
    b) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$,
    c) $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$.

Másodrendű görbe megadása öt adattal

49. Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amelynek a centruma C(2,3), áthalad az O(0,0), A(0,1), B(1,0) pontokon!
50. Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amelynek a centruma C(0, 1), áthalad az A(2, 3), B(4, 2), D(-1, -3) pontokon!
51. Adott hat pont: A(0, 0), B(0, 3), C(-2, 0), D(1, 1), E(1, 2), F(2, 3). Van-e olyan másodrendű görbe, amely mind a hat pontot tartalmazza?
52. Adott hat pont: A(0, 0), B(0, 3), C(-2, 0), D(1, 1), E(1, 2), F(-1, y). Válasszuk az y-t úgy, hogy az adott pontok egy másodrendű görbére illeszkedjenek!
53. Adott öt pont: A(0, 0), B(1, 0), C(0, 3), D(2, 7), E(4, 1). Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza!
54. Adott öt pont: A(0, 0), B(0, 3), C(6, 0), D(2, 2), E(4, 1). Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza!
55. Adott négy pont: A(0, 7), B(1, 2), C(2, 1), D(7, 0). Írjuk fel annak a parabolikus másodrendű görbének az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza!
56. Adott négy pont: A[1, 0, 1], B[0, 1, 1], C[4, 1, 1], D[1, 1, 0]. Írjuk fel egy olyan parabolának az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza!
57. Adott három pont: A(1, 1), B(0, -1), C(0, 1). Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza és a tengelye párhuzamos az x-y=0 egyenessel!
58. Adott három pont: A(0, 0), B(1, -1), C(2, 1). Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza és a tengelye az x+y+1=0 egyenes!
59. Adott két pont: A(0, 1), B(0, 0). Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amely az adott pontokat tartalmazza és a tengelye az x+y+1=0 egyenes!
60. Írjuk fel az $F_1(0,-1)$ és $F_2(4, 3)$ fókuszú, P(4, 2) ponton áthaladó ellipszis egyenletét!
61. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha fókusza F(a,a) pont és a vezéregyenese x+y=a egyenes!
62. Adott a hiperbola C(1, 1) centruma, $F_1(3, 3)$ fókusza és az x+2y-7=0 érintője. Írjuk fel a hiperbola általános és kanonikus egyenletét!
63. Adott a parabola 2x+2y-1=0 csúcsérintője és az F(½, ½) fókuszpontja. Írjuk fel a parabola általános és kanonikus egyenletét!
64. Egy másodrendű görbe áthalad a koordinátarendszer origóján, fókusza az F(-1, 1) pont és az F-hez tartozó vezéregyenese az x+y-2=0. Írjuk fel a görbe általános és kanonikus egyenletét!
65. Az x+y-2=0 egyenes egy parabola csúcsérintője, továbbá ezt a parabolát az *x* tengely az E(3, 0) pontban érinti. Írjuk fel a parabola általános és kanonikus egyenletét!
66. Adott a ellipszis C(2, 1) centruma, és egy konjugált átmérőpárjának egy-egy végpontja P(5, 1), Q(0, 3). Írjuk fel az ellipszis általános és kanonikus egyenletét!
67. Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely áthalad az origón és az A(1, -2) pontban érinti a 4x+3y+2=0 egyenest és a B(0, -1) pontban az x-y-1=0 egyenest!
68. Egy hiperbola aszimptotái az x-7y+6=0 és az x-y=0 egyenesek. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amely áthalad az A(-3, 0) ponton!
69. Egy hiperbola aszimptotái az x-1=0 és a 2x-y+1=0 egyenesek. Írjuk fel annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek a 4x+y+5=0 egyenes érintője!
70. Az x+2y-3=0 egyenes az A(1, 1) pontban, a 2x-3y+7=0 egyenes a B(-2, 1) pontban érint egy másodrendű görbét. Határozzuk meg a görbe x+y+2=0 érintőjén az érintési pontot!
71. Adott egy másodrendű görbe négy érintője: *a*: x+y-5=0, *b*: 7x-3y-5=0, *c*: 5x+3y-55=0 és *d*: 5x-3y-25=0. Az *a* egyenes az A(4, 1) pontban érinti a görbét. Határozzuk meg a *b* egyenes érintési pontját!

72. Adott egy parabola két érintője: *a*: $2x+3y-5=0$, *b*: $x+y+1=0$. A parabola egy átmérőjének az egyenlete: $2x-y+3=0$. Az *a* egyenes az A(1, 1) pontban érinti a görbét. Határozzuk meg a *b* egyenes érintési pontját!
73. Írjuk fel annak a másodrendű görbének az egyenletét, amely áthalad a P(-2, -1) és a Q(0, -2) pontokon és tengelyei az $x+y+1=0$ és $x-y+1=0$ egyenesek!
74. Írjuk fel a hiperbola aszimptotáinak egyenletét, ha a hiperbola egyenlete $3x^2+2xy-y^2+8x+10y+14=0$!
75. Adott egy hiperbola: $5x^2-12xy-22x-12+4y-19=0$. Írjuk fel a hozzá konjugált hiperbola egyenletét!

Szerkesztési feladatok

76. Adott egy kúpszelet és egy külső pont. Szerkesszük meg a pontból húzható érintőket!
77. Adott az *a* és *b* egyenesből álló elfajuló másodrendű görbe és egy rájuk nem illeszkedő P pont. Szerkesszük meg a P pont polárisát!
78. Adott egy centrális kúpszelet íve. Szerkesszük meg a centrumot!
79. Adott a parabola íve. Szerkesszük meg a parabola tengelyirányát!
80. Adott egy centrális kúpszelet íve, és a görbe egy olyan közönséges pontja, amely nem tarozik az ívhez. Szerkesszük meg ebben a pontban az ív érintőjét!
81. Adott az ellipszis és az ellipszis egy P belső pontja. Szerkesszük meg az ellipszisben azt a húrt, melyet a P pont felez!
82. Adott egy centrális kúpszelet AB átmérő szakasza. Kössük össze az A és B pontokat a görbe egy tőlük különböző P pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az AP és BP egyenesek párhuzamosak egy konjugált átmérőpárral!
83. Adott a parabola egy *e* érintője az E érintési ponttal és egy átmérő egyenese. Tudjuk azt, hogy az átmérő és az átmérő végpontjában az érintő α szöget zár be egymással. Szerkesszük meg az átmérő végpontját!
84. Adott a parabola egy *e* érintője az E érintési ponttal, egy másik érintője, *f*, és a tengely iránya. Szerkesszük meg az *f* érintőn az érintési pontot!

Mértani helyek

85. Határozzuk meg az $x^2+2xy-y^2-2ax+4ay+1=0$ görbék centrumainak mértani helyét, ha *a* paraméter!
86. Határozzuk meg az R sugarú kör érintőinek a vele koncentrikus, r sugarú körre vonatkozó pólusainak mértani helyét!
87. Határozzuk meg az $x^2+y^2=1$ kör érintőinek az $x^2-y^2=1$ hiperbolára vonatkozó pólusainak mértani helyét!
88. Határozzuk meg az $x^2-y^2=1$ hiperbola érintőinek az $x^2+y^2=1$ körre vonatkozó pólusainak mértani helyét!
89. Adott az O középpontú, r sugarú kör és az *e* egyenes, melyen az A pont mozog. Az A pont polárisa az A-ban *e*-re emelt *m* merőlegest az M pontban metszi. Mi az M pontok mértani helye?

A Pascal tétel alkalmazása

1. Adott egy másodrendű görbe öt pontja és az egyik ponton áthaladó egyenes. Szerkesszük meg az egyenes és a másodrendű görbe másik közös pontját!
2. Adott egy másodrendű görbe öt pontja. Szerkesszük meg az egyik pontban az érintőt!
3. Adott egy másodrendű görbe négy pontja és az egyikben az érintő. Szerkesszük meg a másodrendű görbe egy újabb pontját!
4. Adott egy másodrendű görbe négy pontja és az egyikben az érintő. Szerkesszük meg a másodrendű görbe valamely pontjában az érintőt!
5. Adott egy másodrendű görbe három pontja és kettőben az érintő. Szerkesszük meg a másodrendű görbe egy újabb pontját!
6. Adott egy hiperbola négy pontja és az egyik aszimptota iránya. Szerkesszük meg a két aszimptotát!
7. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy pontja. Szerkesszük meg a hiperbola egy újabb pontját!
8. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy pontja. Szerkesszük meg a hiperbola pontjában az érintőt!
9. Adott egy hiperbola három pontja és két, az aszimptotákkal párhuzamos egyenes. Szerkesszük meg az egyenesek és a hiperbola közös pontjait!
10. Egy másodrendű görbe hat pontja hány Pascal-egyenest határoz meg?
11. Bizonyítsuk be, hogy egy másodrendű görbébe írt háromszög oldalainak a szemköztes csúcsba húzott érintővel való metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek!
12. Bizonyítsuk be, hogy egy másodrendű görbébe írt négyszög szemköztes oldalainak metszéspontjai és a csúcsokban vont szemköztes érintők metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek!
13. Adott egy parabola 3 pontja és tengelyének iránya. Szerkesszük meg a tengellyel párhuzamos valamely *e* egyenes és a parabola közös pontját!
14. Egy hiperbola P_1, P_2 pontján át húzzunk a hiperbola aszimptotáival párhuzamos egyeneseket! Bizonyítsuk be, hogy a kapott paralelogramma P_1P_2-től különböző átlójának egyenese átmegy a hiperbola középpontján!
15. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbolát két pontban metsző egyenesen a metszéspontok szimmetrikusan helyezkednek el az aszimptoták által kimetszett pontokhoz viszonyítva!

A Brianchon tétel alkalmazása

1. Adott egy másodrendű görbe öt érintője. Szerkesszük meg az egyik érintőn az érintési pontot!
2. Adott egy másodrendű görbe öt érintője és az egyiken egy P pont. Szerkesszük meg a P-ből húzott másik érintőt!
3. Adott egy másodrendű görbe öt érintője. Szerkesszünk az egyikkel párhuzamos hatodik érintőt!
4. Adott egy másodrendű görbe négy érintője és az egyik érintőn az érintési pont. Szerkesszük meg valamelyik másik érintőn az érintési pontot!
5. Adott egy hiperbola két aszimptotája és egy érintője. Szerkesszük meg az érintőn az érintési pontot!
6. Adott egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg az egyik érintőn az érintési pontot!
7. Adott egy parabola négy érintője és egy *e* egyenes. Szerkesszük meg a parabola *e*-vel párhuzamos érintőjét!
8. Adott egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg a parabola tengelyirányát!
9. Adott egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg a parabola fókuszát és tengelyét!
10. Adott egy parabola négy érintője. Szerkesszük meg a parabola csúcspontját és abban az érintőjét!
11. Adott egy parabola három érintője és az egyiken az érintési pont. Szerkesszük meg a parabola tengelyirányát!
12. Adott egy parabola három érintője és az egyiken az érintési pont. Szerkesszük meg a parabola tengelyét és csúcspontját!
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög oldalai egy másodrendű görbét érintenek, akkor a csúcsokat a szemköztes oldalon levő érintési ponttal összekötő egyenesek egy ponton mennek keresztül.
14. Tekintsünk egy húrnégyszöget és a köré írt körét! A csúcsokban húzzuk meg a kör érintőit, ezek egy érintőnégyszöget alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy a húrnégyszög átlói és az érintőnégyszög átlói egy pontban metszik egymást.
15. Adott egy parabola két érintője az érintési pontokkal. Szerkesszük meg az egyik érintő valamely P pontjából húzható másik érintőt!
16. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbola érintőjének az aszimptoták által kimetszett szakaszát az érintési pont felezi!
17. Adott a parabola két érintője az érintési pontokkal. Határozzuk meg a parabola végtelen távoli pontját!
18. Bizonyítsuk be, hogy a parabola húrjának felezőpontját a végpontokba húzott érintők metszéspontjával összekötve a tengellyel párhuzamos egyenest kapunk!

A Desargues tétel alkalmazása

1. Az a és b egyenes metszéspontját kössük össze a P ponttal, ahol az egyenesek metszéspontját nem érjük el!
2. Kössük össze az a, b és a_1, b_1 egyenesek hozzá nem férhető metszéspontját!
3. Húzzunk az adott a és b egyenes rajzlapon kívül eső M metszéspontján adott i iránnyal párhuzamost!
4. Az A, B, C, D, E, F pontok közül az A, C, E az a egyenesre, a B, D, F a b egyenesre illeszkednek. Ezen kívül az AD, BE és CF egyenesek egy pontban metszik egymást. (Egy sugársorhoz tartoznak.) Bizonyítsuk be, hogy az AB és DE, a BC és EF, a CD és FA valamint az a és b egyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.!
5. Fogalmazzuk meg az előbbi feladat duálisát!
6. Adott a síkban egy O csúcspontú szög (melynek a szárai az x és y félegyenesek) és a szög száraira nem illeszkedő A, B, C kollineáris ponthármas. Az A pontból húzott egyenes a szög x szárát M-ben, az y szárát N-ben metszi. Jelölje P a BM és CN egyenesek metszéspontját. Mi lesz a P pontok mértani helye, ha az A pontra illeszkedő egyenest az A körül forgatjuk?
7. Adottak a síkon egy O pontra illeszkedő a, b, c egyenesek, és az egyenesek egyikére sem illeszkedő X, Y, Z pontok. Szerkesztendő olyan ABC háromszög, melynek egy-egy csúcsa illeszkedik a megadott egyenesek valamelyikére, és egy-egy oldalegyenese haladjon át a megadott pontok valamelyikén.

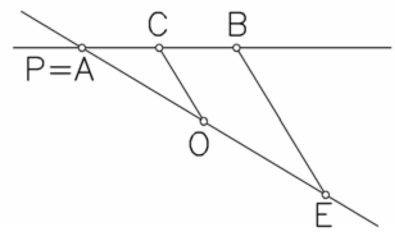
2. rész – Megoldások és útmutatások

Osztóviszony, általános affinitás

1. Ha A elválasztja a B és C pontokat, akkor $|AC|<|BC|$ és AC egyirányú BC-vel. Az osztóviszonyra teljesül: 0<(ABC)<1.
   Ha A=C, akkor (ABC)=0.
   Ha a C pont az A és B között van, akkor AC és BC ellentétes irányú. Az osztóviszonyra (ABC)<0.
   Ha B elválasztja az A és C pontokat, akkor AC és BC egyirányú és $|AC|>|BC|$. Az osztóviszonyra (ABC)>1.
   Azt tapasztaltuk, hogy az egyenes pontjai és az $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ számhalmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesült.

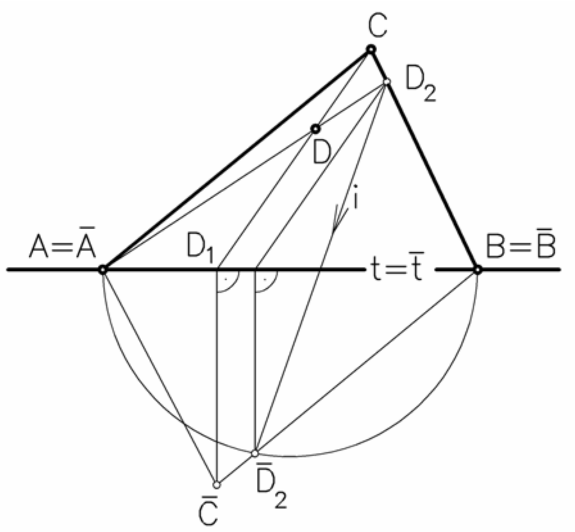
   Bővítsük ki az egyenest egy ponttal, melyet az egyenes *végtelen távoli pont*jának nevezünk. Ez a pont olyan tulajdonságú lesz, hogy az euklideszi értelemben párhuzamos egyenesekhez ugyanazt a pontot rendeljük, a végtelen távoli ponttal kibővített *egyenest projektív egyenes*nek nevezzük. (Az eddig párhuzamosnak mondott egyenesek végtelen távoli pontban metszik egymást.) Ha a C pont az egyenes végtelen távoli pontja, akkor az (ABC) osztóviszony értéke definíció szerint 1. Ezzel a végtelen távoli ponttal kibővített egyenes pontjai és a valós számhalmaz között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk.
2. Elegendő a (BAC), (ACB), (BCA) eseteket igazolnunk.
   $$(BAC):=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\lambda}$$
   $$(ACB):=\frac{AB}{CB}=\frac{AC+CB}{CB}=\frac{AC}{CB}+\frac{CB}{CB}=1-\frac{AC}{BC}=1-\lambda$$
   $$(BCA):=\frac{BA}{CA}=\frac{BC+CA}{CA}=\frac{BC}{CA}+\frac{CA}{CA}=1-\frac{BC}{AC}=1-\frac{1}{\lambda}=\frac{\lambda-1}{\lambda}$$
   Az előzőekből következik, hogy $(CAB)=\dfrac{1}{1-\lambda}$ és $(CBA)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

3. Az ábrán csak az (ABC)=-1 esetet láthatjuk. A szerkesztés alapgondolata, hogy egy számegyenesen felvesszük az osztóviszonynak megfelelő pontokat, majd a számegyenest elmozgatjuk. A P pont és az A egymást fedni fogják, a B és E pontokat összekötő egyenest a párhuzamos vetítés irányát fogja megadni. Ennek felhasználásával lehet az O pontot az egyenesre vetíteni.



4.
   - igaz
   - igaz
   - általában nem igaz
   - általában nem igaz
   - igaz
   - általában nem igaz
   - általában nem igaz

5. Az A’B’ szakaszt mozgás és hasonlósági transzformáció egymás utáni alkalmazásával $\overline{A}$, $\overline{B}$ ($A = \overline{A}$ és $B = \overline{B}$) helyzetbe hozzuk. Ekkor egy tengelyes affinitást kapunk, melynek a tengelye az $A = \overline{A}$ és $B = \overline{B}$ pontok által meghatározott egyenes lesz. Jelölje D_1 a CD és AB valamint D_2 az AD és CB egyenesek metszéspontját. A CD_1 és AD_2 szakaszok képe magasság lesz a képháromszögben, ezért $\overline{C}$ illeszkedni fog az AB-re D_1-ben állított merőlegesre és $\overline{D}_2$ illeszkedni fog az AB fölé írt Thalész-körre. A $\overline{D}_2$ pontot a D_2-re illeszkedő, CD-vel párhuzamos egyenes képe metszi ki a Thalész-körből. A $\overline{B}\overline{D}_2$ egyenes a D_1-ben AB-re állított merőlegest $\overline{C}$-ban metszi. A tengelyes affinitással kapott $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ háromszöget mozgással és hasonlósági transzformációval visszavisszük az A’B’ pontokhoz.



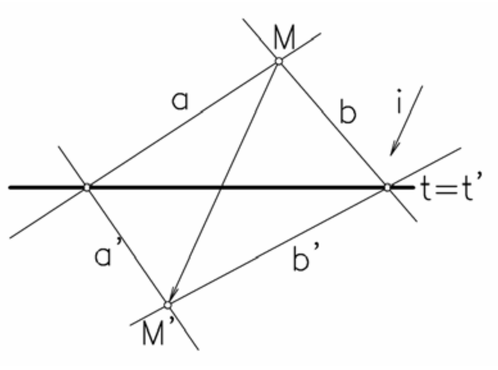
6. Csak abban az esetben oldható meg a feladat, ha az ABCD négyszög trapéz azaz, ha AB||CD. Ekkor C’ tetszőleges választása mellett A’B’C’D’ négyszög trapéz lesz az affinitás párhuzamosságtartó tulajdonsága miatt.
7. Az A’B’C’D’ egyenlő szárú trapéz, ha a szárak M metszéspontjának M’ affin képét az A’B’ felező merőlegesén választjuk. $M \rightarrow M'$ a harmadik egymásnak megfelelő pontpár.

   Az A’B’C’D’ trapéz derékszögű lesz (pl. B’-ben legyen a derékszög), ha C’-t az A’B’-re B’-ben állított merőlegesen választjuk.

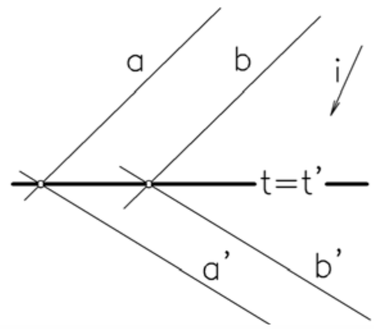
   Paralelogramma csak abban az esetben lesz, ha ABCD már paralelogramma volt.

Tengelyes affinitás

8. A négy egyenes egymáshoz viszonyított helyzetéből csak néhány esetet nézünk meg. Az *a* és *a*' egyenesek és *b* és *b*' egyenesek metszéspontjai illeszkednek az affinitás tengelyére. Az *a* és *b* egyenesek M metszéspontja és az *a*' és *b*' egyenesek M' metszéspontja egymásnak megfelelő pontok, ezért MM' megadja az affinitás irányát. A feladatnak nincs megoldása akkor, ha csak az *a*||*b* vagy *a*'||*b*'.

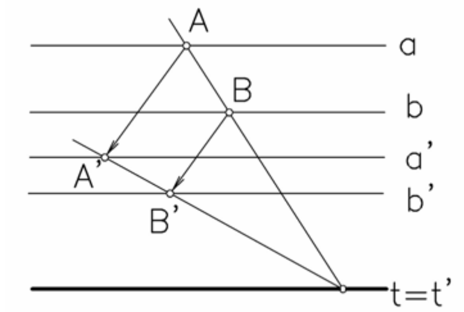


Ha *a*||*b* és *a*'||*b*' (de nem mind a négy egyenes párhuzamos egymással), akkor a tengely megszerkeszthető, az affinitás iránya tetszőleges.



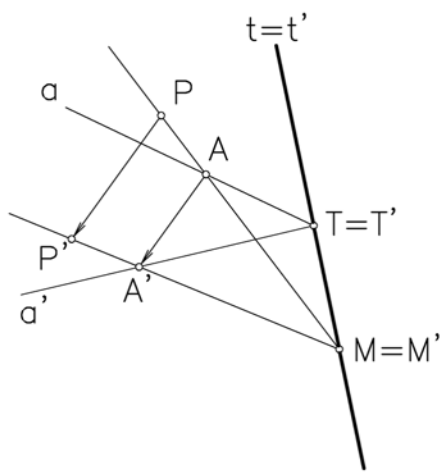
Ha a *b*||*b*' de az *a* és *a*' metszőek, akkor a tengely párhuzamos lesz a *b* és *b*' egyenesekkel, a tengely egy pontját az *a* és *a*' egyenesek metszéspontja adja.

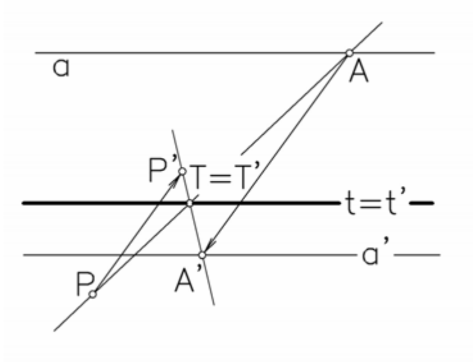
Ha mind a négy egyenes párhuzamos egymással, akkor tetszőleges irány választásával meg tudunk határozni egymásnak megfelelő, de egymással nem párhuzamos egyeneseket, ezekkel az affinitás tengelye meghatározható.



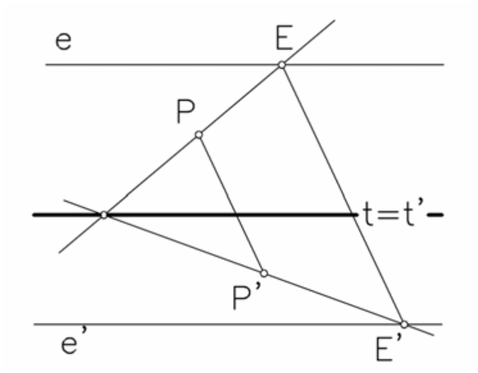
Az az eset is előállhat, hogy az *a*||*a*' és *b*||*b*'. Ekkor az affinitás irányát az M és M' pontpár meghatározza. A tengely meghatározása már nehezebb, mert az affin síkon a párhuzamos egyeneseknek nincs közös pontja. Ha a végtelen távoli pontokat bevezetjük, akkor a tengely a sík végtelen távoli egyenese lesz. Maga az affinitás ebben az esetben nem más, mint az MM' vektorral való eltolás

9. A P$\rightarrow$P' meghatározza az affinitás irányát. Ha az *a* és *a*' egyeneseknek van metszéspontjuk, akkor az illeszkedik a tengelyre. Az *a* egyenesen tetszőleges A pont A' képének felhasználásával a PA és P'A' egyenesek metszéspontja szintén illeszkedik a tengelyre.



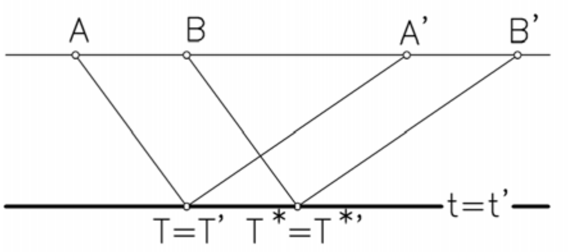


Ha $a \parallel a'$, akkor a tengely párhuzamos lesz az *a* egyenessel.

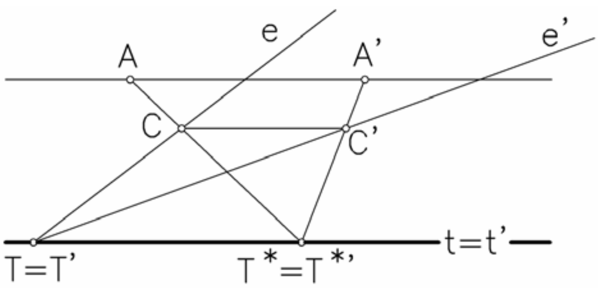


10. Ha *e* illeszkedik P-re, akkor *e*' is illeszkedik P'-re és párhuzamos lesz a tengellyel. Ha *e* nem illeszkedik P-re, akkor *e*-n tetszőlegesen (a PP' és *e* metszéspontját kivéve) választott E pont képének meghatározása után az *e*' egyenes illeszkedik *e*'-re és párhuzamos a tengellyel.

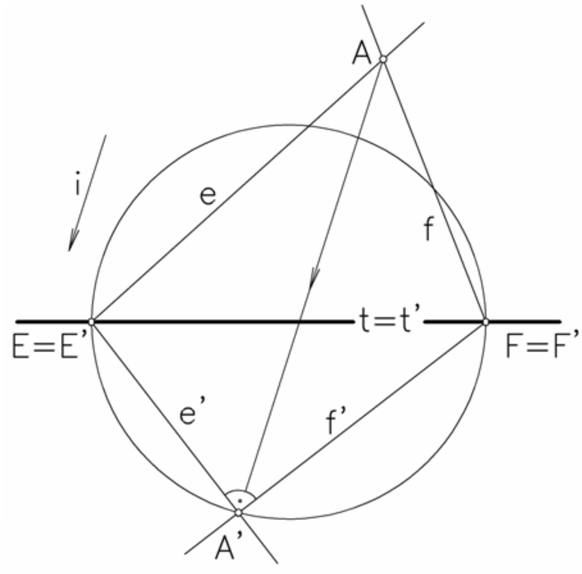
11. A B pont illeszkedjen az AA' egyenesre és T=T' a tengely tetszőleges pontja. Ekkor az elációban AT és A'T' egyenesek egymásnak felelnek meg. A B ponton keresztül AT-vel húzott párhuzamos a tengelyt $T^*=T^*$ '-ban metszi, a T^*-on T'A'-vel húzott párhuzamos B'-ben metszi az AA' egyenest. A *t*=*t*'-vel párhuzamos egyenes. képe mindig egybe esik magával az egyenessel. Fontos megjegyezni azt, hogy elációban egy tengellyel párhuzamos egyenesen egy pont és a képe közötti távolság mindig állandó és az egyenes minél távolabb található a tengelytől, az előbbi távolság annál nagyobb.

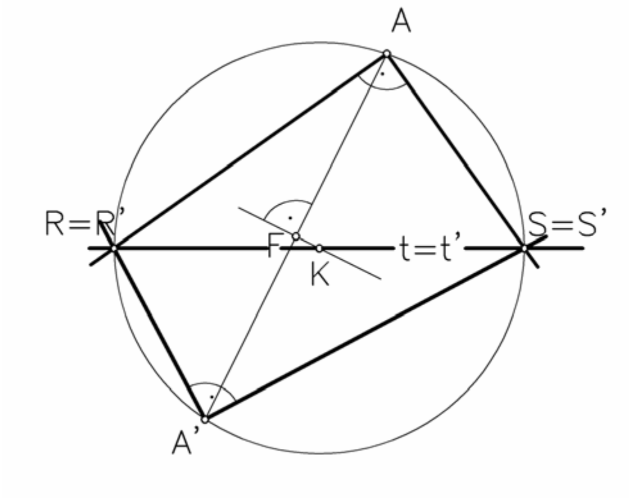


Ha egy *e* egyenes metszi a *t*=*t*'-t, akkor a tengelypont és egy tetszőleges pontjának képe meghatározza az *e*' egyenest. A C pont képének meghatározásához az AC egyenes a tengelyt $T^*=T^*$' pontban metszi ezért a C'-nek illeszkednie kell az A'T^*' egyenesre, melyet az irány felhasználásával kapunk



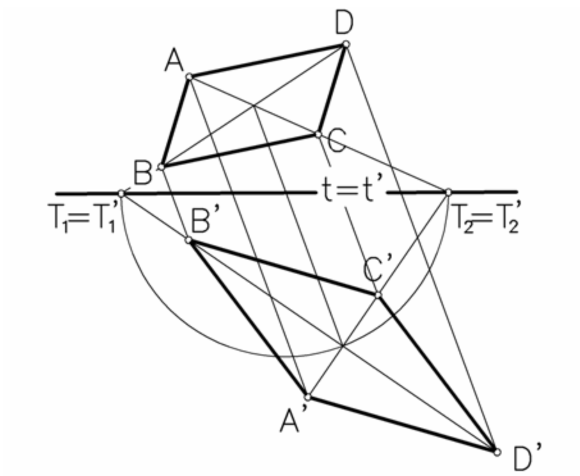
12.Adott *e* és *f* egyenesek képei akkor lesznek merőlegesek egymásra, ha az A’ pont illeszkedik az E’F’ fölé szerkesztett Thalész-körre. (Az E=E’ és F=F’ pontok az *e* és *f* egyenesek tengellyel alkotott közös pontjai.) Ha az A-n keresztül *i*-vel húzott párhuzamos belemetsz a Thalész-körbe, akkor két megoldás, ha érinti a kört, akkor egy megoldás van és ha elkerüli a kört, akkor nincs megoldás.





13. Az előző feladat megoldását felhasználva a Thalész-körön nemcsak az A’, hanem az A pontnak is illeszkednie kell. Ekkor az AA’ szakasz húr lesz a körben. A kör középpontját az AA’ felezőmerőlegese metszi ki.

14. A rombusz olyan paralelogramma, melynek az áltói merőlegesek egymásra. Ezért a B’D’ és A’C’ átlók szöge lesz majd derékszög a középpontban. A BD és AC átlók T_1=T_1’ és T_2=T_2’ pontokban metszik a tengelyt. A rombusz középpontját a T_1’T_2’ fölé rajzolt Thalész-körön tetszőlegesen kijelölhetjük.



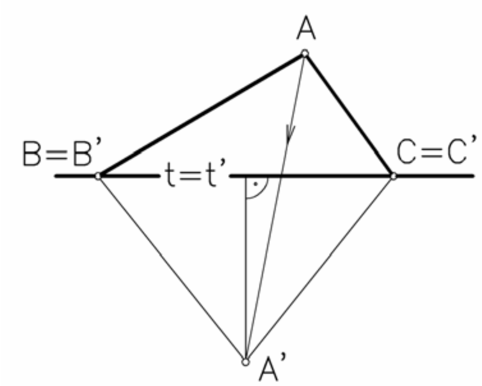
15.Felhasználjuk azt, hogy a négyzet olyan paralelogramma, amelynek nemcsak az átlói, hanem az oldalai is merőlegesek egymásra (Ezzel együtt a középvonalai is!). Ebből következik, hogy a paralelogramma középpontjában figyelnünk kell az átlókat és a középvonalakat, és a képnégyzet középpontját úgy kapjuk meg, hogy az átlóegyeneseknek illetve a középvonalak egyeneseinek a tengellyel való metszéspontjai fölé Thalész-köröket írunk, és ezek bármelyik metszéspontja választható a négyzet középpontjának. A feladatnak ez alapján két megoldása van. A feladatban figyelhetjük a paralelogramma egyik csúcsát is. Ekkor a kiválasztott csúcson keresztül halad két oldalegyenes (melyekből egymásra merőleges egyeneseket szeretnénk) és egy átló. A másik átlót el kell tolnunk a csúcsba így az utóbbi két egyenesből is merőleges egyenespárt szeretnénk nyerni. Ebben az esetben a szerkesztés hasonlóan történik, mint amikor a középpontot figyeltük, csak az affinitást most a kiválasztott csúcs és az affin képe fogja meghatározni. Fontos megjegyezni azt, hogy a feladatnak még több megoldási módja is van, pl. felhasználható az is, hogy a négyzet egy csúcsában egy oldal és az átló 45°-os szöget zár be egymással.

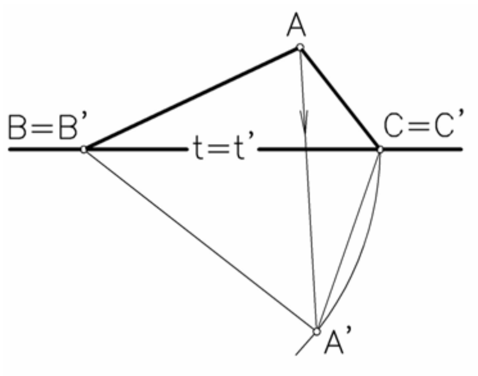
16. Felhasználjuk, hogy a téglalap olyan paralelogramma, amelynek az oldalai merőlegesek egymásra. Ezért kiválasztjuk az A csúcsot, melyből induló oldaléleknek a tengellyel való metszéspontjai fölé Thalész-kört írunk. Ezen kell kijelölnünk az A' pontot. Mivel nem volt megadva az affinitás iránya, ezért a feladatnak mindig lesz megoldása.

17. A paralelogramma trapéz, így a feladatnak bármely affinitás eleget tesz: a paralelogramma affin képe mindig trapéz. Az azonban a paralelogramma affin képeként soha nem kaphatunk olyan trapézt, melynek csak egy párhuzamos oldalpárja van.

18. Tegyük fel, hogy a megadott trapéznak az AB és CD oldalai voltak párhuzamosak egymással. Az A' pontban szeretnénk egymásra merőleges oldalakat kapni, de ezzel együtt a D' pontban teljesülni fog ez. Az AB és AD oldalegyeneseknek a tengellyel való metszéspontjai fölé Thalész-kört írunk, melyből az A-ból az affinitás irányával párhuzamos egyenes fogja kimetszeni az A'-t. A megoldások száma a Thalész-kör és egyenes közös pontjainak számától függ.

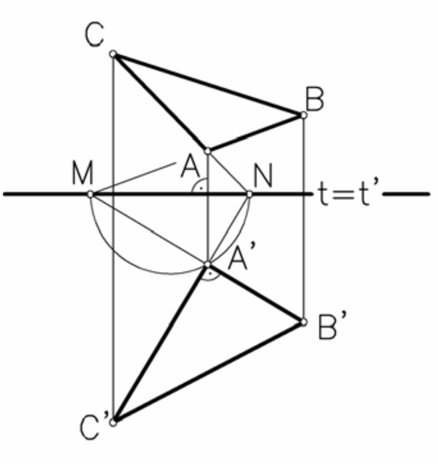
19. Ha A'B'=A'C', akkor A'-t a B'C' felezőmerőlegeséből az affinitás irányának felhasználásával metszhetjük ki. Lehetséges, hogy nem kapunk megoldást, ha az A ponton az affinitás irányával húzott párhuzamos nem metszi a felezőmerőlegest.



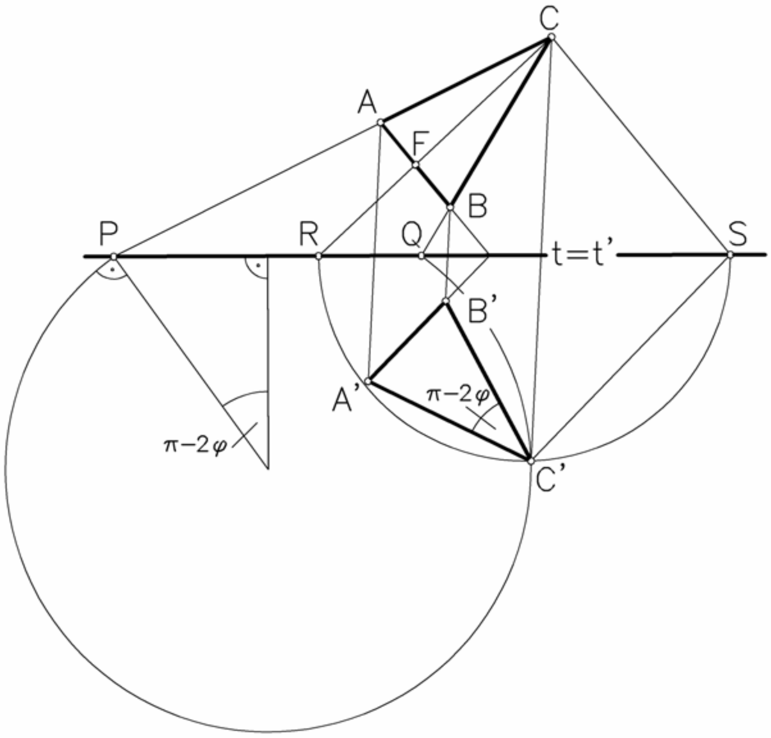


20. Ha A'C'=B'C', akkor A'-t a B' körül B'C' sugárral írt körből az affinitás irányának felhasználásával metszhetjük ki. Lehetséges, hogy nem kapunk megoldást, ha az A ponton az affinitás irányával húzott párhuzamos nem metszi a kört.

21. Ha az AB és AC oldalaknak a tengellyel való közös pontjai M és N, akkor A’ az M N fölé szerkesztett Thalész-körből az affinitás irányának felhasználásával határozható meg.



22. Az A’C’B’$\angle$=π-2φ lesz és a C-t az AB szakasz F felezőpontjával összekötő szakasz affin képe merőleges lesz az A’B’-re és ezzel együtt a vele párhuzamos egyenesekre is (pl. a C’-re illeszkedőre is). Jelölje P az AC, Q a CB, R a CF és S C-re illeszkedő. AB-vel párhuzamos egyenes és a tengely metszéspontjait. C’ az RS fölé szerkesztett Thalesz kör és a PQ fölé a π-2φ szöghöz tartozó látókörív metszéspontja.

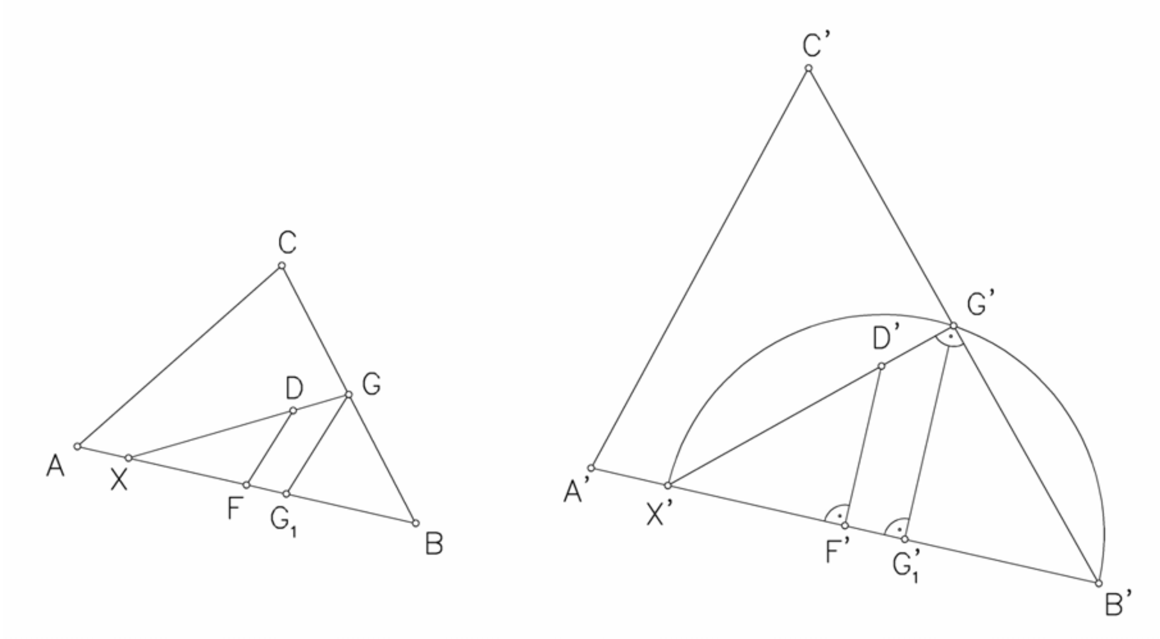


23. Megoldhatjuk úgy, hogy az előbbi példában φ=60°. Egy másik megoldás lehet az, hogy ha kiválasztjuk az A csúcsot és megrajzoljuk az A-ból induló súlyvonalat. Ekkor a képháromszög A’ csúcsában az oldalak 60°, az egyik oldal a súlyvonallal 30°-os szöget zár be.

24. Legyen a képháromszögben a B’ csúcsnál lévő szög a derékszög. Ha az affinitás tengelyét az BC R-ben, BA S-ben, a B csúcshoz tartozó súlyvonal P-ben és a B ponton keresztül AC-vel húzott párhuzamos Q-ban metszi, akkor B’ nem más, mint az RS és PQ pontok fölé szerkesztett Thalesz körök metszéspontja. A feladatnak két megoldása van.

25. A súlypont affin képe szintén súlypont lesz, mivel csak osztóviszonnyal és illeszkedés felhasználásával meghatározható. Ezért csak akkor van megoldás, ha a D már maga is súlypontja az ABC háromszögnek.

26. Legyen F az AB oldal, G a BC oldal felezési pontja. Ekkor a képháromszögben azt várjuk el, hogy F'D' egyenes legyen merőleges az A'B' oldalra. A G pontot az FD-vel párhuzamos iránnyal az AB-re vetítve a G_1 pontot kapjuk, valamint a GD egyenesnek a AB-vel való metszéspontját jelölje X. Ekkor a képháromszögben G'D' merőleges B'C'-re, vagyis G' az XB szakasz fölé írt Thalész-körön van, méghozzá a G_1'-ben A'B'-re állított merőleges fogja kimetszeni. Az X' és G_1' pontokat az affinitás osztóviszonytartó tulajdonsága alapján határozzuk meg, (A'B'X')=(ABX) és (A'B'G_1')=(ABG_1). A feladatnak nem mindig van megoldása. Elegendő arra gondolni, hogy csak a hegyesszögű háromszögeknek belső pontja a köré írható kör középpontja. Emiatt a képháromszög csak hegyesszögű lehet.



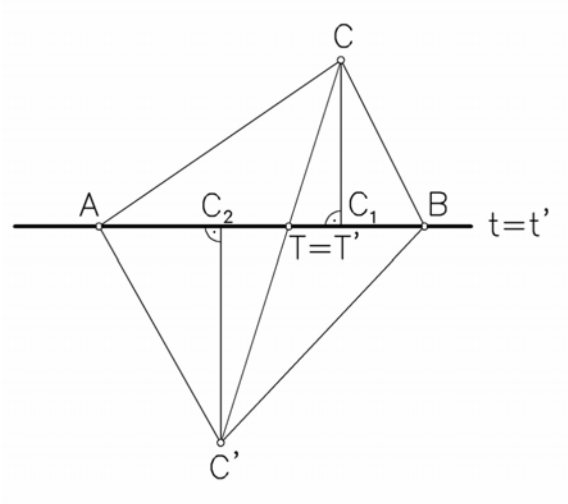
27. Ezt a feladatot csak a második félévben tudjuk megoldani, ugyanis fel kell használnunk a Brianchon-tételt. Az adott ABC háromszögben lévő D pontból akkor lesz a képháromszög beírható körének középpontja, ha létezik olyan D középpontú ellipszis, amely érinti a háromszög oldalait. Az ellipszis középpontos szimmetriájából következik, hogy az ABC háromszög D-re való tükörképe is érinti az ellipszist. A két háromszög metszete egy érintőhatszög. A Brianchon-tétel alkalmazásával az AB oldalt az ellipszis E, a BC oldalt az F pontokban érinti. Az FD egyenes az AB oldalt G-ben metszi, valamint az F pontot a DE egyenessel párhuzamosan az AB-re vetítve H-t kapjuk. Ha általános affinitásban gondolkodunk, akkor az A' és B' pontok kijelölésével a G' és H' pontokat az osztóviszonytartás felhasználásával meg tudjuk határozni. Az affinitás után a beírható kör esetén az érintési pontokat a D'-vel összekötő szakaszok merőlegesek a megfelelő oldalra. Emiatt F' illeszkedik a H'B' fölé írható Thalész-körre és a H'-ben az A'B'-re állított merőlegesre.

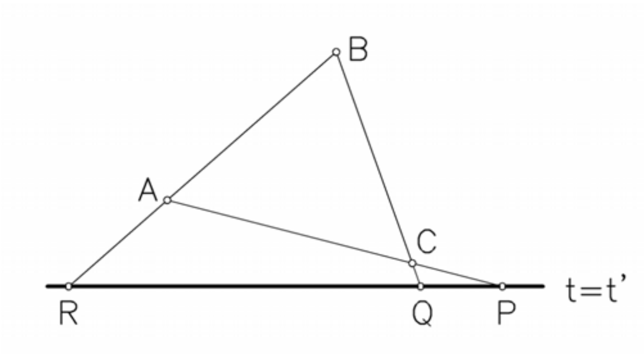
28. Az affinitás tengelyét az AC a P-ben, a BC a Q-ban, az AB R-ben, és a C-n keresztül AB-vel húzott párhuzamos S-ben metszi. Ha $A^*C^*B^*\angle=\chi$ és $A^*B^*C^*\angle=\beta$, akkor a PQ szakasz fölé a χ szöghöz tartozó, RS fölé a β szöghöz tartozó látókörívek metszéspontja lesz C'.

29. Mivel a tengelyes tükrözés is beletartozik a tengelyes affinitások körébe, elegendő azt a példát hoznunk, hogy két egymást merőlegesen metsző tengelyre való egymás utáni tükrözés a tengelyek metszéspontja körüli 180°-os forgatást eredményez. Ekkor a megfelelő pontokat összekötő egyenesek átmennek a forgatás középpontján. Ennél általánosabb affinitás esetén is juthatunk hasonló esethez.

Karakterisztika, dilatáció

30. λ jelölje az affinitás karakterisztikáját. Tekintsünk először olyan háromszöget, amelynek pl. az AB oldala az affinitás tengelyére illeszkedik. Ekkor $T_{ABC}=\frac{|AB|\cdot m}{2}$ és $T_{A'B'C'}=\frac{|AB|\cdot m^*}{2}$, ahol m és m^* az ABC és A'B'C' háromszögek magasságai. A CTC_1 és $C'T'C_2$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy $m=\lambda\cdot m^*$. Ekkor $\frac{T_{ABC}}{T_{A'B'C'}}=\frac{|AB|\cdot\lambda\cdot m^*}{|AB|\cdot m^*}=\lambda$.





Most tekintsünk olyan háromszöget, amely csúcsai nem illeszkednek a tengelyre! Elegendő igazolni azt, hogy az előbbi típusú háromszögekből kivonással és összeadással elő tudjuk állítani.
$T_{ABC}=T_{PCQ}+T_{QBR}-T_{ARP}$.

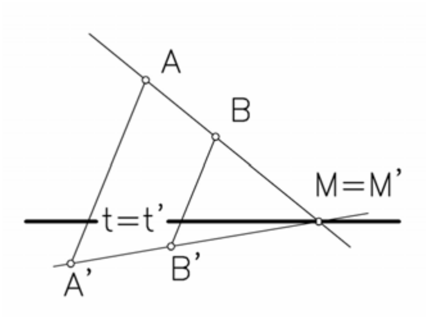
31. Az $a\to a'$ egyenespár metszéspontja a tengely egy pontja. Affinitás irányával az egyenespáron kijelölhető egy A→A' megfelelő pontpár. Az AA' egyenes T tengelypontjára: $\frac{AT}{A'T'}=\frac{AT}{A'T}=\lambda$. Ha pl. $\lambda=\frac{2}{3}$, akkor 3·AT=2·A'T miatt A-tól számítva T a második ötödölő pont. $\frac{AT}{A'T}=\frac{\frac{2}{5}\cdot AA'}{\frac{3}{5}\cdot AA'}=\frac{2}{3}$.

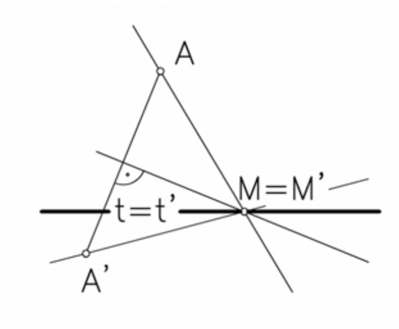
Ha $\lambda=\frac{p}{q}$ alakban adott, akkor az AA' szakaszt p+q egyenlő részre osztva az A-tól mért p-dik osztópont a T. $\frac{AT}{A'T}=\frac{\frac{p}{p+q}\cdot AA'}{\frac{q}{p+q}\cdot AA'}=\frac{p}{q}$.

32. Az előző feladat alapján megoldható.

33. Legyen AA’ megfelelő pontpár. Az A és A’ merőleges vetülete a tengelyen Q és R, és az AA’ tengellyel való metszéspontja P. Az APQ és A’PR háromszögek hasonlóak, ezért $\frac{AQ}{A'R} = \frac{AP}{A'P} = \lambda$. Ez azt jelenti, hogy elegendő a pontok tengelytől való távolságát vizsgálni. Ha pl. $\lambda = \frac{2}{3}$, akkor egy tetszőleges egységszakaszt választva a tengely egyik oldalán 2 egységre, a tengely másik oldalán 3 egységre felveszünk két t-vel párhuzamos egyenest. Az elsőt *e*-vel a másodikat *e*’-vel jelöljük, és ezek az affinitásban egymásnak felelnek meg. Tetszőleges *i*-vel párhuzamos egyenes az *e* és *e*’ egyenespárból az E és E’ egymásnak megfelelő pontpárt metszi ki.

34. A dilatáció az affinitásban egymásnak megfelelő egyeneseken egy szakasz hosszának és a képszakasz hosszának a hányadosa. A dilatáció adott affinitás mellett függ az egyenes állásától, de párhuzamos egyeneseken véve megegyezik. Az A ponton keresztül vegyünk fel egy *a* egyenest és azon egy B pontot. A megfelelő képek meghatározása után a dilatáció: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'}$, ahol M=M’ az *a* egyenes és a tengely metszéspontja.



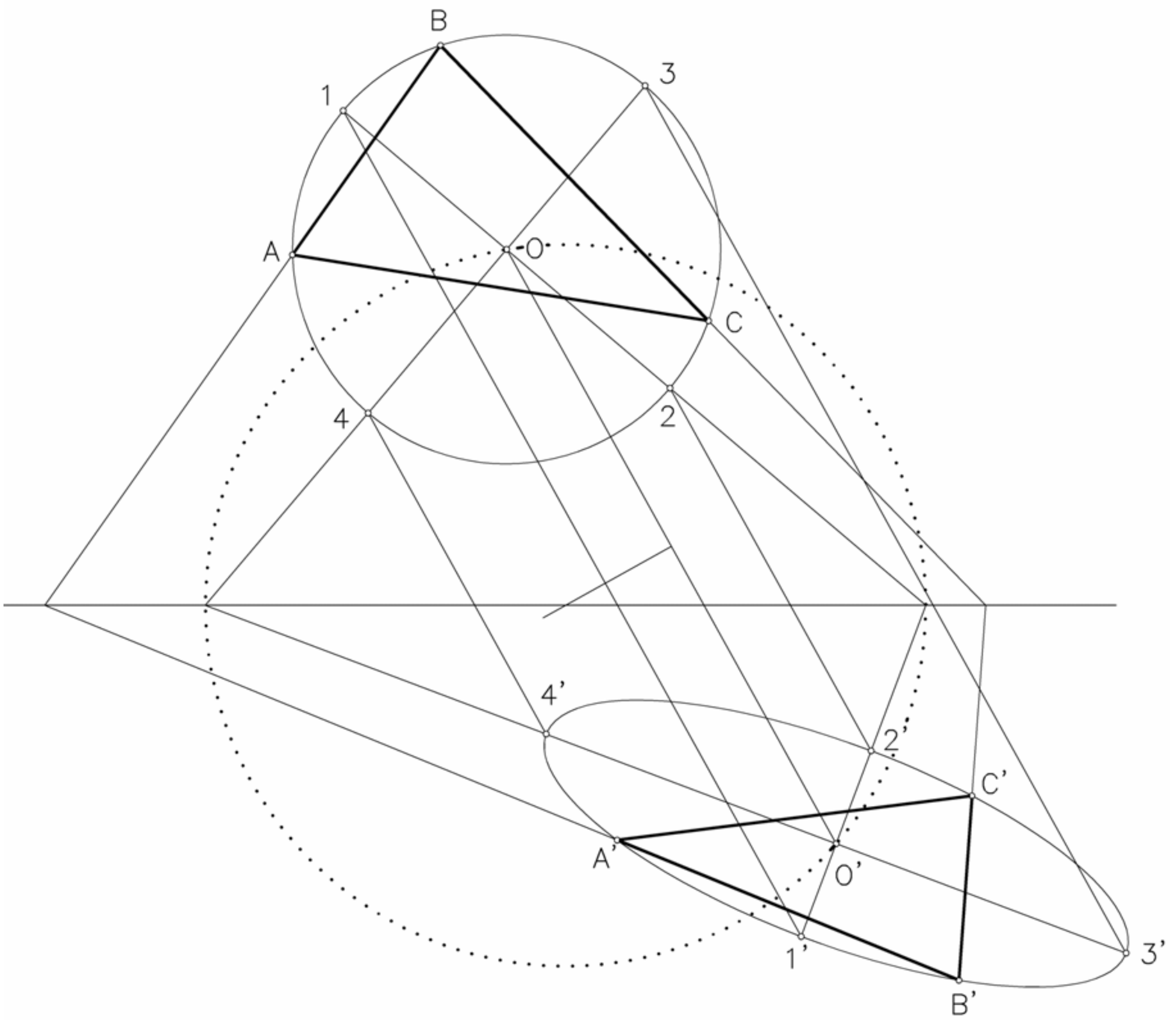


Ekkor az AA’M háromszög egyenlő szárú és így M illeszkedik az AA’ felezőmerőlegesére. Így az M pont meghatározása után minden AM egyenessel párhuzamos egyenesen a dilatáció 1.

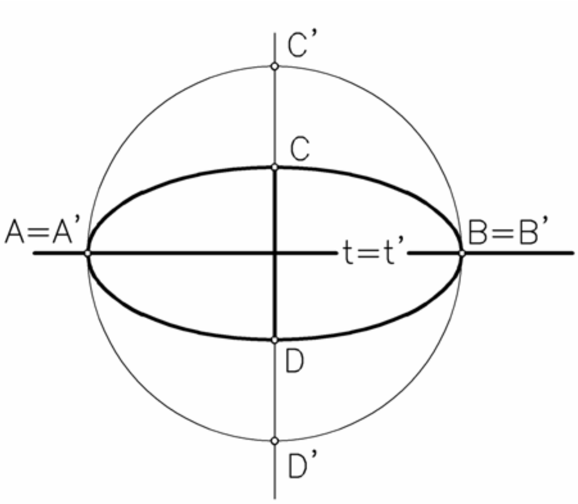
Ha az affinitás ortogonális, akkor az AA’ felezőmerőlegese párhuzamos a tengellyel, ekkor a tengellyel párhuzamos egyeneseken lesz a dilatáció 1-gyel egyenlő.

Ellipszissel kapcsolatos feladatok

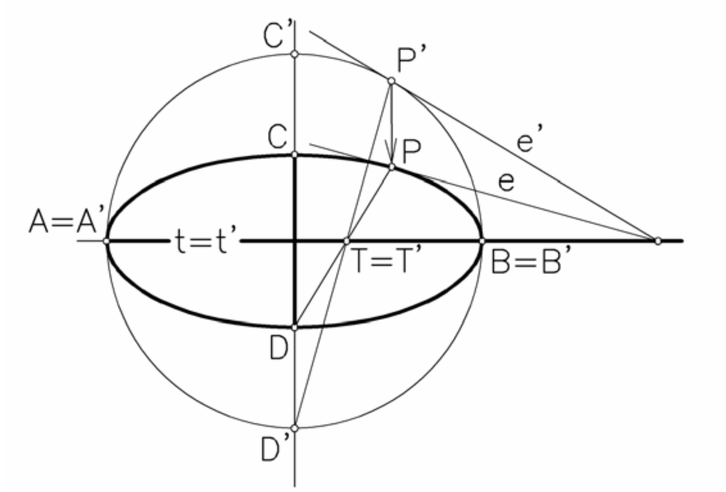
35. Az affinitásban meghatározzuk az ABC háromszög A'B'C' képét. Legyen O az ABC háromszög köréírható körének középpontja, ennek O' affin képe a képellipszis középpontja lesz. A k kör egymásra merőleges átmérőinek affin képe az ellipszis konjugált átmérőit adják, de most azt az átmérőpárt keressük a körben, amely affin képe az ellipszis tengelyeit szolgáltatják. Ez az OO' pontokhoz tartozó invariáns derékszögpár (13. feladat) által kijelölt átmérőpár lesz. Az affinitás segítségével tetszőlegesen sok pont affin képét meg tudjuk szerkeszteni, de ha a kör elmetszi a tengelyt, akkor ezek a metszéspontok az ellipszisnek is pontjai lesznek.



36. Az ellipszis nagytengelye AB, kistengelye CD, középpontja O. Az affinitás tengelyének az AB egyenesét választjuk. Ekkor az AB szakasz a képkörnek is átmérője, ezáltal meghatározott az ellipszishez affin kör. Az affinitás egy pontpárjához úgy jutunk, hogy meghatározzuk pl. a C pont megfelelőjét. Az ellipszis C-beli érintője nem metszi el az affinitás tengelyét, így a képe sem fogja elmetszeni. A C pont megfelelőjének két pont is választható: a kör tengelytől legtávolabbi pontjai. Ezáltal két tengelyes affinitást kaphatunk.

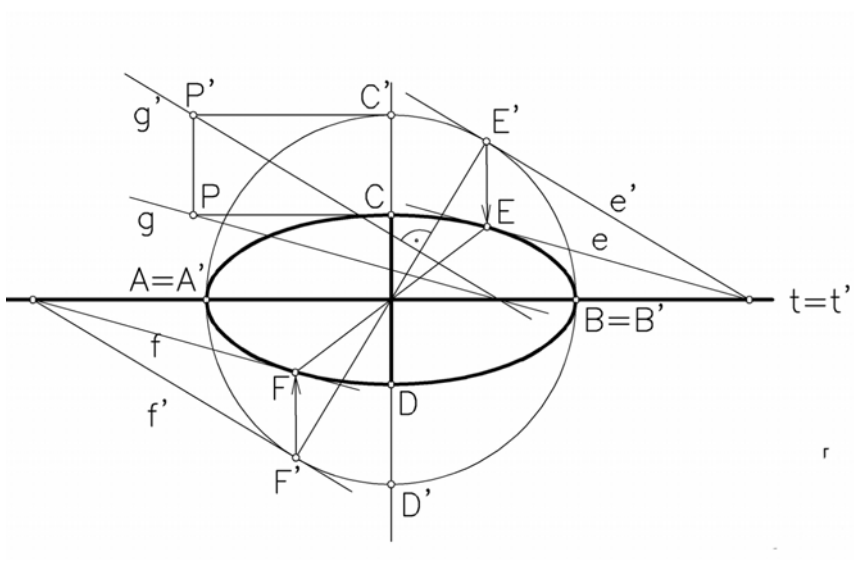


Az egyik megfelelő pontpárja a C↔C'. A kapott tengelyes affinitás ortogonális. Mivel a kör affin képe ellipszis, a kör pontjainak affin képe ellipszispont lesz.

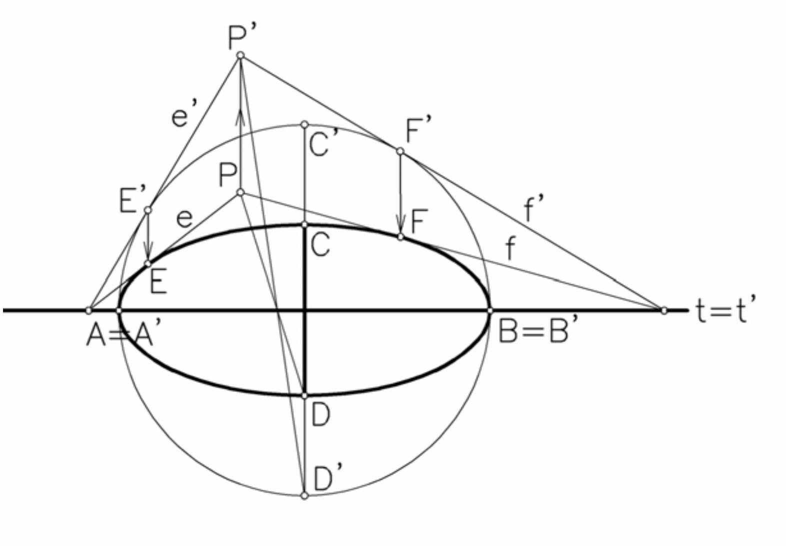


A P' körpontnak megszerkesztjük a P „ősképét”: A D'P' egyenesnek a tengellyel való metszéspontja fix pont, ezért ha D-vel összekötjük, akkor ezen az egyenesen lesz a P, melyet az affinitás iránya jelöl ki. A P-beli ellipszisérintő a P'-beli *e*' körérintő affinitás előtti képe. Az *e* és *e*' egyenesek a tengelyt ugyanabban a pontban metszik.

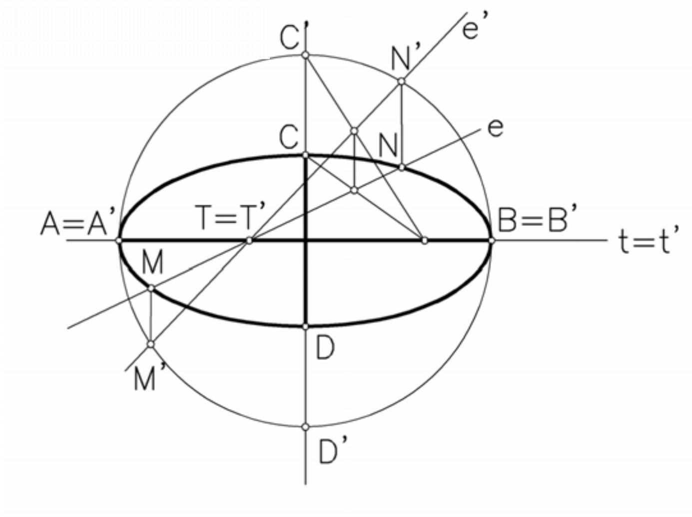
37. Az affinitás illeszkedéstartó tulajdonságait használjuk fel. Alkalmazzuk az affinitást az egyenesre (ezzel a kör rendszerében oldjuk majd meg először a feladatot) úgy, hogy egy P pontjának megszerkesztjük az affin képét, majd összekötjük a tengelyen fekvő pontjával. Az így kapott *g*' egyenessel párhuzamos körérintőket határozzuk meg. Az érintési pontokat a kör középpontjából a *g*' egyenesre állított merőleges fogja kimetszeni: E' és F'. Az érintési pontokba eltolva a *g*'-t az *e*' és *f*' egyeneseket kapjuk. A tengellyel való



metszéspontokból a *g*-vel párhuzamosan indulnak az ellipszis *e* és *f* érintői, melyeken az affinitás iránya az érintési pontokat is kijelöli.



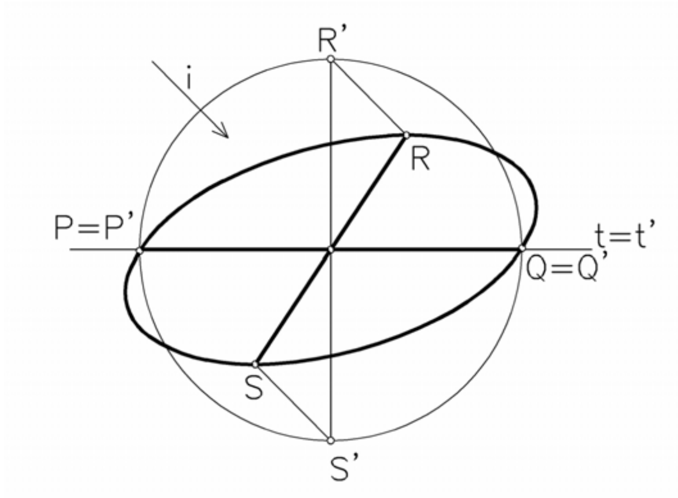
38. Alkalmazzuk az affinitást a megadott P külső pontra is. Ekkor a P'-ből a körhöz két érintő szerkeszthető. A tengelypontjaikat P-vel összekötve az ellipszis érintőket kapjuk, melyeken az érintési pontokat az affinitás iránya jelöli ki.



39. Az affinitás illeszkedéstartó tulajdonságait használjuk fel. Alkalmazzuk az affinitást az *e* egyenesre. Az így kapott *e*' egyenes metszi a kört az M' és N' pontokban. Ezeknek a pontoknak kell az affinitás előtti képeit megkeresni az affinitás irányának felhasználásával.
40. A 39. feladat megoldásával megegyezik.
41. A 39. feladat megoldásához hasonló eljárást kell alkalmazni, csak most olyan affinitást kell alkalmazni az ellipszisre, melynek a tengelye az ellipszis kis tengelyének egyenese, és az ellipszis képe a kistengely fölé írt Thalész kör lesz.
42. Meghatározzuk az *e* egyenes *e*' affin képét. A képkörben az *e*'-vel párhuzamos átmérő éppen a keresett átmérő affin képe.
43. Meghatározzuk az *e* egyenes *e*' affin képét. A keresett átmérő affin képe az *e*' egyenesre merőleges körátmérő lesz.

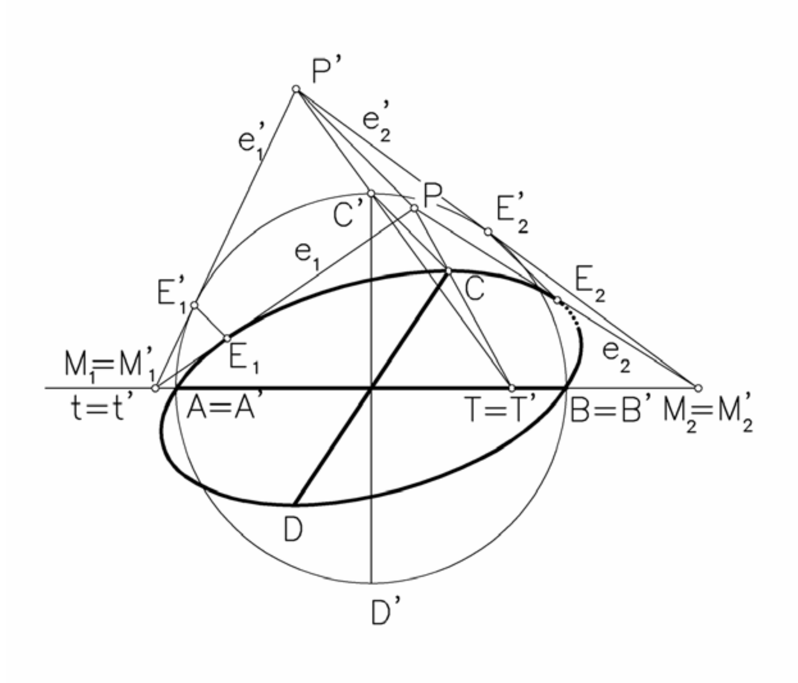
    A 42. és 43. feladat együttes megoldása az ellipszis egy konjugált átmérőpárját adja. A körben minden két, egymásra merőleges körátmérő konjugált, míg az ellipszis esetén csak egy olyan átmérőpár van, amely egymásra merőleges: a tengelyek.

44. A konjugált átmérőpárral megadott ellipszis és az egyik átmérő fölé írt Thalész kör között egy ferde tengelyes affinitás van. Adott az ellipszis a PQ és RS konjugált átmérőpárral. Válasszuk az affinitás tengelyének a PQ egyenest! Ekkor ez egyben az affin körnek is egy átmérője. Mivel a konjugáltság érintkezéssel és párhuzamossággal van definiálva, ezért az affinitással szemben invariáns tulajdonság, tehát az P’Q’ körátmérőhöz a rá merőleges átmérő a konjugált. Az S pont affin képére két lehetőség adódik: az ábrán jelölt S’ vagy a vele átellenes körpont.



A *e* egyenessel párhuzamos, ellipszist érintő egyenesek affin képei érintik az affin képként előálló kört. A szerkesztésben az *e*’-vel párhuzamos körérintők ősképeit kell meghatározni.

45. Az ellipszis az AB és CD konjugált átmérőkkel adott. Olyan tengelyes affinitást alkalmazunk az ellipszisre, melynek a tengelye az AB átmérő egyenese. A P külső pontra is alkalmazzuk az affinitást. A keresett érintőegyenesek a P’ pontból a körhöz húzott érintők ősképei.
46. Az *e* egyenesre alkalmazzuk a 44. feladatban leírt affinitást. Az *e*’ és a kör közös pontjai a keresett pontok affin képei.
47. A feladat az előző feladat alapján megoldható.
48. A 44. feladatban leírt affinitást alkalmazzuk az *e* egyenesre is. Ekkor a körben az *e*’-vel párhuzamos és rá merőleges *f*’ átmérők konjugáltak lesznek. Ezután az *f* egyenes konjugált irány az *e*-hez.

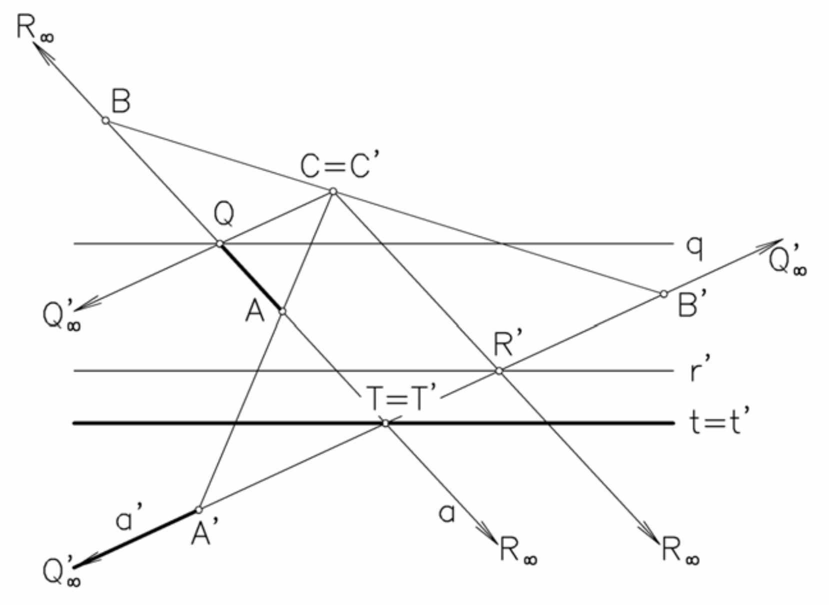


49. Felhasználjuk, hogy a körben az érintési pontba húzott sugár mindig merőleges az érintőre. Az ellipszis általános pontjában ez azonban nem teljesül.
50. Ortogonális affinitást alkalmazva az ellipszispont képe a képkörön kijelölhető.
51. A 49. feladat alapján megoldható, csak most az affinitás tengelye az ellipszis kistengelye lesz.
52. A 50. feladat alapján megoldható, csak most az affinitás tengelye az ellipszis kistengelye lesz.
53. Felhasználjuk, hogy a körben az érintési pontba húzott sugár mindig merőleges az érintőre. Ebből meghatározható az affinitás egy megfelelő pontpárja.

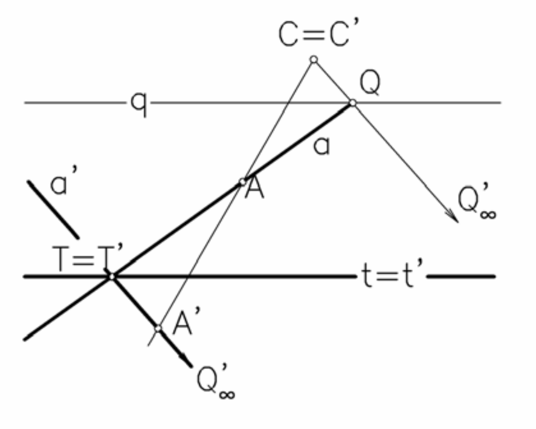
54. Felhasználjuk, hogy a körben egy húr felezőpontját a középponttal összekötő egyenes merőleges a húrra. Emiatt az ellipszis két pontja által adott húr felező pontjának affin képe meghatározható.
55. Az ellipszis szimmetrikus a középpontjára. A két érintőből az ellipszis köré egy érintőparalelogrammát nyerünk. Mivel az adott két érintő nem konjugált irányt határoz meg, ezért a paralelogramma körbeli megfelelője a kör érintőrombusza. A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így az ellipszis köré írt paralelogrammát rombusszá kell transzformálni. A párhuzamosságtartást figyelembe véve, egy a tengelyre nem illeszkedő pontba eltoljuk a paralelogramma átlóit. A Thalész kört és az ortogonális affinitást felhasználva az érintőrombusz szerkeszthető
56. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van, valamint az ellipszist érintő egyenes képe a kört érintő egyenes lesz. Először az adott átmérőhöz konjugált átmérőt lehet meghatározni, ezekből Rytz-szerkesztéssel adódnak az ellipszis tengelyei.
57. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van. Azt az átmérőt választjuk az affinitás tengelyének, amelyhez konjugált irány is adott, a konjugált irány képe az affinitás tengelyére merőleges lesz. Először a másik adott átmérő affin megfelelőjét lehet meghatározni, majd a konjugált átmérőpárból Rytz-szerkesztéssel adódnak az ellipszis tengelyei.
58. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van. Az átmérőt választjuk az affinitás tengelyének, amelyhez konjugált irányú húr affin képe merőleges lesz az átmérőre. Először a konjugált átmérőpárt lehet meghatározni, majd a konjugált átmérőpárból Rytz-szerkesztéssel adódnak az ellipszis tengelyei.
59. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van. Az egyik átmérő-egyenes lesz az affinitás tengelye, és a másik affin képe a tengelyre merőleges egyenes. Ezen kívül az ellipszispontok által adott húr képe a körben szintén húr lesz. Itt az teljesül, hogy a húr felezőpontját a kör középpontjával összekötő egyenes merőleges a húrra. Először a konjugált átmérőpárt lehet meghatározni, majd a konjugált átmérőpárból a Rytz-szerkesztéssel adódnak az ellipszis tengelyei.
60. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van. Ez ellipszis érintője körérintőbe megy át. Így megfelelő pontpárt nyerünk, ebből az adott átmérőhöz konjugált átmérőt, majd Rytz-szerkesztéssel az ellipszis tengelyeit határozhatjuk meg.
61. Felhasználjuk, hogy az átmérő fölé emelt kör és az ellipszis között ferde tengelyes affinitás van. Az átmérőhöz konjugált egyenes képe merőleges lesz az affinitás tengelyére. Ezen kívül az ellipszist érintő egyenes képe érinti a kört. Először a konjugált átmérőpárt lehet meghatározni, majd a konjugált átmérőpárból Rytz-szerkesztéssel adódnak az ellipszis tengelyei.
62. Az 55. feladat alapján a konjugált átmérőpár, majd ezekből az ellipszis tengelyei meghatározhatóak.
63. Az adott átmérő fölé írt Thalész-kör lesz az ellipszis affin képe. Az adott egyenes lesz az affinitás tengelye. Az adott ellipszisérintők tengelypontjaiból kell a körhöz érintőket húzni. Ekkor két egymásnak megfelelő egyenespárból egy megfelelő pontpárt kapunk. Ezután az adott átmérőhöz konjugált átmérőt határozzuk meg, majd Rytz-szerkesztéssel az ellipszis tengelyeit.

Centrális kollineáció

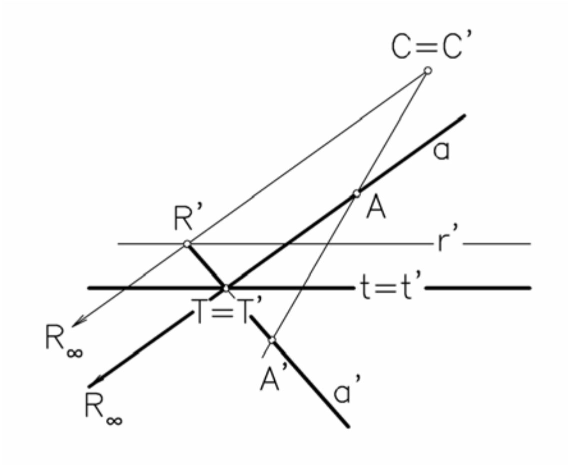
1. Vegyünk fel egy tetszőleges *a* egyenest az A ponton keresztül, melynek a tengellyel való metszéspontja T=T'. Ez a pont önmagának megfelelő pont a kollineációban. Így az *a*' egyenes nem más mint a T=T' és A' összekötő egyenese. A *q* ellentengely az az egyenes, melynek a képe a sík végtelen távoli egyenese. Ennek meghatározásához felhasználjuk az *a*' egyenes Q'_∞ pontját. Az *a* Q pontja, a centrum és a Q'_∞ egy egyenesre kell, hogy illeszkedjen, ezért Q-t a centrumon áthaladó, *a* -val affin értelemben párhuzamos egyenes fogja kimetszeni az *a*-ból. A Q választja majd el euklideszi értelemben az A és B pontokat. Vegyünk fel egy ilyen B pontot. Ennek a képét a B-t a centrummal összekötő egyenes fogja kimetszeni az *a*'-ből. A pontok követési sorrendjét figyelve az AB szakasz képe két, affin értelemben vett félegyenes lesz: $A'Q'_\infty$ és $Q'_\infty B'$, melyeket a projektív síkon nyugodtan hívhatunk egy szakasznak is. Ha a másik ellentengelyt is meghatározzuk, akkor az $R_\infty B$ és TR_∞ szakasz/félegyenesek képei R'B' és T'R' szakaszok lesznek.



2. Egy tetszőleges *a* egyenest használunk fel, amely a *q*-t Q-ban, a tengelyt T=T'-ben metszi. Ekkor az *a*' egyenes affin értelemben párhuzamos a Q-t a centrummal összekötő egyenessel és illeszkedik a T=T'-re. Az *a a*' egyenespáron megfelelő pontpár meghatározható.

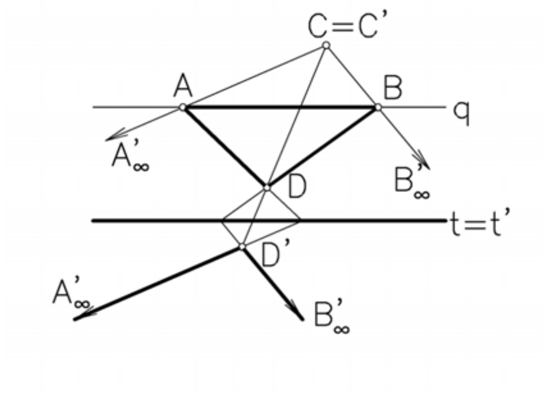


3. Az előző feladathoz hasonlóan először egy egymásnak megfelelő egyenespárt határozunk meg, melyen a pontpár már kijelölhető.



4.

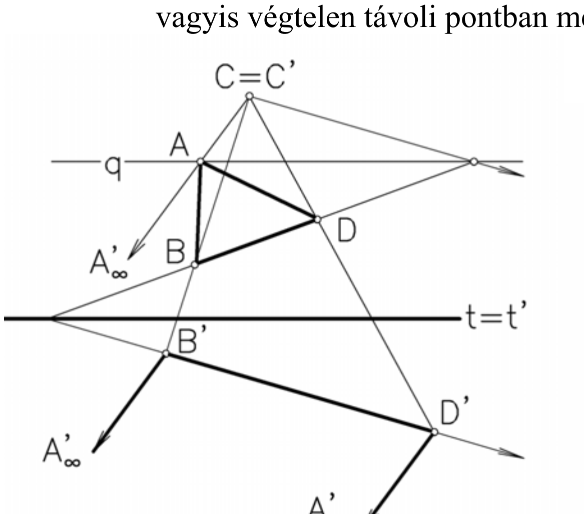
- a háromszög egyik oldala illeszkedik a *q* ellentengelyre

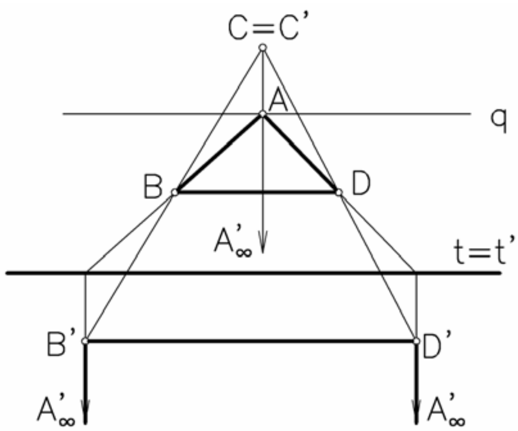


Ebben az esetben az A és B pontok képei végtelen távoli pontok lesznek, ezen kívül az egész AB oldal is végtelen távoli lesz. A szerkesztésben az AD oldal képe affin értelemben párhuzamos lesz a CA egyenessel és a BD oldal képe a CB egyenessel.

- a háromszög egyik csúcsa illeszkedik a *q* ellentengelyre
- a háromszög egyik csúcsa a C-ből *q*-ra állított merőleges talppontja, az ezzel szemköztes oldal affin értelemben párhuzamos a tengellyel

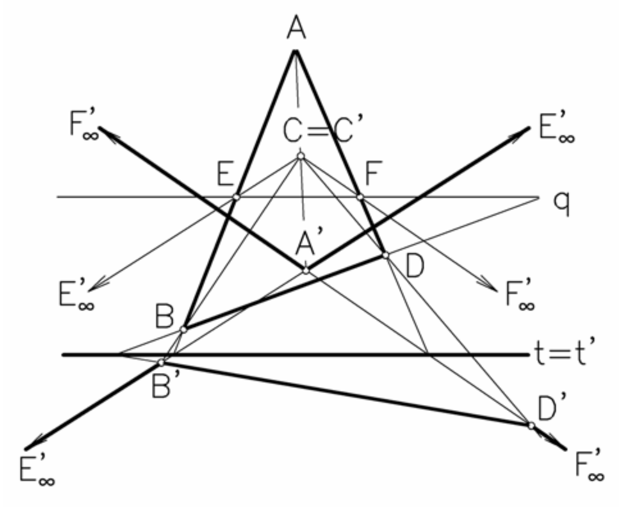
A két eset nagyon hasonló egymáshoz. Mindkettőre jellemző, hogy az AB és AD oldalak képei affin értelemben párhuzamosak lesznek az AC egyenessel. Az első esetben a BD és B'D' oldalak a tengelyt véges helyzetű pontban metszik, míg a másik esetben a BD és B'D' oldalak affin értelemben párhuzamosak a tengellyel, vagyis végtelen távoli pontban metszik egymást.





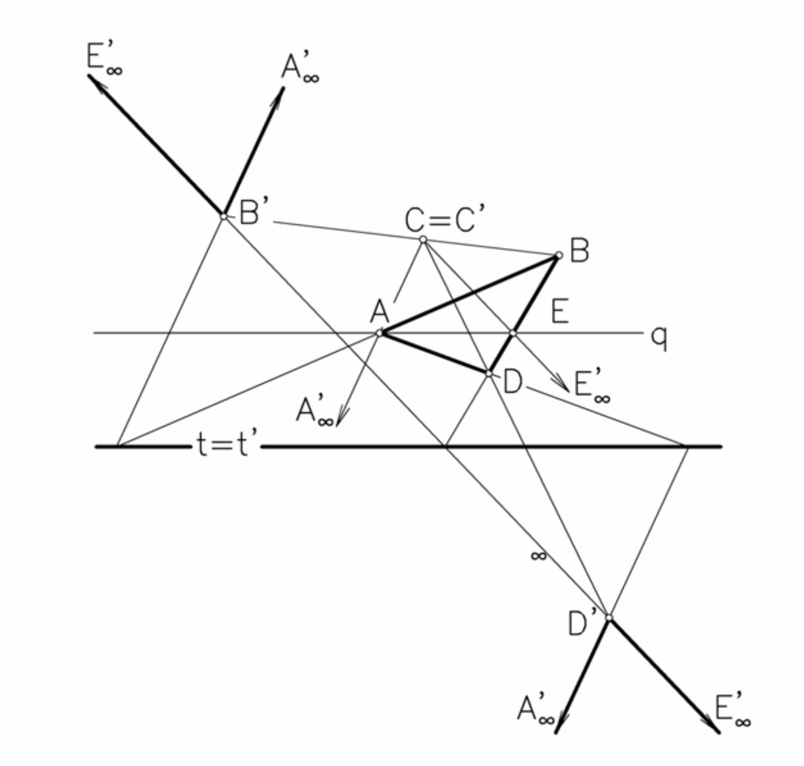
- a háromszög két oldalát átmetszi a *q* ellentengely

Az ABD háromszöget az E és F pontokban metszi át a *q* ellentengely. Ebből az következik, hogy az AB oldal képe affin értelemben párhuzamos lesz a CE egyenessel és az AD oldal képe a CF egyenessel. Mivel a háromszöget az ellentengely két részre osztja, a képháromszög is két végesben fekvő részletből fog állni, melyek a sík végtelen távoli egyenesén az $E'_\infty F'_\infty$ „szakaszban" közösek.

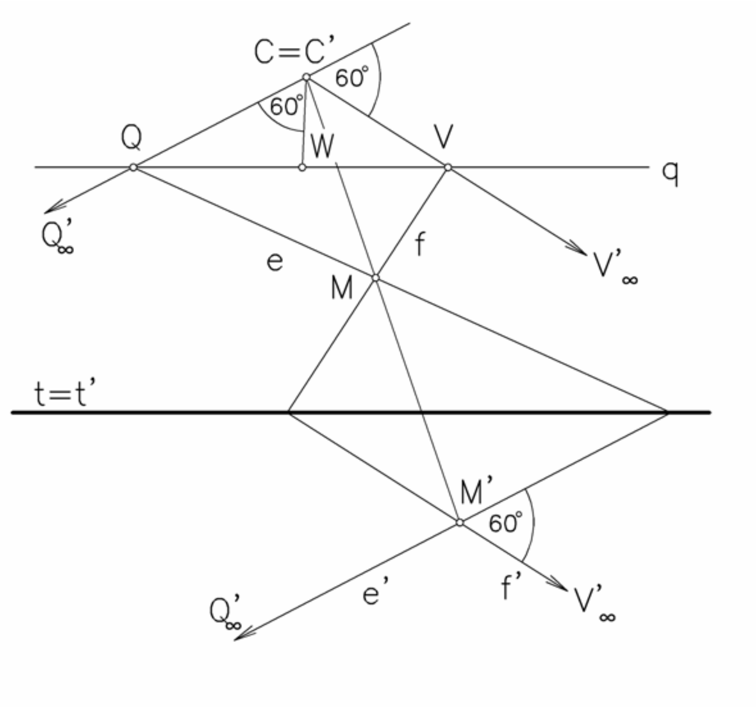


- a háromszög egyik csúcsa illeszkedik a *q*-ra és a szemköztes oldalát metszi a *q* ellentengely

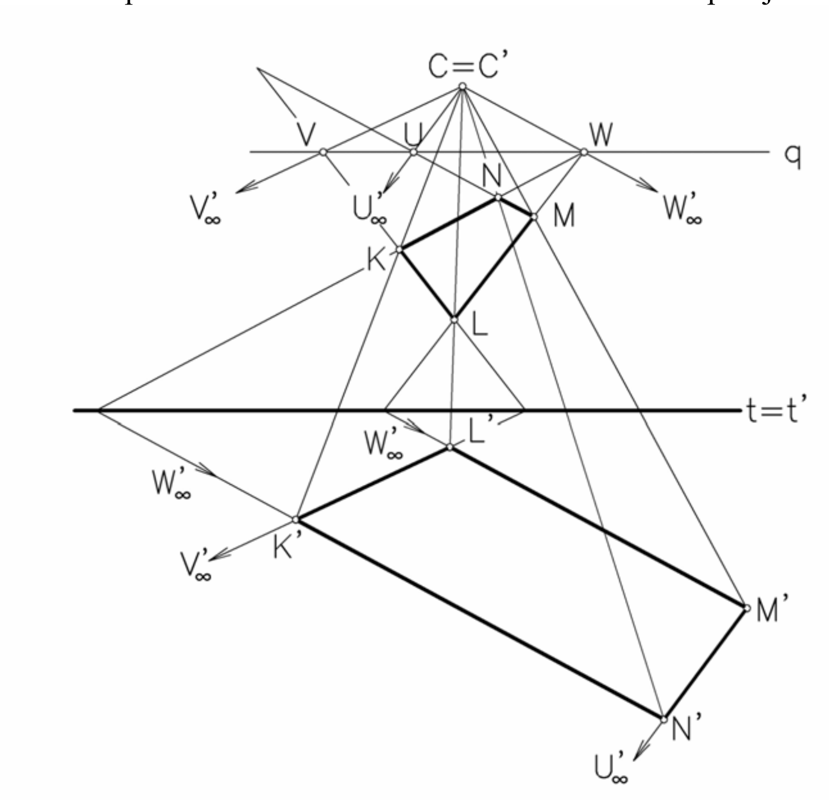
Ebben az esetben a feladat megoldását két olyan részlet fogja adni, mint amilyennel a 4. feladat legelső részében találkoztunk. Az AEB és AED háromszögek olyanok, melyek közös AE oldala az ellentengelyre illeszkedik.



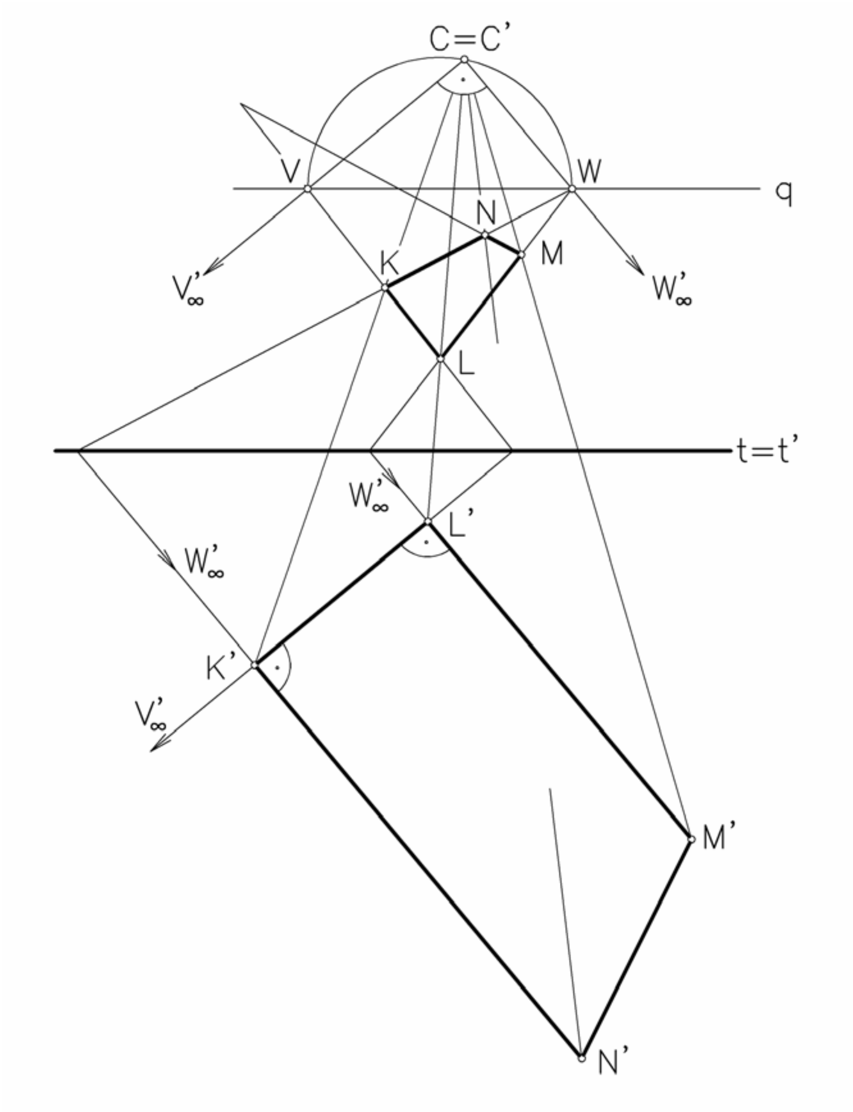
5. A feladatot visszafelé érdemes megoldani. Az *e*'-t meghatározva fel tudunk venni olyan *f'*-t, amely 60°-os szöget zár be az *e*'-vel. Innen visszafelé dolgozunk, vagyis meghatározzuk az *f*-t. Az *e*' és *f'* egyenesek állása megjelenik a centrumon áthaladó egyenesek között: CQ és CV. Ha *f'*-vel párhuzamos egyenest választanánk, annak az „ősképe" ugyanezen a V ponton haladna át. Ezért a V pontra illeszkedő bármely egyenes a feladat megoldása. Az egymást a *q* ellentengelyen metsző egyenesek képei mindig affin értelemben párhuzamosak lesznek egymással. A feladatnak van egy másik lehetséges megoldása is, a *q* ellentengely W pontjára illeszkedő egyeneshalmaz, ahol a QCW szög szintén 60°.



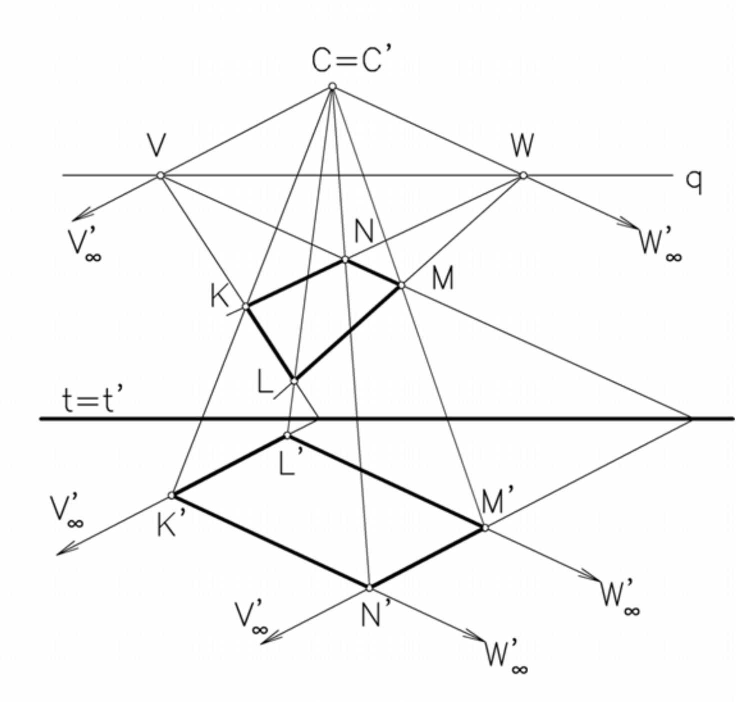
6. A képegyenesek által bezárt szög mindig megjelenik a centrumban. Ezért ha egy metsző egyenespárból affin értelemben párhuzamosat szeretnénk készíteni, akkor az egyenesek metszéspontjának illeszkednie kell a *q* ellentengelyre.
   - Trapéz esetén a KN és LM oldalak W metszéspontja illeszkedik a *q*-ra, ezeknek az oldalaknak a kollineációs képei affin értelemben párhuzamosak. A másik oldalpár metszéspontja nem illeszkedik erre az ellentengelyre, ezért a képeik továbbra is metszők lesznek. A centrum és a tengely bárhol felvehető, de a tengelynek affin értelemben párhuzamosnak kell lennie az ellentengellyel. A tengely változtatása csak



egy nagyítást/kicsinyítést eredményezhet a képábrára nézve, a centrum változtatása a képegyenesek egymással bezárt szögét változtatja meg.

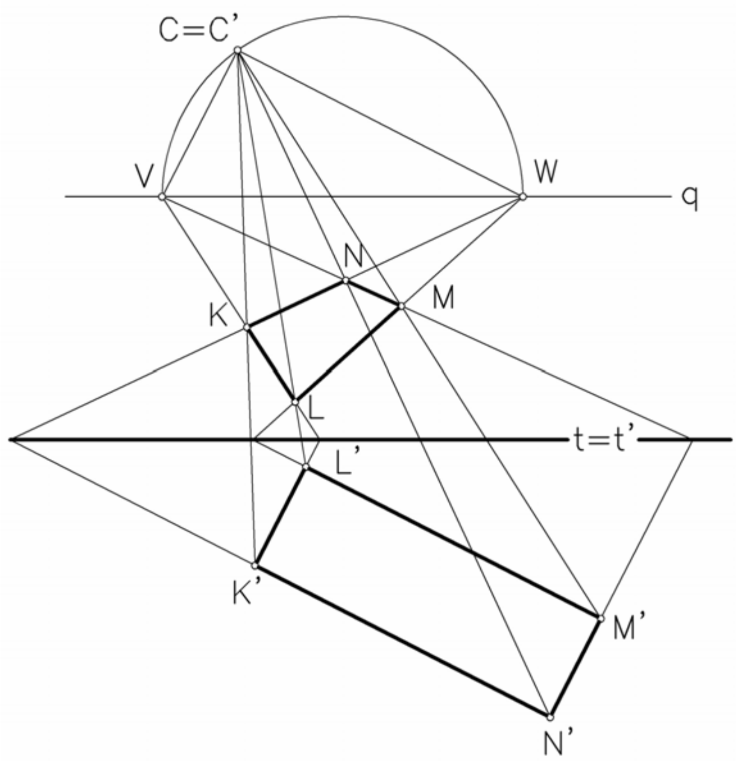


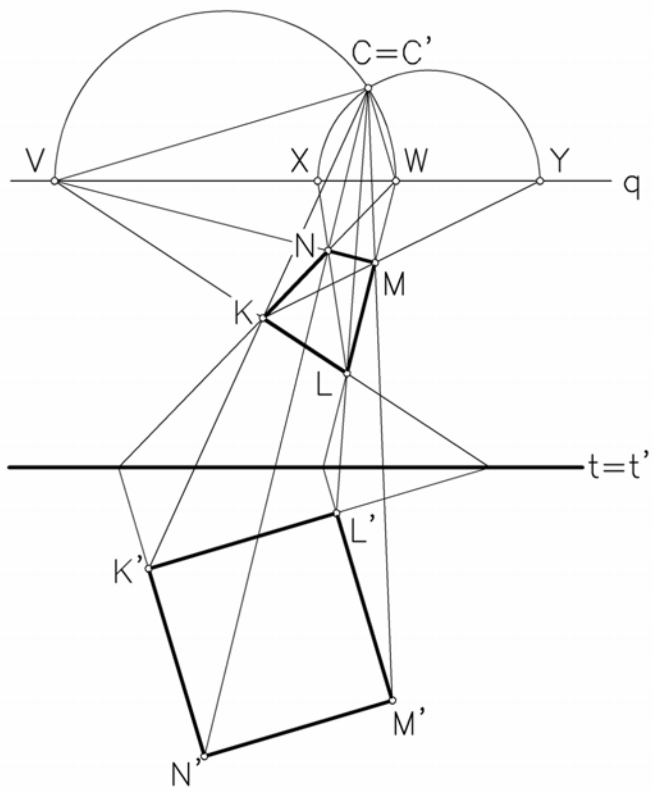
- Derékszögű trapéz esetén ezért a centrumra lesz egy feltétel. Az ellentengely és tengely az előbbivel azonosan vehető fel, míg a centrumnak illeszkednie kell a V és W pontok fölé írt Thalész-körre. Így a K'L' oldal merőleges lesz a trapéz affin értelemben párhuzamos oldalaira.



- Paralelogramma esetén a szemköztes oldalak mindegyike affin értelemben párhuzamos lesz, ezért a *q* ellentengely most egyértelműen rögzül az általános négyszög szemköztes oldalainak metszéspontjára. A többi, kollineációt meghatározó adat tetszőlegesen jelölhető ki.

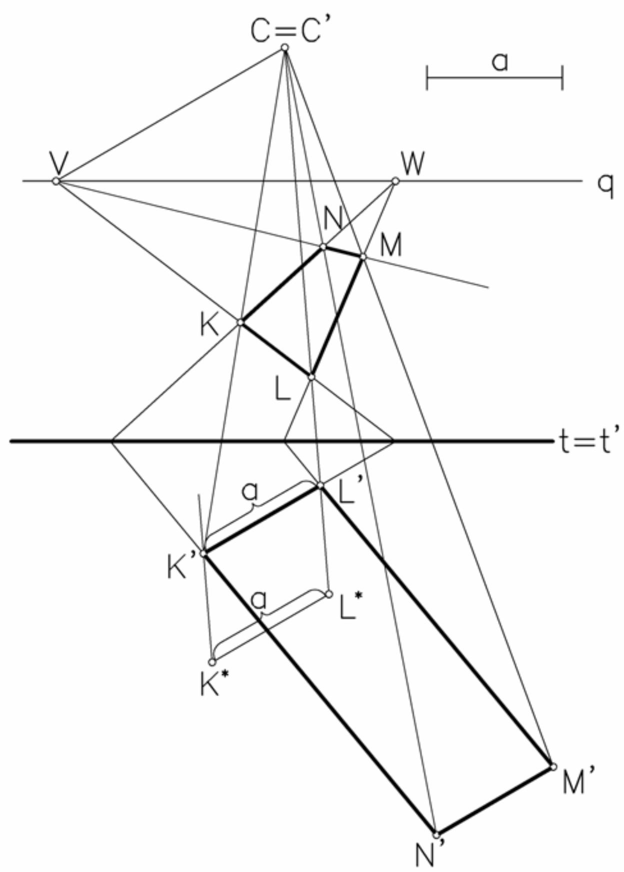
- Téglalap egy derékszögű paralelogramaként adható meg. Az ábránk csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a centrum a V és W pontok fölé írt Thalész-körön lesz.



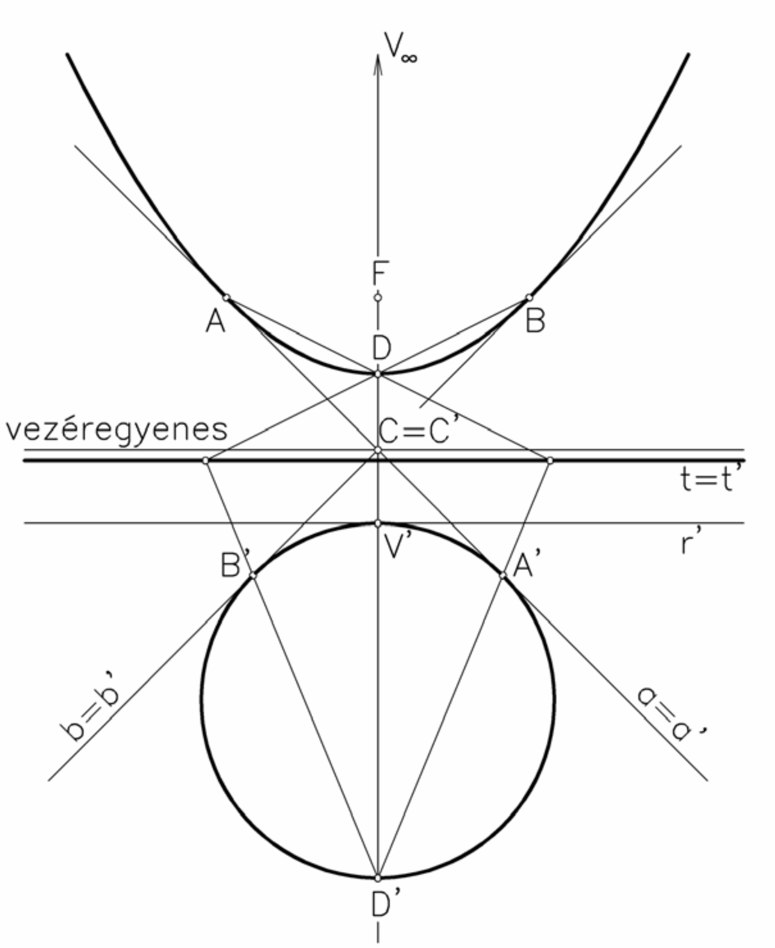


- A négyzet olyan téglalap, amelynek az átlói is merőlegesek. Ezért az általános négyszög most nemcsak az ellentengelyt fogja rögzíteni, hanem a centrumot is, amely a V W és X Y fölé írt Thalész-körök metszéspontja.

7. Az előző feladat paralelogramma esetben egy általános megoldást mutatott. Ez itt most annyiban változik, hogy a tengely nem vehető fel akárhol, mert ez befolyásolja a képszakaszok hosszát. Mondjuk a K'L' szakasz hossza legyen egyenlő az előre adott szakasszal. Azt tudjuk, hogy a K'L' szakasz affin értelemben párhuzamos lesz a CV egyenessel és ezen kívül a szakasz a KC és LC egyenesek között fog feszülni. A KC és LC egyeneseket tetszőleges helyen elmetsszük egy CV-vel affin értelemben párhuzamos egyenessel. Az L^*-tól kezdve felmérjük az adott szakaszt erre az egyenesre. Ekkor a K^* ponton keresztül a CL-lel húzott affin értelemben párhuzamos kimetszi a K'-t és ekkor az L' is meghatározható. A KL és K'L' egyenesek metszéspontja a tengely egy pontja lesz.

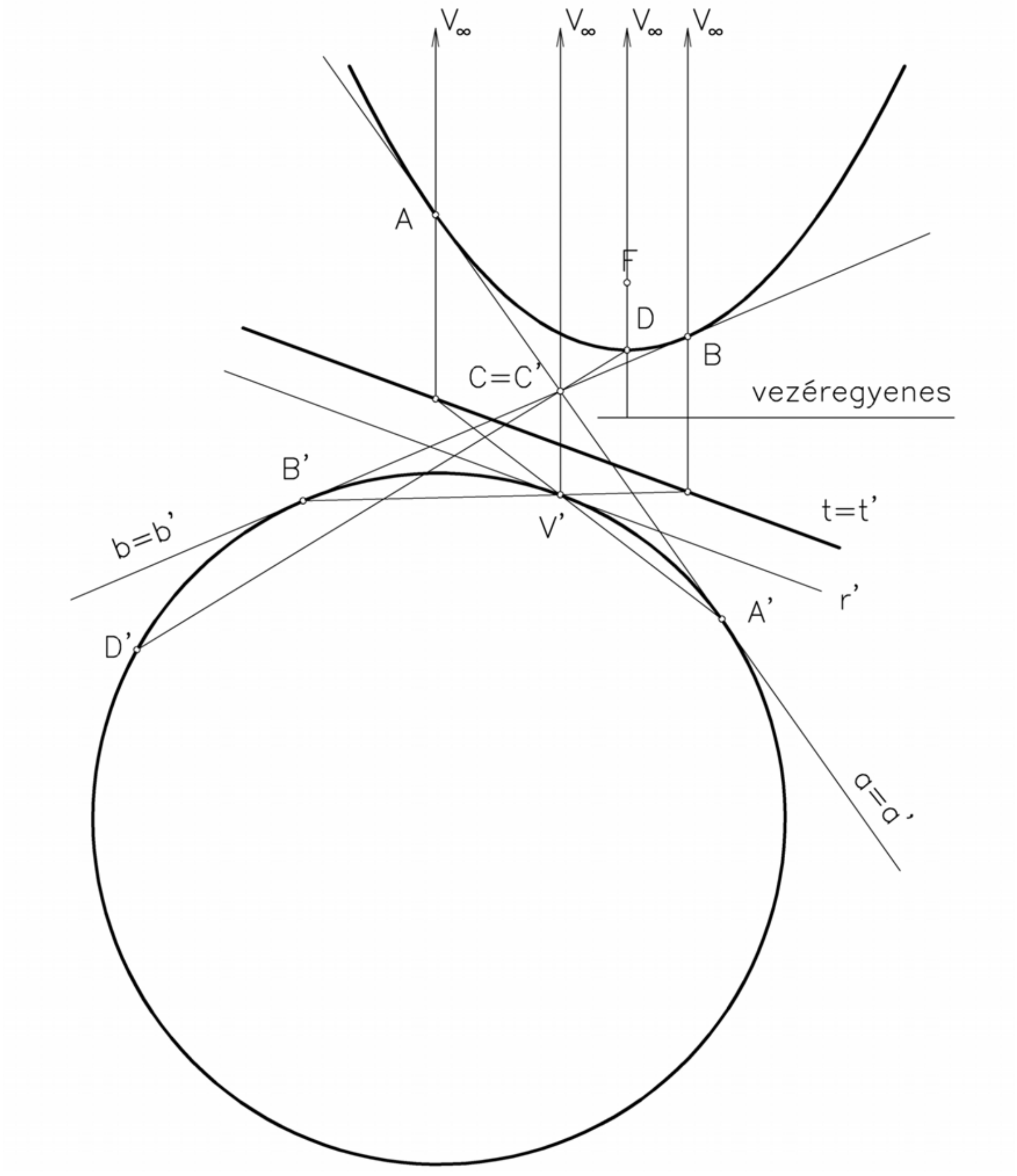


Parabolával kapcsolatos feladatok

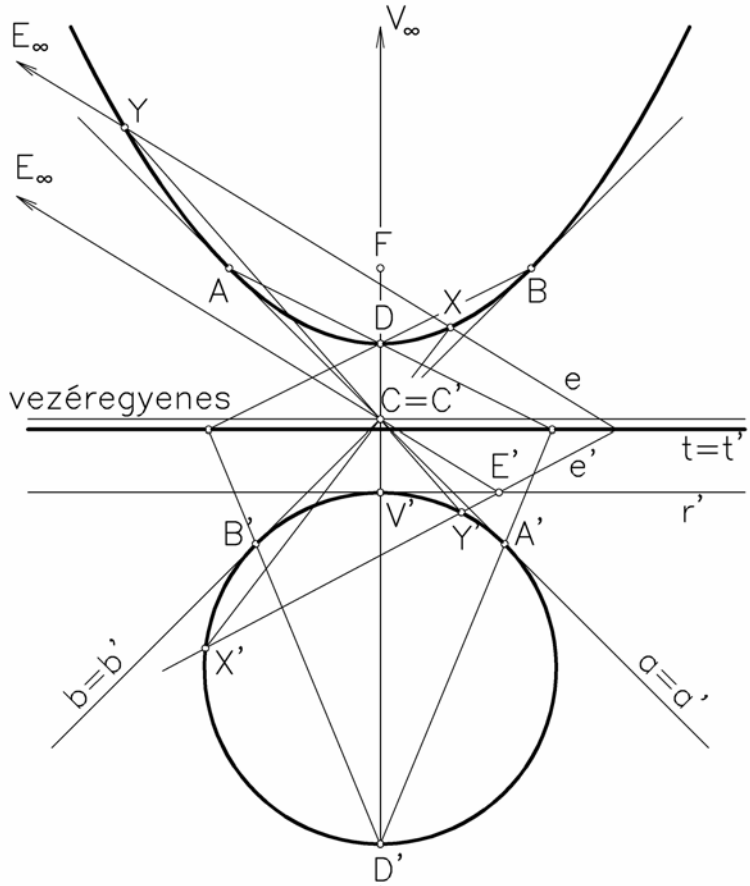


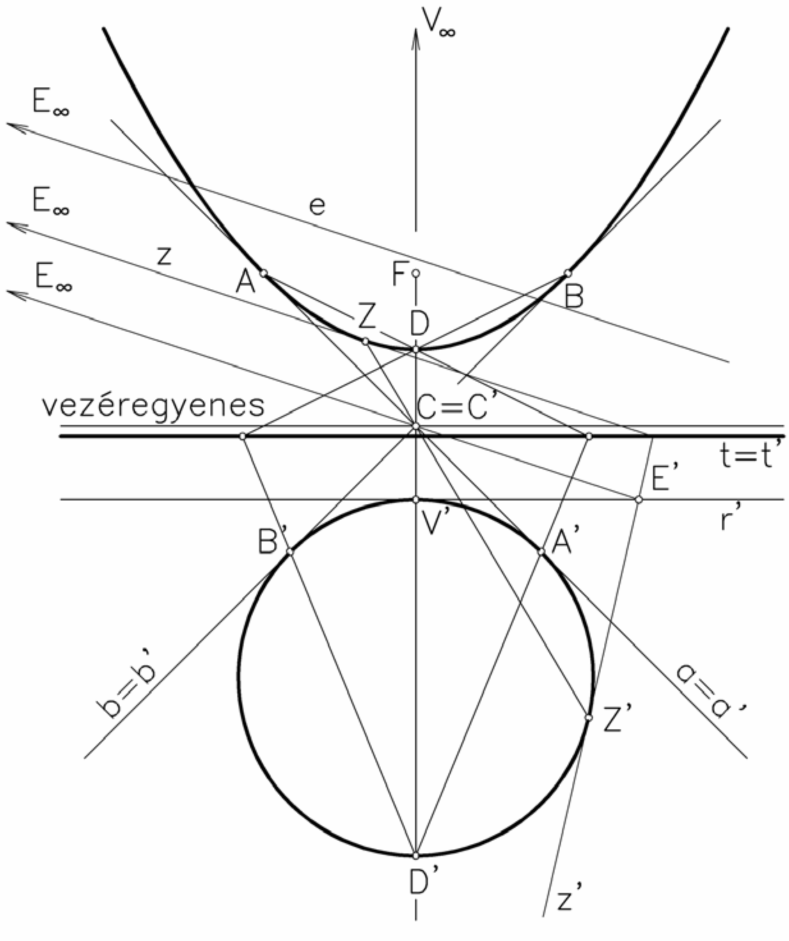
8. A feladat megoldásához két parabolapontot és azokban az érintőt meg kell határoznunk. Ezek az érintők a parabola és kör közös érintői lesznek. Emiatt a kollineáció centruma az érintők metszéspontjába fog esni. Ha olyan pontokat választunk, melyek a parabola tengelyére nézve szimmetrikusan helyezkednek el, akkor a kollineációt bemutató ábra szimmetrikus lesz. Az ábrán olyan pontokat választottam, melyek ugyanakkora távolságra vannak a vezéregyenestől, mint a fókusz. Ebben az esetben a két érintő éppen a vezéregyenesen metszi egymást. A kollineációs képként előálló kör érintkezni fog a két parabolaérintővel és most szabadon választható. Mivel a kollineáció centruma az érintők metszéspontja, ezért a parabola D csúcspontjának a képe a körön kijelölhető. Két lehetséges pont van, az egyiket kiválasztjuk. A parabola V_∞ végtelen távoli pontjának a képe hasonlóan jelölhető ki, de most csak egy lehetséges helyen, a D'-vel átellenes körpont lesz. A parabolát a végtelen távoli egyenes érinti, ezért a V'-beli körérintő ennek a kollineációs képe lesz, az egyik ellentengely. A tengely ezzel affin értelemben párhuzamos lesz, csak egy pontját kell meghatározni. Ez most az AD és A'D' egyenesek metszéspontja. Ennek a kollineációnak minden adatát előállítottuk, így alkalmas a 9.-11. feladatok megoldására.

Egy szimmetriát mellőző ábrát is lehet készíteni, ha két általánosabb parabolapontot használunk. A centrumon keresztül a parabola tengelyével affin értelemben párhuzamos egyenes metszi ki a képkörből a V’ pontot. A körnek a V’-beli érintője lesz az *r*’ ellentengely. A centrumot a parabola D csúcspontjával összekötő egyenes metszi ki a D’-t. Fontos, hogy a parabolán az A és B pontok a D és V_∞ pontokat elválasztják, emiatt az A’ és B’ pontok a D’ és V’ pontokat a körön szintén elválasztják.



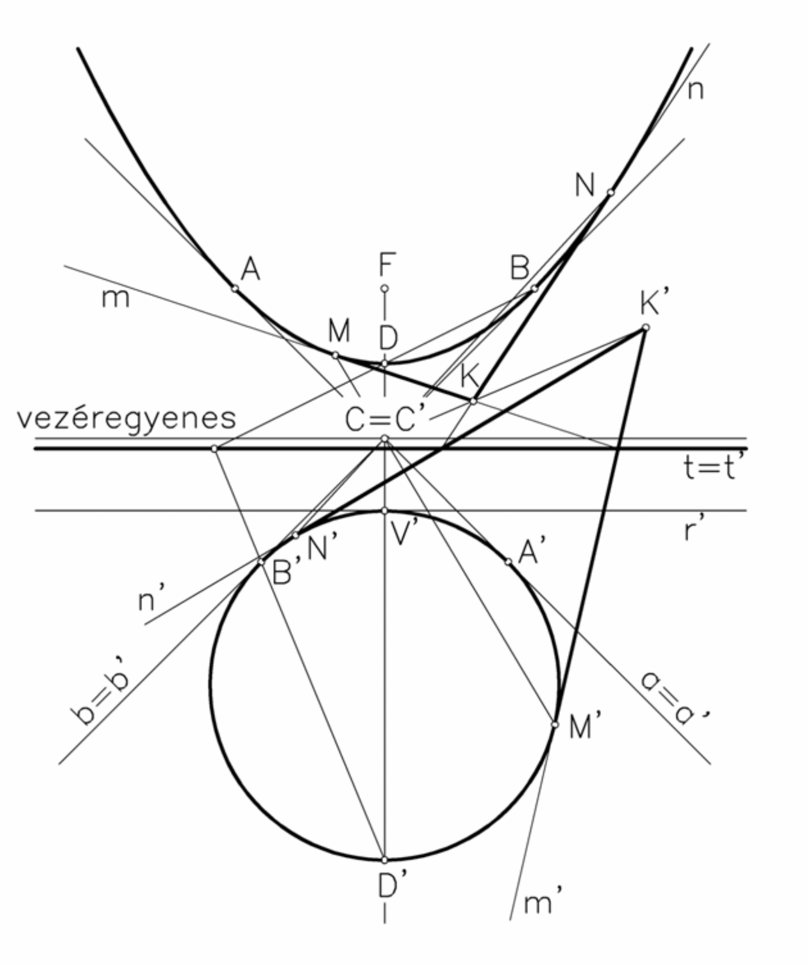
9. A 8. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk az egyenesre is. A centrumon keresztül az *e* egyenes E_∞ végtelen távoli pontját az *r*’ ellentengelyre vetítve az E’ pontot kapjuk. Az *e*’ nem más, mint az E’ pont és az *e* tengelypontjának összekötő egyenese. Az *e*’-vel kell metszeni a parabola képeként előállt kört. Az így keletkezett pontok „ősképei” a keresett pontok.





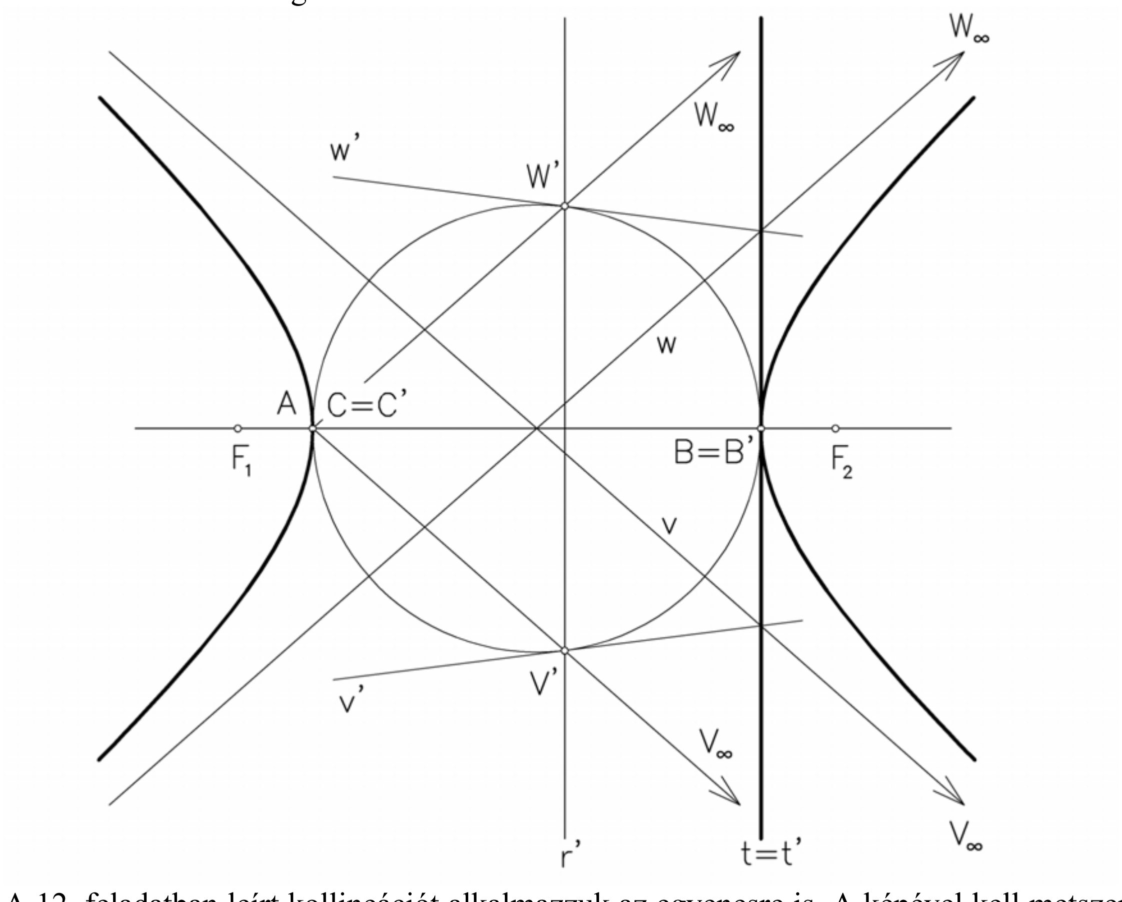
10. A 8. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk. Az *e* egyenessel affin értelemben párhuzamos parabolaérintő és az *e* egyenes közös végtelen távoli ponttal rendelkezik. Jelölje ezt E_∞. Az E’ az *r*’ ellentengelyen határozható meg az E_∞ pont és a centrum összekötő egyenesével. A körhöz az E'-ből egy érintő húzható (a másik az ellentengely). Ennek az „ősképe” a keresett érintő. A feladatnak csak egy megoldása van, azaz a parabolának adott iránnyal affin értelemben párhuzamosan egy érintője határozható meg.

11. A 8. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk a K pontra is. (Az ábra a K' pont szerkesztését nem mutatja.) A K' képéből kell érintőket szerkeszteni a parabola képeként előálló körhöz. Az így keletkezett egyenesek „ősképei" a keresett parabolaérintők.

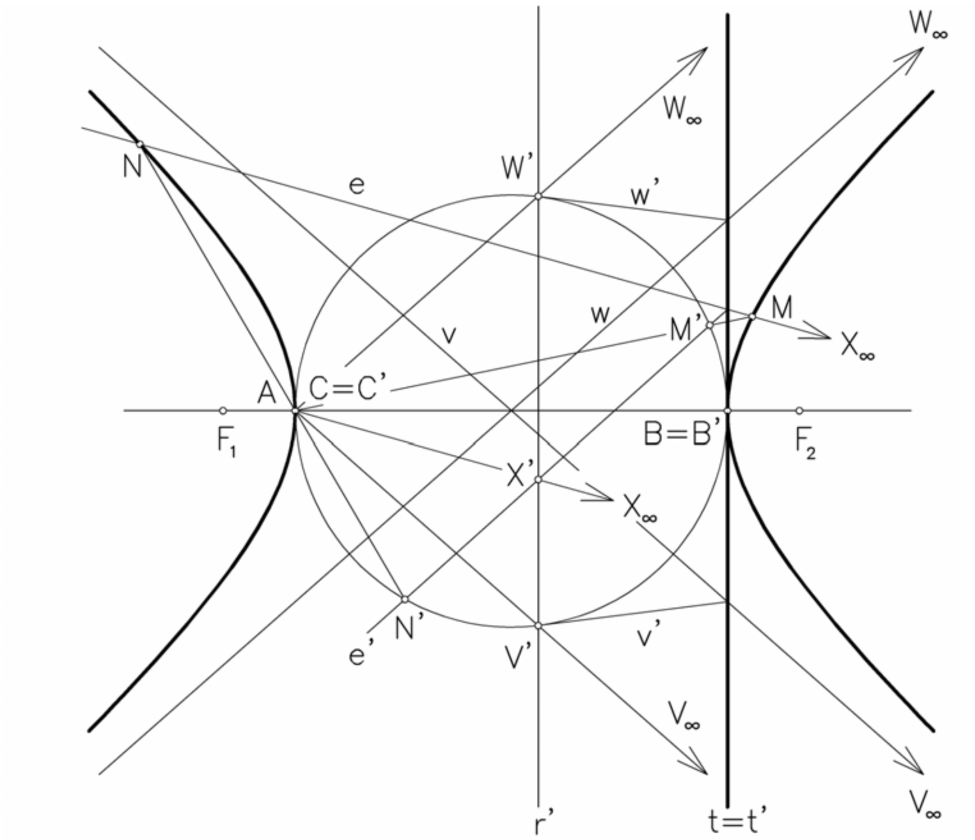


Hiperbolával kapcsolatos feladatok

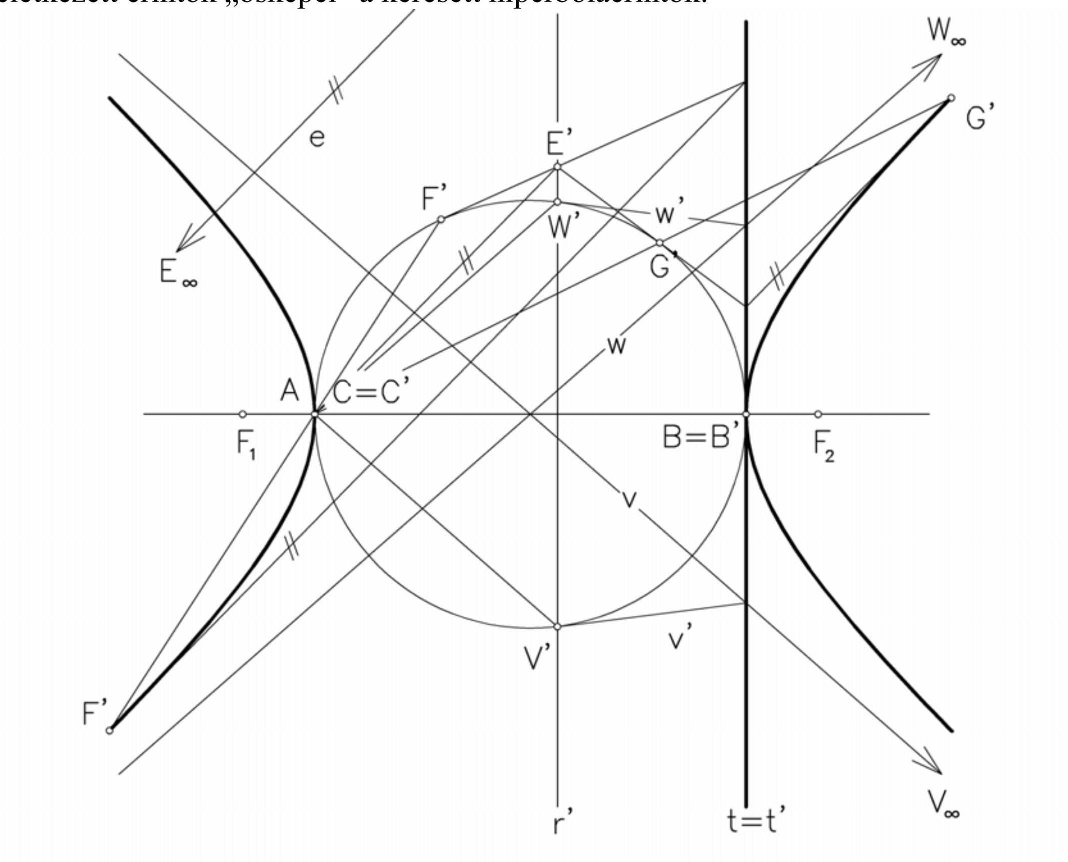
12. A feladat megoldásához két hiperbolapontot és azokban az érintőt meg kell határoznunk. Ezek a pontok lehetnek a hiperbola csúcspontjai is. Az egyik csúcspontbeli érintő legyen a kollineáció tengelye, a másik csúcspont legyen a kollineáció centruma. A kollineációs képként előálló kör az A és B pontok fölé írt Thalész-kör lesz. A hiperbola V_∞ és W_∞ végtelen távoli pontjainak (melyeket az aszimptoták jelölnek ki) a képe kijelölhető a körön, a CW_∞ és CV_∞ egyenesek metszik ki a V' és W' pontokat. A hiperbolát a végtelen távoli egyenes átmetszi, ezért a V' és W' pontokat összekötő egyenes, amely átmetszi a képkört, éppen az egyik ellentengely. A másik ellentengely is meghatározható a centrumtól illetve a tengelytől való távolságok ismeretében. Így ez a kollineáció alkalmas a 13.-15. feladatok megoldására.



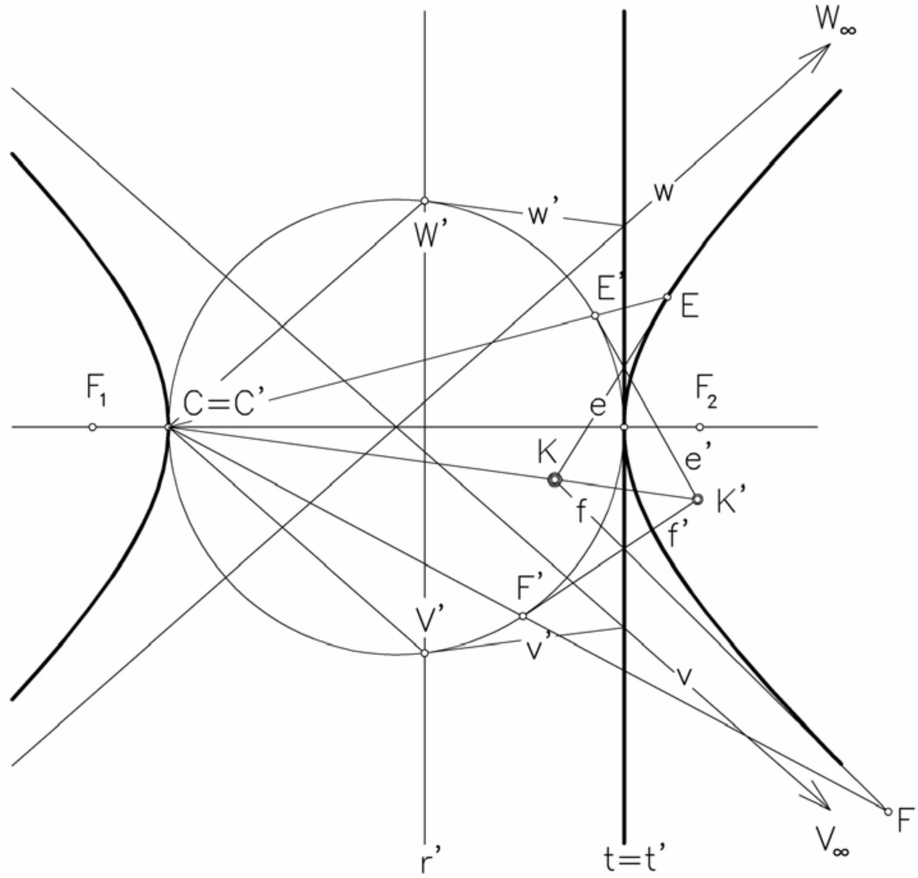
13. A 12. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk az egyenesre is. A képével kell metszeni a hiperbola képeként előállt kört. Az így keletkezett pontok „ősképei" a keresett pontok.



14. A 12. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk. Mivel affin értelemben párhuzamos érintőket szeretnénk, a kollineációs képeik az r' ellentengelyen fogják metszeni egymást. Ebből a pontból kell érintőket szerkeszteni a hiperbola képeként előálló körhöz. Az így keletkezett érintők „ősképei" a keresett hiperbolaérintők.

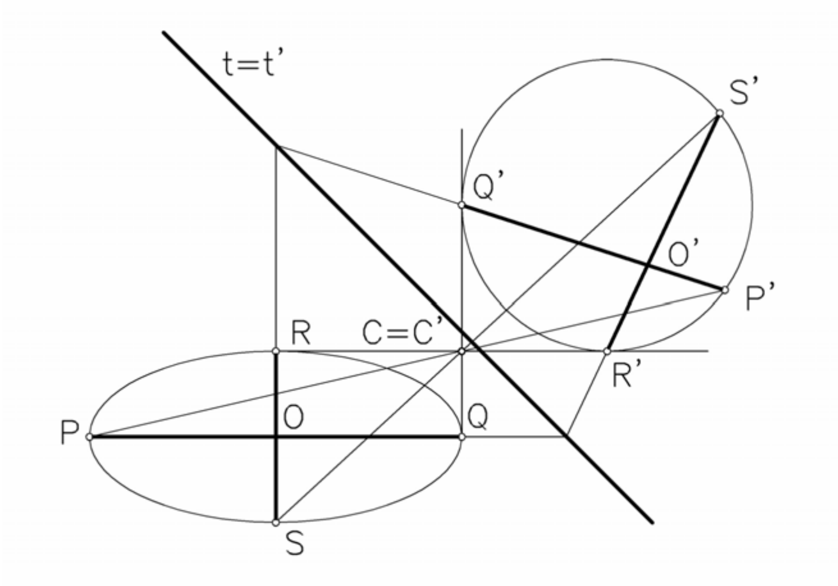


15. A 12. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk a K pontra is. A K'-ből kell érintőket szerkeszteni a hiperbola képeként előálló körhöz. Az így keletkezett egyenesek „ősképei" a keresett hiperbolaérintők. Az ábra a K' szerkesztését nem mutatja meg. (Ha a K pont végtelen távoli pont, akkor éppen az előző feladatot oldjuk meg.)



Ellipszissel kapcsolatos feladatok

16. A tengelyekkel adott ellipszisnek meghatározzuk a fókuszait, ezek éppen fél nagytengelynyi távolságra vannak a kistengely végpontjaitól. Elemi szerkesztéssel meghatározunk két ellipszis pontot és azokban az érintőket. (Egy ellipszispontban az érintő a vezérsugarak külső szögfelezője.) Ezt a két érintőt a kollineáció majd fixen (de nem pontonként) fogja hagyni, emiatt a két érintő metszéspontja a kollineáció centruma. Az ellipszis érintői közé egy tetszőleges sugarú kört írunk, amely az ellipszis képe lesz. A körnek és az ellipszisnek közös érintői vannak, az egy érintőn lévő kör- és ellipszisérintési pontok egymásnak felelnek meg a kollineációban. Még egy megfelelő pontpárra van szükségünk, ehhez az ellipszis egyik tengelyvégpontját összekötjük a centrummal. Ez az egyenes elmetszi a képkört két pontban. Az egyiket kiválasztva a kollineáció adott, mert megfelelő egyenespárok felhasználásával a kollineáció tengelye meghatározható.
    Most a tengelyek egy-egy végpontját választva az érintők a megfelelő tengelyre merőlegesek. A két érintő metszéspontja a kollineáció centruma. Az érintőket érintő tetszőleges sugarú kör lehet az ellipszis képe, ekkor a kollineáció tengelyét egymásnak megfeleltetett egyenesek metszéspontjára kell illeszteni.



17. A 16. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk az egyenesre is. A képegyenes és a kör közös pontjai a keresett pontok kollineációs képei.

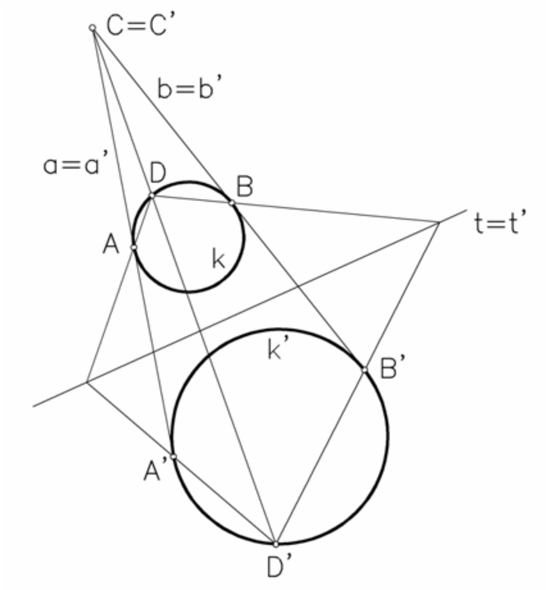
18. A 16. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk az egyenesre is. Az egyenes végtelen távoli pontjának a képe az *r*' ellentengelyre fog illeszkedni. Ebből a pontból két érintő húzható a körhöz, ezek a keresett érintők kollineációs képei.

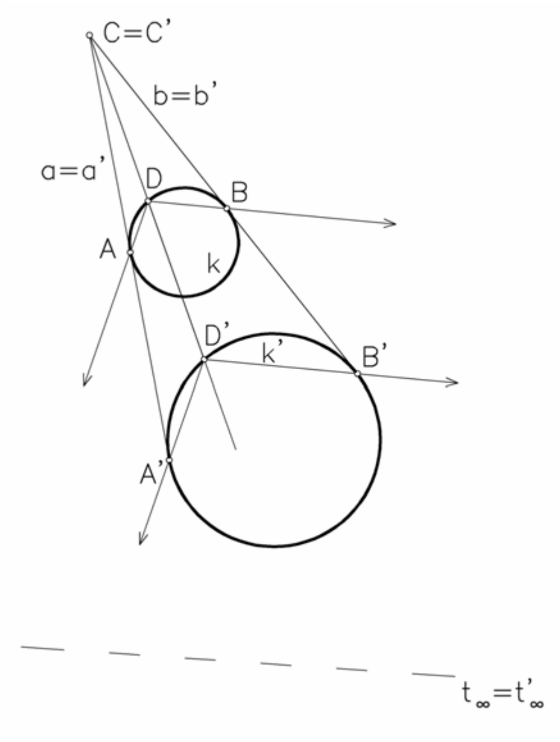
19. A 16. feladatban leírt kollineációt alkalmazzuk a pontra is. A képpontból két érintő húzható a körhöz, ezek a keresett érintők kollineációs képei.

Körrel kapcsolatos feladatok

20. Az adott körben legyen PQ és RS egymásra merőleges átmérő. Ekkor a 16. feladat lépéseit követve megadható olyan kollineáció, amelyben az adott kör képe ismét kör.
Megfelel a feladat feltételeinek az is, ha a két kör egymásból egy eltolással számaztatható.

21. A két kör közös érintőit a kollineáció fixen hagyja (de nem pontonként), ha az érintők metszéspontja a kollineáció centruma. Az egy érintőn lévő két érintési pont egymásnak felel meg. Ezen kívül a centrumból egy olyan egyenest indítunk, amely elmetszi a köröket, ezeket a metszéspontokat kell egymásnak megfeleltetni.

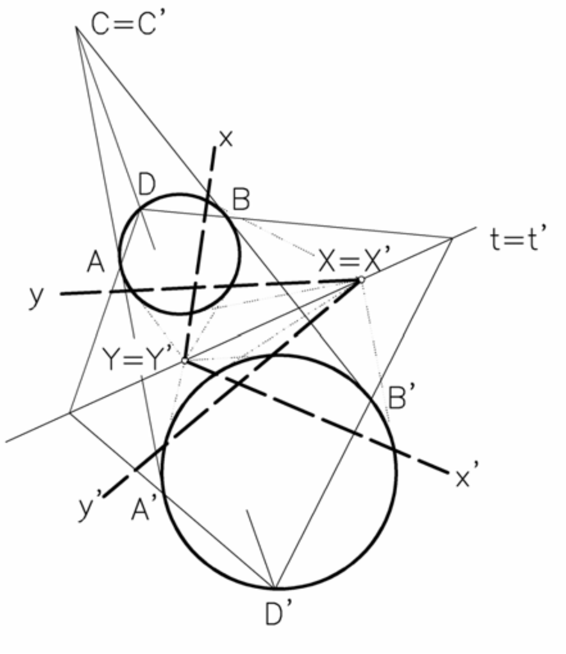




Ez két féleképpen lehetséges.
Az egyik esetben megfelelő egyenespárokat felhasználva a kollineáció tengelye egy közönséges egyenes lesz, míg a másik esetben a sík végtelen távoli egyenese, mivel az egymáshoz rendelt egyenesek párhuzamosak. Egy középpontos hasonlóságot kaptunk. Két kör esetén kettő vagy négy kollineáció adható meg, attól függően, hogy a körök belső közös érintői léteznek-e.

22. Két kör hatványvonala az az egyenes, amely pontjainak a körökre vonatkozó hatványai megegyeznek. A hatványvonal pontjaiból egyenlő hosszúságú érintőszakaszokkal lehet mindkét kört érinteni. Projektív értelemben azt az egyenest tekintjük két kör (vagy másodrendű görbe) hatványvonalának, melyen mindkét kör (görbe) ugyanazt az involúciót indukálja. Ez utóbbi definíció bővebb, mint az előző, ezzel két másodrendű görbének több (legfeljebb hat) hatványvonala lehet. Két kör esetén a sík végtelen távoli egyenese az egyik hatványvonal. A hatványvonal mindig áthalad a körök közös pontjain. Ezért könnyen láthatjuk, hogy ha a két kör érintkezik, vagy egymásba metsz, akkor a nem végtelen távoli hatványvonal lesz a kollineáció tengelye. Egyedül azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor a két körnek nincs közös pontja. Határozzuk meg a kollineáció tengelyét az előző feladata alapján.

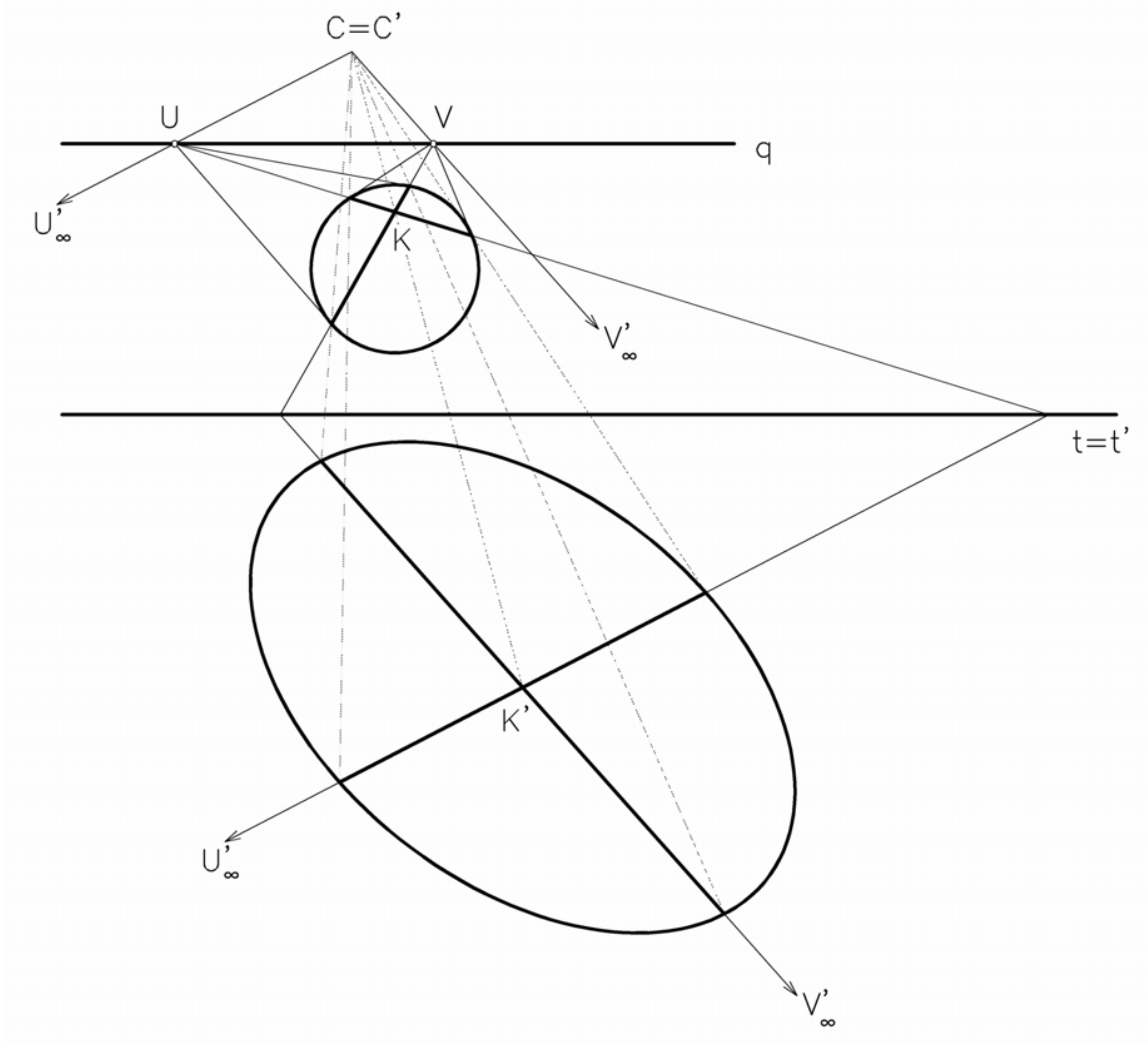
Legyen X=X' a tengely egy tetszőleges pontja, melyből mindkét körhöz érintőket húzunk. Az egy körön lévő érintési pontokat összekötő egyenes x és x'. Ekkor ez a két egyenes egymásnak felel meg a kollineációban, mert a pólus-poláris kapcsolatot a kollineáció nem rontja el. Ekkor az x és x' metszéspontja legyen az Y=Y' tengelypont. Ez a pont konjugált az X-hez a k körre nézve, és konjugált az X'-höz a k'-re nézve. Szebben úgy mondhatnánk, hogy az X=X' és az Y=Y' mindkét körre nézve konjugált egymáshoz. Ha még egy ilyen konjugált pontpárt (U=U' és V=V') meghatározunk, akkor X↔Y és U↔V párok megadják a k kör által a tengelyen indukált involúciót, és az X'↔Y', U'↔V' párok a k' által indukált involúciót. De ez a két involúció megegyezik, mert ugyanazt a négy pontot használtuk fel.



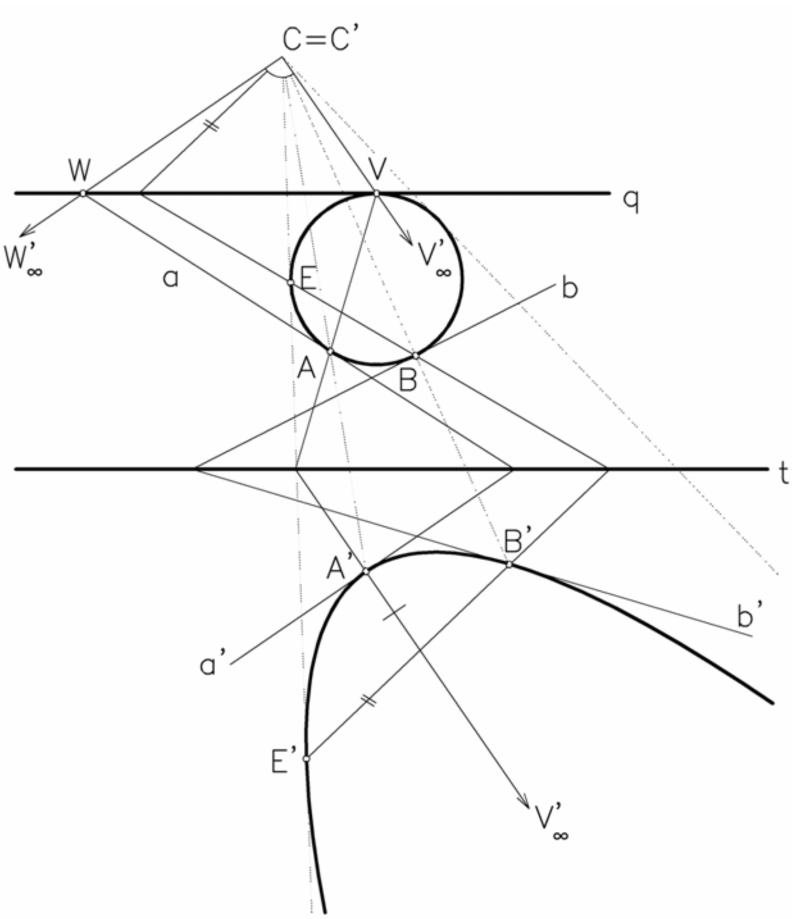
23. A most következő három feladatban a kollineáció megadásakor az egyik ellentengelyt is fel fogjuk használni. Arra az ellentengelyre (jelöljük *q*-val) van most szükség, amelynek a képe a sík végtelen távoli egyenese. Ha azt szeretnénk elérni, hogy a kör képe ellipszis legyen, akkor a kör bármely pontjának a képe véges helyzetű, azaz a *q* ellentengely nem metszhet bele a körbe. A tengely egyenese természetesen párhuzamos a *q*-val és a centrumot tetszőlegesen választhatjuk. A centrum, tengely és az egyik ellentengely megadása elegendő a kollineációhoz. A kör tetszőlegesen sok pontjának és tetszőlegesen sok érintőjének a képét megszerkeszthetjük a kollineációban, de most a képellipszis egy konjugált átmérőpárját adjuk meg. A középpont a végtelen távoli egyenes pólusaként van definiálva, azaz a kép-ellipszis esetén a középpont a sík végtelen távoli egyenesének, a *q*'-nek, a pólusa. A centrális kollineáció a pólus-poláris kapcsolatot megtartja, ezért a kollineáció végrehajtása előtt a *q* ellentengely körre vonatkozó pólusát kell megkeresni. Ennek a K pontnak a képe lesz a képellipszis középpontja. A *q* ellentengelyen a körre vonatkozóan két konjugált pontot határozunk meg, ezek lesznek az U és V. Ezek képei végtelen távoli pontok lesznek, az UK és VK egyenesek képei az ellipszis egy konjugált átmérőpárját határozzák meg.

Meg kell jegyezni, hogy egy kollineációban egy kúpszelet középpontja és a kép-kúpszelet középpontja *nem* egymásnak megfelelő pontpár. (Az is előfordulhat, hogy valamelyik görbének, vagy mindkettőnek, nincs is középpontja.)

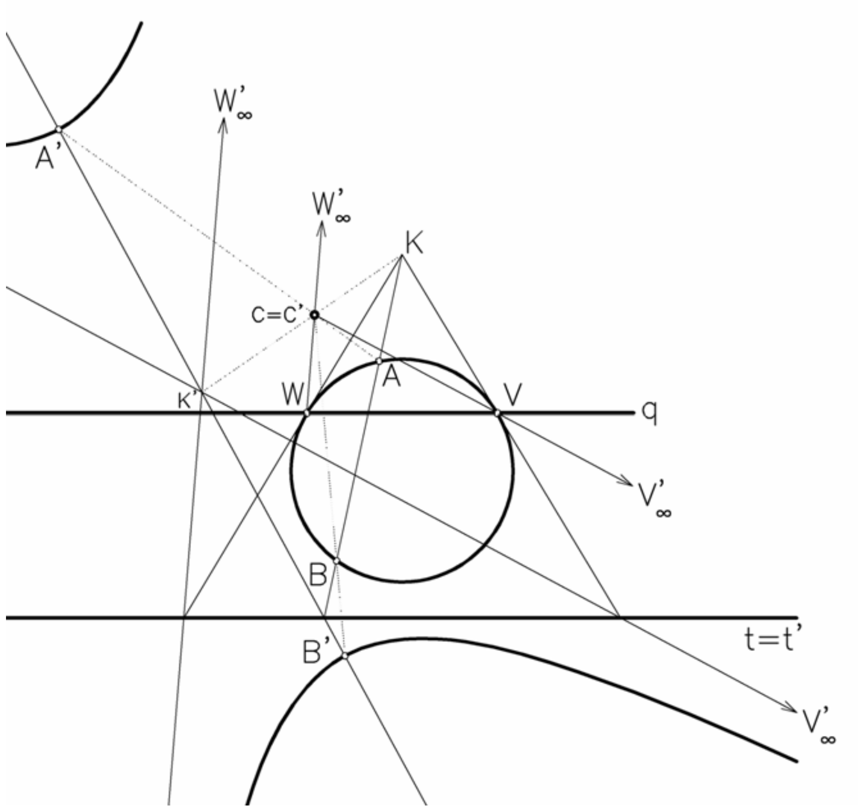
A centrum a körre nézve külső pont, ezért a körhöz a centrumból két érintőt lehet húzni, ezek az egyenes a kollineációban invariáns egyenesek (azaz mint alakzatok fixek, de nem pontonként!). Éppen ezért ezek az egyenesek a képellipszist is érinteni fogják.



24. Most azt szeretnénk elérni, hogy a képgörbe parabola legyen, akkor a kör egy pontját a leképezés során ki kell vinni a végtelen távolba. Ezt akkor érjük el, ha a *q* ellentengely érinti a kört. A centrum és a tengely az előbbi módon jelölhető ki. A kép-parabola pontjai közül különlegesebb a csúcspont, ezért ezt meghatározzuk. A körnek és a *q* ellentengelynek a közös pontja V. A V-n áthaladó egyenesek kollineációs képei mind párhuzamosak lesznek egymással (valamint a CV egyenessel) és a parabola átmérőit (tengelyirányát) adják. A V-re illeszkedő egyenesek közül azt fogjuk kiválasztani, amelyből a parabola tengelye lesz. A parabola csúcspontjában a tengely és a csúcsérintő egymásra merőleges, ezért a csúcsérintő állása a centrumban megadható. Ezzel a *q* ellentengelyen egy W pontot jelöltünk ki. A W' végtelen távoli pont lesz, méghozzá a parabola csúcsérintőjének a végtelen távoli pontja. A W pontból a körhöz két érintő húzható, az egyik a *q* ellentengely, a másik az *a* egyenes, amely az A pontban érinti a kört. Ekkor az AV egyenes képe a parabola tengelye, az *a*=AW egyenes képe lesz a csúcsérintő és maga az A' lesz a csúcspont.
A centrumból a körhöz húzott érintők a parabolát is érinteni fogják, az egyikük a kört az E pontban, a parabolát az E'-ben. A B pont egy tetszőleges pontja a körnek, és a B' meghatározása egyszerre történhet az E' pontéval. A B'E' egyenes állása a centrumban megkereshető. A *b* körérintő képe a a kollineáció tengelyén lévő pontját B'-vel összekötő egyenes.



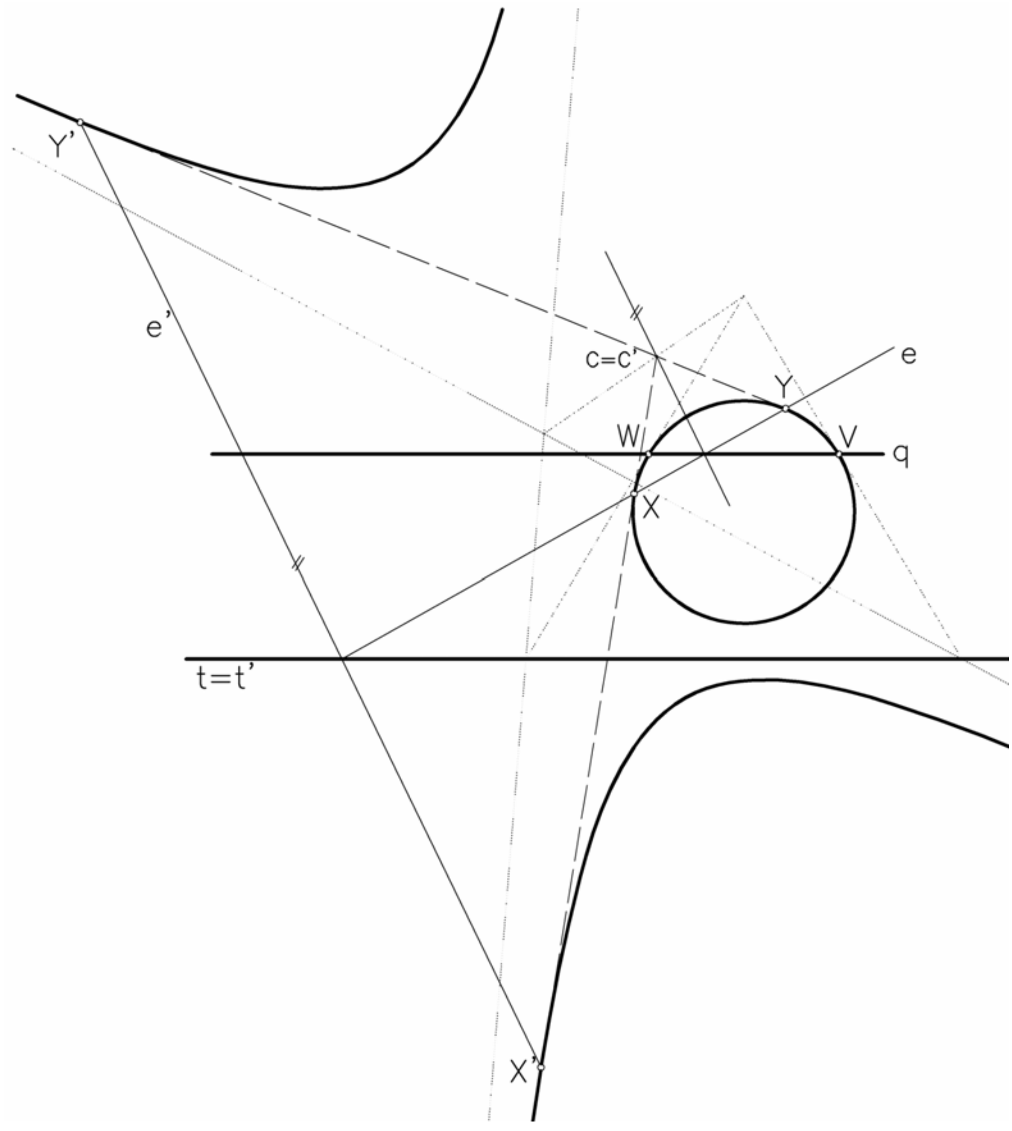
25. A képgörbe hiperbola, amelynek két végtelen távoli pontja van, ezért a kört a *q* ellentengelynek két pontban kell metszenie. Az V és W pontok képei a hiperbola végtelen távoli pontjai lesznek. A kollineáció a kör érintőinek a hiperbola érintőit felelteti meg, ezért az V és W-beli két érintő képe a hiperbola aszimptotáit adja. A körérintők K metszéspontjának képe a hiperbola középpontja lesz, K és *q* pólus-poláris kapcsolatban van egymással a körre nézve. A kollineáció végrehajtása után K' és a sík végtelen távoli egyenese lesz ugyanilyen kapcsolatban egymással a hiperbolára nézve.



A hiperbola esetén a valós tengely felezi az aszimptoták által bezárt szöget. A csúcspontokat szeretnénk még meghatározni, ezért visszafelé alkalmazzuk a kollineációt. Az illeszkedéstartást felhasználva az K-n áthalad az az egyenes, amelyből a kollineáció után éppen a szögfelező lesz, és amely az A és B pontokban metszi a kört. Az A' és B' lesznek a csúcspontok.

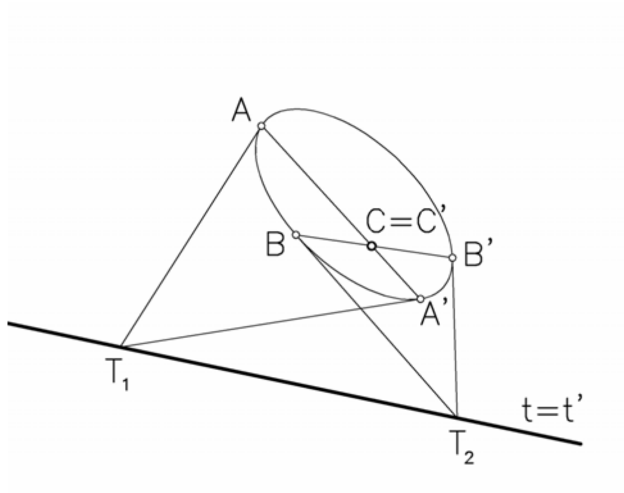
A kört a V és W pontok két ívre bontják, egy-egy ilyen ív kollineációs képe lesz a hiperbola egy-egy ága. Az A és a B pontok a kör különböző ívein vannak, mivel a képük különböző ágon lesz csúcspont.

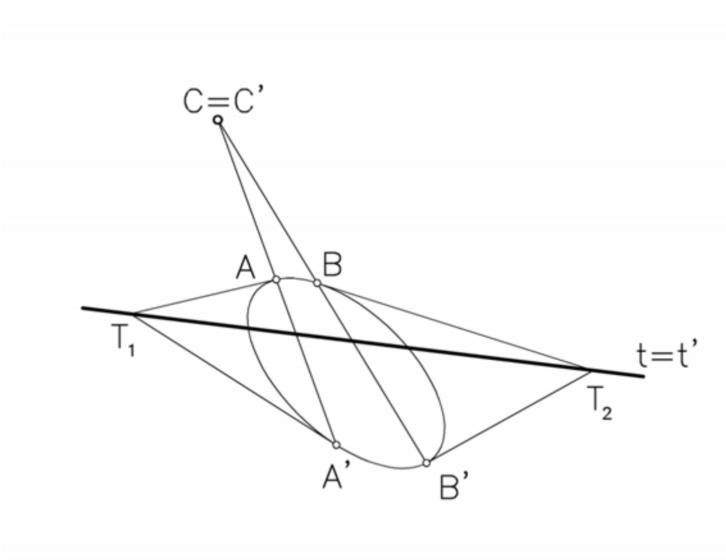
Végül a körnek és hiperbolának most is vannak közös érintői, melyeket a centrumból húzhatunk a görbékhez. A körhöz húzott érintők érintési pontjai: X és Y, az összekötő *e* egyenesük a centrum körre vonatkozó polárisa. Az *e* egyenesre alkalmazva a kollineációt a hiperbola érintési pontjai szerkeszthetők. Az X és Y pontok a kör különböző ívein keletkeztek, ezért a centrumból húzott érintők a hiperbolát különböző ágán érintik.



Vegyes feladatok

26. A centrális kollineációban az egymásnak megfelelő pontokat összekötő egyenesek áthaladnak a centrumon. Így az AA’ és BB’ egyenesek metszéspontja a C=C’. A kollineáció illeszkedéstartó is, emiatt a kúpszelet bármely érintőjének érintőt feleltet meg. Az A-beli *a* érintő és az A’-beli *a*’ érintő egymásnak megfelelő egyenesek, ezért a tengelyen metszik egymást. Ugyanezt mondhatjuk a *b* és *b*’ egyenesekről is, így a kollineáció tengelye egyértelműen adott. Ha újabb D, D’ pontpárt jelölünk ki a centrum felhasználásával, akkor az A, A’, B, B’ és D, valamint az A, A’, B, B’ és D’ ugyanannak a kúpszeletnek öt-öt pontja, ezzel ugyanazt a görbét határozzák meg.



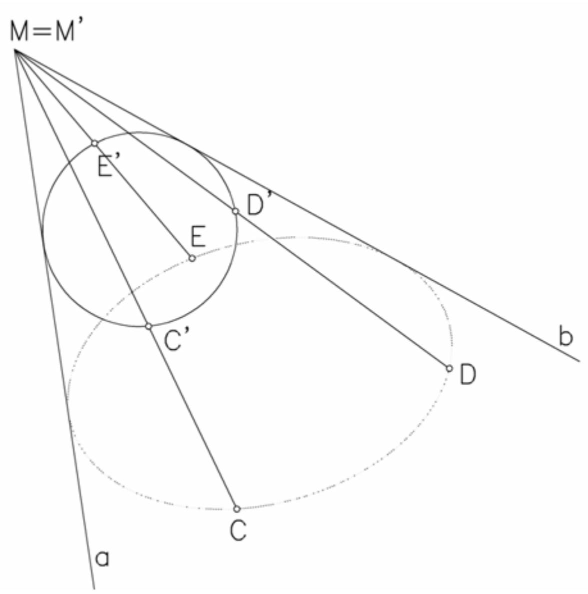


Mindez akkor is érvényes, ha a C=C’ a felvételtől függően a kúpszeletre nézve külső pont. (Előfordulhatnak olyan esetek is, amikor a centrum végtelen távoli, ha a AA’ és BB’ párhuzamosak; vagy a tengely végtelen távoli, ha az *a* *a*’-vel a *b* *b*’-vel párhuzamos.)

27. Az előző feladat ábráit figyelve a T_1 pont polárisa az AA’ egyenes, a T_2 polárisa a BB’ egyenes. Ekkor a T_1T_2 egyenes pólusa az AA’ és BB’ metszéspontja, vagyis a centrum. Vagyis ha egy kúpszeletet önmagára akarunk leképezni a fenti módon, akkor a kollineáció centruma és tengelye pólus-poláris kapcsolatban van egymással.
Megjegyzés:
A fenti ábrákat tanulmányozva láthatjuk, hogy egy különleges leképezést hoztunk létre a kúpszelet pontjai között. Az A, A’ pontpár megadása azt jelentette, hogy A képe A’ és A’ képe A. Hasonlóak mondhatók el a B, B’ pontpárról is. Ha a megadott leképezést kétszer alkalmazzuk, akkor visszajutunk az eredeti állapothoz, vagyis kétszeri végrehajtás az identitást adja. Ez a tulajdonság az involúciókat jellemzi, így joggal mondhatjuk, hogy a kúpszeleten adtunk meg involúciót a két megfelelő pontpár kijelölésével. A kúpszeleten megadott involúció esetén a megfelelő pontokat összekötő egyenesek metszéspontját az involúció középpontjának nevezzük. (Az involúció középpontja nem illeszkedik a kúpszeletre!) További megfelelő pontpárt a középponton áthaladó egyenesekkel metszhetünk a görbéből. Ha a két megadott pontpár elválasztja egymást, akkor a megadott involúció elliptikus, azaz nincs olyan pont a kúpszeleten, amely önmagának felelne meg.

Ha a pontpárok nem választják el egymást, akkor hiperbolikusnak nevezzük az involúciót, és két fix pontot találunk. Elliptikus esetben a középpontból nem húzható érintő a kúpszelethez, míg hiperbolikus esetben két érintő létezik. Az érintési pontok lesznek az involúció kettőspontjai.

28. Az adott *a* és *b* érintőegyenesek metszéspontját válasszuk a centrális kollineáció centrumának. Olyan centrális kollineációt fogunk megadni, melyben a kúpszelet képe kör lesz. Ehhez nem a kollineáció további adatait rögzítjük, hanem a kép-kört. Ez olyan kör lesz, melynek közösek az *a* és *b* érintőegyenesei az eredeti kúpszelettel. A kúpszelet C, D, E pontjainak képét a körön a centrummal összekötő egyenesek metszik ki, így van három megfelelő pontpár. Megfelelő egyeneseket választva a kollineáció tengelye is szerkeszthető. A kúpszelet megszerkesztése most azt jelenti, hogy a kúpszelet tetszőleges számú pontját és érintőegyenesét meghatározhatjuk a megadott kollineáció segítségével.



29. A feladat az előző duálisa, ezt használjuk ki a megoldásnál is. A kúpszeletet meghatározó adatok: A és B pontok, valamint a *c*, *d*, *e* érintőegyenesek. Egy korreláció alkalmazásával egy másik kúpszelet *a*, *b* érintőit és C, D, E pontjait kapjuk. Ezen adatokkal ennek a másik kúpszeletnek tetszőlegesen sok pontja, érintője meghatározható, melyekre a korreláció inverzét alkalmazva az eredeti kúpszelet érintőit, illetve pontjait kapjuk. Az a kérdés merülhet fel, hogy egy korrelációt hogyan tudnánk a legkönnyebben megadni. Válasszunk egy tetszőleges kört, amely által indukált pólus-poláris kapcsolat éppen egy korreláció lesz. Az A és B pontok körre vett polárisa az *a* és *b* egyenesek lesznek, melyek érinteni fognak egy kúpszeletet. Az eredeti kúpszelet *c*, *d*, *e* érintőegyeneseinek a körre vett pólusa a másik kúpszelet C, D, és E pontjai lesznek. Maga a kör csak közvetítő szerepű a két másik kúpszelet között.

Néhány példa arra, hogyan kell átfogalmazni a feladatokat a korreláció alkalmazása után:

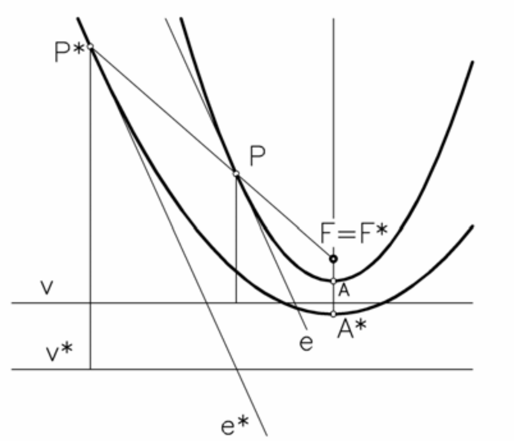
Ha az eredeti kúpszelet A-beli érintőjét keressük, akkor a korreláció után a másik görbe *a* érintőjének az érintési pontját határozzuk meg, és erre a pontra alkalmazzuk a korreláció inverzét.

Ha egy K külső pontból érintőket szeretnénk húzni a kúpszelethez, akkor a korreláció után a *k* egyenes és a másik kúpszelet metszéspontjait határozzuk meg, majd ezekre a metszéspontokra alkalmazzuk a korreláció inverzét. (A K pont pontosan akkor lesz külső pont az első görbére nézve, ha a *k* egyenes belemetsz a másik görbébe.)

30. Válasszuk a kollineáció centrumának a két megadott érintő metszéspontját, és tekintsünk egy olyan kört, amely érinti a két egyenest. A kör és a kúpszelet egy érintőn lévő érintési pontjait egymásnak feleltetjük meg, és a kúpszelet harmadik pontját a körre vetítve egy harmadik pontpárt kapunk. Ezzel megadtuk a kollineációt, melyet a sík azon pontjára is alkalmazunk, melyből érinteni szeretnénk az eredeti görbét. Az érintő szerkesztést először

a kör rendszerében oldjuk meg, majd a kollineációt felhasználva határozhatók meg a kúpszelet érintői.

31. Tekintsünk két olyan parabolát, melyeknek egybeesik a tengelye és a fókusza. Az egyik parabola csúcspontja A, vezéregyenese *v*, míg a másiké az A* és *v**. Indítsuk az F=F* közös fókuszból egy félegyenest, amely a P és P* pontokban metszi el a parabolákat. Ismeretes, hogy a parabola egy pontjában az érintő felezi a fokális sugár és a tengellyel párhuzamos egyenes szögét. Mivel ezek a szögek a P és P* pontokban egyállásúak, az e és e* érintők egymással párhuzamosak. A fókuszból indított egyenest a fókusz körül körbeforgatva azt mondhatjuk, hogy az így egymáshoz rendelt pontokban a görbék érintői egymással párhuzamosak. Vagyis a két görbe középpontosan hasonló egymáshoz.

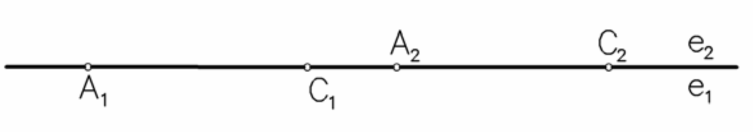


Ha a parabolák nem az előbb leírt helyzetben vannak, akkor egy mozgással (eltolás, forgatás vagy eltolás és forgatás együttesen) ilyen helyzetbe hozhatók. A mozgás ekkor a hasonlóságot nem rontja el, csak a középpontos volta szűnik meg.

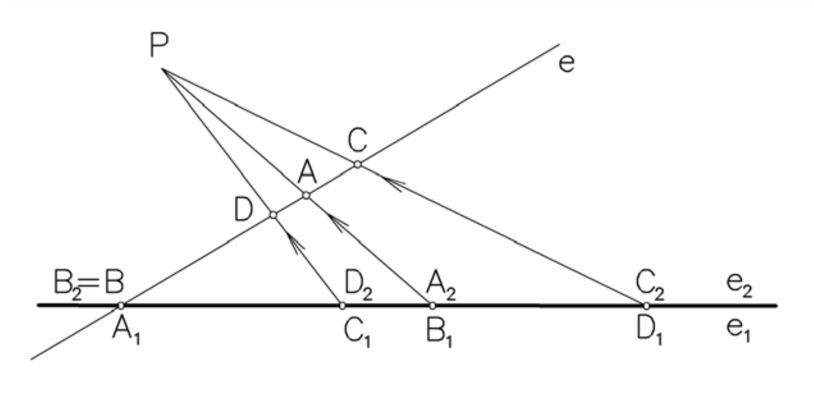
Involúció

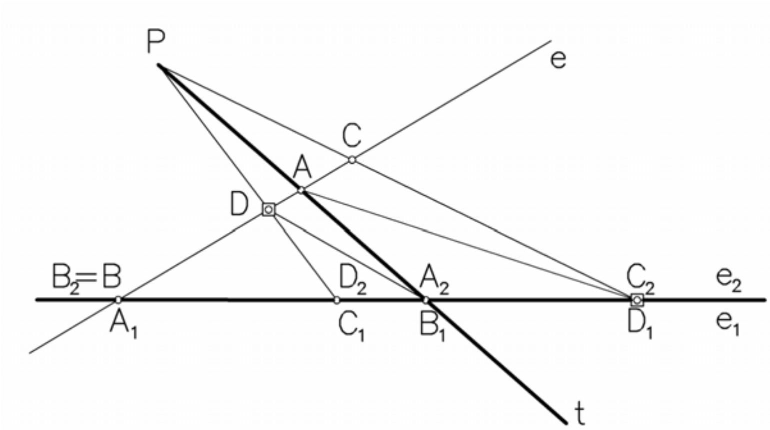
Elliptikus involúció pontsoron

1. Az involúció tulajdonságaiból következik, hogy ha $B_2=A_1$, akkor $B_1=A_2$ és ha $D_2=C_1$, akkor $D_1=C_2$.



Általános megoldás:
Tudjuk, hogy az involúció középpontja a közös végtelen távoli pont ($Q_{1\infty}=R_{2\infty}$) megfelelője ($Q_2=R_1=O$). Ennek megszerkesztéséhez az $A_1=B_2$ ponton átmenő tetszőleges *e* egyenesre vetítjük az A_2, C_2, D_2 pontokat tetszőleges P pontból. Itt nyerjük a $B=B_2$, C, D, A pontokat. Mivel *e* perspektív e_2-vel, ezért *e* projektív e_1-gyel.



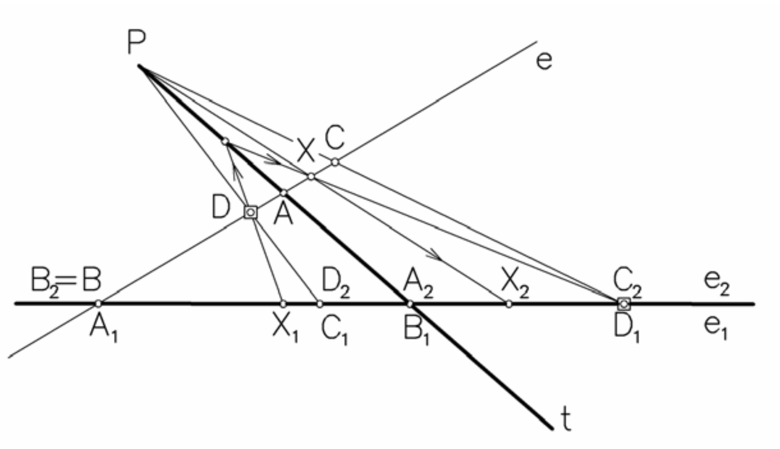


Most az *e* és e_1 közötti projektív kapcsolat megadható két perspektív kapcsolat egymás utáni alkalmazásával. Legyenek a perspektivitási középpontok D és D_1. A következő egyenesek egymásnak vannak megfeleltetve: $DA_1 \leftrightarrow D_1A$, $DB_1 \leftrightarrow D_1B$, $DC_1 \leftrightarrow D_1C$. A perspektivitás *t* tengelye a PA_2 egyenes.

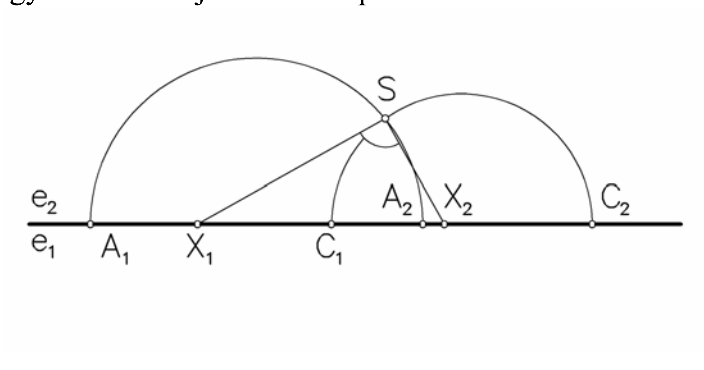
Ezek után a következő vetítésekkel szerkeszthetők a megfelelő pontpárok:

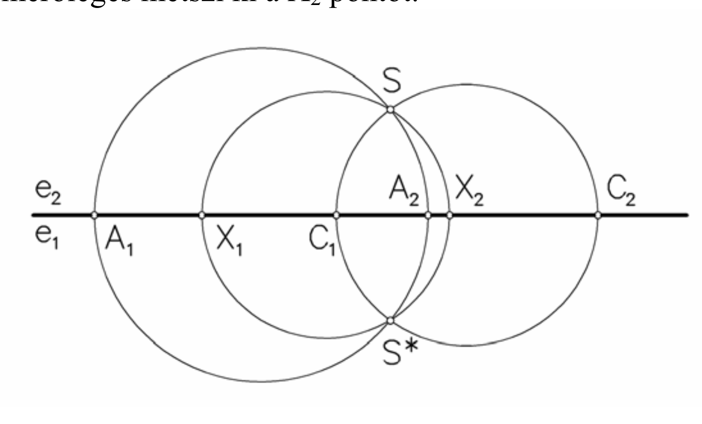
Az e_2 pontjait P-ből az *e*-re vetítjük.
Az *e* pontjait a D_1-ből a *t*-re vetítjük.
A *t* pontjait a D-ből az e_1-re vetítjük.

Ez azt jelenti, hogy az X_1 pont képét ezen vetítések fordított sorrendben történő alkalmazásával lehet megszerkeszteni. Az X_1-t a D-ből a *t*-re vetítjük, majd a kapott pontot D_1-ből az *e*-re. Ez az X pont. Az X-t a P-ből az e_2-re vetítve az X_2 pontot kapjuk.



Egy másik megoldás lehet, hogy felhasználjuk az elliptikus involúció azon tulajdonságát, hogy két pontból is vetíthető derékszögű sugárinvolúcióval. A vetítési középpontokat úgy kapjuk, hogy meghatározzuk az A_1 és A_2 valamint a C_1 és C_2 pontok fölé írt Thalész körök metszéspontjait. Az SX_1 egyenesre S-ben állított merőleges metszi ki a X_2 pontot.

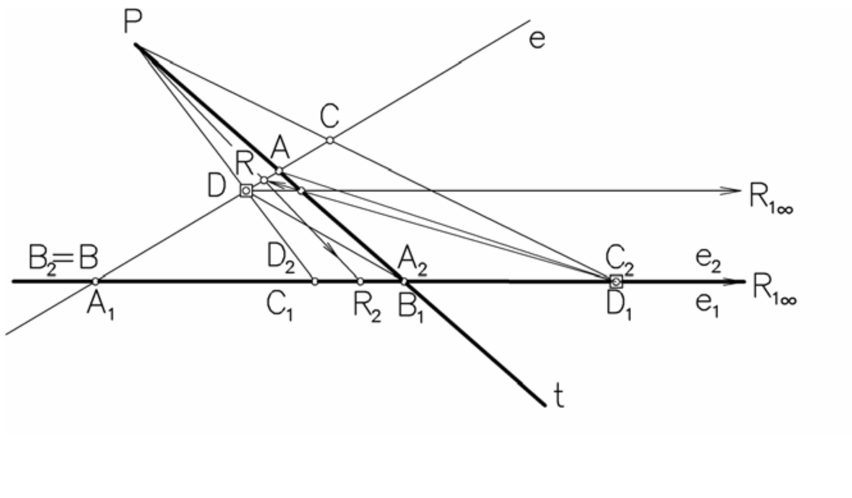




A fenti ábra alapján az is látható, hogy az S, S^* pontokra illeszkedő hiperbolikus körsor elemei az involúcióban megfelelő pontpárokat metszenek ki az e_1=e_2 egyenesből. A hiperbolikus körsor X_1-re illeszkedő eleme metszi ki az X_2-t.

2. Az involúció középpontja nem más, mint az $R_{1\infty}$ pont képe. Az 1. feladatban leírt általános megoldás felhasználásával a középpont meghatározása:

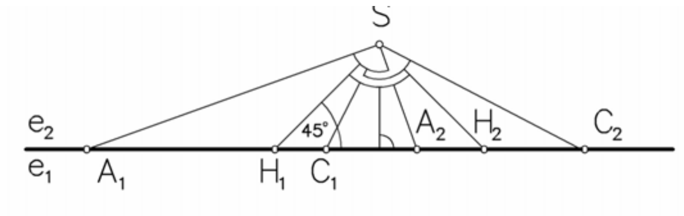
Az $R_{1\infty}$-t a D-ből a *t*-re vetítjük, majd a kapott pontot D_1-ből az *e*-re. Ez az R pont. Az R-t a P-ből az e_2-re vetítve az R_2 pontot kapjuk. Ez a pont lesz az

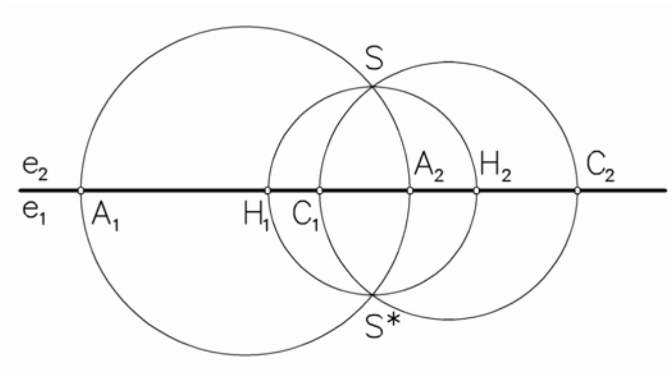


involúció középpontja.

Egy másik megoldás lehet, hogy felhasználjuk az előző feladatban szereplő hiperbolikus körsort.

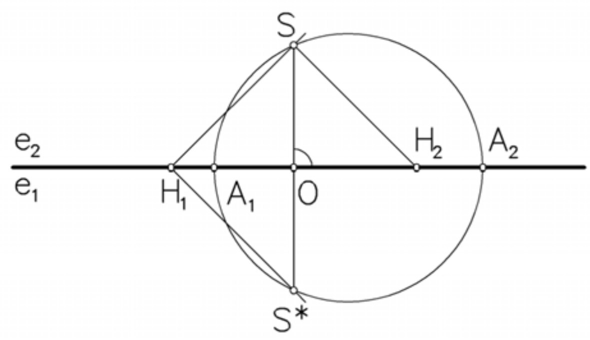
3. A hatványpontok olyan tulajdonsággal rendelkeznek, hogy egymásnak felelnek meg az involúcióban és a középponttól egyenlő távolságra vannak. Ha a derékszögek involúcióját használjuk fel akkor a H_1H_2S egyenlő szárú derékszögű háromszög.

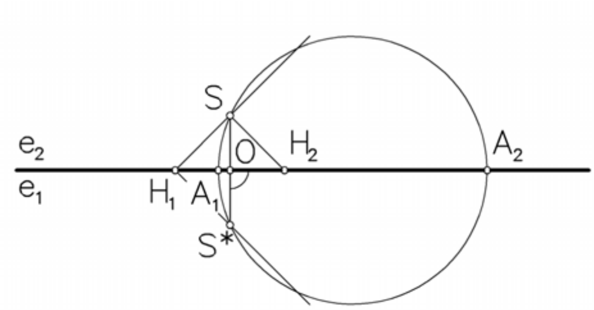




Ha a hiperbolikus körsort használjuk fel, akkor a körsor legkisebb sugarú eleme (Ennek a körnek az SS^* éppen átmérője.) metszi ki a H_1 és H_2 pontokat.

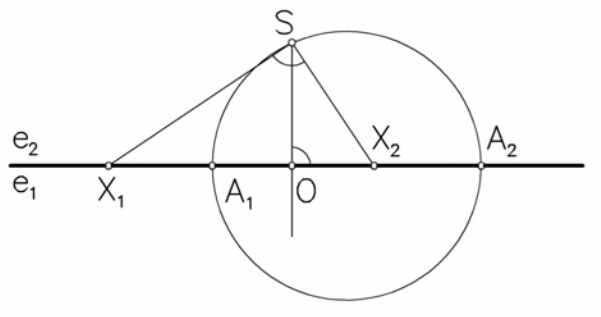
4. Az involúció ezekkel az adatokkal még nincs teljesen megadva. Legfeljebb két involúció létezhet az adatainkhoz. Az A_1A_2 fölé szerkesztett Thalész kört a H_1 ponton átmenő, az involúciós pontsor tartójával 45°-os szöget bezáró egyenesekkel kell elmetszeni, hogy megkapjuk az S és S^* pontokat. Ezek a pontok akár a sugársorok sorozópontjai, vagy a hiperbolikus körsor alappontjai lehetnek. Az SS^* egyenes metszi ki az involúció középpontját. A másik hatványpont a H_1 középpontra való tükörképe. A megadott pontok felhasználásával kettő (egymástól különböző), egy involúció adható meg vagy nincs ilyen involúció aszerint, hogy a 45°-os egyenes metszi, érinti vagy nem metszi a Thalész-kört.



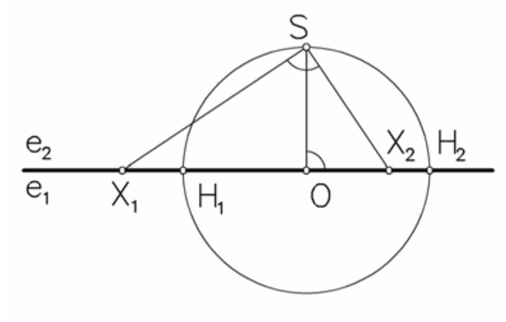


5. Az előző feladat alapján a derékszögek involúcióját felhasználva az SX_1 egyenesre az S-ben állított merőleges metszi ki az X_2 pontot.

6. Az elliptikus involúciós pontsort derékszögű sugárinvolúcióval vetítjük. Az A_1A_2 fölé szerkesztett Thalesz kört az O-ban emelt merőleges egy olyan S pontban metszi, melyből a pontsort vetítve éppen a derékszögek involúcióját kapjuk. Ekkor az X_1S egyenesre S-ben állított merőleges egyenes fogja kimetszeni az X_2-t. (Ha az A_1A_2 szakasznak az O a felezési pontja, akkor az A_1 A_2 pontok éppen a hatványpontok voltak.)



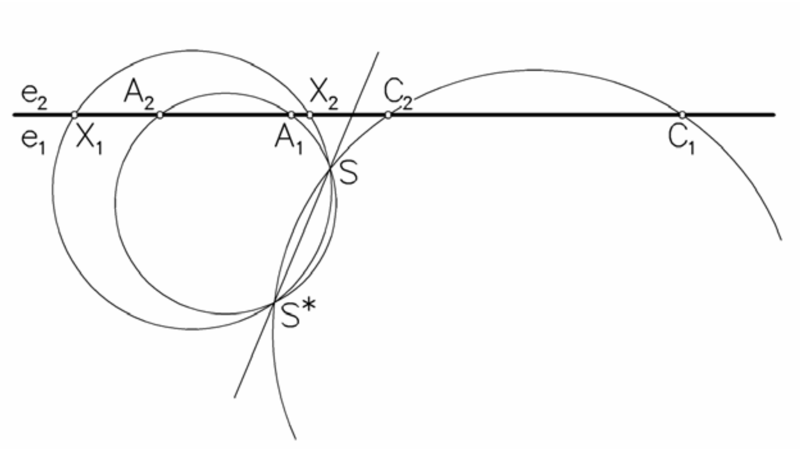
7. Az előző feladathoz hasonlóan a sugárinvolúciót használjuk fel. A H_2 hatványpont a H_1-nek az O-ra való tükörképe. A H_1H_2 Thalész körét az O-ban $e_1=e_2$-re emelt merőleges elmetszi az S pontban. Ekkor az X_1S egyenesre S-ben állított merőleges egyenes fogja kimetszeni az X_2-t.



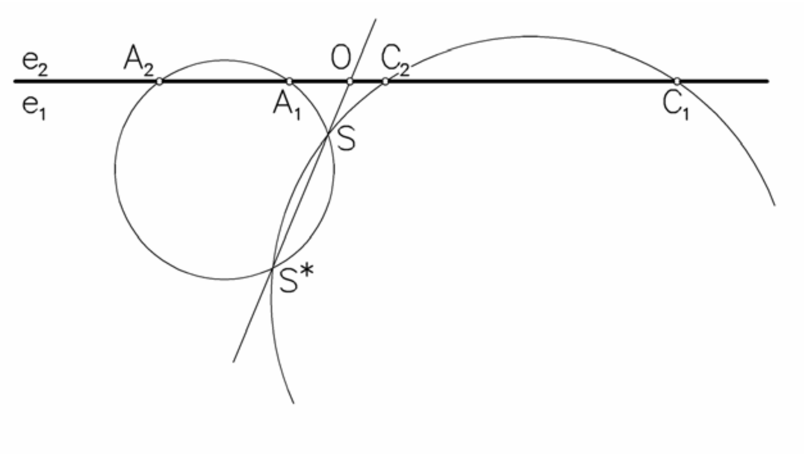
8. Az előző feladat alapján oldhatjuk meg.

Hiperbolikus involúció pontsoron

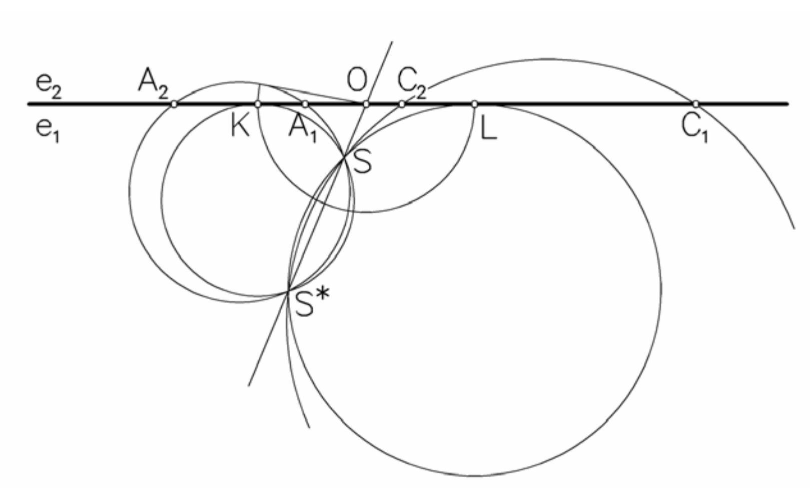
9. Az 1. feladatnál leírt általános módszert itt is alkalmazhatjuk
Másik módszer:
A hiperbolikus involúció is kapcsolatba hozható hiperbolikus körsorral. Illesszünk az A_1, A_2 pontpárra és a C_1, C_2 pontpárra egy-egy tetszőleges kört úgy, hogy legyen metszéspontjuk. A metszéspontokat jelölje S és S^*. A körsor elemei involúciós pontpárokban metszik az e_1=e_2 egyenest. A körsor X_1 ponton áthaladó eleme metszi ki az X_2 pontot.



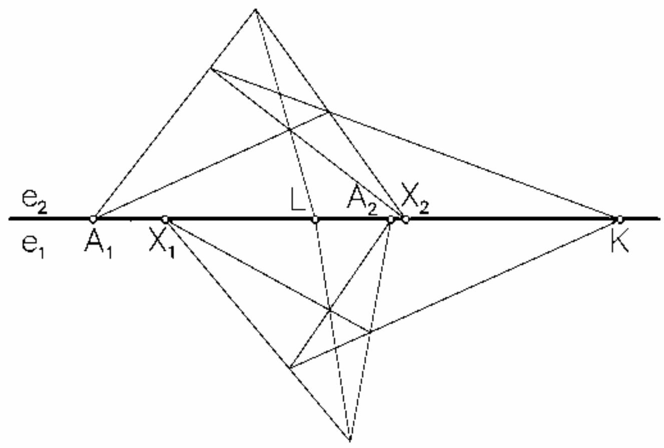
10. Illesszünk az A_1, A_2 pontpárra és a C_1, C_2 pontpárra egy-egy tetszőleges kört úgy, hogy legyen metszéspontjuk. A metszéspontokat jelölje S és S^*. A két kör közös hatványvonala metszi ki az involúció középpontját.



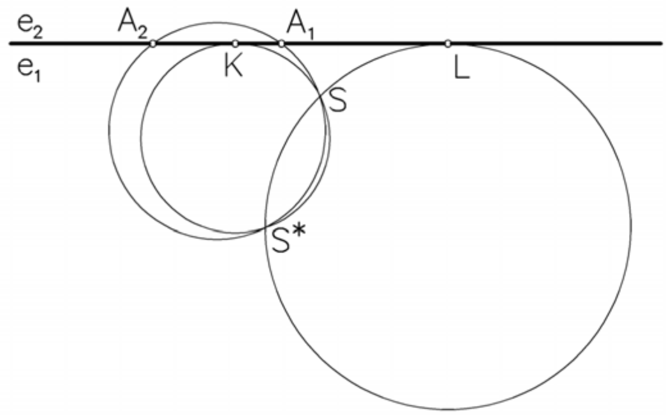
11. Illesszünk az A_1, A_2 pontpárra és a C_1, C_2 pontpárra egy-egy tetszőleges kört úgy, hogy legyen metszéspontjuk. A metszéspontokat jelölje S és S^*. A körsor elemei involúciós pontpárokban metszik az e_1=e_2 egyenest. A két kör közös húrja metszi ki az involúció középpontját. Ugyanis $OA_1 \cdot OA_2 = OG_1 \cdot OG_2 = OC_1 \cdot OC_2$. Ha O-ból olyan kört rajzolunk, amelynek sugara egyenlő az O-ból a körökhöz húzható érintő hosszával, akkor e kör kimetszi az involúció K és L kettőspontjait. Itt természetesen nincsenek



hatványpontok.

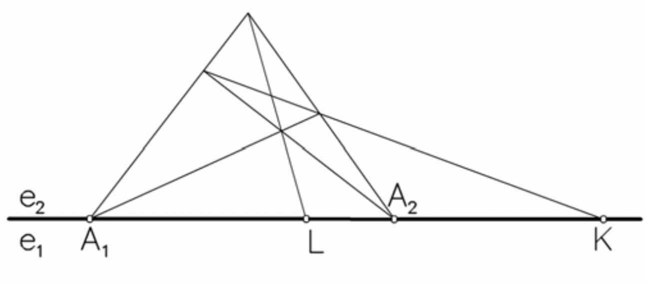


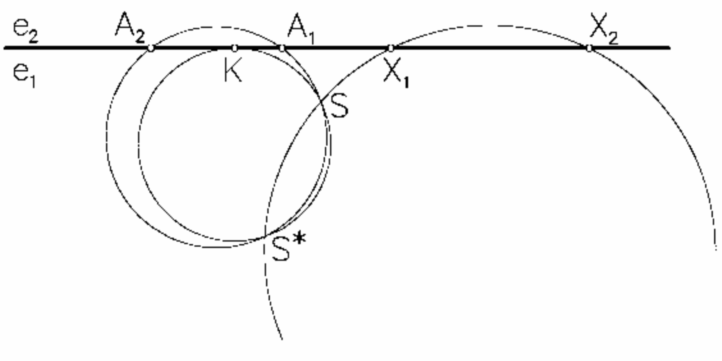
12. Tudjuk, hogy az involúció kettőspontjai és az involúció bármely pontpárja harmonikusan választják el egymást. Ezért olyan teljes négyszöget kell szerkesztenünk, amely átlóspontjai a megadott A_1, A_2 pontpár és a teljes négyszög ötödik oldala átmegy a megadott K kettősponton, ekkor a hatodik oldal éppen a másik kettősponton fog átmenni. A KL szakasz felezési pontja az involúció középpontja.



A feladat megoldható körsorral is. Az A_1 és A_2 pontokra illeszkedő, valamint az e_1=e_2 egyenest K-ban érintő, egymást metsző körök határozzák meg a körsort. Ennek a körsornak még egy eleme érinti az egyenest, és az érintési pont lesz az L kettőspont.

13. Először az előző feladat alapján meghatározzuk az L kettőspontot. Ezután a K, L és X_1 pontokra teljes négyszöget szerkesztünk, és ez meghatározza az X_2 pontot, amely az X_1 pontnak K és L pontokra vonatkozó harmonikus társa.

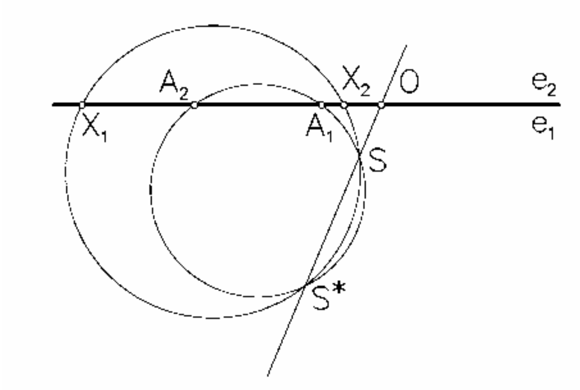




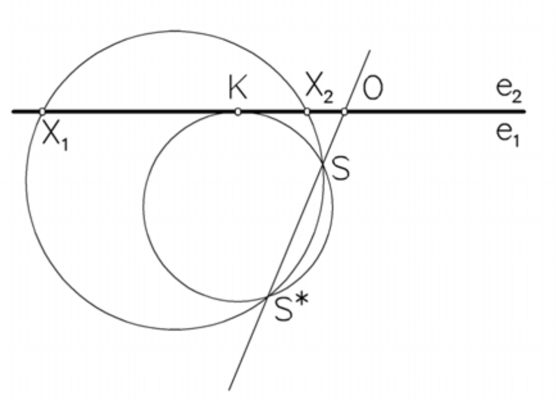
14. Az A_1 és A_2 pontokon keresztül felveszünk egy tetszőleges kört, majd az involúciós pontsort K-ban érintő olyan kört, amely metszi az előbbit. A metszéspontok

legyenek S és S^*. Az X_2-t a S, S^*, X_1 pontokra illeszkedő kör metszi ki a pontsorból.

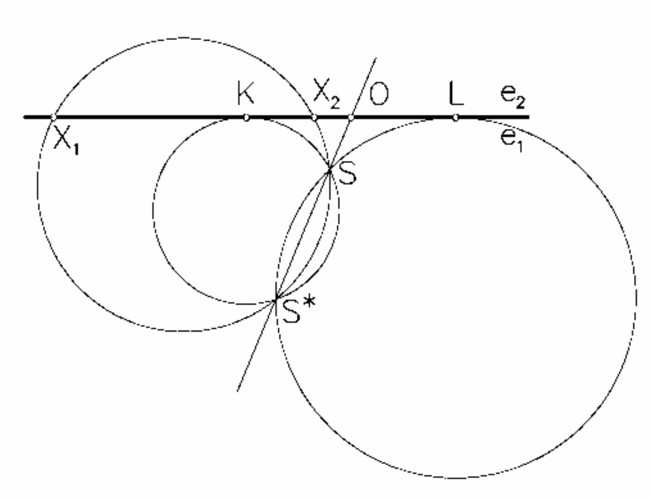
15. Hiperbolikus körsort alkalmazva: az A_1 és A_2 pontokon átmenő tetszőleges kört az O-ból húzott tetszőleges egyenes S és S^* pontban metszi. Az X_2-t a S, S^*, X_1 pontokra illeszkedő kör metszi ki a pontsorból.



16. Hiperbolikus körsort alkalmazva: A pontsort K-ban érintő tetszőleges kört az O-ból húzott tetszőleges egyenes két pontban metszi: S és S^*. Az X_2-t a S, S^*, X_1 pontokra illeszkedő kör metszi ki a pontsorból.

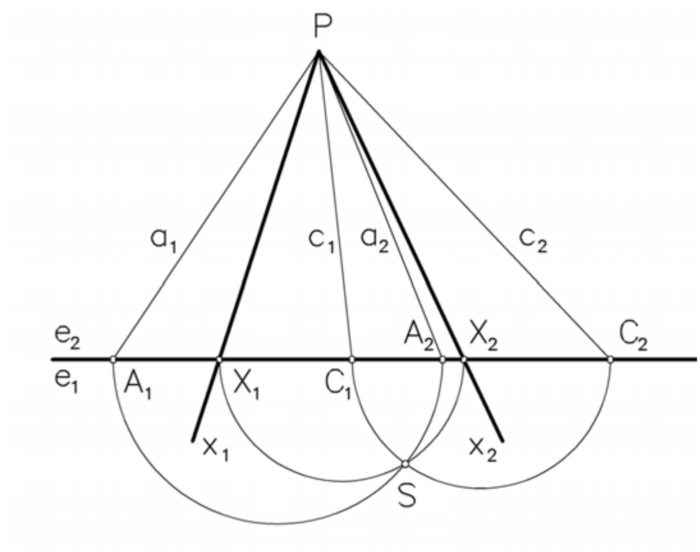


17. Hiperbolikus körsort alkalmazva: A pontsort K-ban illetve L-ben érintő tetszőleges körök az S és S^* pontokban metszik egymást Az X_2-t a S, S^*, X_1 pontokra illeszkedő kör metszi ki a pontsorból.

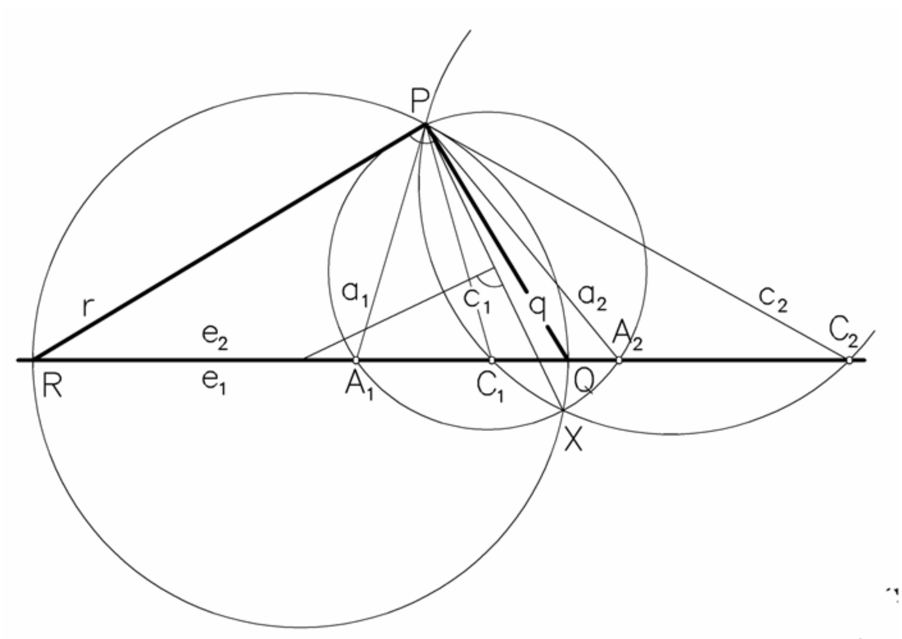


Elliptikus involúció sugársorban

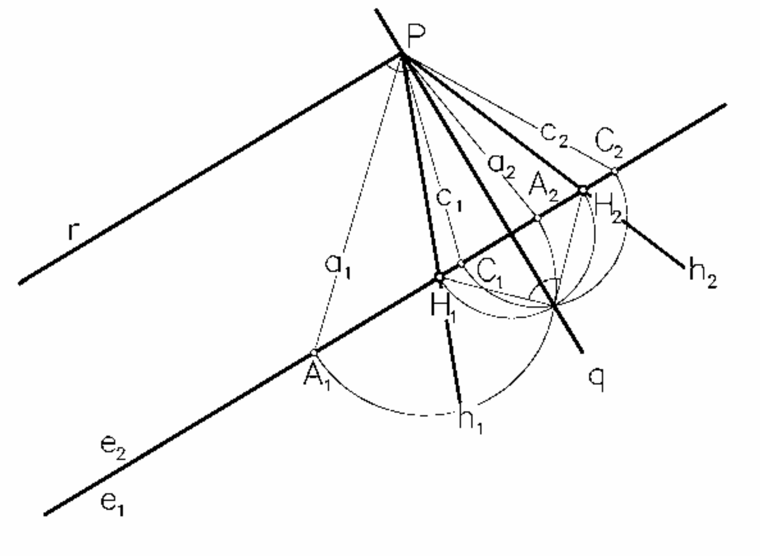
18. Az involúciós sugársort messük el egy tetszőleges egyenessel, ekkor az egyenesen egy involúciós pontsort kapunk, itt megszerkesztjük egy X_1 pont X_2 képét. Az X_1 és X_2 pontokat összekötve a tartóponttal egymásnak megfelelő sugarakat kapunk.



19. A tengelyek olyan egymásnak megfelelő egyenesek az involúcióban, melyek egymásra merőlegesek. A sugársort messük el egy tetszőleges egyenessel, ekkor az egyenesen involúciós pontsort kapunk. Pontsorban olyan egymásnak megfelelő pontpárt kell találni, melyet P-ből vetítve egymásra merőleges egyeneseket kapunk. Ehhez olyan körsort használhatunk, amelynek az egyik tartópontja éppen P, vagyis a körsort az A_1, A_2, P és C_1, C_2, P pontokra illeszkedő körök generálják. Ebben a körsorban van egy olyan elem, amelynek a középpontja az *e* egyenesen van. Ez a kör a kívánt két pontot metszi ki az egyenesből, megadva ezzel a tengelyek egy-egy pontját.

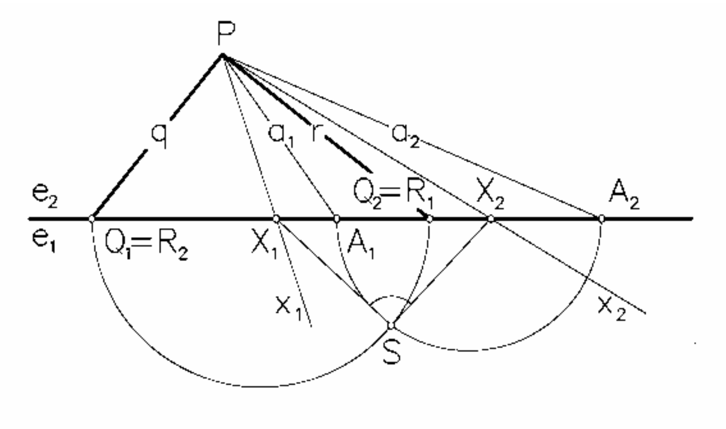


20. A sugárinvolúció hatványsugarai olyan egymásnak megfelelő egyenesek, melyek a tengelyekkel egyenlő nagyságú szöget zárnak be. Az előző feladat alapján meghatározzuk az involúció tengelyeit, majd messük el a sugársort egy olyan egyenessel, amely párhuzamos az egyik tengellyel. Ezen az egyenesen olyan pontinvolúciót kapunk, amely hatványpontjai illeszkednek majd a sugársorban lévő hatványsugarakra. (Más állású egyenesnél ez nem teljesül.) A pontsorban a hatványpontokat a derékszögek involúcióját használva határozhatjuk, majd a H_1 és H_2 pontokat a P-ből vetítjük. Megfigyelhető, hogy az ábra két sugársora perspektív kapcsolatban van egymással.

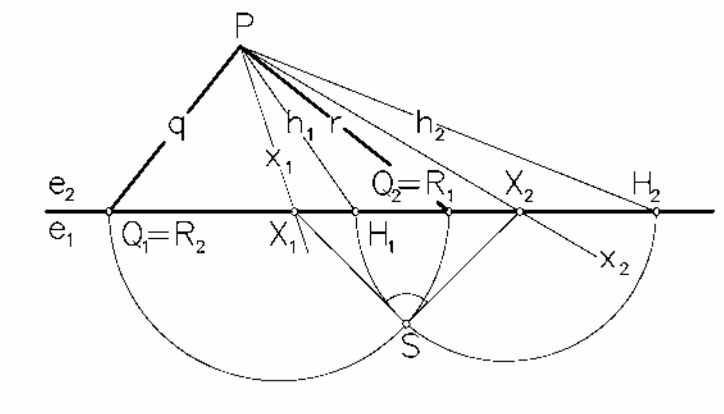


21-22. Bármennyire logikus lenne egy megfelelő sugárpárral és az egyik hatványsugárral megadni az elliptikus sugárinvolúciót, ezen adatokból semmilyen további involúciós sugárpár nem határozható meg.

23. A sugársort elmetszve egy egyenessel egy involúciós pontsort kapunk. A involúciós pontsor az S pontból vetíthető a derékszögek involúciójával. Így az X_1S és X_2S egymásra merőleges lesz. Ekkor az x_1 sugár megfelelője a megadott involúcióban az X_2P egyenes lesz.



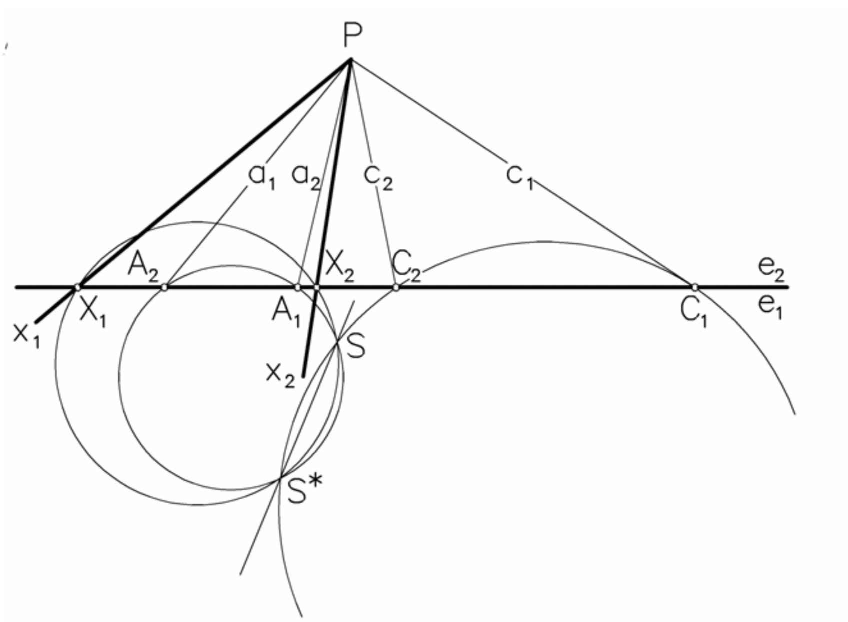
24. Ebben az esetben nemcsak az egyik hatványsugár és tengely ismert, hanem a másik is. Ugyanis a két tengely mindig merőleges egymásra, és a hatványsugarak a tengelyekkel egyenlő szöget zárnak be. Tetszőleges egyenessel elmetszve a sugársort egy involúciós pontsort kapunk, melyben az X_1 képe a derékszögek involúciójával határozható meg. Ekkor az x_1 sugár megfelelője a megadott involúcióban az X_2P egyenes lesz.



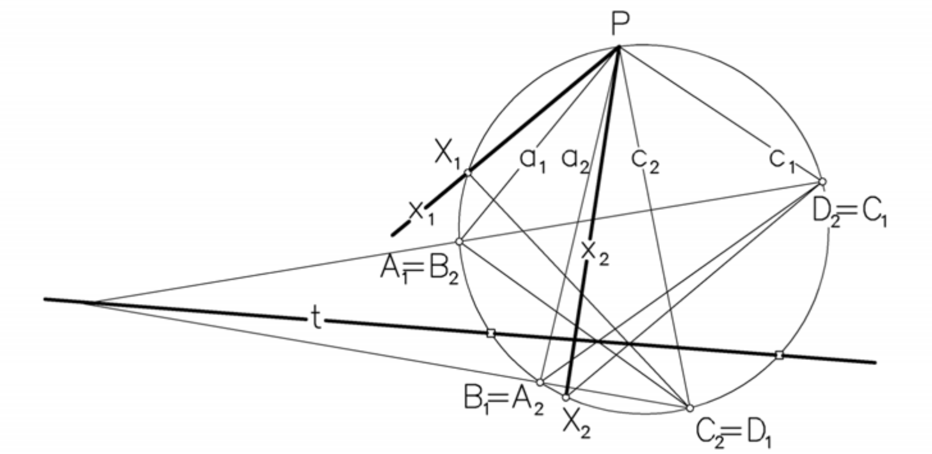
25. Az előző feladat megoldása ennek a feladatnak is.

Hiperbolikus involúció sugársorban

26. Az involúciós sugársort messük el egy tetszőleges egyenessel, ekkor az egyenesen egy involúciós pontsort kapunk, itt megszerkesztjük egy X_1 pont X_2 képét. Az X_1 és X_2 pontokat összekötve a tartóponttal egymásnak megfelelő sugarakat kapunk.



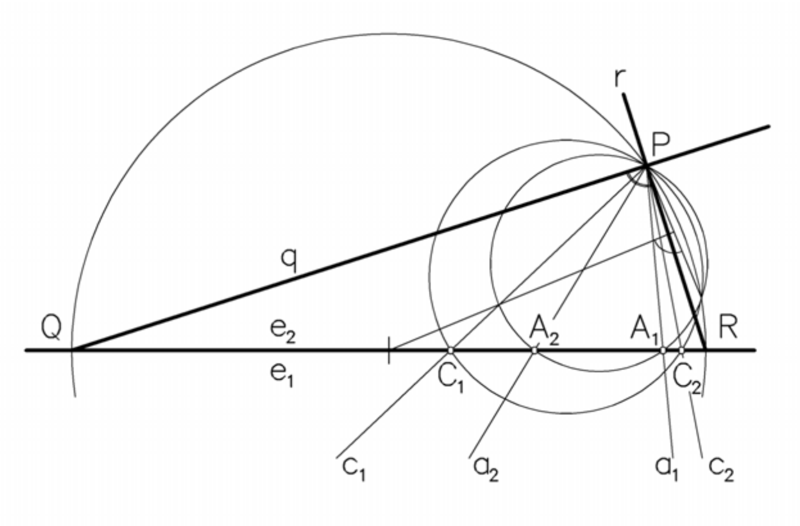
Egy másik megoldás lehet a feladatra a Steiner-féle szerkesztés. Ebben az esetben vegyünk egy olyan kört, melynek a P pontja. A kört az involúciós sugársor egy pontinvolúcióban metszi. A C_1-ből vetítsük az A_2, B_2, C_2 és D_2, majd a C_2-ből az A_1, B_1, C_1 és D_1 pontokat. Az így kapott két sugársor perspektív helyzetű, ha a sugarak megfeleltetése a következő:



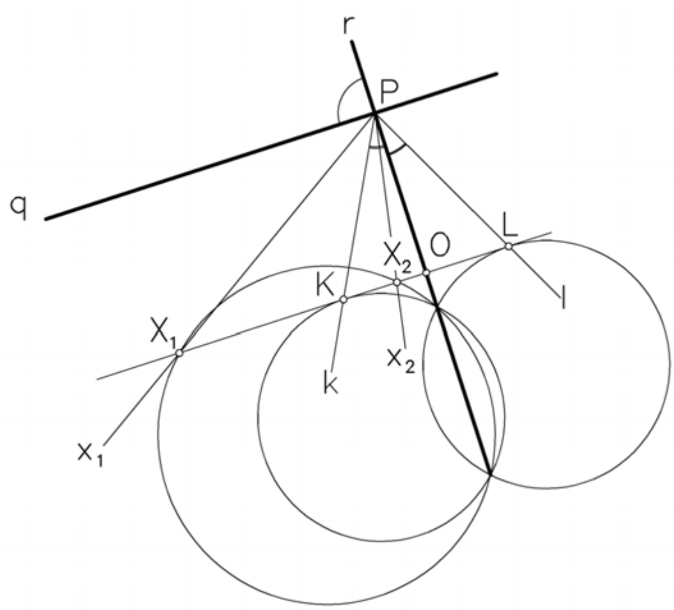
$C_1A_2 \leftrightarrow C_2A_1$, $C_1B_2 \leftrightarrow C_2B_1$, $C_1C_2 \leftrightarrow C_2C_1$, $C_1D_2 \leftrightarrow C_2D_1$. (Az ábrán nem szerepel mindegyik sugár.) A megfelelő sugarak a perspektivitás *t* tengelyén metszik egymást. Ekkor az X_1-t a C_2-ből először a *t*-re kell vetíteni, majd a kapott pontot a C_1-ből a körre. Az így kapott X_2 pontot a P-vel összekötve a keresett sugarat kapjuk.

27. A tengelyek olyan egymásnak megfelelő egyenesek az involúcióban, melyek egymásra merőlegesek. A sugársort messük el egy tetszőleges egyenessel, ekkor az egyenesen involúciós pontsort kapunk. Pontsorban olyan egymásnak megfelelő pontpárt kell találni, melyet P-ből vetítve egymásra merőleges egyeneseket kapunk. Ehhez olyan körsort használhatunk, amelynek az egyik tartópontja éppen P, vagyis a körsort az A_1, A_2, P és C_1, C_2, P pontokra illeszkedő körök generálják. Ebben a

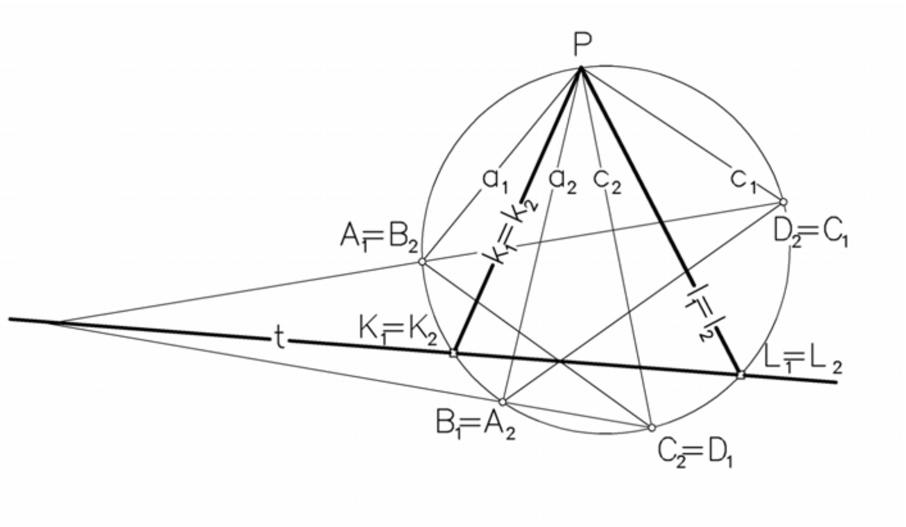
körsorban van egy olyan elem, amelynek a középpontja az *e* egyenesen van. Ez a kör a kívánt két pontot metszi ki az egyenesből, megadva ezzel a tengelyek egy-egy pontját.



28. A sugárinvolúció kettőssugarai önmaguknak megfelelő egyenesek, melyekre még az jellemző, hogy a tengelyekkel egyenlő nagyságú szöget zárnak be. Az előző feladat alapján meghatározzuk az involúció tengelyeit, majd messük el a sugársort egy olyan egyenessel, amely párhuzamos az egyik tengellyel. Ezen az egyenesen olyan pontinvolúciót kapunk, amely kettőspontjai illeszkednek majd a sugársorban lévő kettőssugarakra. A pontsorban a kettőspontokat egy körsor segítségével határozhatjuk meg, majd a K és L pontokat a P-ből vetítjük.



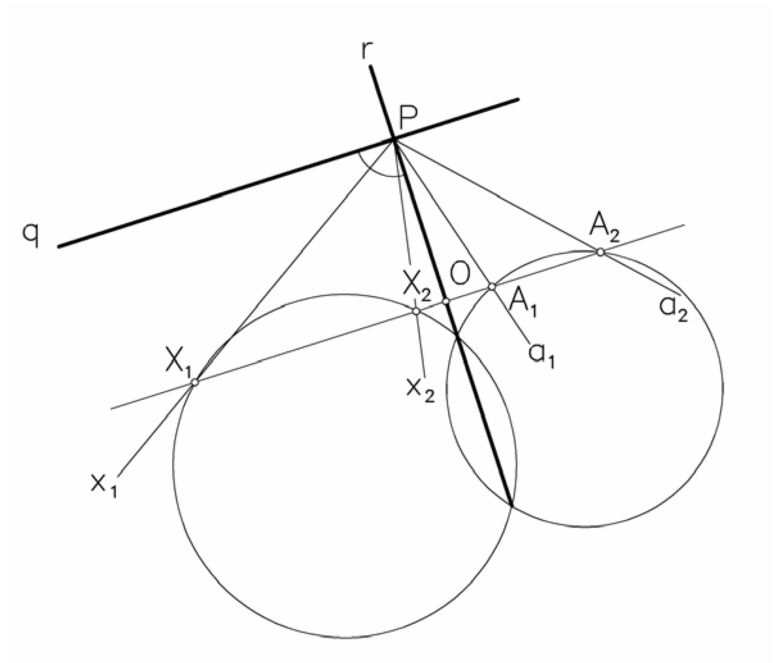
A Steiner-féle szerkesztést is lehet alkalmazni. A 26. feladat leírása szerint előállítjuk a perspektivitás *t* tengelyét. A tengely és a kör közös pontjai a körön lévő involúció kettőspontjai. Ezeket kell a P ponttal összekötve a kettőssugarakat kapjuk.



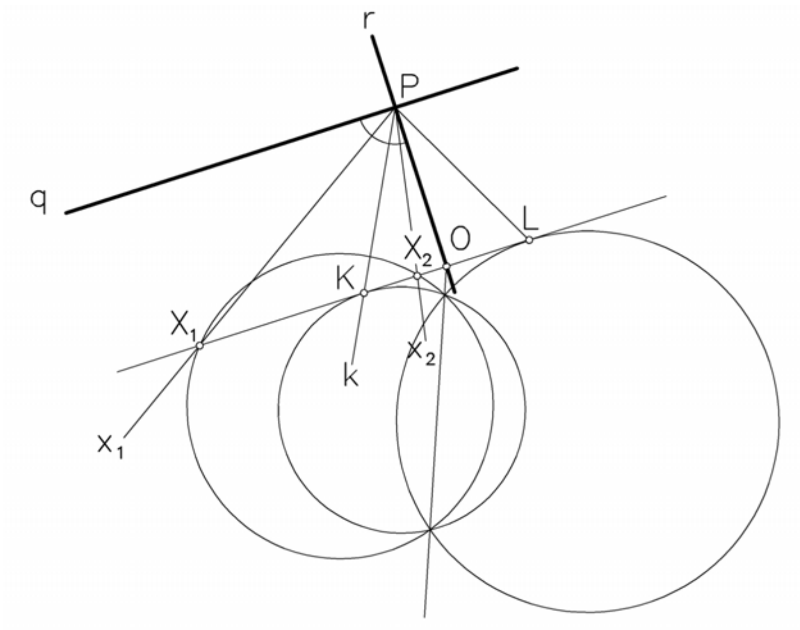
29. A sugársorban az a_1, k, a_2, l harmonikus sugárnégyest fog alkotni. Ha egy egyenessel elmetsszük a sugarakat, akkor a K pontnak az A_1, A_2-re nézve a harmonikus társa L. A sugársor L-en áthaladó eleme a másik kettőssugár.

30. Az előző feladat alapján meghatározzuk a másik kettőssugarat. Az x_1, x_2, k, l harmonikus sugárnégyes lesz.

31. A sugársort elmetsszük az egyik tengellyel párhuzamos egyenessel. A involúciós pontsorban az X_1 pont képe egy körsor segítségével meghatározható. Ezt a körsort most úgy is választhatjuk, hogy a körsor hatványvonala az involúció r tengelye. Ekkor az x_1 sugár megfelelője a megadott involúcióban az X_2P egyenes lesz.



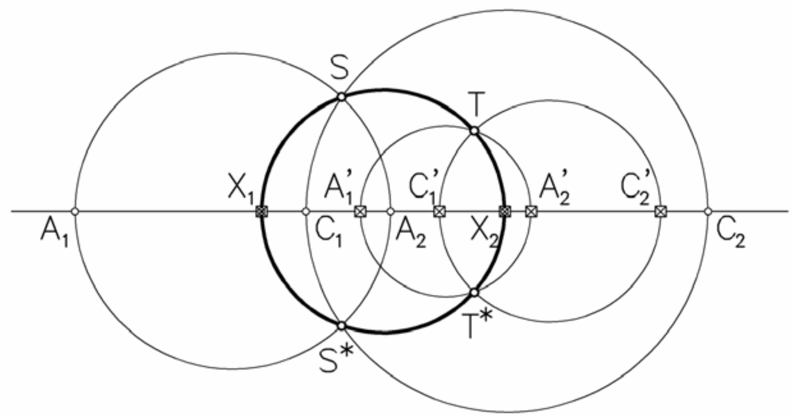
32. A sugársort elmetsszük az egyik tengellyel párhuzamos egyenessel. A involúciós pontsorban ismertek a kettőspontok és a középpont is. Az X_1 pont képe egy körsor segítségével meghatározható. Ekkor az x_1 sugár megfelelője a megadott involúcióban az X_2P egyenes lesz.



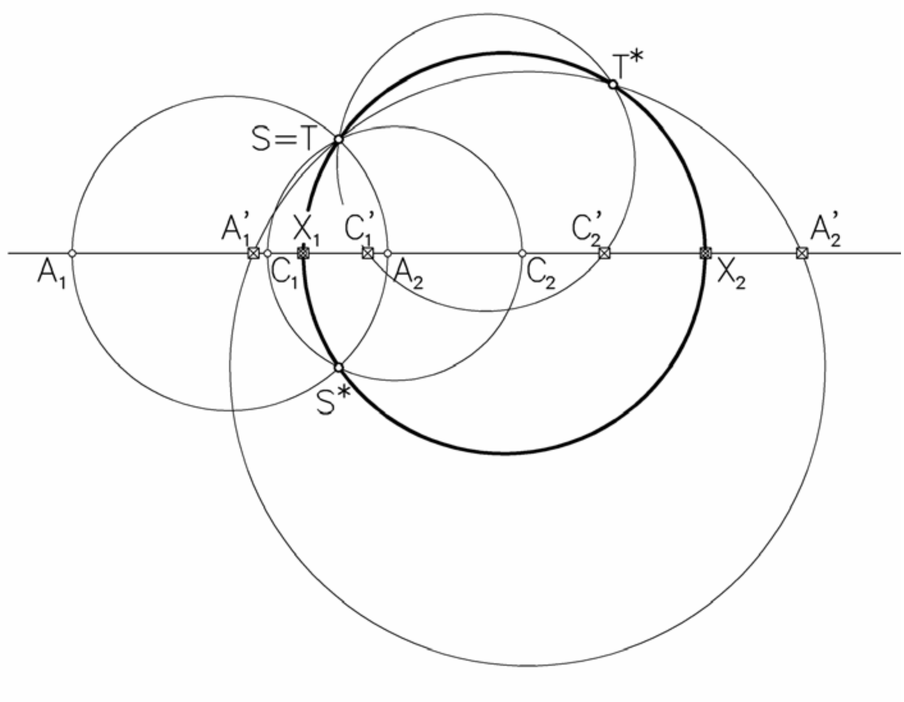
33. Az előző feladat megoldása ennek a feladatnak is.

Közös tartójú involúciók

34. Három esetet lehet vizsgálni.
Az első esetben mindkét involúció legyen elliptikus. Az involúciókat egy-egy körsorral hozzuk kapcsolatba. Az A_1, A_2, C_1, C_2 involúcióhoz az S és S* sorozópontú, az A_1', A_2', C_1', C_2' involúcióhoz a T és T* sorozópontú körsort használjuk a szerkesztéseknél. Ha olyan pontpárt keresünk, amely mindkét involúcióban megfelelő, akkor a pontokat tartalmazó kör mindkét körsor eleme. Egészen pontosan az S, S*, T és T* pontokra illeszkedő kör jelöli ki a keresett pontpárt.



A második esetben az egyik involúció elliptikus, a másik hiperbolikus. Az A_1, A_2, C_1, C_2 elliptikus involúcióhoz az S és S* sorozópontú körsort rendeljük hozzá. Az A_1', A_2', C_1', C_2' hiperbolikus involúcióhoz olyan körsort adunk, meg, melynek a T sorozópontja egybeesik az S ponttal, a T* pont pedig az A_1', A_2'és S, valamint a C_1', C_2'és S pontokra illesztett körök másik közös pontja. Az így konstruált körsoroknak van egy közös köre, az S=T, S* és T* pontokra illesztett kör, amely az involúciók közös elemét fogja kimetszeni.



A harmadik esetben mindkét involúció hiperbolikus. A megoldás menete az előzőhöz hasonló, csak annyi az eltérés, hogy amikor az involúciókhoz a körsorokat hozzárendeljük, akkor az S=T, S* és T* pontok az egyenes ugyanarra az oldalára esnek..

35. Egy olyan egyenessel, amely nem illeszkedik a P pontra, elmetsszük a sugarakat. Ekkor az előző feladat valamelyik esete a keresett sugarak egy-egy pontját adja.

36. A 34. feladat megoldásának utolsó esetét használjuk fel. Az S és S* pontokat azon körök metszéspontjai adják, melyek az *e* egyenest a K és L pontokban érintik. A másik körsor T sorozópontja essen egybe az S ponttal. Ekkor T* már kiszerkeszthető, mint az *e*-t K'-ben és L'-ben érintő és a T-re illeszkedő körök metszéspontja. A két körsor közös eleme, az S=T, S* és T* pontokra illesztett kör, tartalmazza a keresett pontpárt.

37. Egy olyan egyenessel, amely nem illeszkedik a P pontra, elmetsszük a sugarakat. Ekkor az előző feladat megoldása a keresett sugarak egy-egy pontját adja.

38. Tekintsük a K és L pontokat az egyenesen vett egyik hiperbolikus involúció kettőspontjainak, a K' és L' pontokat egy másik involúció kettőspontjainak. Ebben az esetben a 36. feladat megoldását kell alkalmazni.
Egy másik megoldás lehet, ha a K, L pontokat egy involúció pontpárjának vesszük, a K', L' ugyanennek az involúciónak egy másik megfelelő párja. Ekkor a feladat megoldásai a megadott involúció kettőspontjai lesznek. Ezeket a kettőspontokat akár Steiner-szerkesztéssel, akár körsorokkal meghatározhatjuk. Természetesen csak akkor kapunk megoldást, ha az involúció hiperbolikus, azaz a KL és K'L' nem választják szét egymást.

39. Egy olyan egyenessel, amely nem illeszkedik a P pontra, elmetsszük a sugarakat. Ekkor az előző feladat megoldása a keresett sugarak egy-egy pontját adja.

Analitikus feladatok

Pont homogén koordinátái

1. Az (x,y) Descartes-féle koordinátákat csak véges helyzetű pontok esetén lehet megadni az $x=\frac{x_1}{x_3}$ és $y=\frac{x_2}{x_3}$ összefüggések alapján.
   - P[2,-3,-1] → P(-2, 3)
   - P[4, 8, 2] → P(2, 4)
   - P[-1, 2, 3] → P($-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$)
   - P[1,-1, $\frac{1}{2}$] → P(2, -2)
2. Az előző feladat alapján mindkét számhármas a ($\frac{3}{2}$, -2) koordinátájú pont homogén koordinátája volt.
3. Az első két koordináta egymásból egy $\frac{3}{2}$-szeres szorzással kapható, a harmadik koordináták között is ilyen a kapcsolat.

   1,5(1-3*x*)= -4*x*

   A megoldás: *x*=3.
4. Az első koordináták egymásból egy $\frac{3}{4}$-szeres szorzással kaphatók.

   $\frac{3}{4}(4-x)=6-x$ és $\frac{3}{4}(xy)=7x$ megoldása kell.

   A megoldás: *x*=12 és $y=\frac{28}{3}$.

Alakzatok homogén koordinátás alakja és végtelen távoli pontjai

5. Végezzük el a következő helyettesítéseket: $x=\frac{x_1}{x_3}$ és $y=\frac{x_2}{x_3}$, majd x_3-mal való szorzással tüntessük el a törteket.
   - $2x-3y+1=0$ → $2x_1-3x_2+x_3=0$
   - $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ → $x_1^2+x_2^2-4x_1x_3+6x_2x_3-12x_3^2=0$
   - $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ → $\frac{x_1^2}{9}+\frac{x_2^2}{5}=x_3^2$
   - $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ → $\frac{x_1^2}{16}-\frac{x_2^2}{9}=x_3^2$
   - $y^2=8x$ → $x_2^2=8x_1x_3$
   - $xy=1$ → $x_1x_2=x_3^2$
   - $y=x^3-3x^2+3x-3$ → $x_1^3-3x_1^2x_3+3x_1x_3^2-x_2x_3^2-3x_3^3=0$

6. Homogén koordinátákkal az egyenes egyenlete: $2x_1-4x_2+5x_3=0$. Az egyenes végtelen távoli pontjának koordinátáira teljesül, hogy $x_3=0$. Ezt az egyenes homogén koordinátás alakjába helyettesítve az x_1, x_2 koordinátákra kapunk összefüggést: $2x_1-4x_2=0$. Végtelen sok x_1, x_2 pár kielégíti az előbbi feltételt, pl. $x_1=4$ és $x_2=2$. Minden megoldáspárra az jellemző, hogy az arányuk állandó, vagyis $x_1/x_2=2$ (feltételezve azt, hogy $x_2\neq0$). $\rightarrow V_\infty[4, 2, 0]$

   (Meg kell jegyezni, hogy a kapott x_1, x_2 pár, ha vektorkoordinátáknak tekintjük őket, akkor az egyenes irányvektorát adja. A feladat megoldása során nincs jelentősége a Descartes-féle koordinátákkal adott egyenes egyenletében a konstans tagnak. Az euklideszi síkrészen egymással párhuzamos egyenesekhez ugyanazt a végtelen távoli pontot rendeljük hozzá.)

7. A hiperbola homogén koordinátákkal megadott egyenlete: $16x_1^2 - 9x_2^2 - 144x_3^2 = 0$. Mivel végtelen távoli pontot keresünk, x_3=0. Az x_1, x_2 párra a következő összefüggést kapjuk: $16x_1^2 - 9x_2^2 = 0$, melyet szorzattá lehet alakítani: $(4x_1+3x_2)(4x_1-3x_2)=0$. A szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $4x_1+3x_2=0$, akkor pl. a 3,-4 pár egy lehetséges megoldás. Ha $4x_1-3x_2=0$, akkor pl. a 3,4 egy lehetséges megoldás. $\rightarrow V_{1\infty}[3, -4, 0]$ és $V_{2\infty}[3, 4, 0]$
(A megadott hiperbola egy olyan origó középpontú hiperbola, amelynek a valós tengelye 4, a képzetes tengelye 3 egység hosszúságú. Ez alapján az aszimptotái a 4x+3y=0 és 4x-3y=0 egyenesek. A számolás során az aszimptoták végtelen távoli pontjait határoztuk meg. Fontos, hogy a síkon bármilyen állású hiperbola végtelen távoli pontjai ismeretében az aszimptotáinak az állása ismert, egészen pontosan az irányvektoraik ismertek.)
8. A parabola homogén koordinátás alakja: $x_1^2 + 4x_2x_3 = 0$. Az x_3=0 helyettesítés után $x_1^2 = 0$-ból az x_1=0 következik. De ekkor az x_2 már csak 0-tól különböző értéket vehet fel, pl. legyen 1. $\rightarrow V_\infty[0, 1, 0]$
(A megadott parabola egy olyan origó csúcspontú parabola, amelynek a tengelye az y tengely, azaz az x=0 egyenes. Ez alapján a parabola végtelen távoli pontja éppen a tengelyének a végtelen távoli pontja. Fontos, hogy a síkon bármilyen állású parabola végtelen távoli pontja ismeretében a tengelyének az állása ismert, egészen pontosan a tengely irányvektora ismert.)
9. Az előző feladatok eljárását alkalmazva $\rightarrow V_\infty[0, 1, 0]$.
10. A kör homogén koordinátákkal megadott egyenlete: $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 - 12x_3^2 = 0$. Mivel végtelen távoli pontot keresünk, x_3=0. Az x_1, x_2 párra a következő összefüggést kapjuk: $x_1^2 + x_2^2 = 0$, ahol tudjuk, hogy az x_1, x_2 egyszerre nem lehet nulla. Ezért nincs olyan valós számpár, amely eleget tenne a feltételnek. De ha komplex számok körében keresünk megoldást, akkor már szorzattá alakíthatjuk az előbbi feltételt: $(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)=0$. Az x_1, x_2 párra keresett megoldások: (1,i) és (1,-i). Ekkor a kapott végtelen távoli pontok $\rightarrow V_{1\infty}[1, i, 0]$ és $V_{2\infty}[1, -i, 0]$. Ezek a pontok egyszerre végtelen távoliak és képzetesek is. Jellemző rájuk, hogy az euklideszi síkrészen vett bármely kör a kibővített sík végtelen távoli egyenesét ebben a két pontban metszi, melyeket *abszolút képzetes körpontok*nak nevezünk.
11. Az ellipszis homogén koordinátákkal megadott egyenlete: $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1x_3 - 56x_2x_3 - 80x_3^2 = 0$. Mivel végtelen távoli pontot keresünk, x_3=0. Az x_1, x_2 párra a következő összefüggést kapjuk: $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 0$, ahol tudjuk, hogy az x_1, x_2 egyszerre nem lehet nulla. Tegyük fel, hogy az $x_1 \neq 0$ és legyen az értéke 1. Behelyettesítés után az $x_2 = \dfrac{-1 \pm 3 \cdot i}{4}$. Ekkor a végtelen távoli pontok $\rightarrow V_{1\infty}\left[1, \dfrac{-1+3\cdot i}{4}, 0\right]$ és $V_{2\infty}\left[1, \dfrac{-1-3\cdot i}{4}, 0\right]$. Ezek a pontok, mivel komplex számokkal vannak koordinátázva, képzetesek.

Illeszkedés, pontsor és sugársor

12. Az egyenes egyenlete homogén koordinátákban: $3x_1+4x_2+5x_3=0$. A P koordinátáit helyettesítve: $3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot(-4)=-2$. Mivel a helyettesítés nem adott 0-t, ezért a P nem illeszkedik az egyenesre.
13. Az egyenes egyenlete homogén koordinátákban: $x_1+x_2-7x_3=0$. A P koordinátáit helyettesítve: $1\cdot 2+1\cdot 4-7\cdot x_3=0$. Ennek az egyenletnek $x_3={}^6\!/\!_7$ az egyetlen megoldása.
14. Homogén koordinátákban egy 3×3-as formális determinánst használunk. Ennek az első sora az x_1, x_2, x_3 szimbólumokból, a további két sora a megadott pontok 2, 1, 1 és 3, 4, 1 homogén koordinátáiból áll. Ezt kell az első sor szerint kifejteni és az egyenes homogén koordinátás egyenletét kapjuk.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $3x_1-x_2-5x_3=0$, amely Descartes-féle koordinátákban a $3x-y-5=0$ egyenes. (A projektív síkon a homogén koordinátás megadást a pontsor egyenletének is nevezzük.)

15. Az előző feladat alapján:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $24x_1-20x_2-27x_3=0$, amely Descartes-féle koordinátákban a $24x-20y-27=0$ egyenes.

16. Az előző feladat alapján:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $x_3=0$, amely a sík végtelen távoli egyenese (várható volt, mivel két végtelen távoli pont volt megadva), Descartes-féle koordinátákkal nem írható fel.

17. Az előző feladatok alapján:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 5 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után egyszerűsítve $9x_1+11x_2+7x_3=0$, amely Descartes-féle koordinátákban a $9x+11y+7=0$ egyenes.

18. Homogén koordinátákban egy 3×3-as formális determinánst használunk. Ennek az első sora az u_1, u_2, u_3 szimbólumokból, a további két sora a megadott egyenesek 2, 1, 1 és 3, 4, 1 homogén koordinátáiból (az egyenletekben szereplő együtthatókból) áll. Ezt kell az első sor szerint kifejteni és az egyenespár által adott sugársor egyenletét kapjuk. Az ebben szereplő együtthatók lesznek a két egyenes metszéspontjának homogén koordinátái.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $3u_1-u_2-5u_3=0$ a sugársor egyenlete, a [3, -1, -5] számhármas a metszéspont koordinátahármasa.

19. Az előző feladat alapján:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $24u_1-20u_2-27u_3=0$ a sugársor egyenlete, a [24, -20, -27] számhármas a metszéspont koordinátahármasa.

20. Az előző feladat alapján:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után $u_3=0$ a sugársor egyenlete, a [0, 0, 1] számhármas a metszéspont koordinátahármasa. (Két origón áthaladó egyenes volt megadva és az általuk megadott sugársort írtuk fel, így várható volt, hogy a metszéspont az origó lesz.)

21. Az előző feladatok alapján:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 5 & -6 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

A kifejtés után egyszerűsítve $9u_1+11u_2+7u_3=0$ a sugársor egyenlete, a [9, 11, 7] számhármas a metszéspont koordinátahármasa.

A 14.-17. és 18.-21. feladatok (a megfogalmazásokat tekintve) egymás duálisai. Az első csoportban két pontra illeszkedő egyenest, a második csoportban két egyenesre illeszkedő pontot kellett megadni. A megoldások menete szinte teljesen megegyezik, tulajdonképpen ugyanazokat a formális determinánsokat használtuk fel, csak a kapott értékeket kellett másként értelmezni.

22. Homogén koordinátákban egy 3×3-as mátrixot használunk. Ennek sorai a megadott pontok 2, 1, 1 ; 3, 4, 1 és 5, 6, 1 homogén koordinátáiból állnak. A mátrix determinánsát kell kiszámolni. Ha a kapott érték 0, akkor a három pont egy egyenesre illeszkedett.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

A kapott érték –4, ezért a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

23. Az előző feladat alapján a mátrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 8 & 11 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

A pontok egy egyenesre illeszkednek.

24. Az előző feladat alapján a mátrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

A kapott érték 6, ezért a pontok nem illeszkednek egy egyenesre.

25. Homogén koordinátákban egy 3×3-as mátrixot használunk. Ennek sorai a megadott egyenesek 2, 1, 1 ; 3, 4, 1 és 5, 6, 1 homogén koordinátáiból állnak. A mátrix determinánsát kell kiszámolni. Ha a kapott érték 0, akkor a három sugársort alkot, vagyis egy pontra illeszkedik.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

A kapott érték –4, ezért a három egyenes nem alkot sugársort.

26. Az előző feladat alapján a mátrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 8 & 11 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

Az egyenesek sugársort alkotnak.

27. Az előző feladat alapján a mátrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

A kapott érték 6, ezért a három egyenes nem alkot sugársort.

A 22.-24. és 25.-27. feladatok (a megfogalmazásokat tekintve) egymás duálisai. Az első csoportban három pontról azt kellett eldönteni, hogy egy egyenesre illeszkednek-e, a második csoportban pedig három egyenesről azt, hogy egy pontra illeszkednek-e. A megoldások menete szinte teljesen megegyezik, tulajdonképpen ugyanazokat a mátrixokat használtuk fel, csak a kapott értékeket kellett másként értelmezni.

28. A pontok koordinátáiból egy 3×3-as mátrix képezhető, melynek a determinánsa 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

A determináns számolása során λ-ra egy lineáris egyenletet kapunk, ennek a megoldása: $\lambda = -{}^{34}\!/_{5}$.

29. A pontok koordinátáiból egy 3×3-as mátrix képezhető, melynek a determinánsa 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A determináns számolása során λ-ra egy lineáris egyenletet kapunk, ennek a megoldása: $\lambda = -{}^{3}\!/_{2}$

30. Az egyenesek koordinátáiból egy 3×3-as mátrix képezhető, melynek a determinánsa 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

A determináns számolása során λ-ra egy lineáris egyenletet kapunk, ennek a megoldása: $\lambda = -\frac{34}{5}$. (Ez a feladat a 28. duálisa.)

35. Az egyenesek koordinátáiból egy 3×3-as mátrix képezhető, melynek a determinánsa 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A determináns számolása során λ-ra egy lineáris egyenletet kapunk, ennek a megoldása: $\lambda = -\frac{3}{2}$. (Ez a feladat a 29. duálisa.)

36. A két pontra illeszkedő egyenes homogén koordinátás egyenlete a formális determináns felhasználásával:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A $-3x_1-x_2+5x_3=0$ egyenletet kielégítő számhármasok megoldások lehetnek. Ebben pl. az x_1 és x_2 értékét szabadon megadhatjuk, de az x_3-at már az egyenlet felhasználásával lehet megadni. Egy lehetséges megoldás az $x_1=25$, $x_2=5$, $x_3=16$.

37. Az előző feladat alapján a pontok által adott egyenes egyenlete: $-3x_1-x_2+5x_3=0$. A végtelen távoli pont koordinátáira $-3x_1-x_2=0$ teljesül. $\rightarrow V_\infty[1, -3, 0]$.

38. A két pontra illeszkedő egyenes homogén koordinátás egyenlete a formális determináns felhasználásával:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & -2 & -11 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A $13x_1-7x_2+6x_3=0$ egyenletet kielégítő számhármasok megoldások lehetnek. Ebben pl. az x_1 és x_2 értékét szabadon megadhatjuk, de az x_3-at már az egyenlet felhasználásával lehet megadni. Egy lehetséges megoldás az $x_1=0$, $x_2=6$, $x_3=6$.

39. A korábban leírt lépéseket alkalmazva az AB egyenes egyenlete $9x_1+13x_2-5x_3=0$. Ezt az egyenest kell elmetszeni a megadott egyenessel. A metszéspont koordinátái: [8, 11, -43] .

40. A két egyenes által meghatározott sugársor egyenlete a formális determináns segítségével felírható.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

A $-3u_1-u_2+5u_3=0$ egyenletben a [-3, -1, 5] két egyenes metszéspontjának a koordinátái. Minden olyan egyenes megoldás lehet, amelyre ez a metszéspont illeszkedik. Ilyen egyenes u_1, u_2 koordinátái szabadon választhatók, de ekkor az u_3-t már az egyenlet alapján kell meghatározni. A $25x_1+5u_2+16u_3=0$ egy lehetséges megoldás. (A feladat a 32. duálisa.)

41. Az előző feladat alapján a két egyenes metszéspontja: M[-3, -1, 5]. Az M és origó összekötő egyenese: $-x_1+3x_2=0$. (A feladat a 33. duálisa.)

42. A két egyenes által meghatározott sugársor egyenlete a formális determináns segítségével felírható.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 4 & -2 & -11 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

A $13x_1-7x_2+6x_3=0$ egyenletben a [13, -7, 6] két egyenes metszéspontjának a koordinátái. Minden olyan egyenes megoldás lehet, amelyre ez a metszéspont illeszkedik. Az ilyen egyenes u_1, u_2 koordinátái szabadon választhatók, de ekkor az u_3-t már az egyenlet alapján kell meghatározni. A $6u_2+7u_3=0$ egy lehetséges megoldás. (A feladat a 34. duálisa.)

43. A korábban leírt lépéseket alkalmazva a két egyenes metszéspontja [9, 13, -5]. Ezt a pontot kell összekötni a P ponttal. Az egyenes egyenlete: $8x_1+11x_2-43x_3=0$. (A feladat a 35. duálisa.)
44. Az tudjuk, hogy ha két egyenes párhuzamos egymással, akkor a projektív síkon közös a végtelen távoli pontjuk. Emiatt a keresett egyenes egyenlete Descartes-féle-koordinátákkal felírva: $4x+2y+A=0$. (Az A még ismeretlen.) Ennek az egyenesnek a másik két egyenessel sugársort kell alkotnia, ezért

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & A \end{vmatrix} = 0$$

A-ra lineáris egyenletet kapunk, melynek a megoldása $A=6$. A keresett egyenes ez alapján $4x+2y+6=0$.

45. Az AB pontok egyenesének az irányvektora: (-5,1). Ez alapján az egyenes végtelen távoli pontja: $V_\infty[-5, 1, 0]$. PV_∞ pontok egyenese $x_1+5x_2-13x_3=0$.

46. Az tudjuk, hogy ha két egyenes párhuzamos egymással, akkor a projektív síkon közös a végtelen távoli pontjuk. Emiatt a keresett egyenes egyenlete Descartes-féle-koordinátákkal felírva: $4x+2y+A=0$. (Az A még ismeretlen.) Ennek az egyenesnek a másik két egyenessel sugársort kell alkotnia, ezért

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & A \end{vmatrix} = 0$$

A-ra lineáris egyenletet kapunk, melynek a megoldása $A=\frac{13}{7}$. A keresett egyenes ez alapján $3x+2y+\frac{13}{7}=0$. (Skalárral szorozva: $21x+14y+13=0$.)

47. Az egyenesek metszéspontjának homogén koordinátái: [-3,-5, 1]. A sugársor origón áthaladó eleme. $-5x_1+3x_2=0$. Ezt kell elmetszeni a megadott egyenessel és a kapott metszéspont: [-3,-5, 19].

Osztóviszony

44. Felhasználjuk, hogy az osztóviszony értékét a párhuzamos vetítés nem változtatja meg. Ekkor a pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'(4), B'(-2), C'(-14) pontokat kapjuk. Az *x* tengelyt számegyenesként fogjuk kezelni. Ez alapján a keresett osztóviszony: (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{-18}{-12}=\frac{3}{2}$.
(Megmutatható, hogy az *y* tengelyre vetítve ugyanezt az osztóviszony kapjuk. A"(2), B"(3), C"(5) felhasználásával (ABC)=(A"B"C"):=$\frac{A''C''}{B''C''}=\frac{3}{2}$.)
45. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'(2), B'(-3), C'(-13) pontokat kapjuk. Ez alapján a keresett osztóviszony: (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{-15}{-10}=\frac{3}{2}$.
46. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'(2), B'(-3) pontokat kapjuk. C'(c_1) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{c_1-2}{c_1+3}=-1$. Ekkor $c_1=-\frac{1}{2}$. A pontokat az *y* tengelyre vetítve az A"(1), B"(4) pontokat kapjuk. C"(c_2) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A"B"C"):=$\frac{c_2-1}{c_2-4}=-1$. Ekkor $c_2=\frac{5}{2}$. Az így kapott C($-\frac{1}{2},\frac{5}{2}$)→[-1, 5, 2] pont éppen a felezési pontja az AB szakasznak.
47. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'(2), B'(-3) pontokat kapjuk. C'(c_1) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{c_1-2}{c_1+3}=\frac{3}{4}$. Ekkor c_1=17. A pontokat az *y* tengelyre vetítve az A"(1), B"(4) pontokat kapjuk. C"(c_2) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A"B"C"):=$\frac{c_2-1}{c_2-4}=\frac{3}{4}$. Ekkor c_2=-8. C(17,-8) →[17, -8, 1].
48. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'(2), B'(-3) pontokat kapjuk. C'(c_1) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{c_1-2}{c_1+3}=\frac{7}{3}$. Ekkor $c_1=-\frac{27}{4}$. A pontokat az *y* tengelyre vetítve az A"(1), B"(4) pontokat kapjuk. C"(c_2) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A"B"C"):=$\frac{c_2-1}{c_2-4}=\frac{7}{3}$. Ekkor $c_2=\frac{25}{4}$. C($-\frac{27}{4},\frac{25}{4}$)→[-27, 25, 4].
49. Az 50. feladat alapján a keresett pont éppen a felezési pont lesz, azaz C($\frac{7}{6},-\frac{5}{6}$)→[7, -5, 6].
50. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'($\frac{4}{3}$), B'(1) pontokat kapjuk. C'(c_1) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{c_1-\frac{4}{3}}{c_1-1}=\frac{3}{4}$. Ekkor $c_1=\frac{7}{3}$. A pontokat az *y* tengelyre vetítve az A"($-\frac{2}{3}$), B"(-1) pontokat kapjuk. C"(c_2) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A"B"C"):=$\frac{c_2+\frac{2}{3}}{c_2+1}=\frac{3}{4}$. Ekkor $c_2=\frac{1}{3}$. C($\frac{7}{3},\frac{1}{3}$)→[7, 1, 3].
51. A pontokat az *x* tengelyre vetítve az A'($\frac{4}{3}$), B'(1) pontokat kapjuk. C'(c_1) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A'B'C'):=$\frac{c_1-\frac{4}{3}}{c_1-1}=\frac{7}{3}$. Ekkor $c_1=\frac{3}{4}$. A pontokat az *y* tengelyre vetítve

az A”($-\frac{2}{3}$), B”(-1) pontokat kapjuk. C”(c_2) a keresett pont vetülete. (ABC)=(A”B”C”):=$\frac{c_2+\frac{2}{3}}{c_2+1}=\frac{7}{3}$. Ekkor $c_2=-\frac{5}{4}$. C($\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{4}$)→[3, -5, 4].

52. A korábbi feladatok alapján M[-4, -5, 5] és N[1, 1, 7]. Az osztóviszonynak megfelelő P pont koordinátái [38, 45, 35].

Kettősviszony

53. A definíciót használjuk fel. $(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}=\frac{8}{3}\cdot\frac{15}{20}=2$. A további értékek (ABDC)= $1/2$, (CDAB)=-1, (ACBD)=2.
54. A kettősviszony értékét a középpontos vetítés, ezen belül is a párhuzamos vetítés, nem változtatja meg. A pontokat az x tengelyre vetítve A'(0), B'(1), C'(2), D'(-2).
$$(ABCD)=(A'B'C'D')=\frac{(A'B'C')}{(A'B'D')}=\frac{A'C'}{B'C'}\cdot\frac{B'D'}{A'D'}=\frac{2}{1}\cdot\frac{-3}{-2}=3$$
55. (ABC)= $3/13$. Ekkor a kettősviszony definíciója alapján (ABD)= $-\frac{1}{13}$. Ekkor a D koordinátájára $\frac{d-4}{d+6}=-\frac{1}{13}$, melynek a megoldása: d= $23/7$.
56. A pontokat az y tengellyel párhuzamosan az x tengelyre vetítjük. A'(2), B'($1/3$), C'($-1/2$), D'(-3). Ez alapján (ABCD)=2.
57. A D pont az egyenes végtelen távoli pontja, ezért definíció szerint $(ABCD_\infty)$=(ABC) A pontokat az x tengelyre vetítve A'(2), B'(1), C'($7/5$) a keresett érték: (ABC)= $-3/2$.
58. A megadott végtelen távoli pontokat egy véges helyzetű pontból vetíteni kell egy közönséges egyenesre. A vetítés középpontja lehet az origó, az egyenes pedig az y=1 egyenes. Ekkor az A'(2,1), B'(-3,1), C'($1/3$,1), D'($-8/6$,1). (ABCD)=(A'B'C'D')= $1/4$.
59. A pontokat az y tengellyel párhuzamosan az x tengelyre vetítjük. Ekkor A' az x tengely végtelen távoli pontja lesz, B'(0) és D'(½) koordinátájú pontok. Az adott kettősviszony:
$(A_\infty BCD)=(A'_\infty B'C'D')=\frac{A'_\infty C'}{B'C'}:\frac{A'_\infty D'}{B'D'}=\frac{B'D'}{B'C'}=2$. Ebből B'D'=2·B'C', azaz ½=2·c_1.
A keresett C pont első koordinátája c_1=¼. A második koordinátája pedig c_2=1, mivel maga az egyenes y=1. $\rightarrow$C[1,4,4].
60. Az (ABC)=3. Ez alapján (ABD)= $3/8$. Az A, B, D pontokat az x és y tengelyre is vetítve A'(-1, 0), B'($1/2$, 0), D'(d_1, 0) és A''($0,-3/2$), B''(0, $-1/2$), D''(0, d_2). Az osztóviszony értékének felhasználásával d_1 és d_2 kiszámolható, D[14, 1, 10].
61. Az A, B, C pontok egy egyenesen vannak, ezért a koordinátáikból képzett mátrix determinánsa 0. Ebből x=4. A pontokat az x tengelyre vetítve az A', B', C' pontokat kapjuk. Az (ABC)=(A'B'C')= $-1/2$. A kettősviszony definíciója alapján az (ABD)= $1/3$. A pontokat nemcsak az x, hanem az y tengelyre is vetítjük, ekkor A''(0, $1/2$), B''(0, -2), D''(0, d_2). A D pont (d_1, d_2) koordinátái a $\frac{d_1-1/2}{d_1-1}=\frac{1}{3}$ és $\frac{d_2+3/4}{d_2+2}=\frac{1}{3}$ összefüggésekből kiszámíthatóak. D($1/4, -1/8$), azaz [2, -1, 8].
62. Az egyeneseket az y=1 egyenessel elmetszve ($abcd$)=(ABCD)= $1/3$.
63. Az egyeneseket az y=0 egyenessel elmetszve ($abcd$)=(ABCD)= $-3/4$.
64. Az egyeneseket az y=0 egyenessel elmetszve ($abcd$)=$(ABCD_\infty)$=(ABC)=-1.
65. A megadott egyeneseket az y=0 egyenessel metszve a kapott pontok osztóviszonya –9. Ekkor a d egyenessel való metszéspontra (ABD)=-7. Ebből a D pont koordinátája az x tengelyen $3/4$. A sugársor sorozópontja: M[-4, 6, 5]. Ezt a D[3, 0, 4] ponttal összekötő egyenes: 24x+31y-18=0.
66. A három egyenes sugársort alkot, ezért a koordinátáiból képzett mátrix determinánsa 0. Ebből λ=4. A sugársor sorozópontja M[5, 2, 1].Az y=0 egyenessel metszve az a, b, c

egyeneseket a kettősviszonyuk 4. Az $(abd)=6$ lesz, ebből a d egyenesnek az x tengellyel való metszéspontja $-\frac{4}{5}$. Ezt az M ponttal a $-10x+21y-8=0$ egyenes köti össze.

67. Az A, B, C, D pontokat a P-vel összekötő egyeneseket az $y=0$ egyenessel elmetsszük. Ekkor az A'=A, B'=B, C'(½, 0), D'=D pontokat kapjuk. $(abcd)=(A'B'C'D')=-\frac{1}{2}$, $(abdc)=(A'B'D'C')=-2$, $(acbd)=(A'C'B'D')=4$.

Másodrendű görbék

Másodrendű görbe minősége, végtelen távoli pontok

Minden $a_{ik}x_ix_k=0$ másodrendű görbéhez egy mátrixot rendelünk hozzá, amely az a_{ik} értékeket tartalmazza. Ez a mátrix szimmetrikussá tehető, ha az a_{ik} és a_{ki} értékek helyére az $\frac{a_{ik}+a_{ki}}{2}$ értéket írjuk. A továbbiakban ezt a mátrixot fogjuk használni.

Definíció

Egy másodrendű görbe *minőség*én a valós, végtelen távoli pontjainak számát értjük

Egy másodrendű görbe *elliptikus*, ha nincs valós, végtelen távoli pontja.

Egy másodrendű görbe *parabolikus*, ha egy valós, végtelen távoli pontja van.

Egy másodrendű görbe *hiperbolikus*, ha két valós, végtelen távoli pontja van.

Analitikus jellemzéssel:

Egy másodrendű görbe *elliptikus*, ha mátrixában $|A_{33}|>0$.

Egy másodrendű görbe *parabolikus*, ha mátrixában $|A_{33}|=0$.

Egy másodrendű görbe *hiperbolikus*, ha mátrixában $|A_{33}|<0$.

1. Az $5x^2-6xy+y^2-12x-12y-1=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3 & -6\\ -3 & 1 & -6\\ -6 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

Ebben $|A_{33}|=5-9=-4$. Mivel ez az érték negatív, ezért a görbe hiperbolikus.

A $6x^2-4xy+y^2+x+2y-12=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}6 & -2 & \frac{1}{2}\\ -2 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & -12\end{pmatrix}$$

Ebben $|A_{33}|=6-4=2$. Mivel ez az érték pozitív, ezért a görbe elliptikus.

A $x^2+6xy+9y^2-12x+6=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ 3 & 9 & 0\\ -6 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Ebben $|A_{33}|$=9-9=0. Mivel ez az érték zérus, ezért a görbe parabolikus.

2. Az $|A_{33}|=3-\lambda^2$. Ennek az értéknek pozitívnak kell lennie. Ez pedig csak akkor teljesül, ha $|\lambda|<\sqrt{3}$.
3. Az $|A_{33}|=\lambda-1$. Ennek az értéknek negatívnak kell lennie. Ez pedig csak akkor teljesül, ha $\lambda<1$.
4. Az $|A_{33}|=16-\lambda^2$. Ez az $|A_{33}|$ érték akkor pozitív, ha $-4<\lambda<4$, ekkor a görbe elliptikus. Az $|A_{33}|$ érték akkor zérus, ha $\lambda=-4$ vagy $\lambda=4$, ekkor a görbe parabolikus. Az $|A_{33}|$ érték akkor negatív, ha $\lambda<-4$ vagy $\lambda>4$, és ekkor a görbe hiperbolikus.
5. Az $5x^2-6xy+y^2-12x-12y-1=0$ görbe egyenlete homogén koordinátákban:

$$5x_1^2-6x_1x_2+x_2^2-12x_1x_3-12x_2x_3-x_3^2=0.$$

A végtelen távoli pontokat akkor kapjuk, ha $x_3=0$. Ekkor a végtelen távoli pont első két koordinátája kielégíti a következő egyenlet:

$$5x_1^2-6x_1x_2+x_2^2=0.$$

Szorzattá alakítva:

$$(5x_1-x_2)(x_1-x_2)=0.$$

A $V_{1\infty}$ pontot az $5x_1-x_2=0$-ból kapjuk, $V_{1\infty}[1, 5, 0]$.

A $V_{2\infty}$ pontot az $x_1-x_2=0$-ból kapjuk, $V_{2\infty}[1, 1, 0]$.

Mindezt visszafelé is végig lehet gondolni. Ha adott két végtelen távoli pont: $V_{1\infty}[A, B, 0]$ és $V_{2\infty}[C, D, 0]$, melyek egy hiperbolikus görbére illeszkednek, akkor a koordinátáiknak ki kell elégítenie a

$$(Bx_1-Ax_2)(Dx_1-Cx_2)=0$$

egyenletet. Vagyis a két adott végtelen távoli pontra illeszkedő hiperbolikus másodrendű görbék első három tagja: $BDx_1^2-(AD+BC)x_1x_2+ACx_2^2$.

Az $6x^2-4xy+y^2+x+2y-12=0$görbe egyenlete homogén koordinátákban:

$$6x_1^2-4x_1x_2+x_2^2+x_1x_3+2x_2x_3-12x_3^2=0.$$

A végtelen távoli pontokat akkor kapjuk, ha $x_3=0$. Ekkor a végtelen távoli pont első két koordinátája kielégíti a következő egyenlet:

$$6x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=0.$$

Ez nem alakítható szorzattá, ezért nem tudunk valós végtelen távoli pontot számolni. Ez így helyes, mivel az 1. feladatban láttuk, hogy ez a görbe elliptikus.

Az $x^2+6xy+9y^2-12x+6=0$ görbe egyenlete homogén koordinátákban:

$$x_1^2+6x_1x_2+9x_2^2-12x_1x_3+6x_3^2=0.$$

A végtelen távoli pontokat akkor kapjuk, ha $x_3=0$. Ekkor a végtelen távoli pont első két koordinátája kielégíti a következő egyenlet:

$$x_1^2+6x_1x_2+9x_2^2=0.$$

Szorzattá alakítva:

$$(x_1+3x_2)^2=0.$$

A V_∞ pontot az $x_1+3x_2=0$-ból kapjuk, $V_\infty[-3, 1, 0]$. Egy végtelen távoli pontot kaptunk, igaz, ez kétszeres megoldása a feladatnak. Az 1. feladatban láttuk, hogy ez a görbe parabolikus, tehát nincs is több valós végtelen távoli pont.

Mindezt visszafelé is végig lehet gondolni. Ha adott egy végtelen távoli pont: $V_\infty[A, B, 0]$, mely egy parabolikus görbére illeszkedik, akkor a koordinátáinak ki kell elégítenie a

$$(Bx_1-Ax_2)^2=0.$$

egyenletet. Vagyis az adott végtelen távoli pontra illeszkedő parabolikus másodrendű görbék első három tagja: $B^2x_1^2-2ABx_1x_2+A^2x_2^2$.

6. Az 5. feladat alapján a $P_{1\infty}[A, B, 0]$ és $P_2[C, D, 0]$ pontokra illeszkedő hiperbolikus másodrendű görbék egyenletének első három tagja: $BDx_1^2-(AD+BC)x_1x_2+ACx_2^2$. Ez alapján $-x_1^2-x_1x_2+2x_2^2+\ldots=0$ alakúak a keresett egyenletek.
7. Az 5. feladat alapján a $P[A, B, 0]$ pontra illeszkedő parabolikus másodrendű görbék egyenletének első három tagja: $B^2x_1^2-2ABx_1x_2+A^2x_2^2$. Ez alapján $4x_1^2-4x_1x_2+x_2^2+\ldots=0$ alakúak a keresett egyenletek.
8. A görbe akkor elfajuló, ha mátrixának a determinánsa zérus. Ebből $a_{33}=-{}^{19}\!/_{5}$.
9. A görbe mátrixának determinánsa $-3\lambda^2-4$. Ez bármilyen λ esetén negatív érték, ezért nincs olyan λ, melyre parabolikus görbét kapnánk.
10. Két egyenletet kell egyszerre figyelni. Az egyik abból adódik, hogy parabolikus görbét szeretnénk kapni, vagyis $|A_{33}|=0$. A másik, hogy a görbe elfajuló legyen, azaz a mátrixának a determinánsa legyen 0. Ennek a megoldása: $\lambda=1$ és $\mu=-1$. A görbe: $4x^2-8xy+4y^2-2x+2y+2=0$. (Az ilyen görbe egybeeső egyenespár.)

Másodrendű görbe és egyenes közös pontjai

11. Térjünk át homogén koordinátákra. Az adott pontok: P[1, 1, 1], Q[2, -1, 1] és a görbe egyenlete: $2x_1^2+6x_1x_2+4x_2^2-12x_1x_3+6x_2x_3-x_3^2=0$. A PQ egyenes minden pontjának homogén koordinátái a P és Q pontok koordinátáiból lineáris kombinációval kaphatók meg. Ha oszlopmátrixokkal írjuk fel, akkor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ebben az esetben λ_1 és λ_2 nem lehet egyszerre zérus. Ha a PQ egyenesnek van közös pontja az adott görbével, akkor a közös pont is a fenti módon fejezhető ki a P és Q pontokból. A görbe homogén koordinátás alakjában a következő helyettesítéseket kell elvégezni:

$$x_1=\lambda_1+2\lambda_2$$
$$x_2=\lambda_1-\lambda_2$$
$$x_3=\lambda_1+\lambda_2$$

Ekkor a λ_1 λ_2 számpárra kapunk egy homogén másodfokú egyenletet:

$$5\lambda_1^2-32\lambda_1\lambda_2-31\lambda_2^2=0.$$

Ennek két megoldása van, mert a diszkrimináns negatív. A két megoldást a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ vagy a $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ arányra lehet kiszámolni.

12. Az előző feladat megoldásával azonos menetet választva a görbe homogén koordinátás alakjába a következő helyettesítést kell elvégezni:

$$x_1=5\lambda_1+3\lambda_2$$
$$x_2=2\lambda_1$$
$$x_3=\lambda_1+\lambda_2$$

Ezután a λ_1 λ_2 számpárra olyan egyenletet kapunk, melyben az együtthatók mindegyike zérus, vagyis bármely λ_1 λ_2 számpár megoldása. Az egész PQ egyenes a másodrendű görbéhez tartozik.

13. Könnyen ellenőrizhető, hogy az A és B pontok illeszkednek a görbére. Ha az AB egyenes egy tetszőleges pontja illeszkedik a görbére, akkor az egyenes a görbe része. Ilyen pont lehet akár az AB szakasz $F(3/2,1)$ felezési pontja. Az F pont koordinátái is kielégítik a görbe egyenletét, ezért az egyenes a görbéhez tartozik.

(Az előző feladatok alapján is megoldható a feladat.)

Konjugált pontok, pólus-poláris kapcsolat

14. Az adott görbe homogén koordinátás alakja:

$$2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - 7x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 = 0.$$

Ezt tovább bontjuk a görbe mátrixának megfelelően:

$$2x_1x_1 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - \tfrac{1}{2}x_2x_1 - x_2x_2 - \tfrac{7}{2}x_1x_3 - \tfrac{7}{2}x_3x_1 - x_2x_3 - x_3x_2 + 3x_3x_3 = 0.$$

Minden tagban az első ismeretlen helyére a P, a második ismeretlen helyére a Q koordinátáit írjuk. (Nagyon fontos minden tagban az ismeretlenek sorrendje!) A helyettesítések után a kapott érték -½. Vagyis a két pont nem konjugált egymáshoz.

Mindezt mátrixokkal is megadhatjuk. A másodrendű görbe mátrixát felhasználva a görbe a következő alakú:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{7}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ha a P és Q konjugáltak lennének, akkor a sormátrixba a P, az oszlopmátrixba a Q koordinátáit írva 0-t kellene kapni. Ez most nem teljesül.

Ha csak a P koordinátáit helyettesítjük, akkor

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{7}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

egy egyenes egyenletét adja, melyet a P-hez konjugált pontok koordinátái (és csak azok) elégítenek ki. A számításokat elvégezve ez az egyenes a –x-y+3=0, melyet a P pont polárisának nevezünk.

15. Az előző feladat gondolatmenetét követve a helyettesítés értéke 33, vagyis a két pont nem konjugált egymáshoz.

16. A görbe minden pontja önmagához konjugált pont, ezért ezt P-nek is teljesítenie kell.

$$\begin{pmatrix} 2 & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

A mátrixokat összeszorozva y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk. Ennek a megoldása 2 és 4.

17. Ekkor a P pontnak illeszkednie kell a Q pont polárisára. A Q polárisa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

azaz a –3x-5y+1=0 egyenes. Erre az egyenesre akkor illeszkedik a P pont, ha x=-3.

18. A keresett pont legyen Q. Ekkor az (ABPQ)=-1. A keresett Q pont koordinátái: ($\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$).

19. A korábbi eljárást alkalmazva azt kapjuk, hogy a P ponthoz a sík minden pontja konjugált az adott görbére nézve. Az ilyen tulajdonságú pontot szinguláris pontnak nevezzük.

20. A P polárisa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

azaz 3x-5y+3=0.

21. A görbe mátrixát felhasználva:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

az (u_1, u_2, u_3) számhármas az [x_1, x_2, x_3] pont polárisának koordinátahármasa, amely most (2,-3, -2). Ezt beírva [x_1, x_2, x_3]-ra egy lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$2x_1-2x_2-x_3=2$$

$$-2x_1+x_2=-3$$

$$-x_1+6x_3=-2$$

Ennek a megoldása (a megoldás egy pont valamely homogén koordinátahármasa): [2, 1, 0]. Mivel a kapott pont végtelen távoli pont, a megadott egyenes átmérőegyenes volt.

22. A P polárisa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

azaz 11x+3y-4=0. Mivel végtelen távoli pont polárisát határoztuk meg, ezért a kapott egyenes a görbe egy átmérőegyenese.

23. A görbe mátrixát felhasználva:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

az (u_1, u_2, u_3) számhármas az [x_1, x_2, x_3] pont polárisának koordinátahármasa, amely most (9,-2, -12). Ezt beírva [x_1, x_2, x_3]-ra egy lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$x_1+3x_2+x_3=9$$

$$3x_1-x_2-2x_3=-2$$

$$x_1-2x_2+5x_3=-12$$

Ennek a megoldása (a megoldás egy pont valamely homogén koordinátahármasa): [1, -17, 5].

24. A P polárisa:

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

azaz 3x+1=0. ($x=-\frac{1}{3}$)

A megadott görbe egy origó középpontú képzetes kör, melynek a valós reprezentánsa az $x^2+y^2-1=0$ kör. Az előbbi P pont polárisa erre a valós körre nézve 3x-1=0, vagyis $x=\frac{1}{3}$. A két poláris (mármint a képzetes és valós körre vett polárisok) egymás tükörképei az origóra nézve.

Ha az $x^2+y^2-1=0$ körre vonatkozólag a P ponthoz az $x=-\frac{1}{3}$ egyenest (vagyis a poláris egyenesének a középpontra való tükörképét) rendeljük hozzá, akkor pólus-antipoláris kapcsolatról beszélünk.

25. A korábbi feladatok alapján a pont [3, -4, 5].

26. Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipszis fókuszai a $F_1(-c, 0)$ és $F_2(c, 0)$ pontok, ahol $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Az F_1 polárisa $x=\frac{a^2}{c}$ és F_2 polárisa $x=-\frac{a^2}{c}$. Ezek éppen a direktrixek.

Az $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbola fókuszai a $F_1(-c, 0)$ és $F_2(c, 0)$ pontok, ahol $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Az F_1 polárisa $x=\frac{a^2}{c}$ és F_2 polárisa $x=-\frac{a^2}{c}$. Ezek éppen a direktrixek.

Az $y^2=2px$ parabola fókusza az $F(\frac{p}{2},0)$ pont. Az F pont polárisa az $x=-\frac{p}{2}$. Ez éppen a direktrix egyenlete.

27. Az *e* egyenes E pólusa olyan tulajdonságú, hogy az *e* egyenes minden pontjához konjugált. Ebből az következik, hogy a P tetszőleges pontja az *e* egyenesnek, akkor annak *p* polárisa áthalad az E póluson. Ezért az *e* minden pontjának a polárisa át fog haladni az e ponton, vagyis sugársort alkotnak.

28. Legyen az $A[a_i]$ (i=1, 2, 3) pont a egyenesen bevezetett koordinátarendszer végtelen távoli pontja, míg a $B[b_i]$ pont a kezdőpontja. Ekkor az egyenes minden pontjához (λ_1, λ_2) számpárokat rendelünk, így a C pont koordinátáira $c_i=\lambda_1 a_i+\lambda_2 b_i$ teljesül.

A görbe mátrixa (a_{ik}), ahol i,k=1, 2, 3.

Ekkor az A polárisának koordinátáira: $u_k=a_{ik}a_i$, a B polárisának koordinátáira $v_k=a_{ik}b_i$. A C polárisa ezek alapján $w_k=a_{ik}c_i=a_{ik}(\lambda_1 a_i+\lambda_2 b_i)=\lambda_1(a_{ik}a_i)+\lambda_2(a_{ik}b_i)$. A polárisok által alkotott sugársorban az egyes sugarakhoz ugyanazokat a (λ_1, λ_2) párokat rendeljük hozzá, mint az eredeti egyenesen a pólusaikhoz.

Az egyenesen bevezetett koordinátarendszert felhasználva az (ABCD) kettősviszony az A és B alappontokra vonatkozó koordinátákból kifejezhető. Ugyanezt mondhatjuk a sugársorban is, vagyis az (ABCD)=(*abcd*).

Másodrendű görbe érintője

29. Az $5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$ görbére az origó illeszkedik, ezért az itteni érintő éppen az O pont polárisa lesz. Ez az $x-2y=0$ egyenes.
30. A $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$ másodrendű görbére a $P(2,1)$ pont illeszkedik, tehát e P pont polárisa a keresett érintő. Az érintő egyenlete: $9x+10y-28=0$.
31. A $P(4,-2)$ pont polárisa: $4x+y-5=0$. Ez az egyenes a megadott $x^2-xy-y^2-2x+2y+1=0$ görbét két pontban metszi. A metszéspontok: $M[14, -1, 11]$ és $N[1, 1, 1]$. A keresett érintők a PM és PN egyenesek, melyek egyenlete: $7x+10y-8=0$ illetve $x+y-2=0$.
32. A két keresett érintő és a megadott $2x+2y-1=0$ egyenes közös végtelen távoli ponttal rendelkezik, melynek a koordinátái: $V_\infty[1, -1, 0]$. A V_∞ polárisa a $3x+y-4=0$ egyenes, amely az adott görbét az $M[1, 1, 1]$ és $N[7, -1, 5]$ pontokban metszi. A keresett érintők a $V_\infty M$ és $V_\infty N$ egyenesek, melyek egyenlete: $x+y-2=0$ illetve $5x+5y-6=0$.

Külső- és belső pont

33. Az adott a $4x^2+6xy-3y^2+2x+2y+1=0$ görbe nemelfajuló. A $P(1,1)$ pont polárisa $8x+y+3=0$. Ebből y-t kifejezve $y=-8x-3$, melyet a görbe egyenletébe helyettesítünk és ekkor x-re egy másodfokú egyenletet kapunk. Egyszerűsítéssel:

    $$59x^2+44x+8=0.$$

    Ennek az egyenletnek két megoldása van, mert a diszkriminánsa pozitív. Ez most azt jelenti, hogy a P pontból két valós érintő húzható a görbéhez, vagyis a pont külső pont.
34. Az adott az $x^2+2xy+y^2-4x+8y+7=0$ görbe nemelfajuló. A $P(2,3)$ pont polárisa $x+3y+5=0$. Ebből x-t kifejezve $x=-3y-5$, melyet a görbe egyenletébe helyettesítünk és ekkor y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk. Egyszerűsítéssel:

    $$y^2+10y+13=0.$$

    Ennek az egyenletnek két megoldása van, mert a diszkriminánsa pozitív. Ez most azt jelenti, hogy a P pontból két valós érintő húzható a görbéhez, vagyis a pont külső pont.
35. Az adott az $x^2+6xy-12x+4y-20=0$ görbe nemelfajuló. A $P(-2,1)$ pont polárisa $5x+4y+6=0$. Ebből x-t kifejezzük, majd azt a görbe egyenletébe helyettesítjük és ekkor y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk. Ennek a diszkriminánsa zérus, vagyis csak egy megoldása létezik. A poláris ez alapján érinti a görbét és ekkor a P pont a görbe pontja.
36. Az adott $2xy-2x+4y+5=0$ görbe nemelfajuló. A $P(1,1)$ pont polárisa $y=-2$. Ez az egyenes a görbét $M[-1, -4, 2]$ és $N[1, 0, 0]$ pontokban metszi. Ezért a P pont külső pont.
37. Az adott az $x^2+4xy+8y^2-10x-4y+1=0$ görbe nemelfajuló. A $P(9,0)$ pont polárisa $x+4y-11=0$. Az $x=11-4y$ helyettesítést elvégezve y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk. Egyszerűsítéssel:

    $$2y^2-2y+3=0.$$

    Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa negatív, vagyis a P polárisa nem metszi a görbét. P belső pont.

Centrum, átmérő

Definíció

Egy nemelfajuló másodrendű görbe centrumán a sík végtelen távoli egyenesének a pólusát értjük, amennyiben a pont véges helyzetű.

Például a parabola nem centrális görbe, mert ha a végtelen távoli egyenes pólusát szeretnénk meghatározni, akkor éppen a parabola végtelen távoli pontját kapnánk, amely nem rendelkezik a centrum szokásos tulajdonságaival.

Ha a görbe mátrixát használjuk, akkor a centrum homogén koordinátáira teljesül, hogy

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mindez a centrum Descartes-koordinátáira egy lineáris egyenletrendszer lesz:

$$a_{11}\cdot x+a_{21}\cdot y+a_{31}=0$$

$$a_{12}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{32}=0$$

38. A fent leírt egyenletrendszert kell megoldanunk.

a) A centrum koordinátáira felírt egyenletrendszer:

$$x+3y+4=0$$

$$3x+y+12=0$$

Ennek megoldása a C(-4, 0) pont.

b) A centrum koordinátáira felírt egyenletrendszer (mindkét egyenletet 2-vel megszorozva):

$$2x-y-5=0$$

$$-x+2y+1=0$$

Ennek megoldása a C(3, 1) pont.

c) A centrum koordinátáira felírt egyenletrendszer:

$$2x-2y-4=0$$

$$-2x+5y\quad=0$$

Ennek megoldása a $C(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$ pont.

d) A centrum koordinátáira felírt egyenletrendszer:

$$x-\ y-2=0$$

$$-x-3y-3=0$$

Ennek megoldása a $C(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ pont.

39. Ha a koordinátarendszer kezdőpontját eltoljuk a másodrendű görbe centrumába, akkor ez egy helyettesítéssel oldható meg. Ha $C(c_1, c_2)$ a görbe centruma, akkor az $x=x'+c_1$ és $y=y'+c_2$ helyettesítéseket kell elvégezni, majd a kapott egyenletet rendezni.

a) A $7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5=0$ görbe centruma C(2, 3). $x=x'+2$ és $y=y'+3$ helyettesítéssel:

$$7(x'+2)^2+4(x'+2)(y'+3)+4(y'+3)^2-40(x'+2)-32(y'+3)+5=0.$$

Összevonás után:

$$7x'^2+4x'y'+4y'^2-83=0.$$

(Amit észre kell venni, hogy az első három tag lényegében nem változik, de eltűnnek az x-es és y-os tagok.)

b) A $x^2-2xy+2x+2y+1=0$ görbe centruma C(1, 2). $x=x'+1$ és $y=y'+2$ helyettesítéssel:

$$(x'+1)^2-2(x'+1)(y'+2)+2(x'+1)+2(y'+2)+1=0.$$

Összevonás után:

$$x'^2-2x'y'+4=0.$$

c) A $6x^2-4xy+9y^2-4x-32y-6=0$ görbe centruma C(1, 2). $x=x'+1$ és $y=y'+2$ helyettesítéssel:

$$6(x'+1)^2-4(x'+1)(y'+2)+9(y'+2)^2-4(x'+1)-32(y'+2)-6=0.$$

Összevonás után:

$$6x'^2-4x'y'+9y'^2-40=0.$$

40. Az átmérő mindig centrumra illeszkedő egyenes lesz. Ezért a görbe centruma C[-9, 12, 14]. A C-re illeszkedő és az $x+2y-1=0$ egyenessel párhuzamos egyenes: $14x+28y-15=0$.

41. Az $x^2+4xy+4y^2-2x+6y=0$ másodrendű görbe parabolikus, ezért az átmérői tartalmazzák a görbe $V_\infty[2, -1, 0]$ végtelen távoli pontját. Ezért az adott egyenesnek is tartalmaznia kell, ez pedig a $\lambda=4$ esetén teljesül.

42. Az $x+2y+2=0$ egyenes végtelen távoli pontja: $V_\infty[2, -1, 0]$. V_∞ polárisa az $x+1=0$ egyenes, amely az adott egyeneshez konjugált irányú. Az $x+1=0$ egyenes végtelen távoli pontja: $W_\infty[0, 1, 0]$. W_∞ polárisa az $x+2y-2=0$ egyenes, amely az adott egyenessel párhuzamos.

43. A $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ görbe centruma: C(7, 5). Ekkor az egyik átmérő a CO egyenes: $5x-7y=0$. Ennek a $V_\infty[7, 5, 0]$ végtelen távoli pontja. A CO egyeneshez konjugált átmérő a V_∞ polárisa: $2x+3y-29=0$.

44. Messük el az aszimptotákat és a konjugált átmérőket is a végtelen távoli egyenessel. Az aszimptoták és a végtelen távoli egyenes $A_{1\infty}$ és $A_{2\infty}$ közös pontjai egyben a hiperbola és a végtelen távoli egyenes közös pontjai. A konjugált átmérőpár M_∞ és N_∞ végtelen távoli pontjai konjugáltak egymáshoz. Ekkor a négy pont kettősviszonya: $(A_{1\infty}\, A_{2\infty}\, M_\infty N_\infty)=-1$. Ezért a velük perspektív helyzetben lévő egyenesek kettősviszonya szintén -1.

Másodrendű görbe tengelyei, kanonikus alak

45. A másodrendű görbe tengelyei egymásra merőleges konjugált átmérők. Ezeknek a meghatározásához szükségünk van az A_{33} mátrix sajátértékeihez tartozó sajátvektorokra. Ezek egymásra merőlegesek és egymáshoz konjugáltak, így éppen a tengelyek irányát adják. Mivel a sajátvektorok egy-egy végtelen távoli pontot határoznak meg, ezért ezen pontok polárisai lesznek a tengelyek és metszéspontjukként még a centrumot is megkaphatjuk.

a) Az $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ebből az $A_{33}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Az A_{33} felhasználásával a Laplace-féle egyenlet:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0.$$

Ez a $\lambda^2-2\lambda-8=0$. Ennek az egyenletnek a megoldásai lesznek a $\lambda_1=-2$ és $\lambda_2=4$ sajátértékek. A λ_1-hez tartozó $\underline{s}_1(u_1, v_1)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(1-(-2))\cdot u_1+(3)\cdot v_1=0$$

$$(3)\cdot u_1+(1-(-2))\cdot v_1=0.$$

Ebből $\underline{s}_1(1, -1)$.

A λ_2-höz tartozó $\underline{s}_2(u_2, v_2)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(1-4)\cdot u_2+(3)\cdot v_2=0$$

$$(3)\cdot u_2+(1-4)\cdot v_2=0.$$

Ebből $\underline{s}_2(1, 1)$. (Mindkét esetben egy-egy megoldásvektort választottunk, ugyanis ezeket bármely, zérustól különböző konstanssal szorozva újabb megoldásokat kapunk.)

Az $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ sajátvektorok a $V_{1\infty}[1, -1, 0]$ és $V_{2\infty}[1, 1, 0]$ végtelen távoli pontokat jelölik ki, melyek polárisai: $x-y-1=0$ és $x+y+1=0$ a görbe tengelyei.

b) Az $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -1 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 9\end{pmatrix}.$$

Ebből az $A_{33}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Az A_{33} felhasználásával a Laplace-féle egyenlet:

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0.$$

Ez a λ^2-2λ=0. Ennek az egyenletnek a megoldásai lesznek a $\lambda_1=0$ és $\lambda_2=2$ sajátértékek. A λ_1-hez tartozó $\underline{s}_1(u_1, v_1)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(1-0)\cdot u_1+(-1)\cdot v_1=0$$

$$(-1)\cdot u_1+(1-0)\cdot v_1=0.$$

Ebből $\underline{s}_1(1, 1)$.

λ_2-höz tartozó $\underline{s}_2(u_2, v_2)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(1-2)\cdot u_2+(-1)\cdot v_2=0$$

$$(-1)\cdot u_2+(1-2)\cdot v_2=0.$$

Ebből $\underline{s}_2(1, -1)$.

Ebben az esetben az egyik sajátérték zérus volt, ezért az ehhez tartozó sajátvektort most nem lehet felhasználni, ugyanis az általa kijelölt $V_{1\infty}[1, 1, 0]$ pont éppen a görbe végtelen távoli pontja, az adott görbe egy parabola. Az $\underline{s}_2$ sajátvektor a $V_{2\infty}[1, -1, 0]$ végtelen távoli pontot jelöli ki, ennek az x-y-1=0 polárisa lesz a tengely.

c) A $4x^2+6xy+4y^2-2y+1=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebből az $A_{33}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Az A_{33} felhasználásával a Laplace-féle egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

Ez a λ^2-8λ+7=0. Ennek az egyenletnek a megoldásai lesznek a $\lambda_1=1$ és $\lambda_2=7$ sajátértékek. A λ_1-hez tartozó $\underline{s}_1(u_1, v_1)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(4-(1))\cdot u_1+(3)\cdot v_1=0$$

$$(3)\cdot u_1+(4-(1))\cdot v_1=0$$

Ebből $\underline{s}_1(1, -1)$.

A λ_2-höz tartozó $\underline{s}_2(u_2, v_2)$ sajátvektor koordinátái kielégítik a következő összefüggést:

$$(4-7)\cdot u_2+(3)\cdot v_2=0$$

$$(3)\cdot u_2+(4-7)\cdot v_2=0$$

Ebből $\underline{s}_2(1, 1)$. (Mindkét esetben egy-egy megoldásvektort választottunk, ugyanis ezeket bármely, zérustól különböző konstanssal szorozva újabb megoldásokat kapunk.)

Az $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ sajátvektorok a $V_{1\infty}[1, -1, 0]$ és $V_{2\infty}[1, 1, 0]$ végtelen távoli pontokat jelölik ki, melyek polárisai: 2x-2y+3=0 és 14x+14y-3=0 a görbe tengelyei.

46. Az ax+by+c=0 és az $\alpha x+\beta y+\chi=0$ egyenesek végtelen távoli pontjai $V_{1\infty}[b, -a, 0]$ és $V_{2\infty}[\beta, -\alpha, 0]$. A másodrendű görbe mátrixa

$$A=\begin{pmatrix} a^2+\alpha^2 & ab+\alpha\beta & ac+\alpha\chi \\ ab+\alpha\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\chi \\ ac+\alpha\chi & bc+\beta\chi & c^2+\chi^2-1 \end{pmatrix}.$$

A $V_{1\infty}[b, -a, 0]$ polárisának koordinátái

$$u_1=b(\alpha^2+a^2)-a(ab+\alpha\beta)=\alpha^2 b-a\alpha\beta=\alpha(\alpha b-a\beta)$$

$$u_2=b(ab+\alpha\beta)-a(b^2+\beta^2)=\alpha\beta b-a\beta^2=\beta(\alpha b-a\beta)$$

$$u_3=b(ac+\alpha\chi)-a(bc-\beta\chi)=\alpha\chi b-a\beta\chi=\chi(\alpha b-a\beta).$$

Vagyis ez az egyenes éppen az $\alpha x+\beta y+\chi=0$. Hasonlóan igazolható, hogy a $V_{2\infty}[\beta, -\alpha, 0]$ polárisa pedig az $ax+by+c=0$. Ez alapján a két egyenes konjugált egymáshoz a görbére nézve. Az $a\alpha+b\beta=0$ feltétel miatt a két egyenes irányvektora egymásra merőleges, vagyis a két egyenes a görbe tengelye.

47. A sajátvektorokra a következő egyenleteket lehet felírni:

$$(a_{11}-1)\cdot 2+a_{12}\cdot(-3)=0$$

$$a_{21}\cdot 2+(a_{11}-1)\cdot(-3)=0$$

$$(a_{11}+4)\cdot 3+a_{12}\cdot 2=0$$

$$a_{21}\cdot 3+(a_{11}+4)\cdot 2=0.$$

Ezeket átrendezve:

$$2a_{11}+3a_{12}=2$$

$$2a_{21}-3a_{22}=-3$$

$$3a_{11}+2a_{12}=-12$$

$$3a_{21}+2a_{22}=-8.$$

Az egyenletrendszer megoldása után a mátrix:

$$\begin{pmatrix} -{}^{32}\!/_{13} & -{}^{30}\!/_{13} \\ -{}^{30}\!/_{13} & -{}^{7}\!/_{13} \end{pmatrix}.$$

48. Hozzuk kanonikus alakra a következő egyenleteket:

a) Az $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix}.$$

Az $A_{33}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ determinánsa 36-tal egyenlő, ezért a görbe elliptikus. A görbének létezik centruma, melynek koordinátáit az

$$5x+2y-16=0$$

$$2x+8y-28=0$$

egyenletrendszer megoldása adja: C(2,3).

Toljuk el a koordinátarendszer középpontját az C pontba. Ekkor az x=x'+2 és y=y'+3 helyettesítéssel az

$$5x'^2+4x'y'+8y'^2-36=0$$

egyenletet kaptuk. Mint azt korábban láttuk, ennek a műveletnek az eredménye az, hogy az első három tag együtthatója nem változott és az egyenletből eltűnt az x-es és y-os tag. Az A_{33} felhasználásával meghatározzuk a sajátértékeket: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$. Lineáris algebrából ismert, hogy ekkor létezik olyan lineáris transzformáció, melynek az lesz az eredménye, hogy a mátrix főátlójába a λ_1, λ_2 sajátértékek kerülnek, míg a többi elem 0 lesz. A főtengelytranszformáció után a görbe egyenlete:

$$4x''^2+9y''^2-36=0.$$

Átrendezve:

$$\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1,$$

amely egy ellipszis egyenlete.

A most végrehajtott transzformációk során a görbe mátrixa a következő változásokon ment át:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}.$$

b) A $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$ görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}.$$

Az $A_{33}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ determinánsa -9-cel egyenlő, ezért a görbe hiperbolikus. A görbének létezik centruma, melynek koordinátáit a

$$3y-6=0$$

$$3x+8y-13=0$$

egyenletrendszer megoldása adja: C(-1,2).

Toljuk el a koordinátarendszer középpontját az C pontba. Ekkor az x=x'-1 és y=y'+2 helyettesítéssel a

$$6x'y'+8y'^2-9=0$$

egyenletet kaptuk. Az A_{33} felhasználásával meghatározzuk a sajátértékeket: $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-1$. Lineáris algebrából ismert, hogy ekkor létezik olyan lineáris transzformáció, melynek az lesz az eredménye, hogy a mátrix főátlójába a λ_1, λ_2 sajátértékek kerülnek, míg a többi elem 0 lesz. A főtengelytranszformáció után a görbe egyenlete:

$$9x''^2-y''^2-9=0.$$

Átrendezve:

$$\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{9}=1,$$

amely egy hiperbola egyenlete.

c) Az x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0 görbe mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Az $A_{33}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ determinánsa 0-val egyenlő, ezért a görbe parabolikus. Mivel a görbe nem centrális, ezért először elforgatjuk a koordinátarendszert úgy, hogy a tengelyei párhuzamosak legyenek az A_{33} sajátértékeihez tartozó sajátvektorokkal. Ezután, ha szükséges, olyan eltolást végzünk, amely után az egyenletben nincs konstans tag és nem szerepel a négyzetes tagban szereplő változó első fokon.

Az A_{33} felhasználásával meghatározzuk a sajátértékeket: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_1(1, 1)$ és $\underline{s}_2(-1, 1)$. Ekkor az $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ által az *x* és *y* tengely egységvektora kifejezhető, ezért a következő helyettesítéseket hajtjuk végre:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Ennek az eredménye:

$$2x'^2-4\sqrt{2}\,x'+2y'+9=0.$$

Teljes négyzetté kiegészítés után a

$$2\left(y'+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4\sqrt{2}\left(x'-\sqrt{2}\right)=0$$

alakot kapjuk, amely megmutatja, hogy milyen eltolást kell végrehajtani. Az eltolás eredménye:

$$2y''^2-4\sqrt{2}\,x''=0.$$

Átrendezve:

$$y''^2=2\sqrt{2}\,x'',$$

amely egy parabola egyenlete.

Másodrendű görbe megadása öt adattal

49. Legyen a görbe mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} P & Q & S \\ Q & R & T \\ S & T & U \end{pmatrix}.$$

Ekkor a görbe egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$. Mivel a görbének van centruma, ezért $PR-Q^2 \neq 0$.

Az O(0, 0) pont illeszkedik a görbére, a koordinátái kielégítik az egyenletet. Az első öt tag mindenképen eltűnik, ebből az következik, hogy

$$U=0.$$

Az A(0, 1) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 0^2+2Q\cdot 0\cdot 1+R\cdot 1^2+2S\cdot 0+2T\cdot 1=0$$

Ebből

$$R+2T=0.$$

A B(1, 0) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 1^2+2Q\cdot 1\cdot 0+R\cdot 0^2+2S\cdot 1+2T\cdot 0=0$$

Ebből

$$P+2S=0.$$

A C(2, 3) centrumra vonatkozó feltételek:

$$P\cdot 2+Q\cdot 3+S=0$$
$$Q\cdot 2+R\cdot 3+T=0.$$

Öt feltételt kaptunk, amely hat ismeretlent tartalmaz. A megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy az ismeretlenek közül egynek értéket adunk, ekkor a többi már egyértelműen meghatározható. (A feladatnak ettől függetlenül egy görbe a megoldása, mivel ha az egyenletét egy zérustól különböző konstanssal szorozzuk, ugyanazt a görbét kapjuk.)

Legyen S=5, ekkor P=-10, Q=5, R=-4, T=2 és U=0. A keresett görbe tehát

$$-10x^2+10xy-4y^2+10x+4y=0.$$

50. Legyen a görbe mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} P & Q & S \\ Q & R & T \\ S & T & U \end{pmatrix}.$$

Ekkor a görbe egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$. Mivel a görbének van centruma, ezért $PR-Q^2 \neq 0$.

Az A(2, 3) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 2^2+2Q\cdot 2\cdot 3+R\cdot 3^2+2S\cdot 2+2T\cdot 3+U=0$$

Ebből

$$4P+12Q+9R+4S+6T+U=0.$$

A B(4, 2) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 4^2+2Q\cdot 4\cdot 2+R\cdot 2^2+2S\cdot 4+2T\cdot 2+U=0$$

Ebből

$$16P+16Q+4R+8S+4T+U=0.$$

A D(-1, -3) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot(-1)^2+2Q\cdot(-1)\cdot(-3)+R\cdot(-3)^2+2S\cdot(-1)+2T\cdot(-3)+U=0.$$

Ebből

$$P+6Q+9R-2S-6T+U=0.$$

A C(0, 1) centrumra vonatkozó feltételek:

$$A\cdot P+Q\cdot 1+S=0$$
$$Q\cdot 0+R\cdot 1+T=0.$$

Azaz

$$Q+S=0$$
$$R+T=0.$$

Öt feltételt kaptunk, amely hat ismeretlent tartalmaz. A megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy az ismeretlenek közül egynek értéket adunk, ekkor a többi már egyértelműen meghatározható.

Legyen S=1, ekkor P=0, Q=-1, R=0, T=0 és U=8. A keresett görbe tehát

$$-2xy+2x+8=0.$$

51. Legyen a görbe mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} P & Q & S \\ Q & R & T \\ S & T & U \end{pmatrix}.$$

Ekkor a görbe egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$.

Az A(0, 0) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 0^2+2Q\cdot 0\cdot 0+R\cdot 0^2+2S\cdot 0+2T\cdot 0+U=0$$

Ebből

$$U=0.$$

A B(0, 3) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 0^2+2Q\cdot 0\cdot 3+R\cdot 3^2+2S\cdot 0+2T\cdot 3 =0$$

Ebből

$$9R+6T=0.$$

A C(-2, 0) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot(-2)^2+2Q\cdot(-2)\cdot 0+R\cdot(-3)^2+2S\cdot(-2)+2T\cdot 0=0$$

Ebből

$$4P-4S=0.$$

A D(1, 1) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 1^2+2Q\cdot 1\cdot 1+R\cdot 1^2+2S\cdot 1+2T\cdot 1=0$$

Ebből

$$P+2Q+R+2S+2T=0.$$

Az E(1, 2) pont illeszkedik a görbére. A koordinátáit beírva az egyenletbe:

$$P\cdot 1^2+2Q\cdot 1\cdot 2+R\cdot 2^2+2S\cdot 1+2T\cdot 2=0$$

Ebből

$$P+4Q+4R+2S+4T=0.$$

Az utóbbi négy egyenlet öt ismeretlent tartalmaz. Ekkor a megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy az egyik ismeretlenek értéket adunk, és a többi már meghatározható.

Legyen T=-9, ekkor P=4, Q=0, R=6, S=4 és U=0. A keresett görbe tehát

$$4x^2+6y^2+8x-18y=0.$$

Meg kell vizsgálni, hogy az F pont illeszkedik-e a görbére. Az F pont koordinátáit behelyettesítve látható, hogy F nem illeszkedik a görbére.

52. Az előző feladatban meghatároztuk az öt pont által adott görbe egyenletét. Ebbe kell az F pont koordinátáit helyettesíteni. Ez az y koordinátára a $3y^2-9y-2=0$. Ennek a megoldása: $y_1 = \dfrac{9-\sqrt{105}}{6}$ és $y_2 = \dfrac{9+\sqrt{105}}{6}$.

53. Legyen a görbe mátrixa a következő:

$$\begin{pmatrix} P & Q & S \\ Q & R & T \\ S & T & U \end{pmatrix}.$$

Ekkor a görbe egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$.

Az A(0, 0) pont illeszkedik a görbére. Ebből:

$$U=0.$$

A B(1, 0) pont illeszkedik a görbére. Ebből:

$$P+2S=0.$$

A C(0, -3) pont illeszkedik a görbére. Ebből:

$$9R+6T=0.$$

A D(2, 7) pont illeszkedik a görbére. Ebből:

$$4P+28Q+49R+4S+14=0.$$

Az E(4, 1) pont illeszkedik a görbére. Ebből:

$$16P+8Q+R+8S+2T=0.$$

Az utóbbi négy egyenlet öt ismeretlent tartalmaz. Ekkor a megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy az egyik ismeretlenek értéket adunk, és a többi már meghatározható.

Legyen Q=17, ekkor P=-14, R=-16, S=7, T=24 és U=0. A keresett görbe tehát

$$-14x^2+34xy-16y^2+14x+48y=0.$$

54. A B(0, 3), C(6, 0), D(2, 2), E(4, 1) pontok egy egyenesre illeszkednek. Így nem mondhatjuk azt, hogy a megadott öt pont egyértelműen meghatároz egy másodrendű görbét. A B, C, D, E pontok egyenese $x+2y-6=0$, és ez az egyenes mindenképpen része a görbének. Az A pont nem illeszkedik erre az egyenesre, emiatt a görbe még egy egyenest fog tartalmazni, méghozzá az A-ra illeszkedő valamely egyenest. Ha ennek az egyenlete $mx-y=0$, akkor a keresett görbék egyenlete:

$$(x+2y-6)(mx-y)=0,$$

azaz

$$mx^2+(2m-1)xy-2y^2-6mx+6y=0.$$

55. A keresett görbe általános egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$. Mivel parabolikus görbét keresünk, ezért

$$PR-Q^2=0.$$

Az A(0, 7), B(1, 2), C(2, 1), D(7, 0) pontok illeszkednek a görbére, így rendre a következő egyenleteket kapjuk:

$$49R-14T+U=0$$

$$P+4Q+4R+2S+4T+U=0$$

$$4P+4Q+R+4S+2T+U=0$$

$$49P+14Sx+2Ty+U=0.$$

A fenti egyenletrendszer megoldása után két lehetséges görbét kapunk:

$x^2-2xy+y^2-12x-12y+35=0$, amely egy parabola egyenlete.

$x^2+2xy+y^2-10x-10y+21=0$, amely az $x+y-3=0$ és $x+y-7=0$ párhuzamos egyenesekből álló másodrendű görbéé.

56. A $D_\infty[1, 1, 0]$ a parabola végtelen távoli pontja. Az 5. feladat alapján ekkor a görbe egyenlete:

$$(x-y)^2+2Sx+2Ty+U=0,$$

azaz

$$x^2-2xy+y^2+2Sx+2Ty+U=0.$$

Erre kell a további pontokat illeszteni, ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$2S+U+1=0$$

$$2T+U+1=0$$

$$8S+2T+U+9=0.$$

Az egyenletrendszer megoldása után a parabola egyenlete:

$$x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0.$$

57. A parabola végtelen távoli pontja az $x-y=0$ egyenes végtelen távoli pontja: $[1, 1, 0]$. Az 5. feladat alapján ekkor a görbe egyenlete:

$$(x-y)^2+2Sx+2Ty+U=0,$$

azaz

$$x^2-2xy+y^2+2Sx+2Ty+U=0.$$

Erre kell a további pontokat illeszteni, ekkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$2S+2T+U=0$$

$$-2T+U+1=0$$

$$2T+U+1=0.$$

Az egyenletrendszer megoldása után a parabola egyenlete:

$$x^2-2xy+y^2+x-1=0.$$

58. Az $A(0, 0)$ és $B(1, -1)$ pontokat tükrözzük az adott $x+y+1=0$ egyenesre, a $D(-1, -1)$ és $E(0, -2)$ pontokat kapjuk. Ekkor öt pontra kell a görbe egyenletét felírni, amely (lásd az 53. feladatot!)

$$4x^2+2xy+4y^2-7x+8y=0.$$

59. Az $A(0, 1)$, $B(0, 0)$ pontokat tükrözzük a megadott tengelyre, ekkor a $C(-2, -1)$ és $D(-1, -1)$ pontok is illeszkednek a parabolára. Az 56. feladat menete szerint a parabola egyenlete:

$$x^2+2xy+x^2+5x-y=0.$$

60. Az ellipszis középpontja az F_1F_2 szakasz felezési pontja: C(2, 1). Az F_1P és F_2P távolságok összege a nagytengely hossza, amely 6-tal egyenlő. Ebből a=3, $c=F_1F_2=2\sqrt{2}$ és b=1. Abban a koordinátarendszerben, melynek a középpontja C és az x” tengely iránya megegyezik az $\overrightarrow{F_1F_2}$ (4, 4) vektoréval a görbe kanonikus egyenlete: $\frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{1}=1$, azaz $x''^2+9y''^2-9=0$. Ezért forgassuk el a koordinátarendszert -45°+kal, az így kapott tengelyek x’ és y’. A forgatás mátrixát felhasználva $x''=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ és $y''=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ helyettesítések után az egyenlet $5x'^2-8x'y'+5y'^2-9=0$ alakú. Ahhoz, hogy az x, y koordinátarendszerben kapjuk meg az ellipszis egyenletét, a tengelykeresztet vissza kell tolnunk az origóba. x’=x-2 és y’=y-1 helyettesítéssel az egyenlet: $5x^2-8xy+5y^2-12x+6=0$.

61. A parabola azon pontokból áll, melyek a fókusztól és a vezéregyenestől egyenlő távolságra vannak:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=\frac{|x+y-a|}{\sqrt{2}}.$$

(Az egyenlet jobb oldala abból adódik, hogy ha egy pontnak egy egyenestől való távolságát kell meghatározni, akkor a pont koordinátáit be kell helyettesíteni az egyenes normálegyenletébe és a kapott érték abszolút értékét kell vennünk. Az egyenes normálegyenletét úgy kapjuk, hogy az egyenletet elosztjuk a normálvektor hosszával.)

Négyzetre emelés és átrendezés utána parabola egyenlete:

$$x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+3a^2=0.$$

62. Tudjuk azt, hogy ha az F_1 fókuszból merőlegest állítunk az adott érintőre, akkor a kapott M pont illeszkedik a hiperbola főkörére. A főkör középpontja a hiperbola középpontja és sugara a valós tengely hossza. A C(1, 1) és M($^{13}/_5$, $^{11}/_5$) pontok távolsága 2-vel egyenlő. Ekkor a hiperbola kanonikus egyenletében a=2. A C és F_1 távolsága $c=2\sqrt{2}$. Ebből a képzetes tengely hossza már kiszámítható: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{8-4}=2$. Ekkor a kanonikus egyenlet (A koordinátarendszer középpontja a hiperbola középpontja és a valós tengely egyenese a CF_1 egyenes.):

$$\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{4}=1.$$

Átrendezve: $x''^2-y''^2-4=0$. Forgassuk el a koordinátarendszert -45°-kal, ez az $x''=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ és $y''=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'$ helyettesítéseket jelenti. A koordinátarendszerünk tengelyei párhuzamosak az eredeti x, y tengelyekkel, de a középpont még mindig a C(1, 1) pont. Ebben a rendszerben a görbe egyenlete: $2x'y'-4=0$. Toljuk vissza koordinátarendszer kezdőpontját az eredeti origóba, x’=x-1 és y’=y-1 helyettesítéssel és egyszerűbb alakra hozással az egyenlet:

$$xy-x-y-1=0.$$

63. Ha az F(½, ½) fókuszt a 2x+2y-1=0 csúcsérintőre tükrözzük, akkor az F'(0, 0) pontot kapjuk, amely illeszkedik a parabola vezéregyenesére. A vezéregyenes párhuzamos a csúcsérintővel, így az egyenlete: x+y=0. Ekkor a 61. feladat alapján a keresett egyenlet:

$$\sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2}=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}},$$

melyet átrendezve: x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0. A kanonikus egyenletben szereplő paraméter a vezéregyenes és a fókusz távolsága, azaz $\sqrt{2}$. Ekkor a kanonikus egyenlet: $y''^2=\sqrt{2}\,x''$. (Ez a koordinátarendszer olyan, hogy a parabola csúcspontja a kezdőpont és a csúcspontot a fókusszal összekötő egyenes az y" tengely.)

64. Az origó, amely illeszkedik a görbére, az F–től is és a vezéregyenestől is $\sqrt{2}$ távolságra van, ezért a keresett görbe parabola. (ha közelebb lenne a fókuszhoz, mint a vezéregyeneshez, akkor ellipszis lenne; és ha a vezéregyeneshez lenne közelebb, akkor hiperbola lenne.) Ekkor a 61. feladat alapján a keresett egyenlet:

$$x^2\text{-}2xy+y^2+8x=0.$$

A kanonikus egyenletben szereplő paraméter a vezéregyenes és a fókusz távolsága, azaz $\sqrt{2}$. Ekkor a kanonikus egyenlet: $y''^2=\sqrt{2}\,x''$.

65. Felhasználjuk a következő tényt: A parabola egy E pontjában vesszük a tengellyel párhuzamos egyenest, amely a csúcsérintőt M pontban metszi. Ekkor az E-beli érintőnek a csúcsérintővel való A metszéspontja felezi a csúcspont és M közötti szakaszt. Akkor a tengellyel párhuzamos, E-re illeszkedő egyenes az x-y-3=0, amely a csúcsérintőt az M($\frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2}$) pontban metszi. Az M-nek az A-ra való tükörképe a ($\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$) koordinátájú csúcspont. Ekkor a parabola tengelye az x-y-1=0 egyenes. Ebből a fókuszt az E-re illeszkedő x-y-3=0 egyenesnek az x tengelyre való tükörképe metszi ki: F(2, 1). A vezéregyenes x+y-1=0. Ekkor a 61. feladat alapján a keresett egyenlet:

$$x^2\text{-}2xy+y^2\text{-}6x\text{-}2y+9=0.$$

A kanonikus egyenletben szereplő paraméter a vezéregyenes a fókusz távolsága, azaz $2\sqrt{2}$. Ekkor a kanonikus egyenlet: $y''^2=2\sqrt{2}\,x''$.

66. A P(5, 1), Q(0, 3) pontoknak a C(2, 1) centrumra való tükörképei is illeszkednek a keresett ellipszisre: P'(-1, 1) és Q'(4, -1). A 49. feladat alapján a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$25P+10Q+R+10S+2T+U=0$$

$$9R+6T+U=0$$

$$P-2Q+R-2S+2T+U=0$$

$$16P-8Q+R+8S-2T+U=0$$

$$2P+Q+S=0$$

$$2Q+R+T=0$$

Az egyenletrendszer megoldása: P=4, Q=4, R=13, S=-12, T=-21 és U=9. Az ellipszis általános egyenlete: $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$. A görbe mátrixában az A_{33} sajátértékei megegyeznek a tengelyek hosszainak négyzetével. A sajátértékek: $\frac{17\pm\sqrt{185}}{2}$. Ez alapján a kanonikus egyenlet:

$$\frac{x''^2}{\frac{17+\sqrt{185}}{2}}+\frac{y''^2}{\frac{17-\sqrt{185}}{2}}=1\,.$$

67. A görbe mátrixa:

$$\begin{pmatrix} P & Q & S \\ Q & R & T \\ S & T & U \end{pmatrix}.$$

Ekkor a görbe egyenlete: $Px^2+2Qxy+Ry^2+2Sx+2Ty+U=0$..

Az O(0, 0) pont illeszkedik a görbére, ezért

$$U=0.$$

Az A(1, -2) pont illeszkedik a görbére. Ebből

$$P-4Q+4R++2S-4T=0.$$

A B(0, -1) pont illeszkedik a görbére. Ebből

$$R-2T=0.$$

A $4x+3y+2=0$ egyenes az A pontban érinti a keresett görbét. Az egyenes egyenlete konstans szorzó erejéig jellemzi az egyenest, vagyis ha $\lambda\neq 0$, akkor a $4\lambda x+3\lambda y+2\lambda=0$ ugyanezt az egyenest adja, amely az A pont polárisa.

$$\begin{aligned} &P-2Q+S=4\lambda \\ &Q-2R+T=3\lambda \\ &S-2T \quad =2\lambda \end{aligned}$$

Az egyenletekből λ-t kiemelve:

$$\frac{P-2Q+S}{4}=\frac{Q+2R+T}{3}=\frac{S-2T}{2}\,.$$

Hasonló meggondolások alapján az $-y-1=0$ egyenes a B pont polárisa, melyre:

$$\frac{-Q+S}{1}=\frac{-R+T}{1}=\frac{-T}{-1}\,.$$

A fenti egyenletrendszer alapján az együtthatók meghatározhatóak. A keresett görbe tehát

$$6x^2+3xy-y^2+2x-y=0.$$

68. Ha összeszorozzuk az aszimptoták egyenletét, akkor egy metsző egyenespárból álló hiperbolikus másodrendű görbét kapunk, melynek ugyanazok a végtelen távoli pontjai, mint a keresett hiperbolánknak: $(x-7y+6)(x-y)=0$, azaz $x^2-8xy+7y^2=0$. A hiperbola $x^2-8xy+7y^2+2Sx+2Ty+U=0$ egyenletében három paraméter van, melyet meg kell határozni: S, T, U.

A P(-3, 0) illeszkedik: $9-6S+U=0$.

A görbe centruma az aszimptoták metszéspontja: C(1, 1). A görbe mátrixát felhasználva

$$\begin{aligned} &1\cdot 1-4\cdot 1+S=0 \\ &-4\cdot 1+7\cdot 1+T=0. \end{aligned}$$

Ekkor $S=3$, $T=-3$, $U=9$, vagyis a görbe egyenlete: $x^2-8xy+7y^2+6x-6y+9=0$.

69. A hiperbola adott érintője elmetszi az aszimptotákat. A keletkezett $M_1(1, -9)$ és $M_2(-1, -1)$ metszéspontok által meghatározott szakasz F(0, -5) felezési pontja éppen a hiperbolával való érintési pont. A feladat az előző mintájára oldható meg, s így a hiperbola egyenlete: $2x^2-xy-x+y+5=0$.

70. Az adott érintőegyenesek egy érintőháromszöget határoznak meg. Ebben teljesül az, hogy a háromszög csúcsait a szemköztes oldalon lévő érintési pontokkal összekötő egyenesek egy ponton haladnak át. Az a:x+2y-3=0 egyenes és a b: 2x-3y+7=0 egyenes metszéspontja $K(-5/7, 13/7)$. Az a:x+2y-3=0 egyenes és a c: x+y+2=0 egyenes metszéspontja L(-7, 5). A b:2x-3y+7=0 egyenes és a c: x+y+2=0 egyenes metszéspontja $M(-13/5, 3/5)$. Az MA és LB egyenesek N metszéspontját K-val összekötő 5x-4y+11=0 egyenes elmetszi a c-t a $C(-19/9, 1/9)$ pontban.

71. Adott egyenesek egy érintő négyszöget határoznak meg. Az a, b egyenesek metszéspontja K(2, 3).A b, c egyenesek metszéspontja L(5, 10). A c, d egyenesek metszéspontja M(8, 5). Az a, d egyenesek metszéspontja N(5, 0). Ekkor ebben az érintő négyszögben a KM, LA és NB egyenesek egy ponton haladnak keresztül. Az N pontot a KM és LA egyenesek O metszéspontjával kell összekötni. Ez az egyenes fogja kimetszeni a b-ből a $B(26/7, 7)$ pontot.

72. Az a, b és a sík végtelen távoli egyenese egy érintő háromszöge a parabolának. Ebben teljesül az, hogy a háromszög csúcsait a szemköztes oldalon lévő érintési pontokkal összekötő egyenesek egy ponton haladnak át. Az a és b egyenesek metszéspontja K(-8,7). Az a és a végtelen távoli egyenes metszéspontja $L_\infty(3, -2)$. A b és a végtelen távoli egyenes metszéspontja $M_\infty(1,-1)$. A végtelen távoli egyenesen lévő érintési pontot az adott átmérő jelöli ki $C_\infty()$. Az AL és KC egyenesek N metszéspontját M-mel összekötő 2x-y+23=0 egyenes elmetszi a b-t a B(-16,15) pontban.

73. A tengelyek metszéspontja C(-1, 0) a görbe centruma. Ekkor a feladat megoldásának menete megegyezik a 66. feladatéval. A görbe egyenlete:

$$x^2+xy+y^2+2x+y-2=0.$$

74. A hiperbola aszimptotáinak egyenletét megkapjuk, ha a végtelen távoli pontjainak a polárisait meghatározzuk. (Egy másik megoldás lehet az, hogy a végtelen távoli pontokat összekötjük a centrummal.) A végtelen távoli pontjai: $V_{1\infty}[1, 3, 0]$ és $V_{2\infty}[1, -1, 0]$, a polárisaik: 6x-2y+19=0 és 2x+2y-1=0.

75. Az adott hiperbola centruma C(1, 1), a koordinátarendszert ide eltolva a görbe egyenlete : $5x'^2-12x'y'-36=0$. Az A_{33} sajátértékei $\lambda_1=9$ és $\lambda_2=-4$; sajátvektorai: $\underline{s}_1(3, 2)$ és $\underline{s}_2(-2, 3)$. Ezek alapján a forgatás mátrixa a következő alakban adható meg:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

A görbe kanonikus egyenlete:

$$\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=1.$$

A hozzá konjugált hiperbola egyenlete:

$$\frac{x''^2}{4}-\frac{y''^2}{9}=-1.$$

Erre először a visszaforgatást, majd egy visszatolást kell alkalmazni. Ezek sorban a következő helyettesítésekkel érhetők el:

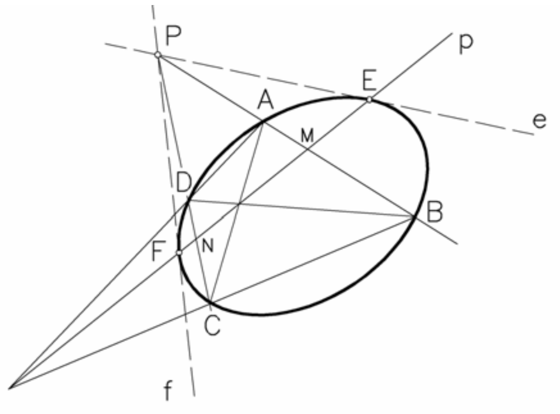
$$x''=\frac{3}{\sqrt{13}}x'+\frac{2}{\sqrt{13}}y' \text{ és } y''=-\frac{2}{\sqrt{13}}x'+\frac{3}{\sqrt{13}}y'.$$

Ennek az eredménye: $5x'^2+12x'y'-36=0$. A visszatolás $x'=x-1$, $y'=y-1$ helyettesítés után:

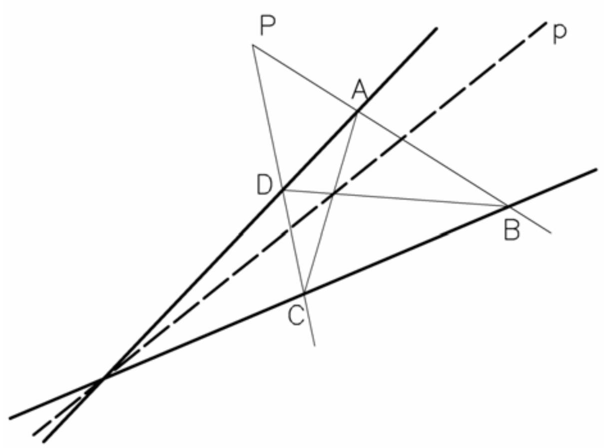
$$5x^2-12xy-22x-12y+53=0.$$

Szerkesztési feladatok

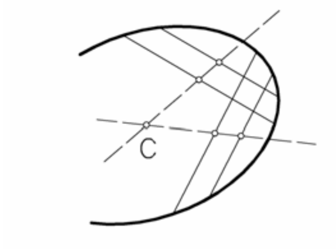
76. Meg kell határoznunk a P külső pont *p* polárisát az ívre nézve, ugyanis ez az egyenes tartalmazza a keresett érintők érintési pontját. A P pontból vezessünk két szelőt az ívhez, az egyik az A és B, a másik a C és D pontokban metszi az ívet. Az ABCD teljes négyszög egyik átlós pontja P, és a P-re nem illeszkedő átló az előbbi szelőket az M és N pontokban metszi. Ezekre a pontokra (ABPM)=-1, és (CDPN)=-1, melyből következik, hogy az M és N konjugált P-hez, maga az MN egyenes a P polárisa. A *p* kimetszi az ívből az E és F érintési pontokat.

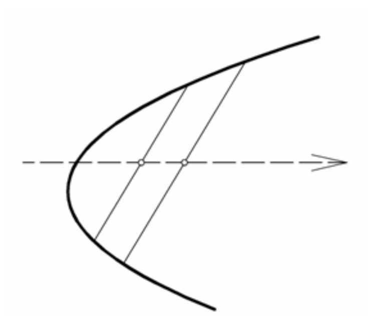


77. A projektív síkon az *a* és *b* egyenesek metsző egyenespárt alkotnak, a P pont polárisa áthalad a két egyenes metszéspontján. A P-ből vezessünk két szelőt az egyenesekhez, melyek az A, B, C, D pontban metszik azokat. Az ABCD teljes négyszög P-re nem illeszkedő átlója lesz a keresett poláris.



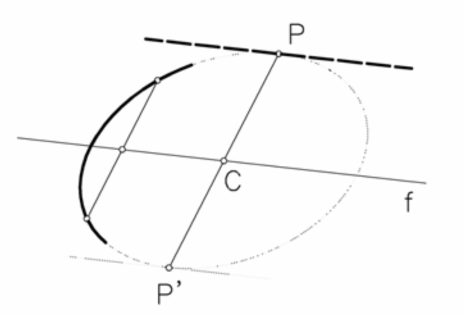
78. Felhasználjuk, hogy a párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenesek tartalmazzák a C centrumot.



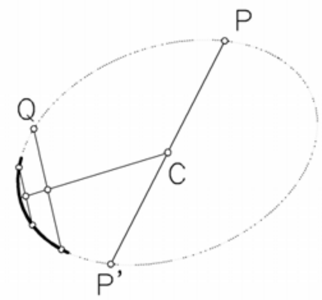


79. Felhasználjuk, hogy a párhuzamos húrok felezési pontjait összekötő egyenes a parabola tengelyével párhuzamos.

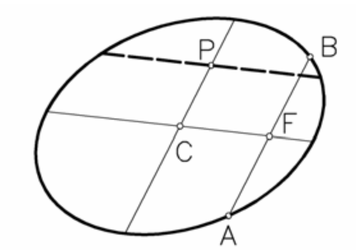
80. Először meghatározzuk a görbe C centrumát. (Lásd a 78. feladatot.) Az adott P pontnak a C-re vonatkozó tükörképe legyen P'. A PP' átmérővel párhuzamos húrt veszünk a megadott ívben. A húr felezési pontját C-vel összekötő *f* egyenes a PP'-höz konjugált átmérő. Ekkor a P és P' pontokban az érintőnek párhuzamosnak kell lennie az *f* egyenessel.



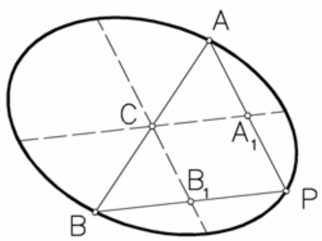
A feladatot nehezítheti, ha olyan kis ív ismert, melyben nincs a PP'-vel párhuzamos húr. Ekkor újabb görbepontot (pontokat) kell szerkeszteni. Ennek a lépései a következők: Meghatároztuk a görbe C centrumát. Ha most veszünk egy tetszőleges húrt, akkor a felezési pontját a C-vel összekötve a húrhoz konjugált irányú átmérőt kapjuk. Ha a húrral párhuzamos olyan egyenest veszünk, melyek a megrajzolt ívet csak egy pontban metszi, akkor az újabb húr másik (Q-val jelölt) végpontja szerkeszthető a felezési pont ismertében. Ezt az eljárást addig lehet ismételni, míg a PP'-vel párhuzamos húrt nem tudunk rajzolni.



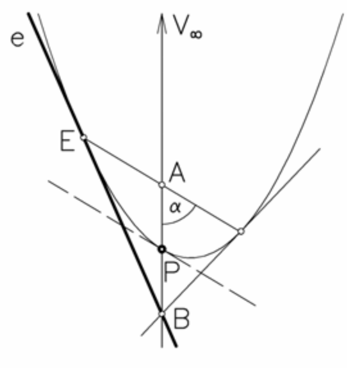
81. Először meghatározzuk a görbe C centrumát. (Lásd a 78. feladatot.) A CP egyenes egy átmérő az ellipszisben. A CP-vel párhuzamos egyik húr legyen az AB. Ennek az F felezési pontját C-vel összekötve a CP-hez konjugált átmérőt kapjuk. Az a húr, melyet a P pont felez, a CF-fel párhuzamos húr lesz.



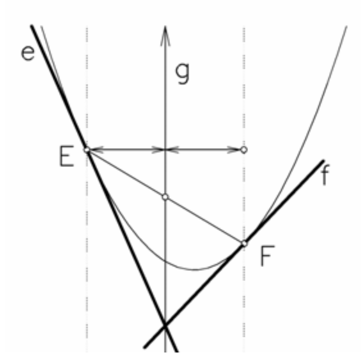
82. Legyen az AP és BP szakasz felezőpontja B_1 és A_1. Az AB szakasz egy átmérő, emiatt a görbe középpontja az AB felezési pontja. Az A_1C és B_1C egyenesek átmérők, melyekkel párhuzamosak az AP és BP húrok. Az A_1C és B_1C egyenesek konjugált átmérők is, emiatt igaz az állítás.



83. Tudjuk, hogy az átmérő egyenes és a végpontjában az érintő α szöget zár be, így azt is tudjuk, hogy az ilyen állású húrokat felezi a megadott átmérő. Tekintsük azt a húrt, amelyiknek az E az egyik végpontja. Ez a húr A-ban , az *e* érintő B-ben metszi az átmérő egyenesét. Az E pontot A-ra tükrözve a parabola egy újabb pontját kapjuk, a B-ből a parabolához húzott másik érintőnek éppen ez az érintési pontja. Ekkor az A és B konjugáltak a parabolára nézve, az A és B pontokat a parabola végtelen távoli pontja és az átmérő keresett végpontja harmonikusan választja el. $(ABPV_\infty)=-1$, vagyis a P felezi az AB szakaszt. A parabola P-beli érintője természetesen párhuzamos az E végpontú húrral.



84. Legyen g a két érintő metszéspontján át a tengelyiránnyal párhuzamos egyenes. Ha ismerjük az F érintési pontot, akkor az EF szakasz felezési pontja a g egyenesre esik, azaz E és F a g-től ugyanolyan távol van. Ezért az E-t tükrözzük a g átmérőre, majd a kapott ponton át g-vel párhuzamost húzunk. Ez az egyenes metszi ki F-et az f érintőből.



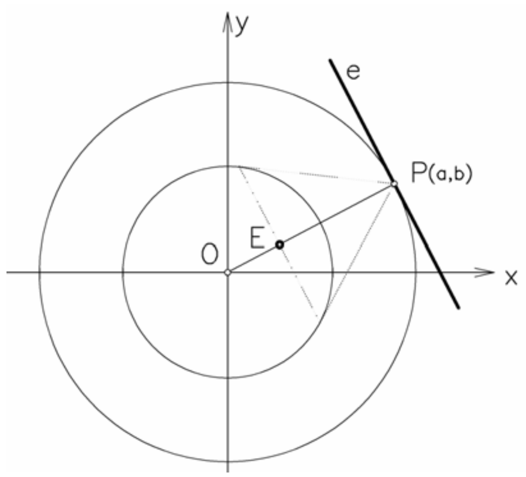
Mértani helyek

85. Az $x^2+2xy-y^2-2ax+4ay+1=0$ görbék centrumainak koordinátái kielégítik az

$$x+y-a=0$$
$$x-y+2a=0$$

egyenletrendszert. Az a paramétert kiküszöbölve a $3x+y=0$ egyenlethez jutunk. Tehát a keresett mértani hely egy egyenes.

86. Az adott körök középpontja legyen az origó, ekkor a körök egyenlete: $x^2+y^2=R^2$ és $x^2+y^2=r^2$. Az R sugarú kör P(a,b) pontjában vett e érintő egyenlete: $ax+by-R^2=0$. Ennek az r sugarú körre vonatkozó pólusa: $E\left(\frac{r^2a}{R^2},\frac{r^2b}{R^2}\right)$. Az E pont illeszkedik az OP egyenesre és a P-ből egy origó középpontú kicsinyítéssel származtatható, vagyis a keresett mértani hely egy origó középpontú kör lesz, melynek a sugara az OE távolság, azaz $\frac{r^2}{R}$.



87. Az $x^2+y^2=1$ kör P(a,b) pontjában vett e érintő egyenlete

$$ax+by-1=0.$$

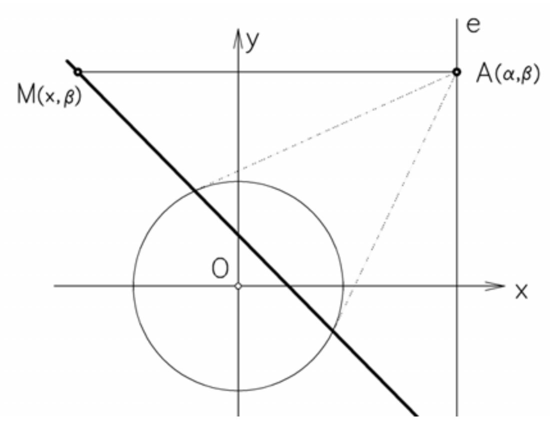
Az e egyenesnek az $x^2-y^2=1$ hiperbolára vonatkozó E pólusa az (a,-b) koordinátájú pont, amely kielégíti a megadott kör egyenletét. (Az E koordinátáira teljesül: $a^2+(-b)^2=1$.) Ezért a keresett mértani hely maga az $x^2+y^2=1$ kör.

88. Az x^2-y^2=1 hiperbola P(a,b) pontjában vett *e* érintő egyenlete

$$ax-by-1=0.$$

Az *e* egyenesnek az $x^2+y^2=1$ körre vonatkozó E pólusa az (a,-b) koordinátájú pont, amely kielégíti a megadott hiperbola egyenletét. (Az E koordinátáira teljesül: $a^2-(-b)^2=1$.) ezért a keresett mértani hely maga az $x^2-y^2=1$ hiperbola.

89. A koordinátarendszer középpontja legyen a kör középpontja, ekkor a kör egyenlete: $x^2+y^2=r^2$. Ezen kívül legyen az *e* egyenes párhuzamos az *y* tengellyel, ekkor az egyenlete: $x=\alpha$. (Ez a helyzet mindig előállítható egy alkalmas koordináta-transzformációval.) A mozgó A pont koordinátái: (α, β), az A-ban *e*-re állított *m* merőleges egyenlete: $y=\beta$, és az A pont polárisának egyenlete: $\alpha x+\beta y-r^2=0$. A poláris és az *m* $M(x,\beta)$ metszéspontjának koordinátái kielégítik az $\alpha x+y^2-r^2=0$ egyenletet, amely egy parabolának az egyenlete.

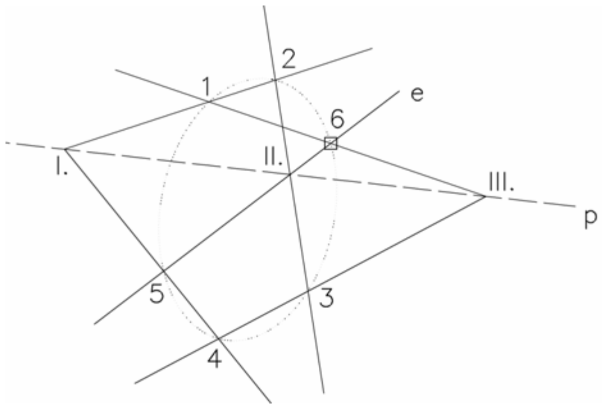


A Pascal tétel alkalmazása

Ebben a részben pontozott vonallal feltüntettük a másodrendű görbék íveit, de ezeket a szerkesztésnél nem használhatjuk. A szerkesztésekhez csak vonalzóra van szükségünk.

1. A pontokat jelölje: 1, 2, 3, 4, 5 és az 5-ös ponton áthaladó e egyenessel szeretnénk metszeni a görbét. Az adott öt pontot és a keresett 6-os pontot 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorrendben egy, a kúpszeletbe írt hatszög hat csúcsának tekintjük. A szemben fekvő oldalak metszéspontjai legyenek I., II., III. a következő táblázat szerint:

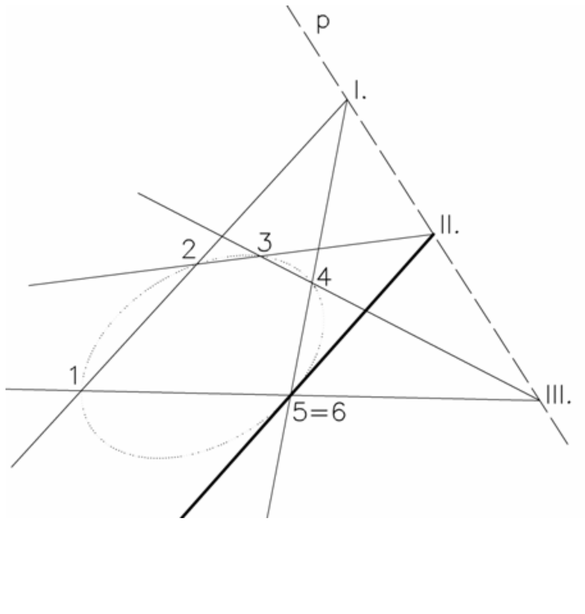
12	23	34
45	56=*e*	61
I.	II	III.



Az |1,2| és |4,5| egyenesek I. metszéspontja, valamint a |2,3| és *e* egyenesek II. metszéspontja közvetlenül szerkeszthető. A 6-os ismeretlen, de I. és II. összekötő egyenese a Pascal-féle *p* egyenes. Pascal-tétele szerint |3,4| a *p* egyenest III.-ban metszi. Végül 1 és III. összekötő egyenese metszi ki *e*-ből a keresett 6-os pontot.

2. Felhasználjuk, hogy a görbe egy pontján áthaladó szelők határhelyzete a pontbeli érintő. A pontok számozásánál most arra kell figyelnünk, hogy azt a pontot duplán jelöljük (egymást követő számokkal), amelyben az érintőt szeretnénk meghatározni. Ekkor 5-öt kétszer számítva 5=6, egyúttal a Pascal-féle hatszög hatodik csúcsának is tekintjük. Az |5,6| oldal a keresett érintő, mely a

12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

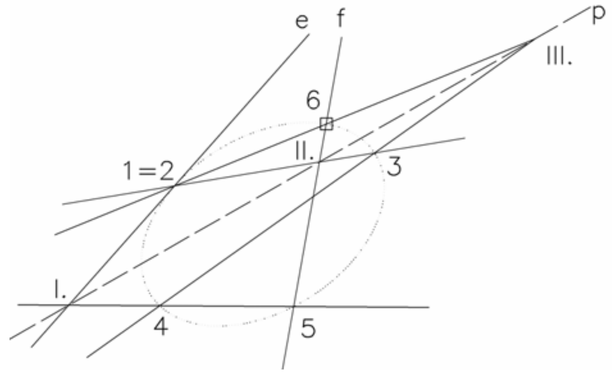


táblázat alapján így szerkeszthető meg: |1,2| és |4,5| egyenesek I. metszéspontja, valamint |3,4| és |6,1| egyenesek III. metszéspontja meghatározzák a p egyenest. Ezt |2,3| a II. pontban metszi és 5-os és II. pontok összekötő egyenese a keresett érintő.

3. Azt a pontot, amelyben adott a görbe *e* érintője, duplán számozzuk. Ekkor fontos, hogy egymást követő számokat használjunk, mert így lesz az érintő az elfajult Pascal-féle hatszög egyik „oldala". A görbe újabb pontját úgy kapjuk, hogy az egyik adott ponton át *f* szelő vezetünk, mondjuk az 5-ös pontból. Ekkor az *f* egyenes és a görbe másik metszéspontját keressük, mely a 6-os pont lesz.

12=*e*	23	34
45	56=*f*	61
I.	II.	III.

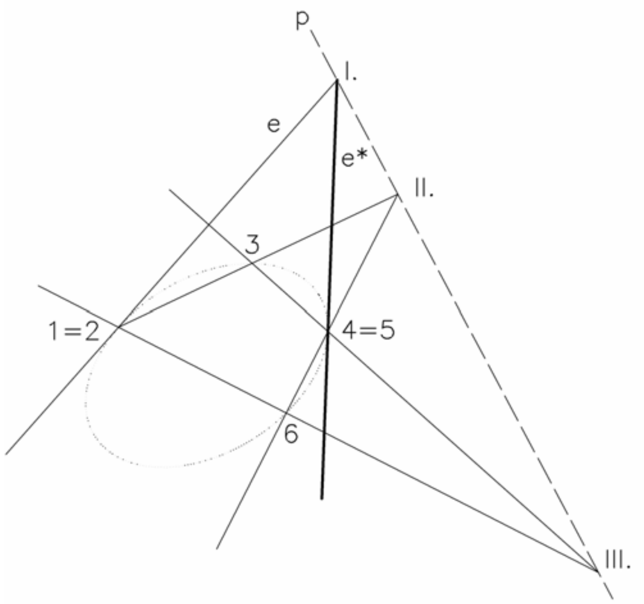
A Pascal-egyenes I. és II. pontja szerkeszthető, a III. pontot a |3,4| egyenes metszi ki a P-ből. Az |1,III.| egyenes az *f*-ből kimetszi a 6-os pontot.



4. Duplán kell számítanunk azt a pontot is, amelyikben már ismerjük az érintőt és azt is, amelyikben most szeretnénk megszerkeszteni. A duplán számozásnál fontos, hogy egymást követő számokat használjunk, mert így az érintők a négyszöggé fajult Pascal-féle hatszög „oldalai" lesznek. A 4=5 pontban az érintőt jelölje *e**.

12=*e*	23	34
45=*e**	56	61
I.	II.	III.

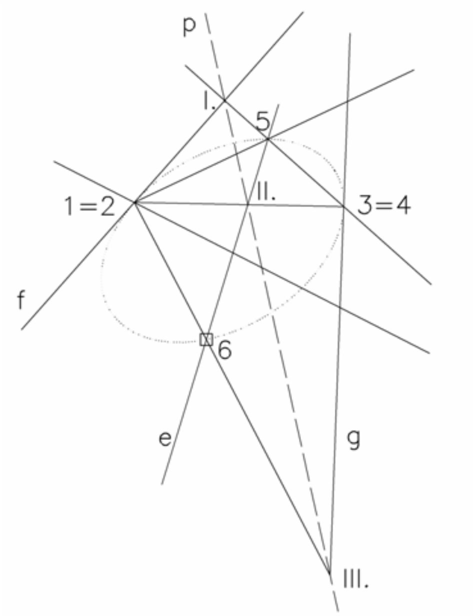
A Pascal-egyenes II. és III. pontja szerkeszthető, az I. pontot a *e* egyenes metszi ki a *p*-ből. Az I. pontot a 4=5 ponttal összekötve kapjuk a keresett érintőt.



5. Valamelyik pontra illeszkedő egyenesnek a görbével alkotott másik metszéspontját keressük. A pontok számozásánál duplán számítanak azok a pontok, amelyekben ismerjük az érintőt. Most tehát 1=2, 3=4 és az 5-ös ponton át egy *e* szelő vezetünk. Ennek a görbével alkotott metszéspontja lesz a 6-os pont.

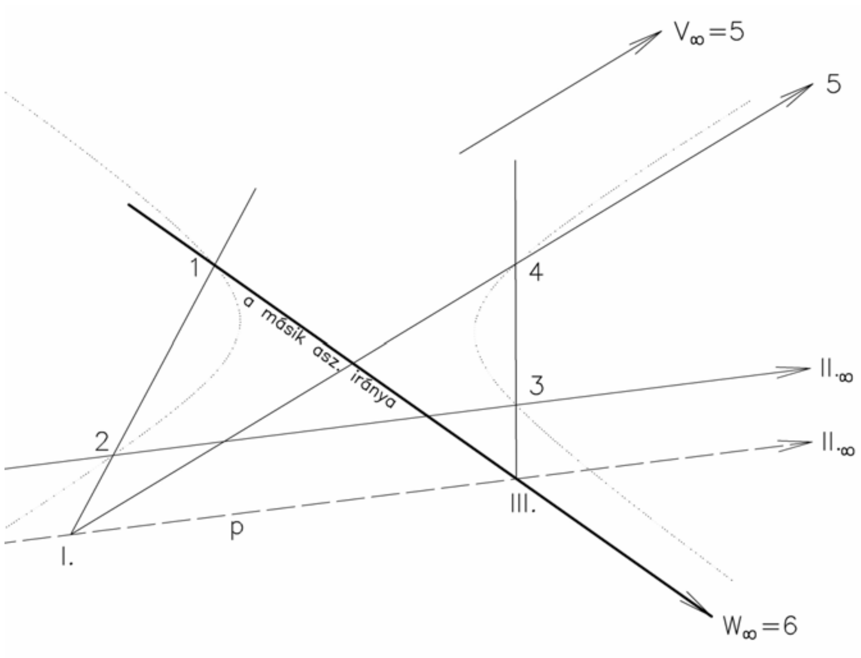
12=*f*	23	34=*g*
45	56=*e*	61
I.	II.	III.

I. és II. közvetlenül megszerkeszthető, tehát a Pascal-féle egyenes is; az *e* egyenesből a |III.,1| egyenes metszi ki a 6-os pontot.



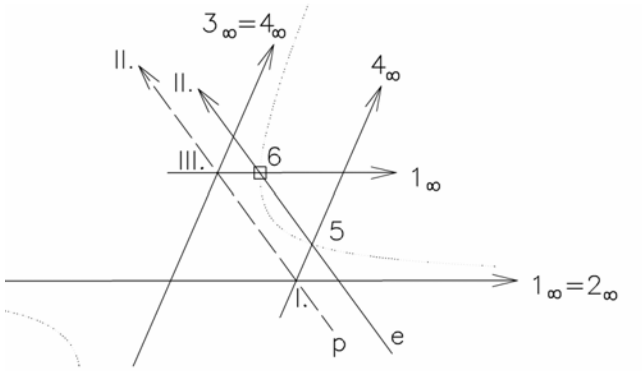
6. A hiperbola öt ponttal adott: 1, 2, 3, 4 és V_∞ és a másik végtelen távoli pontot keressük. 5-ös jelölje a V_∞ pontot és 6-os a másik végtelen távoli pontot, így az |5,6| egyenes a sík végtelen távoli egyenese.

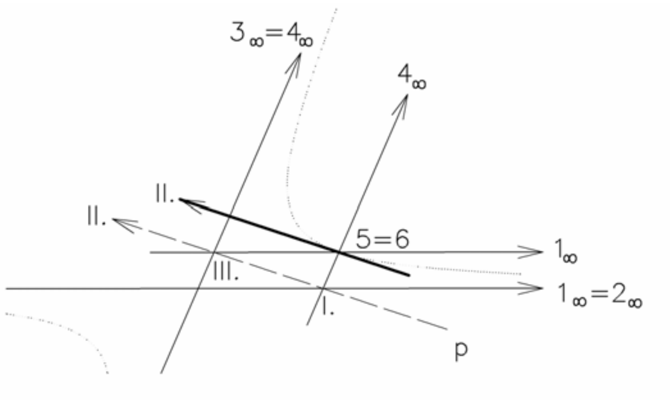
12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.



A táblázat szerint az I. és II. szerkeszthető, ahol |4,5| párhuzamos *i*-vel és II. végtelen távoli pont. Ebből következik, hogy *p* párhuzamos a |2,3| egyenessel. A II. kijelölése után |1,6,III.| egyenes a másik aszimptota iránya.
Ezek után a 9. feladat alapján a végtelen távoli pontokban az érintőket meghatározzuk.

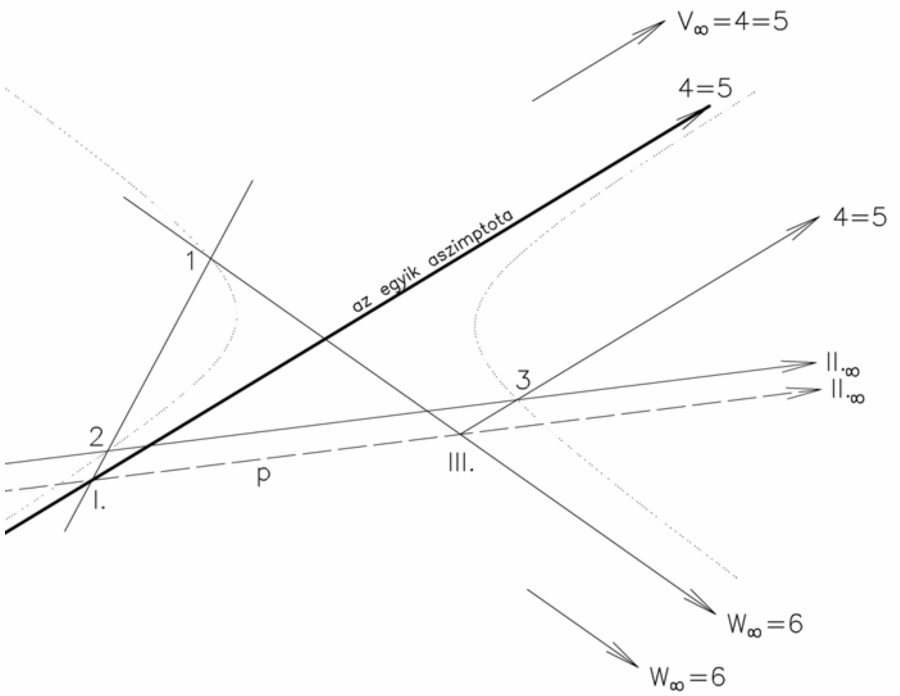
7. Az aszimptoták végtelen távoli pontját jelölje 1=2 és 3=4. A megadott pont legyen 5 és ezen a ponton áthaladó *e* szelőnek a hiperbolával alkotott 6-os pontját keressük. A feladat az 5. feladat speciális esete.



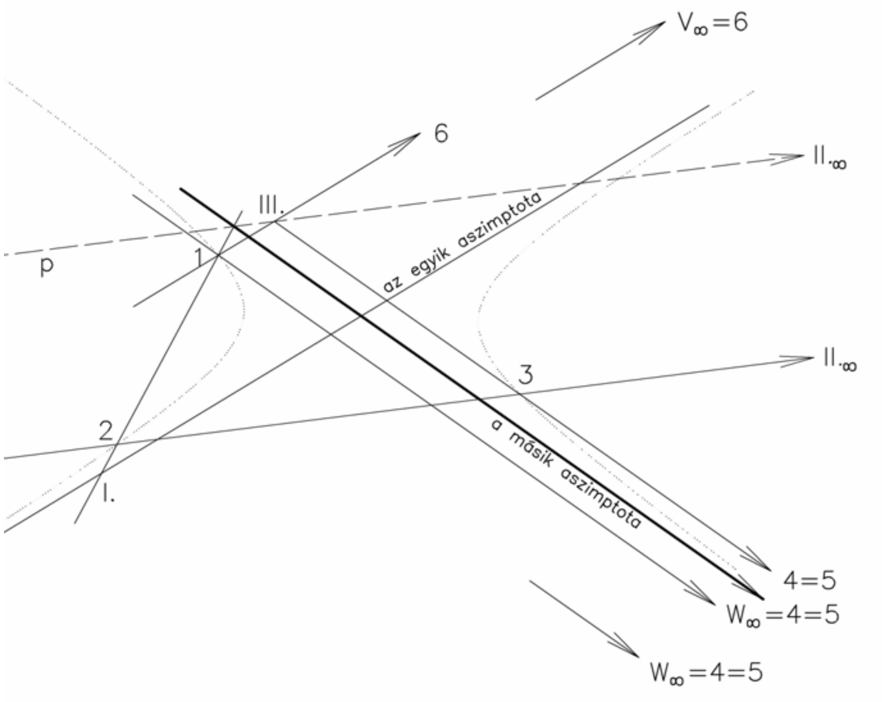


8. Figyelembe véve, hogy az aszimptoták irányával a hiperbola két végtelenben fekvő pontját lehet megadni, és e pontokban maguk az aszimptoták az érintők, a hiperbola két végtelenben fekvő pontját és az adott pontot „hatszög” $1_\infty=2_\infty$, $3_\infty=4_\infty$, 5=6 csúcspontjául választjuk. Most $1_\infty 2_\infty$ és $3_\infty 4_\infty$ a két adott aszimptota, 56 a keresett érintő, $2_\infty 3_\infty$ a végtelenben fekvő egyenes, $4_\infty 5$ és 61_∞ pedig a két aszimptotával 5-ön át rajzolt párhuzamos.

9. Az aszimptoták a hiperbolát a végtelen távoli pontokban érintik. Ezért a feladat két részből fog állni, mindkét végtelen távoli pontban meg kell szerkeszteni az érintőt. A végesben fekvő pontok: 1-es, 2-es, 3-as, a végtelen távoliak 4=5-ös és 6-os. Alkalmazzuk a Pascal tételt, a kapott |45| érintő az egyik aszimptota.



Ezután megcseréljük a végtelen távoli pontok számozását, hogy a másik aszimptotát is megszerkeszthessük. A végesben fekvő pontok számozásán nem kell változtatni.



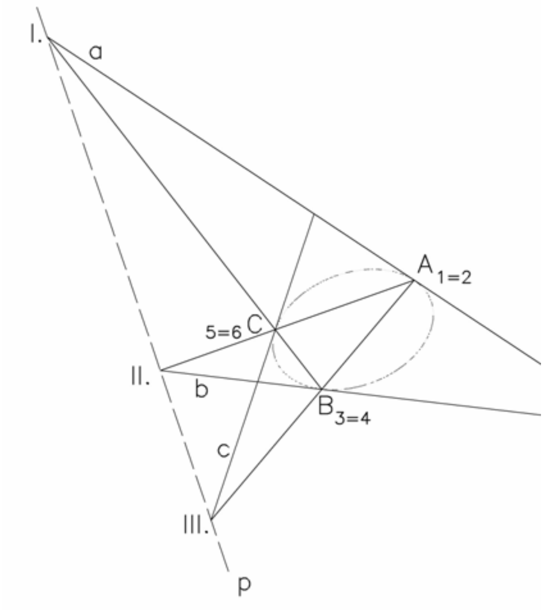
10. A megadott pontokat jelöljék az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok. Ekkor a számok felhasználásával a pontok lehetséges sorrendjének száma 6!. A lehetséges sorrendeket vizsgálva megegyező hatszögeket is találunk. Ilyenek például az

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$2, 3, 4, 5, 6, 1$$
$$\dots$$
$$6, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ezen kívül a fordított sorrendben vett pontok is ugyanazt a hatszöget adják. Például:

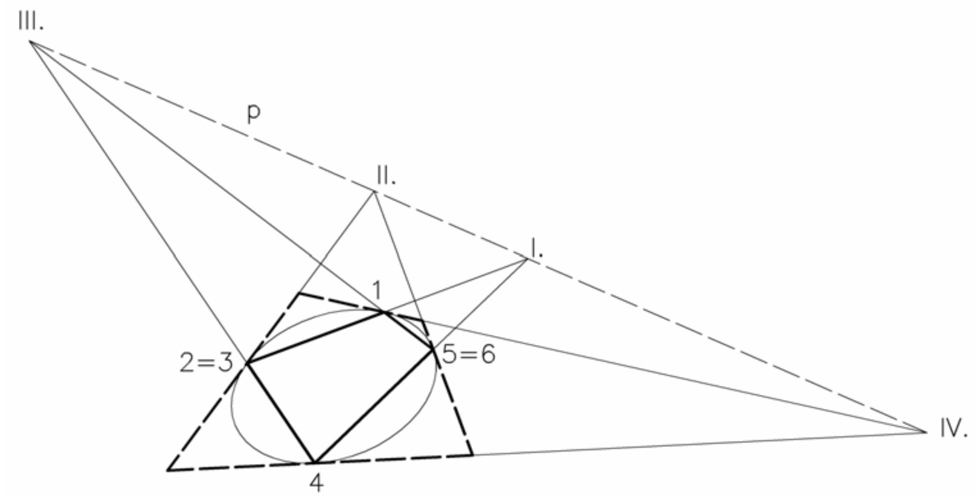
$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Ebből az következik, hogy 12 olyan számsor van, amely ugyanazt a hatszöget jelöli, ezért a megadott hat pont összesen $\frac{6!}{12} = 60$ hatszöget határoz meg, és ugyanennyi Pascal-egyenest.



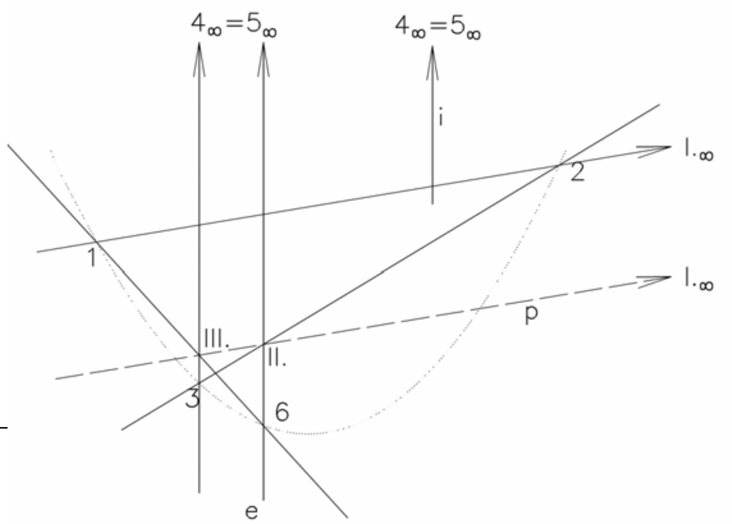
11. Igazolandó, hogy az *a* és BC, *b* és AC, *c* és AB metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek. A Pascal tétel jelöléseit felhasználva A~1,2, B~3,4, C~5,6 azonosításokkal a fent említett metszéspontok sorban I. II. és III., melyek a tétel alapján egy egyenesre illeszkednek.

12. Az ábra jelöléseivel a Pascal tétel szerint az I., II., III. pontok kollineárisak. A pontokat átszámozva belátható, hogy az I., III., IV. pontok is kollineárisak. Ez azt jelenti, hogy az I., II., III., IV. pontok mind egy egyenes pontjai.



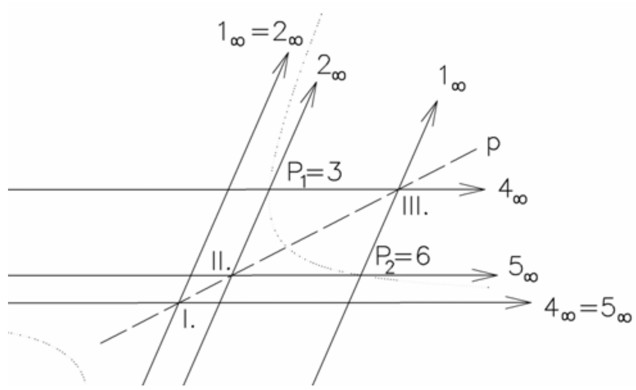
13. Annak kijelentése, hogy a kúpszelet parabola, egyértékű egy érintő megadásával; ugyanis a végtelenben fekvő egyenes érinti a görbét. Ha még a parabola tengelyének irányát is megadjuk, akkor a végtelenben fekvő egyenes érintési pontját is kijelöltük. Az adatok két pont megadásával egyértékűek.

12	23	34_∞
$4_\infty 5_\infty$	$5_\infty 6=e$	61
I_∞	II	III



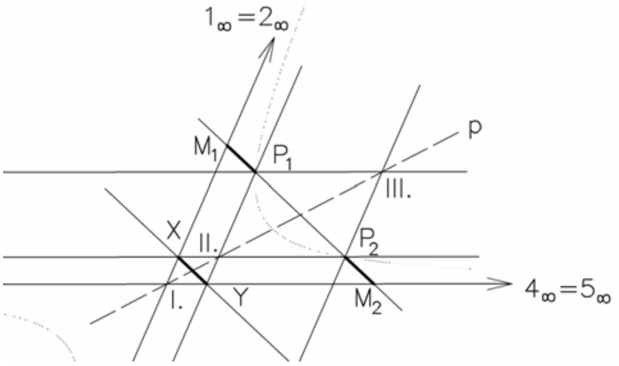
Ha a parabola megadott végtelen távol fekvő pontja $4_\infty=5_\infty$ és a keresett pont 6-os, akkor $|4_\infty,5_\infty|$ a végtelen távol fekvő egyenes, $|5_\infty,6|$ pedig az adott e egyenes; a végtelenben fekvő I_∞ és a II. megadja a Pascal-féle p egyenest. Ezt $|3,4_\infty|$ metszi III.-ban, és végül |III.,1| kimetszi e-n a keresett pontot.

14. Az aszimptoták végtelen távoli pontjait jelölje 1=2 és 4=5, a P_1 és P_2 pontokat rendre 3-as és 6-os. Ekkor alkalmazva a Pascal tételt teljesül az állítás.



15. Az ábrán az I.XII.Y és a II.P_1III.P_2 hasonló paralelogrammák, mert közös az egyik átlóegyenesük, van egy közös csúcsuk és ebben a csúcsban az oldalegyenesek egybeesnek. (Emiatt a szögeik egyenlők.) Ekkor az XY és P_1P_2 átlók egymással párhuzamosak. Az átlók között figyeljük az XYP_1M_1 és XYP_2M_2 paralelogrammákat, melyeknek van egy közös oldaluk. A szemköztes oldalak egyenlő hosszúságúak:

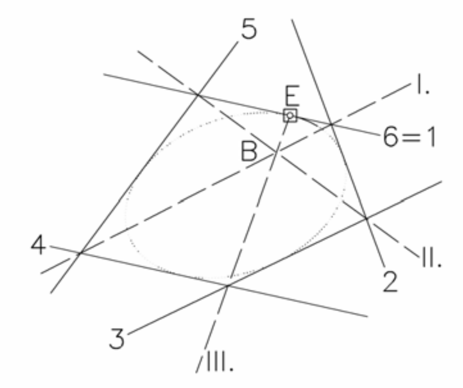
$$|M_1P_1|=|XY|=|M_2P_2|.$$



A Brianchon-tétel alkalmazása

Ebben a részben pontozott vonallal feltüntettük a másodrendű görbék íveit, de ezeket a szerkesztésnél nem használhatjuk. A szerkesztésekhez csak vonalzóra van szükségünk.

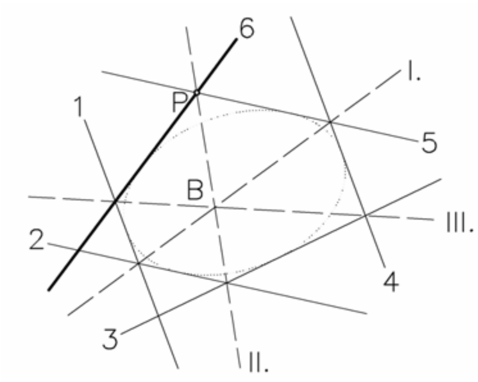
1. Ha egy külső pontból érintőket húzunk egy görbéhez, és a pontot közelítjük a görbe egy adott pontjához, akkor határesetben a két érintő éppen fedi egymást (ekkor az adott pont éppen az érintési pont). Ez alapján, ha a másodrendű görbe öt érintője közül egyet kiválasztunk, és azt duplán vesszük figyelembe, akkor a Brianchon-tételben szereplő hat érintőt kapjuk. Felhasználjuk az alábbi táblázatot:



12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

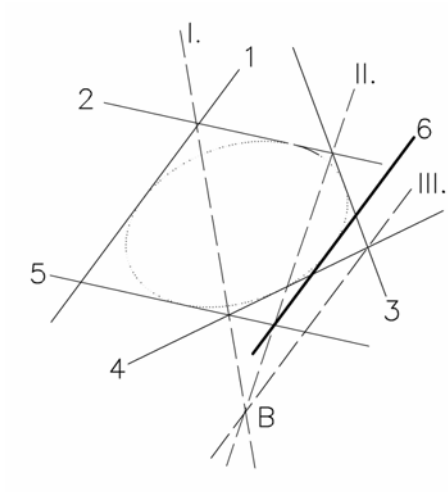
Most a római számok a két-két érintő metszéspontját összekötő egyenest jelölik.
A feladatunkban az I. és II. egyenesek meghatározzák a B Brianchon pontot. B-t (3,4) metszésponttal összekötve a III. –t kapjuk, amely a 6=1 kiválasztott érintőből kimetszi a keresett érintési pontot.

2. Adjunk meg az 5-ös egyenesen egy P pontot, amely az (5,6) egyenespár metszéspontja lesz. Ekkor alkalmazzuk a Brianchon tételt. Felhasználjuk az alábbi táblázatot:



12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

Az (5,6) metszéspont a P. Az I. és a II. egyenesek meghatározzák a B Brianchon pontot. Végül a III.-t berajzolva az 1-es érintőn olyan pontot kapunk, amely a 6-os érintőnek is pontja. Ezt P-vel összekötve a keresett érintőt kapjuk.

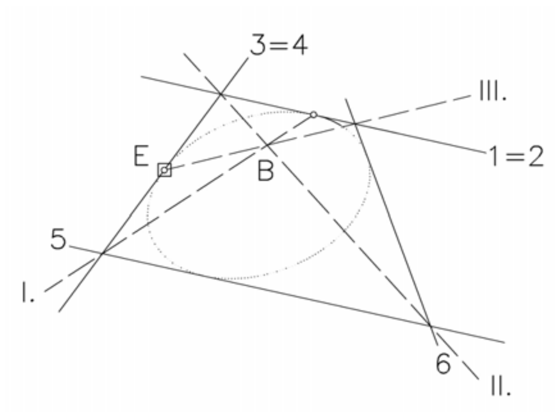


3. Keressük az 1-gyel párhuzamos 6-os érintőt. Most is az előbbi táblázat alapján dolgozunk. Ekkor a III. meghatározásához az (1,6) metszéspont végtelen távoli lesz, így III. párhuzamos 1-gyel. A B pontot az I. és III. egyenesek meghatározzák, ezután a II. az 5-ből kimetszi azt a pontot, amelyen a 6-os is áthalad párhuzamosan az 1-gyel.

4. A feladatban duplán számít az az érintő, amelyen már ismerjük az érintési pontot (1=2) és az is amelyiken szerkeszteni akarjuk (3=4). Az 1-es és 2-es metszéspontja az adott érintési pont, a 3-as és 4-es metszéspontja a keresett E pont.

12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

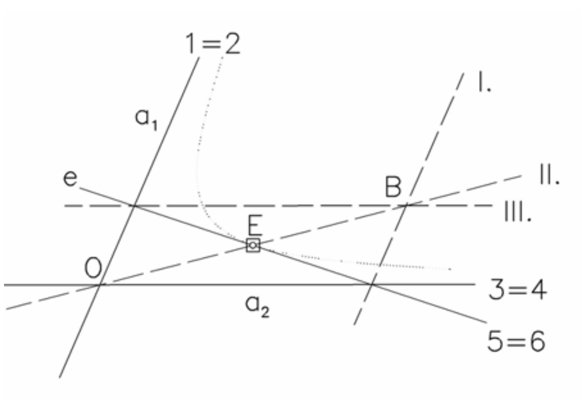
A Brianchon pontot az I. és II. meghatározza. A B-t az (1,6) metszésponttal összekötve kimetszhető a keresett E pont.



5. A hiperbola aszimptotái végtelen távoli pontban érintik a görbét, ezért az aszimptotákat duplán számítjuk. Az *e* érintőn keressük az érintési pontot, ezért az *e* is duplán számít. (A duplán számított egyeneseket mindig egymást követő számokkal kell számoznunk!)
Az a_1 és a_2 jelöli a két aszimptotát, O a hiperbola középpontját.

12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

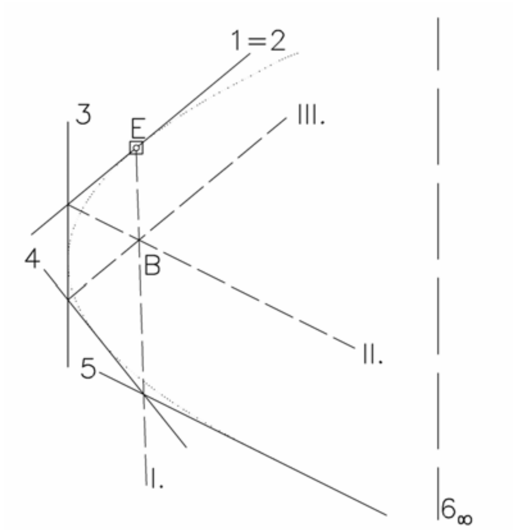
A táblázat jelöléseit felhasználva a (3,4) és (5,6) metszéspontok végtelen távoliak, ezért a I. párhuzamos a_1-gyel és III. párhuzamos a_2-vel. A BO pontok egyenese II., és az *e*-ből kimetszi az E érintési pontot.



6. Felhasználjuk, hogy a parabolát a végtelen távoli egyenes érinti és így öt érintő adott. Kiválasztjuk az egyik érintőt, ez lesz az 1=2-es, melyen az érintési pontot keressük.

12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

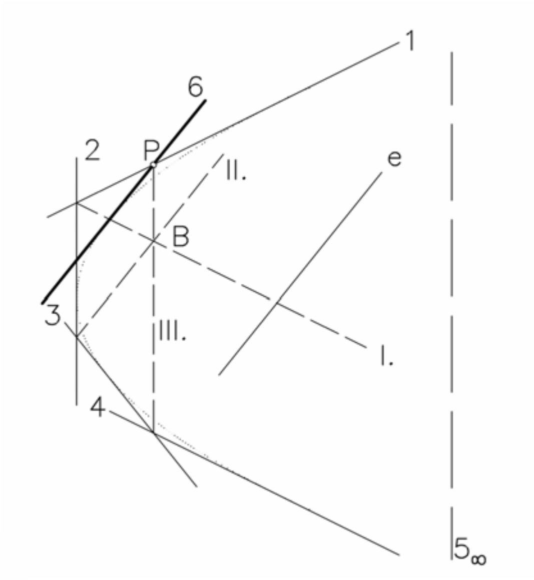
A táblázat alapján a II és III. határozzák meg a B pontot. A II. párhuzamos lesz az 1-gyel, mert az (1,6) metszéspont végtelen távoli, és a III. párhuzamos az 5-tel az (5,6) metszéspont végtelen távoli volta miatt. Az I. kimetszi az E érintési pontot az 1=2-es egyenesből.

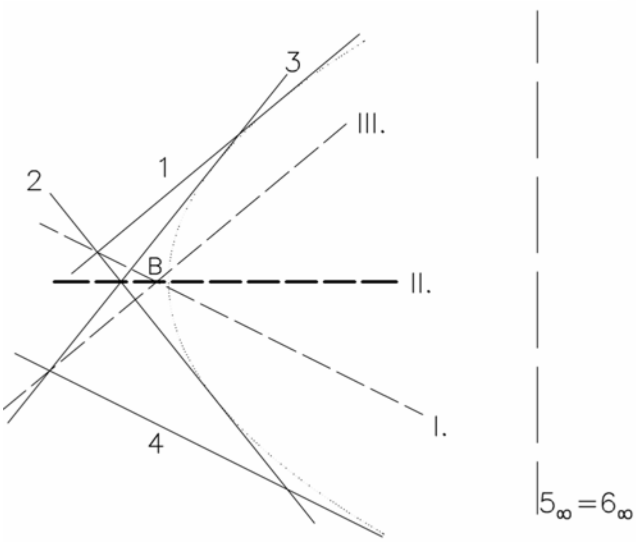


7. A sík végtelen távoli egyenese az 5-ös érintő és a keresett 6-os érintő párhuzamos *e*-vel.

12	23	34
45	56	61
I.	II.	III.

A (4,5) metszéspont végtelen távoli, ezért I. párhuzamos 4-gyel. A 6-os és az *e* párhuzamosak lesznek, ezért közös a végtelen távoli pontjuk, ami nem más, mint az (5,6) metszéspont. Ezért II. párhuzamos *e*-vel. A B meghatározása után II. olyan P pontot metsz ki a 1-esből, amelyiken a 6-os érintő áthalad.



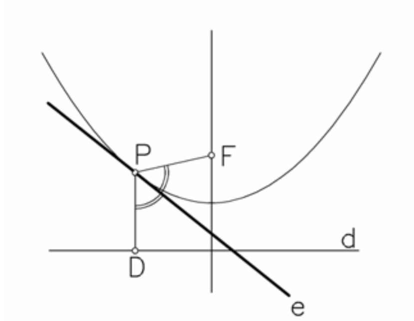


8. A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a végtelen távoli egyenes és a parabola érintési pontját keressük. Ezért a végtelen távoli egyenest kell duplán számozni (5=6). A I. párhuzamos a 4-gyel és III. párhuzamos 1-gyel. A II. éppen a tengelyirányt adja, ez mutat a végtelen távoli érintési pontba.

9. A tengely irányát a 8. feladat alapján határozzuk meg. Ezek után két érintőn meghatározzuk az érintési pontot az 1. feladat alapján. Ezekre azért lesz szükség, mert felhasználjuk a következő tételt:

   A parabola P pontjában az érintő felezi az FP és PD egyenesek szögét, ahol D a P merőleges vetülete a vezéregyenesen.

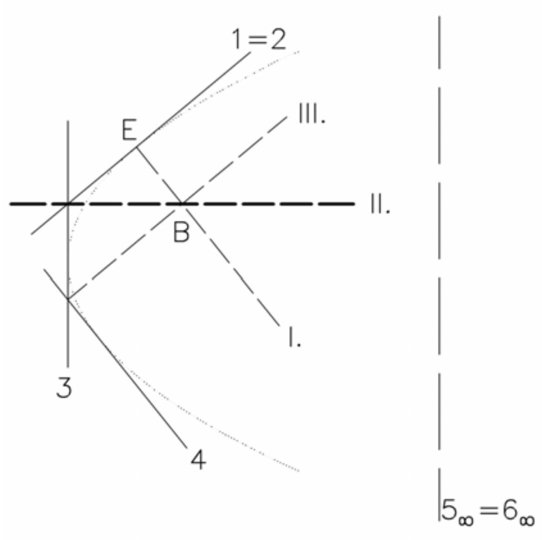
   A PD egyenes tengellyel párhuzamos egyenes, melynek *e*-re vonatkozó tükörképe átmegy a fókuszon. A két kiszerkesztett érintési pontba eltolva a tengely irányát, majd tükrözve azt a megfelelő érintőre a fókuszt megkapjuk. A tengely a fókuszon áthaladó, tengelyiránnyal párhuzamos egyenes.



   (Egy másik lehetséges megoldás, hogy a 10. feladat alapján a csúcsérintőt, majd azon a csúcspontot határozzuk meg. A csúcsponton keresztül a tengelyiránnyal párhuzamost húzunk.)

10. A tengely irányát a 8. feladat alapján meghatározzuk. Erre merőleges a csúcsérintő iránya. Az adott öt parabola érintő (egy a végtelen távoli egyenes) felhasználásával a 7. feladat alapján végezzük a megoldást.

11. A feladat megoldása hasonlít a 8. feladathoz, de most duplán számít a végtelen távoli egyenes (5=6) és az az érintő is, amelyiken ismerjük az E érintési pontot (1=2). A korábbi táblázatot követve az I. és III. metszéspontja lesz a B pont. A II. maga a tengelyirány, amely kijelöli a parabola végtelen távoli pontját is.

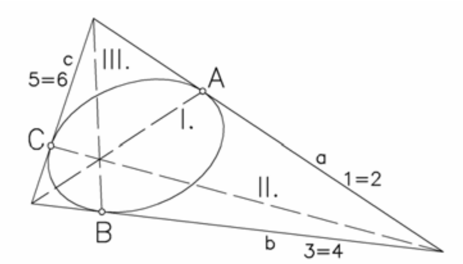


12. Ennek a feladatnak a megoldása az előző három feladat megoldásaiból összeállítható.

13. Legyenek az A, B, C érintési pontok az *a*, *b*, *c* egyeneseken. Ekkor a Brianchon tételt alkalmazva *a*~1,2; *b*~3,4; *c*~5,6 azonosításokkal

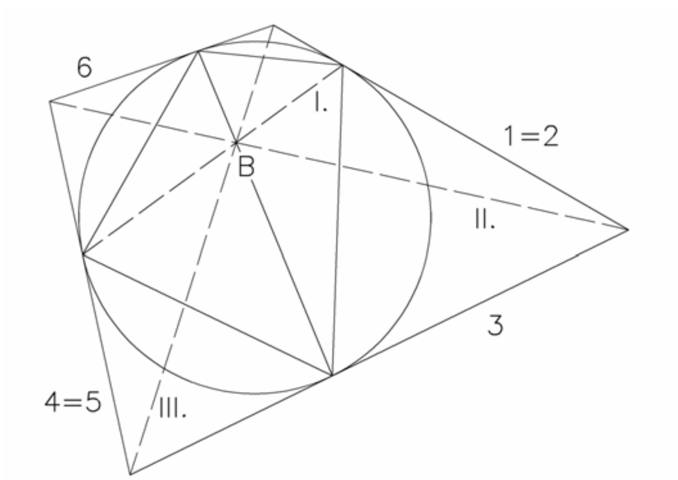
A-t a	*bc*	metszéspontjával az	I.
B-t az	*ac*	metszéspontjával a	II.
C-t az	*ab*	metszéspontjával a	III.

köti össze, az I. II. III. metszéspontja a Brianchon pont.

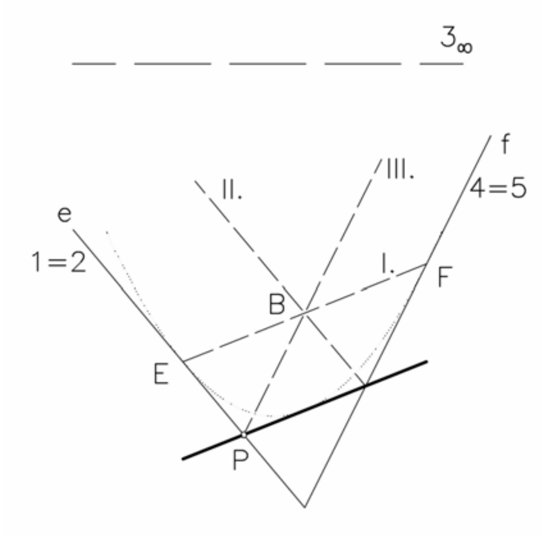


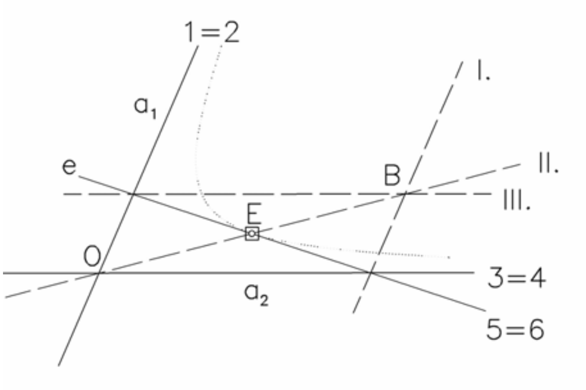
Nem használtuk ki azt, hogy az ábrán egy ellipszis érintőit és az azokon lévő érintési pontokat vettük. Ezért a feladat állítása tetszőleges kúpszelet esetén igaz.
Ha adott egy kúpszelet három érintője és ezek közül kettőn az érintési pont, akkor a harmadik érintési pont az ábra alapján határozható meg.

14. Az érintő négyszög oldalait megszámozzuk úgy, hogy két szemköztes oldal 1=2-es és 4=5-ös legyen. Ekkor a Brianchon tételt alkalmazva az érintőnégyszög átlói és a húrnégyszög egyik átlója egy pontban metszik egymást. Átszámozva az érintőnégyszög oldalait a húrnégyszög másik átlója is itt metszi egymást.



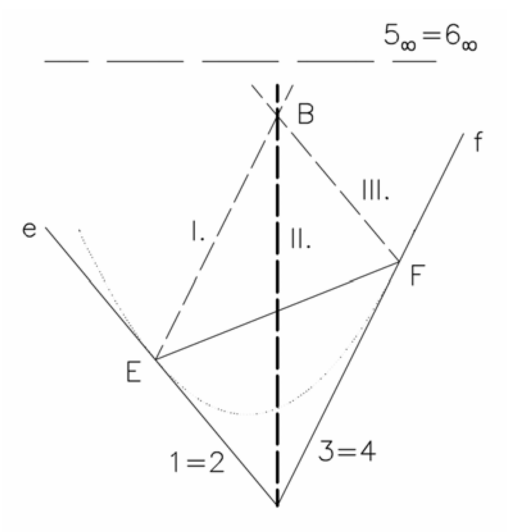
15. Az adott *e* és *f* érintőket duplán számítjuk és hozzá vesszük a végtelen távoli egyenest. A *e* érintő P pontjából szeretnénk még egy érintőt húzni a parabolához, ez lesz a 6-os. A B pontot az I. és a III. határozza meg. Mivel a (2,3) metszéspont végtelen távoli, a II. párhuzamos lesz az *e* egyenessel, és kimetszi az *f* egyenesből a 6 érintő egy újabb pontját.





16. Jelölje 1=2 és 3=4 a két asszimptotát, és 5=6 az adott érintőt. Az 5. feladat alapján meghatároztuk az érintési pontot. A hiperbola O középpontja, a B Brianchon pont, és az érintőnek az aszimptotákkal alkotott metszéspontjai egy paralelogrammát határoznak meg. A paralelogramma átlói felezik egymást, így E az érintőnek az aszimptoták közé eső szakaszát.

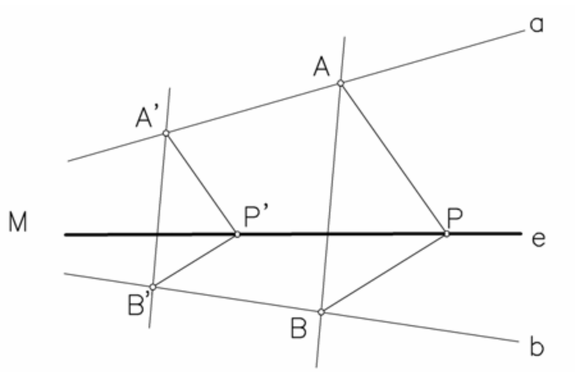
17. Maga a feladat megoldása ismerős lehet, hiszen az adott két érintő és a végtelen távoli egyenes a parabola egy érintőháromszögét alkotja. Ezzel találkoztunk a 13. feladatban. A parabolánál a tengely irányának meghatározása egyenértékű a végtelenben lévő érintési pont meghatározásával. Az érintőket és a végtelen távoli egyenest is duplán számozzuk, és alkalmazzuk a Brianchon tételt. A II. jelöli ki a végtelen távoli érintési pontot, és adja meg a tengely irányát.



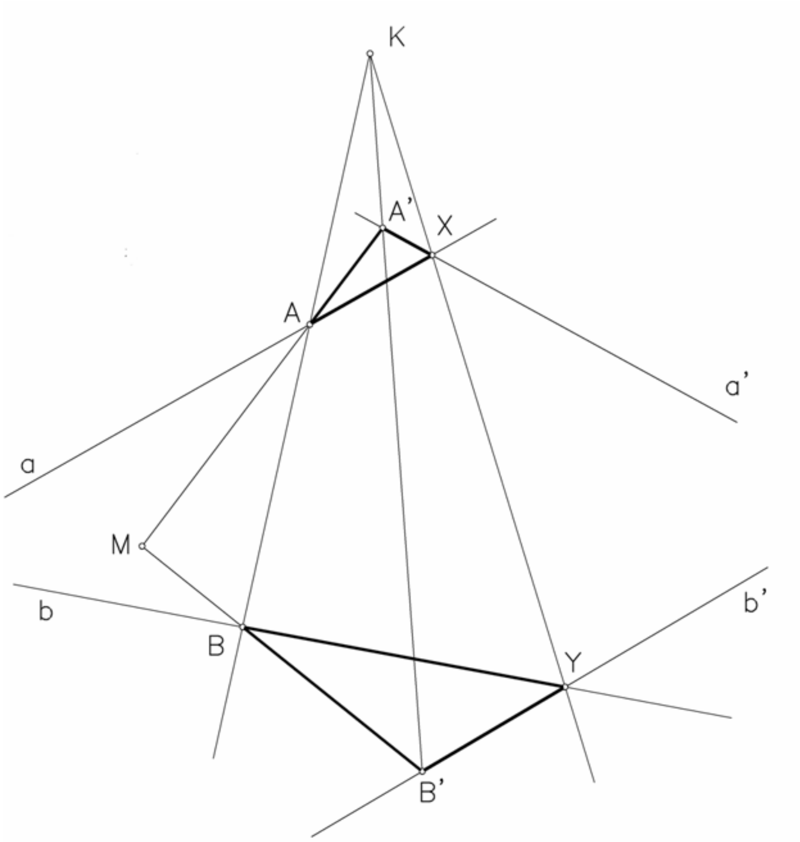
18. Az előző feladat ábráját figyelve az I. az *f* –fel, III. az *e*-vel párhuzamos, így az E, F, B és az *e*, *f* érintők metszéspontja egy paralelogrammát határoz meg. Ennek a paralelogrammának az egyik átlója a tengelyirányt adó egyenes, amely felezi a másik átlót, azaz az EF szakaszt.

A Desargues-tétel alkalmazása

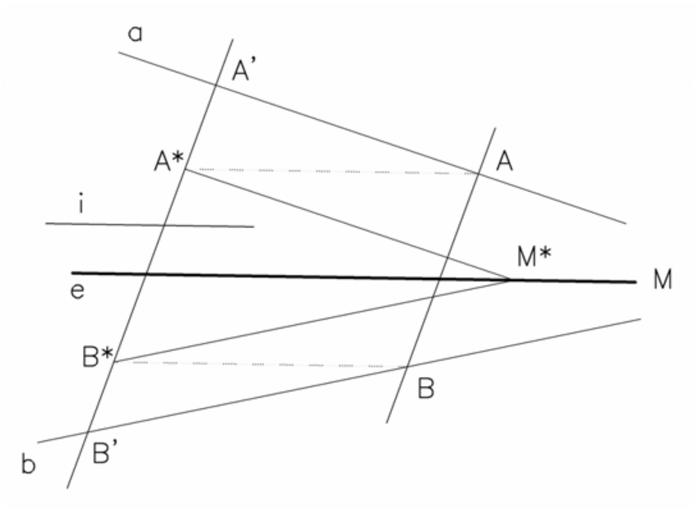
1. Messük az *a* és *b* egyeneseket két párhuzamos egyenessel, az egyik az A és B, a másik az A' és B' pontokban metszi a két egyenest. Húzzunk az A' és B' pontokból az AP és BP egyenesekkel párhuzamosokat, és ezek metszéspontja legyen P'. Az ABP és A'B'P' háromszögek oldalai párhuzamosak és így a sík végtelen távoli egyenesén metszik egymást. Így a két háromszög oldalaira nézve perspektív. A Desargues tétel következtében csúcsaikra nézve perspektívek, ezért az *e*=PP' egyenes áthalad az *a* és *b* egyenesek metszéspontján.



2. Az *a* és *a*' metszéspontját jelölje X, a *b* és *b*' metszéspontját pedig Y. Az XY egyenes egy tetszőleges K pontjából két egyenest indítunk, melyek közül az egyik A és B pontokban metszi az *a* és *b* egyeneseket, a másik A' és B' pontokban az *a*' és *b*' egyeneseket. Az AA'X és BB'Y háromszögek csúcsaikra nézve perspektívek (a perspektivitás középpontja K), akkor a tétel miatt oldalaikra nézve is perspektívek. A perspektivitás tengelyének két pontja éppen a két összekötendő pont, de az AA' és BB' egyenesek M metszéspontja ennek az egyenesnek egy újabb pontja és már a papíron van. Innen a feladat az előző feladat alapján megoldható.

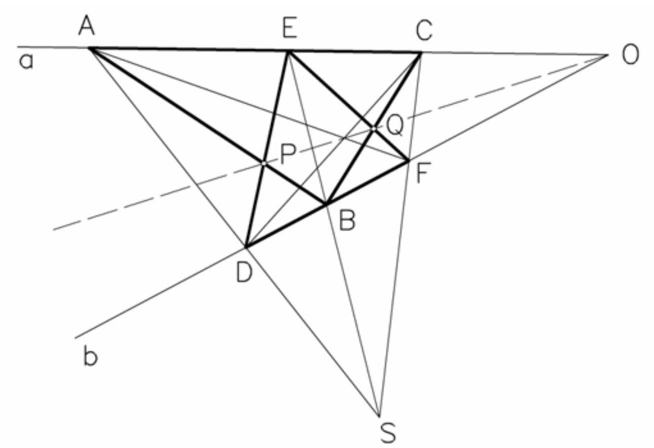


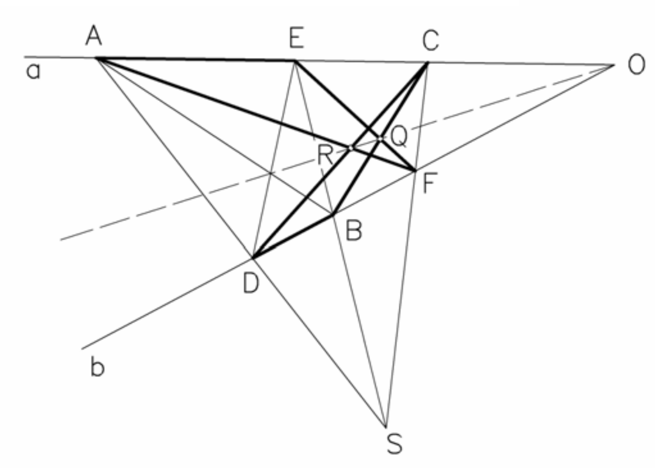
3. Messük az *a* és *b* egyeneseket két párhuzamos egyenessel, az egyik az A és B, a másik az A' és B' pontokban metszi a két egyenest. Az AB szakaszt vetítsük *i*-vel párhuzamosan A'B'-re, ekkor az A^*B^* szakaszt kapjuk. Az A^* és B^* pontokon *a*-val és *b*-vel húzott párhuzamosok metszéspontja M^*. Ekkor az ABM és $A^*B^*M^*$ háromszögek oldalaikra nézve perspektív, egybevágó háromszögek. Csúcsaikra nézve is perspektívek, ahol a középpont éppen az *i* egyenes végtelen távoli pontja. A keresett egyenes az M^* ponton át, *i*-vel párhuzamos egyenes.



4. Jelöljük S-sel az AD, BE és CF egyenesek metszéspontját és O-val az *a* és *b* egyenesek metszéspontját.

   Az ABC és DEF háromszögek az S pontra nézve csúcsaikra perspektív helyzetűek, de ekkor oldalaikra nézve is perspektívek. A perspektivitás tengelye a P, Q, O pontokat tartalmazó egyenes.



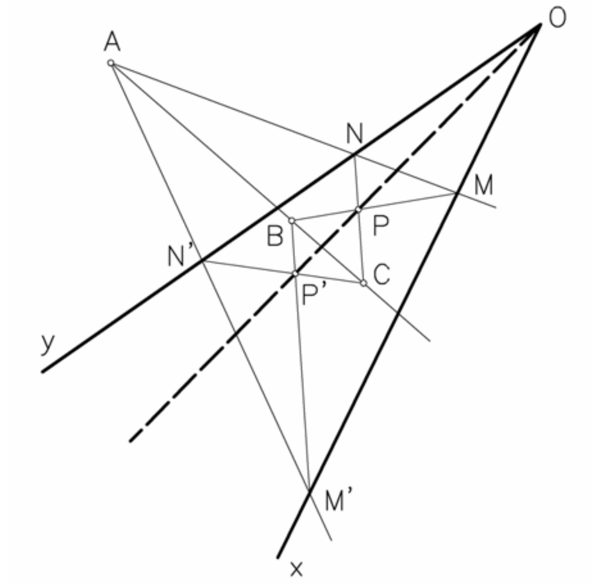


   Az AFE és DCB háromszögek is azS pontra nézve csúcsaikra perspektívek. Az oldalakra vonatkozó perspektivitás tengelye a R, Q, O pontokat tartalmazó egyenes.

   A P, Q, O és R, Q, O ponthármasok mindegyikében a Q és O szerepel, ezért az összesen négy pont egy egyenesre illeszkedik.

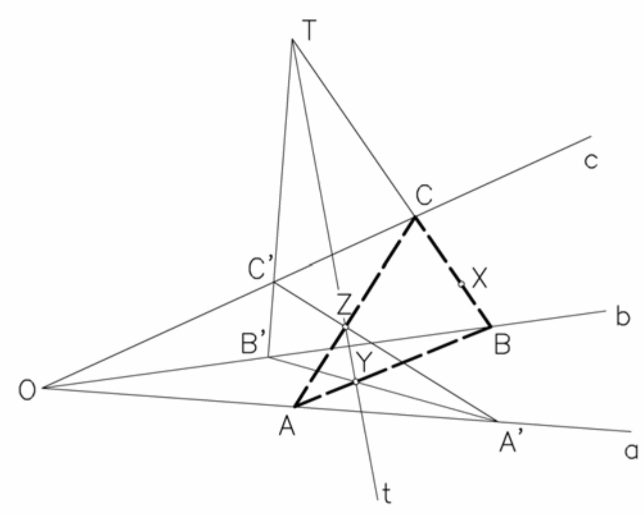
5. Az *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* egyenesek közül az *a*, *c*, *e* az A pontra, a *b*, *d*, *f* egyenesek a B pontra illeszkednek. Ezen kívül az *a* és *d*, *b* és *e*, valamint a *c* és *f* egyenesek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

Bizonyítsuk be, hogy az AB egyenes, és az (*a*,*b*) és (*d*,*e*), (*b*,*c*) és (*e*,*f*), és a (*c*,*d*) és (*f*,*a*) metszéspontok összekötő egyenesei egy ponton haladnak át!
(Az (*a*,*b*) az *a* és *b* egyenesek metszéspontját jelöli.)



6. Az A pontból indítsunk két olyan egyenest, amely elmetszi a szög két szárát, és nem azonos az A, B, C pontok egyenesével. Az egyik az M és N, a másik M' és N' pontban metszi a szárakat. Az MB és NC egyenesek a P-ben, az M'B és N'C egyenesek a P'-ben metszik egymást. Az NN'C és MM'B háromszögek csúcsaikra és így oldalaikra nézve perspektív helyzetűek. A perspektivitás tengelye az OPP' pontok egyenese.
Ha egy újabb egyenest indítanánk az a pontból, akkor az előbbi eljárást alkalmazva a perspektivitás tengelyére mindig illeszkedne az O és P pont. Csak arra kell figyelni, hogy a szelőegyenes A körüli forgatásakor a szelő ne essen egybe az ABC pontok egyenesével, mert ekkor nem keletkeznek a perspektív helyzetű háromszögek.
Tehát a keresett mértani hely: az OP félegyenes pontjai, kivéve az OP és ABC egyenes metszéspontját.

7. Az YZ pontok egyenese legyen *t*. Válasszunk egy tetszőleges A' pontot az *a* egyenesen, amely segítségével két, egymáshoz O-ra és *t*-re nézveperspektív háromszöget adunk meg. Az A'Y egyenes a *b*-t B'-ben, az A'Z egyenes a *c*-t C'-ben metszi. Ekkor a B'C' a *t*-t a T pontban metszi. A TX az egyik oldalegyenese a keresett háromszögnek, ezzel a B és C csúcsokat megtaláltuk. A CZ és BY egyenesek metszéspontjának a Desargues-tétel értelmében az *a* egyenesre kell illeszkednie.



Irodalomjegyzék

1. Bélteky Károly: *Analitikus geometria és lineáris algebra*
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1989
2. Fazekas Sarolta: TDK dolgozat
3. Gyarmathi Attila – Szabó József: *Ábrázoló geometriai példatár*
   Egységes jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987
4. H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*
   Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
5. H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*
   Gondolat. Budapest. 1986
6. Hajós György: *Bevezetés a geometriába*
   Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1959
7. Horvay Katalin - Reimann István: *Projektív geometria*
   Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1980
8. Obádovics J. Gyula: *Lineáris algebra példákkal*
   SCOLAR Kiadó, Budapest 2001
9. R. Courrant-H. Robbins: *Mi a matematika?*
   Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1966
10. Scop János: *Kúpszeletek*
    Középiskolai szakköri füzetek
11. Stommer Gyula: *Ábrázoló geometria*
12. Stommer Gyula: *Geometria*
13. Strohmajer János: *Geometriai példatárI.-IV.*
    Tankönyvkiadó, Budapest, 1989
14. Vigassy Lajos: *Geometriai transzformációk*
    Középiskolai szakköri füzetek
15. Vigassy Lajos: *Projektív geometria*
    Középiskolai szakköri füzetek