Valószínűségszámítás gyakorlat
2020. november 11.

Binomiális eloszlás

1. *Egy nyereményjátékban minden negyedik Túró Rudi nyer. Vásároltunk négy darab Túró Rudit. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van köztük nyertes?*

   Legyen ξ a vásárolt Túró Rudik között szereplő nyerő darabok száma. Ekkor ξ $n = 4$, $p = \frac{1}{4}$ paraméterű binomiális eloszlású változó. A keresett valószínűség

$$1 - P(\xi = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,6836.$$

Poisson eloszlás

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlást követ, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \lambda \qquad D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

2. *Legyen ξ egy $\lambda = 4$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg várható értékét és szórását! Milyen valószínűséggel esik ξ a $]\,2, 5\,[$ intervallumba? Milyen valószínűséggel vesz fel ξ a várható értéknél kisebb értéket?*

   A feladat szövege szerint ξ *Poisson-eloszlású* valószínűségi változó, ahol $\lambda = 4$. Ekkor az eloszlása, várható értéke és szórása:

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(\xi) = 4 \qquad D(\xi) = \sqrt{4} = 2$$

   Annak valószínűsége, hogy a ξ a 2 és 5 értékek közé esik:

$$P(2 < \xi < 5) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{1}{e^4} + \frac{4^4}{4!} \cdot \frac{1}{e^4} =$$

$$= \left(\frac{64}{6} + \frac{256}{24}\right) \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{512}{24 \cdot e^4} = \frac{64}{3 \cdot e^4} \approx 0,39$$

Annak valószínűsége, hogy a ξ a várható értéknél kisebb értéket vesz fel:

$$P(\xi < 4) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$
$$= \left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{71}{3 \cdot e^4} \approx 0,433$$

3. *Egy telefonközpontba percenként átlagosan 4 hívás fut be. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1 perc alatt 6 hívás fut be?*

   $\lambda = 4;\;\; P(\xi = 6) = \frac{4^6}{6!} \cdot e^{-4} \approx 0,104$

4. *Egy 400 oldalas nyomdai korrektúrában átlagosan 400 sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra választott oldalon legalább 3 sajtóhiba van, ha feltételezzük, hogy a sajtóhibák száma Poisson-eloszlású?*

   $\lambda = \frac{400}{400} = 1;$
   $P(\xi \geq 3) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)) = 1 - \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{e} = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0,08$

Geometriai eloszlás

Egy A esemény valószínűsége legyen p. A ξ diszkrét valószínűségi változó a k értéket veszi fel, ha az A esemény először éppen a k-adik alkalommal következik be. Ekkor ξ geometriai eloszlású:

$$P(\xi = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1} \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{1}{p} \qquad\qquad D(\xi) = \frac{\sqrt{1 - p}}{p}$$

5. *Egy kockával addig dobunk, míg 6-os dobás nem lesz az eredmény. Mennyi az addigi dobásszám várható értéke és szórása, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?*

   A dobásszám $p = \frac{1}{6}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. Így várható értéke $E(\xi) = 6$, szórása $D(\xi) = \sqrt{30}$.

6. *Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?*

   Vegyük észre, hogy a valószínűségi változónk annak az $\frac{1}{2}$ valószínűségű eseménynek az első előfordulása, hogy dobásunk megegyezik a megelőzővel. Tehát ha η egy $p = \frac{1}{2}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó, akkor $\xi = \eta + 1$. Így

$$E(\xi) = E(\eta + 1) = E(\eta) + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$D(\xi) = D(\eta + 1) = D(\eta) = \sqrt{2}.$$

Egyenletes eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $]\,a, b\,[$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b; \\ 1, & \text{ha } b < x. \end{cases}$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

7. *Telefonhívás alkalmával a tárcsázás befejezésétől a kapcsolásig eltelt időt tekintsük valószínűségi változónak. Tegyük fel, hogy ez a valószínűségi változó egyenletes eloszlású, és a kapcsolás időtartama 5 mp-től 105 mp-ig terjedhet. Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a várható értéket és a szórást! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy legalább egy percig kell várnunk a kapcsolásra!*

   A ξ valószínűségi változó *egyenletes eloszlású* az $]\,5, 105\,[$ intervallumon, így az eloszlás-, illetve sűrűségfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 5; \\ \frac{x-5}{100}, & \text{ha } 5 < x \leq 105; \\ 1, & \text{ha } 5 < x. \end{cases} \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & \text{ha } 5 < x \leq 105; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   A várható érték és a szórás (másodpercben):

$$E(\xi) = \frac{5+105}{2} = 55 \qquad\qquad D(\xi) = \frac{105-5}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{3}} \approx 28,8$$

   Annak valószínűsége, hogy legalább 1 percet várnunk kell:

$$P(60 \leq \xi) = 1 - P(\xi < 60) = 1 - \frac{60-5}{100} = \frac{45}{100}$$

8. *Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 4, szórásnégyzete $\frac{4}{3}$. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt!*

   Az

$$\frac{a+b}{2} = 4,$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenlet alapján $b + a = 8$, a második szerint $b - a = 4$, így $b = 6$, $a = 2$. Az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 2; \\ \frac{x-2}{4}, & \text{ha } 2 < x \le 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ekkor az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

9. *Egy benzinkútnál a tapasztalatok szerint a várakozási idő átlagosan 4 perc. Ha a várakozási idő exponenciális eloszlású, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alkalommal 3 percnél többet, de 4 percnél kevesebbet kell várakozni?*

   A megadott várható érték ($E(\xi) = 4$) alapján az eloszlás paramétere $\lambda = \frac{1}{4}$. Így a keresett valószínűség

   $$P(3 < \xi < 4) = F(4) - F(3) = 1 - e^{-4\lambda} - \left(1 - e^{-3\lambda}\right) = e^{-3\lambda} - e^{-4\lambda} = e^{-\frac{3}{4}} - e^{-1} \approx 0,104.$$

10. *Bizonyos típusú izzólámpák tönkremeneteléig eltelt égési időtartam hosszát tekintsük ξ valószínűségi változónak. Megállapították, hogy ξ exponenciális eloszlású és szórása 1000 óra. Határozzuk meg ξ várható értékét! Írjuk fel a ξ valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy kiszemelt izzólámpa 3000 órán belül még nem megy tönkre!*

    $D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, így $\lambda = \frac{1}{1000}$. Az eloszlás- és sűrűségfüggvény:

    $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{1000}}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ \frac{e^{-\frac{x}{1000}}}{1000} & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

    Annak valószínűsége, hogy egy adott izzó 3000 órán belül nem megy tönkre (más szavakkal, a tönkremenetelének ideje több, mint 3000):

    $$P(3000 \le \xi) = 1 - P(\xi < 3000) = 1 - F(3000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3000}{1000}}\right) = \frac{1}{e^3} \approx 0,05$$