Valószínűségszámítás gyakorlat
Normális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó normális eloszlású m és $\sigma > 0$ paraméterekkel ($\mathcal{N}(m, \sigma)$), ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ezen sűrűségfüggvény grafikonja ún. haranggörbe, és ekkor ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t$$

Várható értéke és szórása:

$$E(\xi) = m \qquad\qquad D(\xi) = \sigma$$

Ha $m = 0$ és $\sigma = 1$, akkor *standard normális eloszlás*ról van szó, amelynél a sűrűségfüggvényt φ-vel, az eloszlásfüggvényt Φ-vel jelöljük:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad\qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Fennáll továbbá a következő egyenlőség is:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Egy $\mathcal{N}(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye kifejezhető a φ és Φ függvényekkel is:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad\qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

1. *Egy munkapadról kikerülő alkatrész hossza normális eloszlású, $m = 30$ cm várható értékkel és $\sigma = 0,2$ cm szórással.*

   (a) *Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét!*

   (b) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alkatrész hossza 29,7 cm és 30,3 cm közé esik?*

   (c) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várható értéktől való eltérés abszolút értéke 1 cm-nél kevesebb?*

   (d) *Milyen pontosságot biztosíthatunk 0,9 valószínűséggel a munkadarabok hosszára?*

   A feladatban szereplő valószínűségi változó *normális eloszlású*, ahol $m = 30$ és $\sigma = 0,2$.

   (a) Az eloszlás- és sűrűségfüggvény:

   $$F(x) = \frac{1}{0,2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-30)^2}{0,08}} \mathrm{d}t \qquad f(x) = \frac{1}{0,2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{0,08}}$$

   (b) Annak valószínűsége, hogy egy alkatrész hossza 29,7 cm és 30,3 cm közötti:

   $$\begin{aligned} P(29,7 < \xi < 30,3) &= F(30,3) - F(29,7) = \\ &= \Phi\left(\frac{30,3-30}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{29,7-30}{0.2}\right) = \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1 - \Phi(1,5)) = \\ &= 2 \cdot \Phi(1,5) - 1 \approx 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 \end{aligned}$$

   (A Φ függvény értékeit táblázat segítségével adtuk meg.)

   (c) A várható értéktől való eltérés ± 1 cm-nél kevesebb:

   $$\begin{aligned} P(29 < \xi < 31) = F(31) - F(29) = \Phi\left(\frac{31-30}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{29-30}{0,2}\right) = \\ = \Phi(5) - \Phi(-5) = \Phi(5) - (1 - \Phi(5))\, 2 \cdot \Phi(5) - 1 \approx 1 \end{aligned}$$

(d) 0,9 valószínűséggel a kövekező hosszúságot biztosíthatjuk:

$$\begin{aligned}
P(30-x<\xi<30+x) =& 0,9\\
F(30+x)-F(30-x) =& 0,9\\
\Phi\left(\frac{30+x-30}{0,2}\right)-\Phi\left(\frac{30-x+30}{0,2}\right) =& 0,9\\
\Phi\left(\frac{x}{0,2}\right)-\Phi\left(-\frac{x}{0,2}\right) =& 0,9\\
\Phi\left(\frac{x}{0,2}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{x}{0,2}\right)\right) =& 0,9\\
2\cdot\Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) =& 1,9\\
\Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) =& 0,95\\
\frac{x}{0,2} \approx& 1,645\\
x \approx& 0,329
\end{aligned}$$

A kívánt valószínűséggel $30 \pm 0,329$ cm-es pontosságot biztosíthatunk.

2. *Távolságmérést végeznek terepen. A valódi és a mért hosszúság különbségét, vagyis a mérési hibát valószínűségi változónak tekintjük. Ez a ξ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke -20 m, szórása 40 m. (Mivel a várható érték nem nulla, a mérési eredmény nem csak véletlen hibát tartalmaz, hanem szisztematikus torzítást is.) Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a hiba abszolút értéke 60 m-nél kevesebb!*

$$f(x)=\frac{1}{40\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x+20)^2}{3200}} \qquad F(x)=\frac{1}{40\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t+20)^2}{3200}}\mathrm{d}t$$

$$P(-60<\xi<60)=F(60)-F(-60)=\Phi\left(\frac{60+20}{40}\right)-\Phi\left(\frac{-60+20}{40}\right)=$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)-1+\Phi(1)\approx 0,9772-1+0,8413=0,8185$$

3. *A liszt csomagolásánál a csomagológép 1 kg várható súlyú csomagokat készít 2,5 dkg szórással. Feltehető, hogy a csomagolt mennyiség súlya normális eloszlású. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy csomagban 95 dkg-nál kevesebb liszt lesz?*

   $P(\xi<95)\approx 0,0228$

4. *Legyen* ξ $\mathcal{N}(3,2)$ *eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a* $P(-2 < \xi < 3)$ *és a* $P(0,1 < |\xi|)$ *valószínűségeket!*

   $P(-2 < \xi < 3) \approx 0,4938$,
   $P(0,1 < |\xi|) = P(0,1 < \xi) + P(\xi < -0,1) \approx 0,9871$

5. *Egy automata gép 2 kg lisztet rak egy-egy zacskóba, de véletlen ingadozás következtében a zacskókban lévő liszt mennyisége* $\mathcal{N}(m,\sigma)$ *eloszlású. Előzetes megfigyelésekből tudni lehet, hogy* $\sigma = 0,002$, *valamint, hogy annak a valószínűsége, hogy egy zacskóban kevesebb van 2 kg-nál* $0,01$. *Határozzuk meg* m *értékét! Milyen* σ *mellett biztosíthatjuk, hogy a fenti valószínűség* $0,001$ *legyen?*

   A feladatban ξ jelentse a zacskóba töltött liszt mennyiségét, amely *normális eloszlású.* Kiindulva abból, hogy a szórás $0,002$ és $P(\xi < 2) = 0,01$ (azaz annak valószínűsége, hogy egy zacskóban 2 kg-nál kevesebb liszt van 0,01):

$$\begin{aligned}
P(\xi < 2) = F(2) &= 0,01 \\
\Phi\left(\frac{2-m}{0,002}\right) &= 0,01 \\
\Phi\left(-\frac{m-2}{0,002}\right) &= 0,01 \\
\Phi\left(\frac{m-2}{0,002}\right) &= 0,99 \\
\frac{m-2}{0,02} &\approx 2,33 \\
m-2 &\approx 0,0466 \\
m &\approx 2,0466
\end{aligned}$$

   Tehát a várható érték $m = 2,0466$.
   Ha a fenti várható értékből indulunk ki, a $P(\xi < 2) = 0,001$ valószínűséget a következő σ szórás mellett biztosíthatjuk (kiindulva az előző számolás 3. sorából):

$$\begin{aligned}
\Phi\left(-\frac{2,0466-2}{\sigma}\right) &= 0,001 \\
\Phi\left(\frac{2,0466-2}{\sigma}\right) &= 0,999 \\
\Phi\left(\frac{0,0466}{\sigma}\right) &= 0,999 \\
\frac{0,0466}{\sigma} &\approx 3,1 \\
\sigma &\approx 0,015
\end{aligned}$$

6. *Egy alkatrész működési ideje (órában mérve)* $\mathcal{N}(20000, 1500)$ *eloszlású. Ha az alkatrész 15000 óránál rövidebb ideig működik, akkor gyárilag selejtesnek minősül. Az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes?*

   $P(\xi < 15000) \approx 0,0004$ (Kb. $0,04\%$ selejtes.)