

# Valószínűesszámítás

## 5. feladatsor

1. Egy ejtőernyős egy 100 méter sugarú körbe szeretne ugrani. A kör minden pontjába azonos valószínűséggel érkezhethet az ejtőernyős. A  $\xi$  valószínűségi változó jelentse az ejtőernyős beérkezési helyének és a kör középpontjának távolságát (méterben). Határozzuk meg a  $\xi$  eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Ábrázoljuk az eloszlás- és a sűrűségfüggvényt!

2. Az alábbi függvények közül melyek eloszlásfüggvények?

(a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x}{x+1} & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 2 & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x > 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

4. Egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg a változó várható értékét és szórását!

5. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3} & \text{ha } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a változó várható értékét és szórását!

6. Egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ cx^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

Határozzuk meg a  $c$  értékét és írjuk fel  $\xi$  eloszlásfüggvényét! Mekkora valószínűséggel esik  $\xi$  az  $]1, 3[$  intervallumba? Határozzuk meg  $\xi$  várható értékét és szórását!

7. Egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{a}{x^3} & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg  $a$  értékét és írjuk fel  $\xi$  eloszlásfüggvényét! Milyen  $x$  értékekre adódik a  $P(\xi > x)$  valószínűsége  $\frac{1}{2}$ ? Határozzuk meg  $\xi$  várható értékét és szórását!

8. Egy  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

Határozzuk meg  $\xi$  eloszlásfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a  $\xi$ -nek a 0-tól való eltérése kisebb, mint 0,1? Határozzuk meg  $\xi$  várható értékét és szórását!

9. Egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk egymástól függetlenül két pontot. Legyen a valószínűségi változó a két pont távolsága. Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a két pont távolsága legalább  $\frac{3}{4}$ . Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét!
10. Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Jelölje  $\xi$  a pontnak a négyzet legközelebbi oldalától vett távolságát. Határozzuk meg  $\xi$  eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!
11. Egy 2 oldalhosszúságú  $ABCD$  négyzetben válasszunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Legyen  $\xi$  a pont távolsága az  $AC$  átlótól. Számítsuk ki  $\xi$  várható értékét!
12. Egy egység oldalú szabályos háromszög belsejéből választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Legyen  $\xi$  a kiválasztott pont és a hozzá legközelebb eső oldal távolsága. Adjuk meg  $\xi$  sűrűségfüggvényét!
13. Egy  $\sqrt{2}$  átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög belsejében választunk egy pontot egyenletes eloszlás szerint. Legyen  $\xi$  a választott pont és az átfogó távolsága. Adjuk meg  $\xi$  eloszlás- és sűrűségfüggvényét!